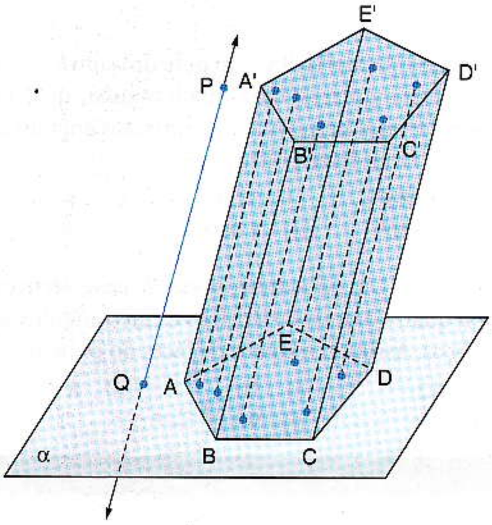
28 PRISMA

Conceito

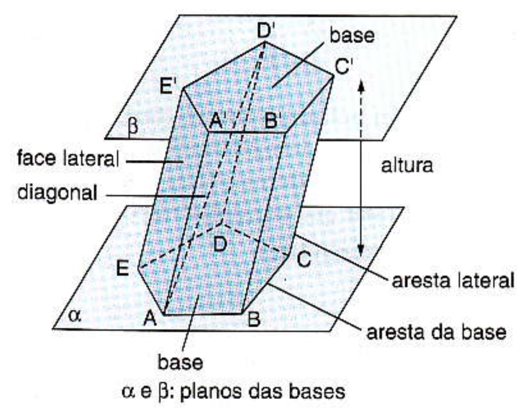
Consideremos um polígono (ou região poligonal) ABCDE, por exemplo, de cinco lados num plano α e um segmento de reta $\overline{PQ}$, cuja reta suporte intercepta α. Tomemos segmentos de reta paralelos e congruentes a $\overline{PQ}$, cada um deles com uma das extremidades num dos pontos de ABCDE e todos com a outra extremidade num mesmo semi-espaço dos determinados por α. A reunião de todos esses segmentos é um sólido chamado prisma pentagonal.



Tanto para conceituar como para dar nome aos seus elementos, tomamos um prisma pentagonal. Se, em vez de um pentágono como base tivéssemos escolhido um triângulo, um quadrilátero, etc., teríamos respectivamente um prisma triangular, um quadrangular, e assim por diante.

Elementos

Considerando o prisma representado abaixo, temos:



- os polígonos ABCDE e A'B'C'D'E', chamados bases do prisma, são polígonos congruentes e estão situados em planos paralelos. Esses planos (α e β) são os planos das bases;
- os lados, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$, $\overline{E'A'}$ são as arestas das bases;
- os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$ são as arestas laterais;
- os vértices das faces (que também são vértices das bases) são os vértices do prisma;
- os paralelogramos AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D, DD'E'E, EE'A'A são as faces laterais;
- a distância entre os planos α e β que contêm as bases é a altura do prisma;
- diagonal do prisma é qualquer segmento cujas extremidades são vértices não pertencentes a uma única face do prisma;
- seção transversal é qualquer interseção não vazia do prisma com um plano paralelo às bases.

Classificação

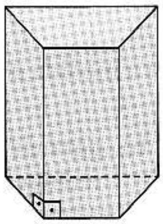
Em relação ao número de lados dos polígonos das bases, os prismas podem ser:

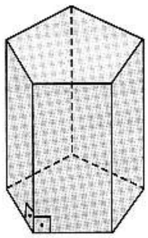
- triangulares — as bases são triângulos;
- quadrangulares — as bases são quadriláteros;
- pentagonais — as bases são pentágonos;
- hexagonais — as bases são hexágonos,
  e assim por diante.

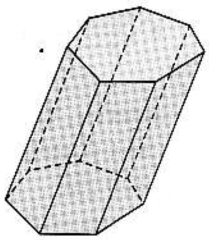
Quanto à inclinação das arestas laterais, os prismas classificam-se em:

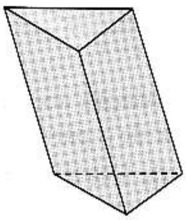
- retos: as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases; assim, as faces laterais são retângulos;
- oblíquos: as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases; desse modo, as faces laterais são simplesmente paralelogramos.

Eis alguns exemplos de prismas para ilustrar a classificação:

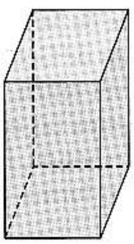

prisma reto (quadrangular)

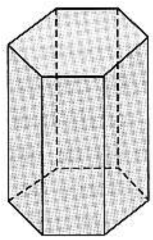

prisma reto (pentagonal)


prisma oblíquo (heptagonal)


prisma oblíquo (triangular)

Um caso particular de prisma reto é o prisma regular, que tem como bases polígonos regulares (triângulos eqüiláteros, quadrados, hexágonos regulares, etc.) e, como faces laterais, retângulos congruentes.


prisma regular (quadrangular)


prisma regular (hexagonal)

Paralelepípedo

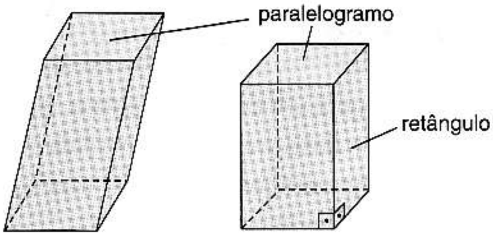
Um prisma quadrangular particular de grande importância é o paralelepípedo, que tem paralelogramos como bases. Assim, as seis faces de um paralelepípedo são paralelogramos.

