

# 45<sup>a</sup> Olimpíada Internacional de Matemática

Primeiro dia

Segunda-feira, 12 de Julho de 2004

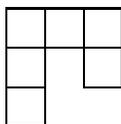
**Problema 1.** Seja  $ABC$  um triângulo acutângulo com  $AB \neq AC$ . A circunferência de diâmetro  $BC$  intersecta os lados  $AB$  e  $AC$  nos pontos  $M$  e  $N$ , respectivamente. Seja  $O$  o ponto médio do lado  $BC$ . As bissetrizes dos ângulos  $\widehat{BAC}$  e  $\widehat{MON}$  intersectam-se em  $R$ . Prove que as circunferências circunscritas aos triângulos  $BMR$  e  $CNR$  têm um ponto em comum que pertence ao lado  $BC$ .

**Problema 2.** Determine todos os polinômios  $P(x)$  de coeficientes reais que satisfazem a igualdade

$$P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c)$$

para quaisquer números reais  $a, b, c$  tais que  $ab + bc + ca = 0$ .

**Problema 3.** Um *gancho* é uma figura formada por seis quadrados unitários como no seguinte diagrama



ou qualquer uma das figuras obtidas desta aplicando rotações ou reflexões.

Determine todos os rectângulos  $m \times n$  que podem ser cobertos com ganchos de modo que:

- o rectângulo é coberto sem buracos e sem sobreposições;
- nenhuma parte de nenhum gancho pode cobrir regiões fora do rectângulo.

Duração: 4 horas e 30 minutos.

Cada problema vale 7 pontos.