Quando as bases de um prisma reto são retângulos, ele é chamado paralelepípedo retângulo (ou ortoedro ou paralelepípedo reto retângulo ou, ainda, bloco retangular).

As seis faces de um paralelepípedo retângulo são retângulos.

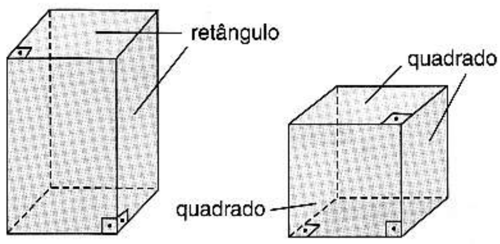
Um tipo especial de paralelepípedo retângulo é o cubo, cujas seis faces são quadrados.

Alguns exemplos de paralelepípedos:



paralelepípedo oblíquo

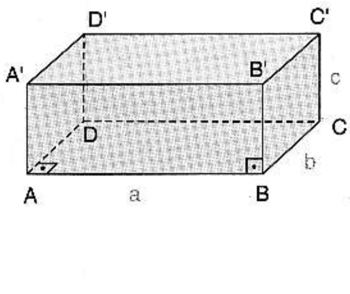
paralelepípedo reto



paralelepípedo reto retângulo

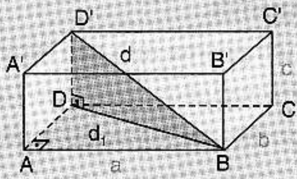
cubo

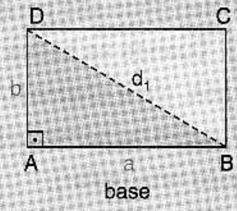
Seja um paralelepípedo reto retângulo, cujo retângulo da base tem lados medindo a e b e cuja altura mede c. Dizemos que esse paralelepípedo tem dimensões a, b e c; possui quatro arestas de medida a, quatro de medida b e quatro de medida c. A qualquer vértice concorrem três arestas, uma de medida a, uma de medida b e uma de medida c.



exemplo 1

Vamos determinar o comprimento da diagonal de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c.





Indicando por d_1 a medida da diagonal da base ABCD, temos:

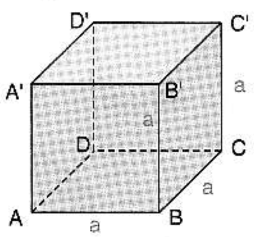
no $\triangle$BAD: $d_1^2 = a^2 + b^2$

no $\triangle$BDD': $d^2 = d_1^2 + c^2$

Assim:

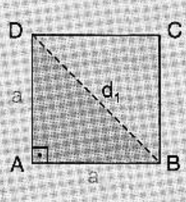
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

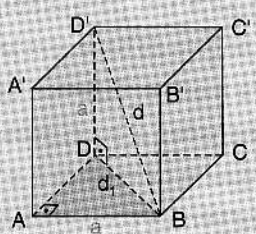
Tomemos agora um cubo de aresta a. Isso significa que todas as doze arestas têm medida a e que a cada um dos oito vértices concorrem três segmentos de mesmo comprimento a.



exemplo 2

Vamos obter o comprimento da diagonal d de um cubo de aresta a.





Inicialmente calculemos a medida d_1 de uma diagonal de face.

No $\triangle$BAD: $d_1^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow d_1 = a\sqrt{2}$

No $\triangle$BDD': $d^2 = a^2 + d_1^2$, e como $d_1^2 = 2a^2$, temos:

$$d^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2 \Rightarrow d = a\sqrt{3}$$

exercícios

1. Classifique os prismas, sabendo que eles possuem:

a) 8 faces
b) 9 arestas
c) 12 vértices
d) soma dos ângulos das faces igual a 18 retos

2. Caracterize, mediante as quantidades de vértices, de arestas e de faces, um prisma oblíquo de base octogonal. A seguir, enquadre-o como poliedro convexo, verificando a relação de Euler.

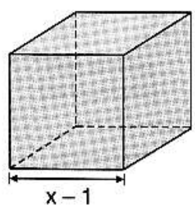
3. Determine a medida da diagonal de um paralelepípedo cujas dimensões são 5 cm, 7 cm e 4 cm.

4. Um cubo possui aresta de 6 cm. Determine a medida de uma diagonal de face e a medida da diagonal do cubo.

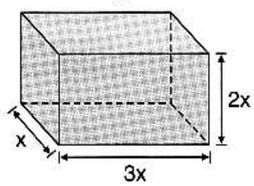
5. A diferença entre as diagonais de dois cubos vale $\sqrt{3}$ cm. Determine a diferença entre as arestas dos dois cubos.

6. Em cada caso, determine a medida da diagonal do sólido:

a) cubo



b) paralelepípedo retângulo



7. Em relação ao exercício anterior, determine o valor de x para cada item, se a diagonal:

a) da face do cubo mede $4\sqrt{2}$ cm;
b) de uma das faces de maior área mede $\sqrt{65}$ cm;
c) de uma das faces de menor área mede 2 cm.

8. O produto entre a medida da diagonal de um cubo, a da diagonal da face e a da própria aresta do cubo vale $6\sqrt{6}$. Quanto mede a aresta do cubo?

9. Com um pedaço de arame de 54 cm, um aluno deve preparar, para as aulas de Geometria, uma armação cúbica cuja aresta tenha número inteiro máximo de centímetros (as emendas poderão ser de plástico). Responda, justificando: qual reforço de arame, em forma de diagonal, poderá ser utilizado?

Áreas

Área da base: A_b

A área da base de um prisma é a área da região poligonal que constitui a base do prisma.

Área lateral: A_ℓ

A superfície lateral de um prisma é a reunião de suas faces laterais. A área dessa superfície é chamada área lateral do prisma.

$$\boxed{A_\ell = \text{soma das áreas das faces laterais}}$$

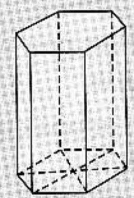
Área total: A_t

A superfície total de um prisma é a reunião da superfície lateral com as bases. A área dessa superfície é chamada área total do prisma e é indicada por A_t.

$$\boxed{A_t = A_\ell + 2 \cdot A_b}$$

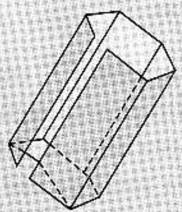
exemplo 3

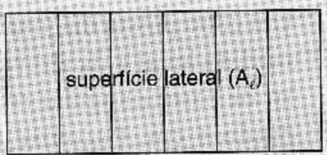
Vamos determinar a área da base, a área lateral e a área total de um prisma regular de altura 5 cm e base hexagonal de lado 8 cm.



A base é um hexágono regular de lado $\ell = 8$ cm. Assim, a área da base é dada pelo produto $6 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4}$, ou seja, a área da base mede $A_b = 96\sqrt{3}$ cm².

A superfície lateral é constituída de seis retângulos de dimensões 8 cm e 5 cm. Assim, $A_\ell = 6 \cdot 8 \cdot 5$, ou seja, $A_\ell = 240$ cm².





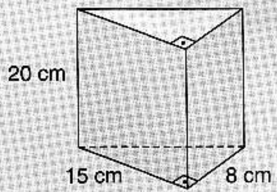
Finalmente, a área total do prisma é dada por:

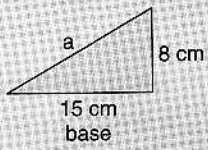
$$A_t = 240 + 2 \cdot 96\sqrt{3}$$
$$A_t = (240 + 192\sqrt{3})\ \text{cm}^2$$

exemplo 4

Consideremos um prisma reto de 20 cm de altura cuja base é um triângulo retângulo com catetos de 8 cm e 15 cm.

Vamos calcular a área da base, a área lateral e a área total do prisma.





- Área da base

$$A_b = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 \Rightarrow A_b = 60\ \text{cm}^2$$

Para determinar as outras áreas, é necessária a medida da hipotenusa da base. Por Pitágoras, temos:

$$a^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow a = 17\ \text{cm}$$

- Área lateral (soma das áreas de três retângulos)

  $A_\ell = 8 \cdot 20 + 15 \cdot 20 + 17 \cdot 20 \Rightarrow A_\ell = 800\ \text{cm}^2$

- Área total (soma da área lateral com o dobro da área da base)

$$A_t = 800 + 2 \cdot 60 \Rightarrow A_t = 920\ \text{cm}^2$$

No caso do paralelepípedo reto retângulo (e, mais particularmente, do cubo), não se fala em área da base nem em área lateral, visto que qualquer face pode ser considerada como base. Fala-se, então, apenas em área total.

Se um paralelepípedo reto retângulo possui dimensões *a*, *b* e *c*, sua área total é dada por:

$$A_t = 2(ab + ac + bc)$$

Um cubo de aresta *a* possui área total $A_t = 6a^2$.

exemplo 5

Vamos determinar a área total de um bloco retangular cuja diagonal mede $10\sqrt{2}$ cm, sabendo que suas dimensões são diretamente proporcionais a 3, 4 e 5.

Sendo *a*, *b* e *c* as dimensões do bloco retangular, temos:

$$k = \frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow a = 3k,\ b = 4k \text{ e } c = 5k$$

Com a diagonal $d = 10\sqrt{2}$, podemos escrever:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$200 = 9k^2 + 16k^2 + 25k^2$$
$$k = 2$$

Assim, $a = 6$, $b = 8$ e $c = 10$.

A área A_t é dada por:

$$A_t = 2 \cdot (6 \cdot 8 + 6 \cdot 10 + 8 \cdot 10) \Rightarrow A_t = 376 \text{ cm}^2$$

exemplo 6

Vamos supor que um cubo tenha diagonal medindo $16\sqrt{3}$ cm.

É possível determinar sua área total.

Temos $d = 16\sqrt{3}$ cm; portanto, $a = 16$ cm.

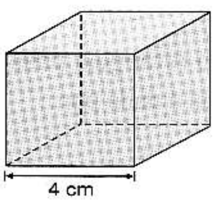
A área total é:

$$A_t = 6 \cdot 16^2 \Rightarrow A_t = 1\,536 \text{ cm}^2$$

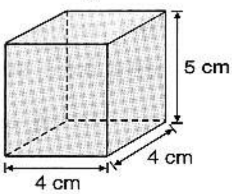
exercícios

10. Calcule a diagonal e a área total de cada um dos paralelepípedos, de acordo com as medidas indicadas.

a) cubo



b) paralelepípedo retângulo



11. Determine a diagonal de um cubo de 150 m^2 de área total.

12. Determine a razão entre as diagonais dos sólidos *A* e *B* (nessa ordem), sendo:

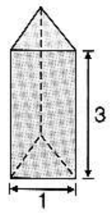
- *A:* cubo de área total 1 014 cm^2;
- *B:* paralelepípedo reto retângulo de dimensões 6 cm, 8 cm e 15 cm.

13. A diagonal de um cubo excede em 2 cm a diagonal de uma face do mesmo cubo. Quanto mede a aresta desse cubo?

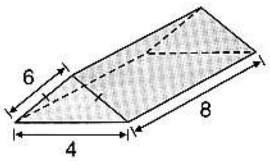
14. Um prisma regular tem por base um triângulo com $5\sqrt{3}$ cm^2 de área. Se a altura do prisma mede $3\sqrt{5}$ cm, determine a área lateral e a área total do prisma.

15. Determine a área lateral e a área total de cada um dos prismas abaixo.

a) prisma regular (triangular)



b) prisma reto (triangular)



16. Um prisma regular possui as dezoito arestas com medidas iguais.

a) Classifique o prisma quanto ao número de lados da base.

b) Determine a medida de sua aresta, sabendo que a área lateral mede 384 cm^2.

c) Qual é a área total do prisma?

17. Determine a área lateral e a área total de um prisma regular de 4 cm de altura e base como um hexágono de 6 cm de lado.

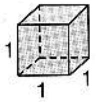
18. Determine a diagonal de um paralelepípedo, sendo 34 m^2 sua área total e 32 m a soma das medidas de todas as suas arestas.

19. Um cubo possui diagonal de face com $\sqrt{32}$ cm, medida igual à da altura de um prisma regular de base triangular com aresta da base medindo 4 cm. Encontre a área total de cada poliedro.

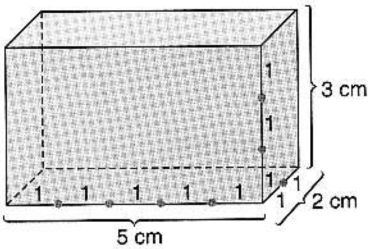
20. Seja um paralelepípedo reto cuja base é um paralelogramo de lados 3 cm e 4 cm, entre os quais se forma um ângulo de 60°. Sendo 5 cm a altura do paralelepípedo, determine sua área total.

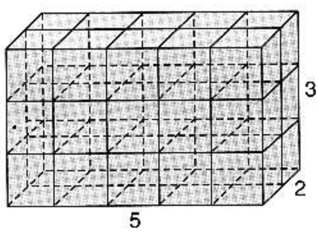
Volume

Para introduzir a noção de volume de um prisma, vamos apresentar inicialmente o cubo unitário, que tem aresta unitária (aresta de comprimento 1) e volume unitário (seu volume é 1).



Seja, agora, por exemplo, um paralelepípedo retângulo de dimensões 5 cm, 2 cm e 3 cm, representado abaixo:





Decompondo cada dimensão em unidades de comprimento (cm), teremos cinco unidades (5 cm), duas unidades (2 cm) e três unidades (3 cm), respectivamente. Isso sugere que o paralelepípedo pode ser dividido em $5 \cdot 2 \cdot 3$ cubos unitários ($1\ cm^3$) e o volume desse paralelepípedo é $5\ cm \cdot 2\ cm \cdot 3\ cm = 30\ cm^3$.

De modo geral, o volume *V* de um paralelepípedo retângulo de dimensões *a*, *b* e *c* é dado pela fórmula:

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

e, notando que $a \cdot b$ é a área da base (A_b) e *c* é a altura (*h*) do paralelepípedo, podemos escrever:

$$\boxed{V = A_b \cdot h}$$

Assim, o volume de um paralelepípedo retângulo é dado pelo produto da área da base pela altura do prisma. Esse fato é aceito sob o nome "postulado da unidade".

observação

Do mesmo modo, o volume de um cubo de aresta *a* é dado por:

$$V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow \boxed{V = a^3}$$

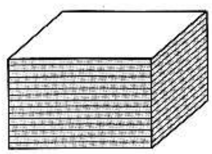
Ocorre, porém, que existe uma explicação para a obtenção do volume de um prisma, assim como de outros sólidos. Trata-se do princípio de Cavalieri (matemático italiano do século XVII).

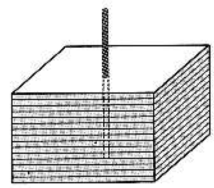
O princípio de Cavalieri e a determinação do volume de um prisma

Vamos trabalhar com um modelo físico simples para apresentar o conceito.

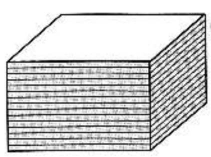
Tomemos dois blocos idênticos de papel sulfite, com 500 folhas cada, e disponhamos as duas pilhas lado a lado.

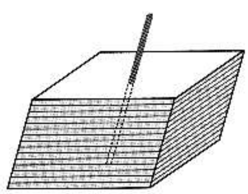
Uma delas é perfurada, do alto até a base. Pelo pequeno orifício é introduzida uma haste, que atravessa todas as folhas.





Inclinando a haste, de qualquer ângulo, e mantendo a extremidade inferior presa à base, a forma da pilha se altera, mas o seu volume, não. O motivo é simples: mesmo que as folhas deslizem umas sobre as outras, o volume da pilha inclinada continua sendo o volume total das folhas. Assim, as duas pilhas têm volumes iguais.

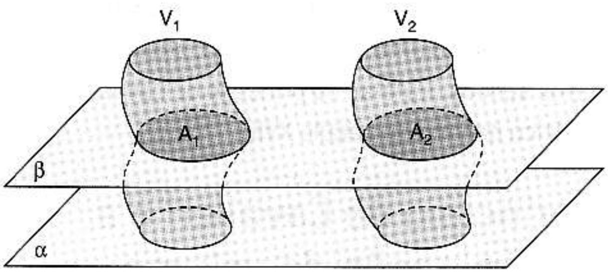




Considerando cada uma das pilhas como um prisma (um deles, reto e o outro, oblíquo), qualquer plano horizontal que corte um dos prismas cortará também o outro; cada uma dessas interseções será um retângulo, ou seja, uma das folhas de cada pilha.

Como todas as folhas possuem a mesma área, as duas seções são congruentes e equivalentes.

Expandindo essa idéia para outros tipos de sólido, Cavalieri enunciou o princípio: "Dois sólidos nos quais *todo* plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais são sólidos de volumes iguais".

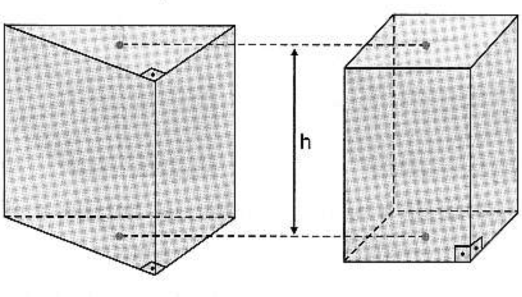


$A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$

O princípio de Cavalieri será aceito também como postulado, sendo utilizado na demonstração do seguinte teorema: "O volume de um prisma é igual ao produto da altura pela área da base".

Sejam *h* e *A*, respectivamente, a altura e a área da base de um prisma. Seja, também, um paralelepípedo retângulo de mesma altura *h* e mesma área da base *A*.

Suponhamos que as bases dos dois prismas estejam no mesmo plano.



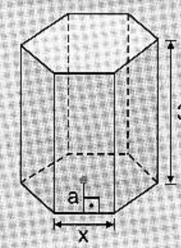
Nessas condições, para ambos os prismas, todas as seções transversais possuem a mesma área *A*. Isso, pelo princípio de Cavalieri, significa que os dois sólidos possuem o mesmo volume.

Como o volume de um paralelepípedo retângulo é igual ao produto da área da base pela altura, o mesmo ocorre com o volume do prisma:

$$\boxed{V_{prisma} = A_b \cdot h}$$

exemplo 7

Vamos representar, por meio de uma expressão algébrica, o volume do prisma regular hexagonal abaixo.



Inicialmente vamos apurar a área da base. Para isso, precisamos do apótema do hexágono, que corresponde à altura do triângulo eqüilátero de lado *x*:

$$a = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Daí, a área da base:

$$A_b = 3x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

Assim, para o volume:

$$V = \frac{3}{2}x^2\sqrt{3} \cdot 3x \Rightarrow V = \frac{9\sqrt{3}}{2}x^3$$

exercícios

21. Determine o volume de cada sólido descrito abaixo:

a) cubo de aresta 5 cm
b) bloco retangular de dimensões 3 cm, 6 cm e 11 cm
c) prisma pentagonal de base com 10 cm² de área e 8 cm de altura
d) prisma regular hexagonal com 10 cm de altura e aresta da base medindo 4 cm
e) prisma regular triangular de 5 cm de altura e perímetro da base medindo 18 cm

22. Calcule a área total e o volume de um prisma hexagonal regular de 5 cm de aresta lateral e 3 cm de aresta da base.

23. Um prisma reto tem base quadrada com diagonal de $4\sqrt{2}$ cm. Determine a área total do prisma sabendo que seu volume é 48 cm³.

24. Um losango de diagonais medindo 3 cm e 4 cm é base de um prisma reto com 8 cm de altura.

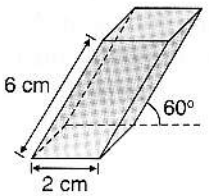
a) Determine o volume do prisma.

b) Supondo que o prisma não fosse reto, responda e justifique: a resolução do item *a* seria alterada?

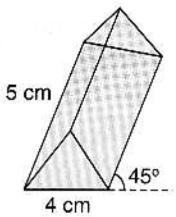
c) Represente o prisma citado no enunciado e, em outra figura, o prisma da suposição do item *b*.

25. Determine a área lateral, a área total e o volume de cada um dos prismas oblíquos:

a) base quadrada



b) base eqüilátera



26. Um paralelepípedo reto retângulo tem volume de 20 cm^3 e duas de suas dimensões são 2 cm e 4 cm. Determine a terceira das dimensões do prisma e a medida da aresta de um cubo equivalente a esse prisma.

27. Um prisma reto de altura 10 cm tem como base um triângulo isósceles com hipotenusa de $6\sqrt{2}$ cm. Determine a área lateral, a área total e o volume desse prisma.

28. A altura de um prisma triangular regular mede $2\sqrt{3}$ cm. A área total do prisma vale o dobro da área lateral. Determine o volume do prisma.

29. Determine o volume de um prisma regular em que as nove arestas possuem mesma medida e cuja área lateral mede 60 m^2.

30. (UF-RJ) Uma barra de doce de leite (paralelepípedo retângulo), com 5 cm × 6 cm × 7 cm, foi completamente envolvida com papel laminado. Se a barra for cortada em cubos de 1 cm de aresta, quantos cubos ficarão sem nenhuma cobertura de papel laminado?

31. (Unicamp-SP) Um cidadão precavido foi fazer uma retirada de dinheiro em um banco. Para tanto, levou sua mala executiva, cujo interior tem 56 cm de comprimento, 39 cm de largura e 10 cm de altura. O cidadão só pretende carregar notas de R$ 50,00. Cada nota tem 140 mm de comprimento, 65 mm de largura, 0,2 mm de espessura e densidade igual a 0,75 g/cm^3.

a) Qual é a máxima quantia, em reais, que o cidadão poderá colocar na mala?

b) Se a mala vazia pesa 2,6 kg, qual será o peso da mala cheia de dinheiro?

32. Uma piscina olímpica tem 50 m de comprimento, 20 m de largura e 2 m de profundidade e está inicialmente vazia.

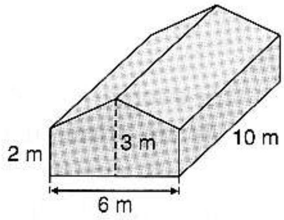
a) Despejando-se 40 000 litros de água na piscina, qual altura o nível da água atinge?

b) Quantos litros de água devem ser despejados a fim de que o nível da água atinja 1 m?

33. O volume de um tanque cúbico sem tampa é 125 m^3. Seu interior deve ser revestido com massa impermeabilizante. Qual é a área da superfície a ser revestida?

34. O volume de um prisma regular pentagonal de 8 cm de altura é 493,2 cm^3. Qual é a área total desse prisma? (Considere como aproximação: $\text{tg}\,\frac{3\pi}{10} = 1{,}37$.)

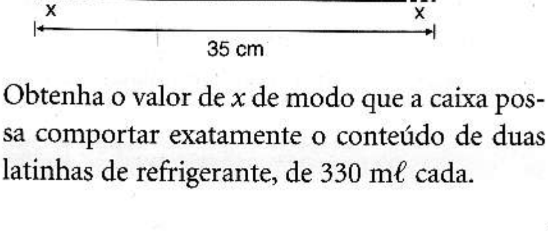
35. O galpão representado na figura foi inteiramente construído de um único material, vendido em placas. Determine:



a) a área de material utilizado na construção;

b) o volume de ar contido no galpão.

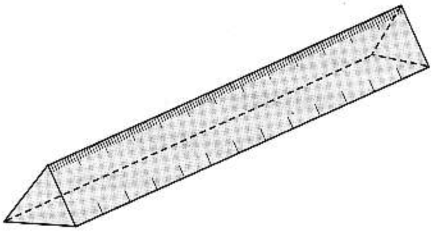
36. A figura abaixo mostra a planificação de uma caixa plástica sem tampa.



Obtenha o valor de *x* de modo que a caixa possa comportar exatamente o conteúdo de duas latinhas de refrigerante, de 330 mℓ cada.

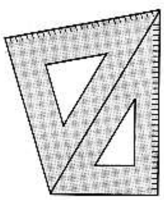
37. (PUC-RS) Um cubo tem 96 m^2 de área total. Em quantos metros deve ser aumentada sua aresta para que seu volume seja igual a 125 m^3?

38. Uma "régua de engenheiro" possui a forma de um prisma reto de base triangular (eqüilátera) e normalmente é apoiada em uma face lateral para facilitar a leitura das indicações.



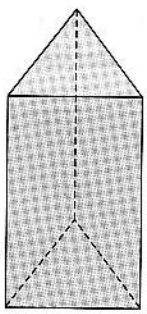
Se a régua da figura acima possui 30 cm de comprimento e volume de 62,8 cm^3, quanto mede a área da parte da régua apoiada sobre a mesa? (Use $\sqrt{3} = 1,73$ como boa aproximação.)

39. Dois esquadros, um de 30° e outro de 45°, como os representados na figura abaixo, possuem hipotenusas de mesma medida.



Se o contorno de cada um deles serve como base de um prisma reto de mesma altura, qual é a relação entre seus volumes, se o menor dos lados dos esquadros mede 12 cm?

40. (UF-MS) A figura abaixo representa um prisma triangular regular reto.



Qual é o volume, em metros cúbicos, desse prisma em que a altura é igual a $10\sqrt{3}$ metros e a base, que é um triângulo eqüilátero, está inscrita em uma circunferência de perímetro igual a 4π metros?

41. (ESPM-SP) Trinta e seis litros de água estão no interior de uma caixa em forma de paralelepípedo, totalmente fechada. Conforme a face que fica apoiada numa mesa horizontal, a altura do líquido na caixa pode ser de 15 cm, 20 cm ou 30 cm. Determine a capacidade total dessa caixa, em litros.

42. (UF-RJ) Uma barra de sabão ABCDEFGH, com a forma de um paralelepípedo retângulo, foi cortada pelo plano que contém os pontos C, D, F e G, como é mostrado na figura 1. O sólido ABCDFG obtido foi cortado, mais uma vez, pelo plano que contém os pontos M, N, P e Q, que são, respectivamente, os pontos médios das arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DF}$, como ilustrado na figura 2.

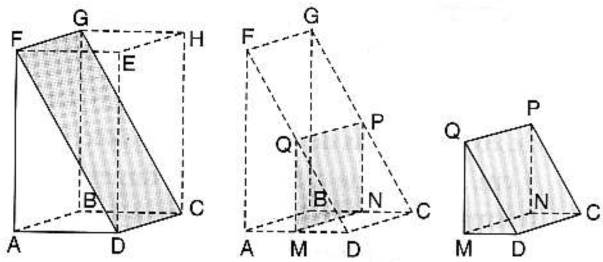
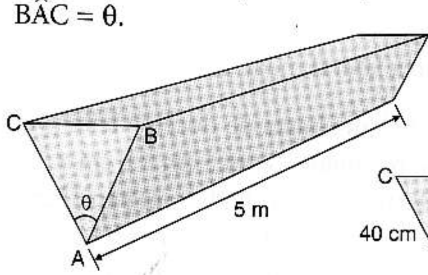
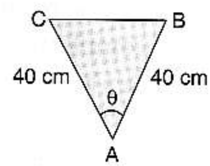


figura 1 **figura 2** **figura 3**

Calcule a razão entre o volume do sólido CDMNPQ resultante desse segundo corte (ilustrado na figura 3) e o volume da barra de sabão original.

43. (UE-PA) Uma calha em forma de prisma reto, conforme figura abaixo, possui 5 m de comprimento e uma seção transversal ABC, na forma de V, tal que AB = AC = 40 cm e $B\hat{A}C = \theta$.





Pede-se:

a) a expressão que determina o volume da calha em função do ângulo θ;

b) o volume máximo que essa calha comporta.

testes de vestibulares

1. (UF-MA) Conta uma lenda que a cidade de Delos, na Grécia Antiga, estava sendo assolada por uma peste que ameaçava matar toda a população. Para erradicar a doença, os sacerdotes consultaram o Oráculo e este ordenou que o altar do Deus Apolo tivesse seu volume duplicado. Sabendo-se que o altar tinha forma cúbica com aresta medindo 1 m, então o valor em que tal aresta deveria ser aumentada era:

a) $\sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt[3]{2}-1$ e) $1-\sqrt[3]{2}$
b) 1 d) $\sqrt{2}-1$

2. (Umesp-SP) Um paralelepípedo reto retângulo de volume 18 m^3 tem por dimensões números inteiros dados por x, $2x$ e $(x-2)$ em metros. Sua área total é:

a) 54 m^2 c) 18 m^2 e) 52 m^2
b) 36 m^2 d) 27 m^2

3. (PUC-MG) Uma caixa cúbica tem aresta medindo um metro e está totalmente cheia de água. Retirando-se dez litros, o nível da água baixará:

a) 0,01 dm c) 1,00 dm
b) 0,10 dm d) 10,0 dm

4. (Unirio-RJ) Um engenheiro vai projetar uma piscina em forma de paralelepípedo reto retângulo, cujas medidas internas são, em metros, expressas por x, $20-x$ e 2. O maior volume que essa piscina poderá ter, em metros cúbicos, é igual a:

a) 240 c) 200 e) 100
b) 220 d) 150

5. (PUC-MG) A superfície de um cubo tem 54 m^2 de área. A medida da aresta desse cubo é igual à medida do diâmetro de uma circunferência cuja área, em metros quadrados, é:

a) $1{,}82\pi$ c) $2{,}25\pi$
b) $2{,}21\pi$ d) $2{,}35\pi$

6. (UF-PI) O volume de um paralelepípedo reto retângulo é 162 m^3 e suas dimensões são proporcionais a 1, 2 e 3. A diagonal desse paralelepípedo, em metros, mede:

a) $\sqrt{19}$ d) $5\sqrt{35}$
b) $3\sqrt{14}$ e) $2\sqrt{37}$
c) $\sqrt{31}$

7. (Mackenzie-SP) Se as dimensões de um paralelepípedo reto retângulo de volume 15 estão em progressão aritmética e a maior delas é 3, a soma dessas dimensões é:

a) $\frac{25}{8}$ c) $\frac{9}{2}$ e) $\frac{21}{4}$
b) $\frac{19}{6}$ d) $\frac{15}{2}$

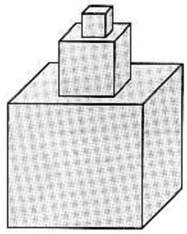
8. (Mackenzie-SP) Um prisma reto de base quadrada teve os lados da base e a altura diminuídos de 50%. O seu volume ficou diminuído de:

a) 50% c) 87,5% e) 60%
b) 75% d) 85%

9. (UF-AM) As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo formam uma P.G. Se a menor das arestas mede 0,3 cm e o volume de tal paralelepípedo é 27 cm^3, então, a soma das áreas de suas faces, em centímetros quadrados, é:

a) 90 c) 99,9 e) 209,9
b) 90,9 d) 199,8

10. (U. F. Uberlândia-MG) Cubos são colocados uns sobre os outros, do maior para o menor, para formar uma coluna, como mostra a figura abaixo.



O volume do cubo maior é 1 m^3 e o volume de cada um dos cubos seguintes é igual a $\frac{1}{27}$ do volume do cubo sobre o qual ele está apoiado. Se fosse possível colocar uma infinidade de cubos, a altura da coluna, em metros, seria igual a:

a) $\frac{27}{26}$ c) 2
b) 1,5 d) 4,5

11. (UF-MG) Dona Margarida comprou terra adubada para sua nova jardineira, que tem a forma de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões internas são: 1 m de comprimento, 25 cm de largura e 20 cm de altura.
Sabe-se que 1 kg de terra ocupa um volume de 1,7 dm^3. Nesse caso, para encher totalmente a jardineira, a quantidade de terra que dona Margarida deverá utilizar é aproximadamente:

a) 85,0 kg c) 29,4 kg
b) 8,50 kg d) 294,1 kg

12. (UE-PI) Um galpão na forma de um paralelepípedo reto de dimensões 30 m, 72 m e 6 m deve ser preenchido completamente com caixas cúbicas de mesmo volume. Qual é o menor número de caixas a serem utilizadas?

a) 80 c) 60 e) 40
b) 70 d) 50

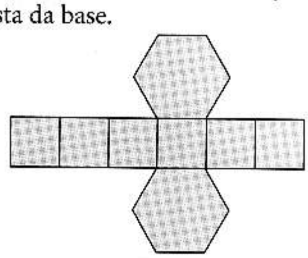
13. (Enem-MEC) Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm × 20 cm × 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm × 40 cm × 60 cm. A quantidade mínima necessária de caixas para esse envio é:

a) 9
b) 11
c) 13
d) 15
e) 17

14. (PUC-PR) Um pintor depositou a tinta que iria utilizar para um muro em um recipiente de forma cúbica de altura *h*, deixando-o completamente cheio. Após utilizar 192 litros de tinta, a altura *h* diminuiu 30 cm. Determine a capacidade total do recipiente:

a) 216 litros
b) 512 litros
c) 343 litros
d) 647 litros
e) 729 litros

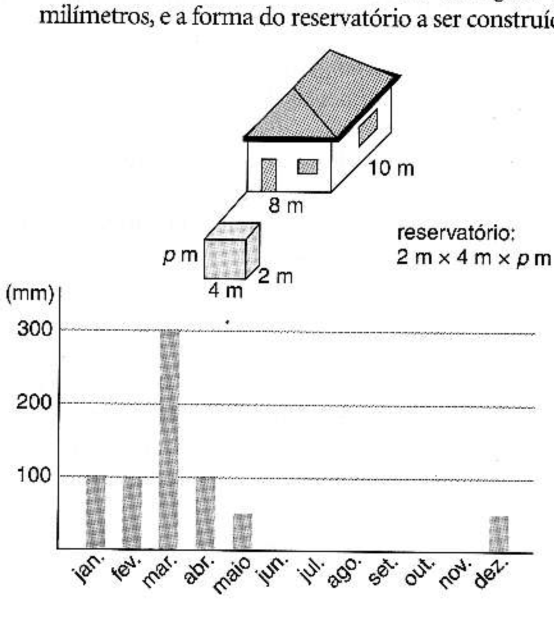
15. (UF-RS) Na figura abaixo está representada a planificação de um prisma hexagonal regular de altura igual à aresta da base.



Se a altura do prisma é 2, seu volume é:

a) $4\sqrt{3}$
b) $6\sqrt{3}$
c) $8\sqrt{3}$
d) $10\sqrt{3}$
e) $12\sqrt{3}$

16. (Enem-MEC) Prevenindo-se contra o período anual de seca, um agricultor pretende construir um reservatório fechado, que acumule toda a água proveniente da chuva que cair no telhado de sua casa, ao longo de um período anual chuvoso.
As ilustrações a seguir apresentam as dimensões da casa, a quantidade média mensal de chuva na região, em milímetros, e a forma do reservatório a ser construído.



Sabendo-se que 100 milímetros de chuva equivalem ao acúmulo de 100 litros de água em uma superfície plana horizontal de um metro quadrado, a profundidade (p) do reservatório deverá medir:

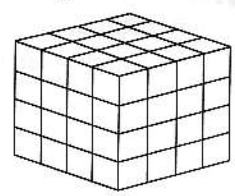
a) 4 m
b) 5 m
c) 6 m
d) 7 m
e) 8 m

17. (ESPM-SP) O seno do ângulo que a diagonal de um cubo forma com uma das arestas concorrentes a ela tem como valor:

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

18. (Fuvest-SP) A partir de 64 cubos brancos, todos iguais, forma-se um novo cubo. A seguir, esse novo cubo tem cinco de suas seis faces pintadas de vermelho. O número de cubos menores que tiveram pelo menos duas de suas faces pintadas de vermelho é:

a) 24
b) 26
c) 28
d) 30
e) 32



19. (UF-ES) Uma formiga mora na superfície de um cubo de aresta a. O menor caminho que ela deve seguir para ir de um vértice ao vértice oposto tem comprimento:

a) $a\sqrt{2}$
b) $a\sqrt{3}$
c) 3a
d) $(1+\sqrt{2})a$
e) $a\sqrt{5}$

20. (UCDB-MS) Um fabricante de caixas deve produzir uma caixa fechada de 9 000 cm³ de volume. A caixa é um prisma reto de base retangular cujo comprimento é três vezes a largura. Se a largura da base é x cm, então a área da superfície total da caixa, em cm², como função de x é:

a) $6\left(x^2 + \frac{4\,000}{x}\right)$
b) $6(x^2 + 4\,000x)$
c) $4\,000x^2 + \frac{6}{x}$
d) $6x^2 + 24\,000$
e) $6x^2 + 4\,000x$

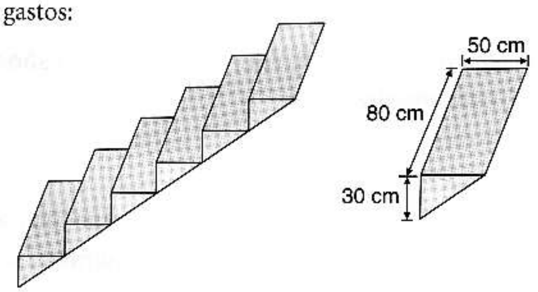
21. (UE-RJ) Dois prismas regulares retos P_1 e P_2, o primeiro de base triangular e o outro de base hexagonal, têm a mesma área da base e a mesma área lateral. A razão entre o volume de P_1 e o de P_2 equivale a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) 1

22. (PUC-MG) Por uma quantidade de combustível suficiente para encher completamente um tanque *A*, em forma de paralelepípedo retangular com arestas medindo, respectivamente, 1 m, 2 m e 3 m, certa empresa cobra R$ 3 000,00. Pode-se estimar que, para encher completamente, com igual tipo de combustível, um tanque *B*, com o mesmo formato e com arestas medindo o dobro das arestas de *A*, a empresa deverá cobrar:

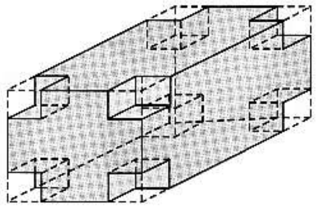
a) R$ 6 000,00
b) R$ 12 000,00
c) R$ 16 000,00
d) R$ 24 000,00

23. (UFF-RJ) Para construir seis degraus ligando dois planos de um terreno (figura abaixo), o proprietário faz um levantamento de preço e constata que o metro cúbico do concreto, que ele utilizará, custa R$ 250,00. Para preencher todos os degraus da escada, seriam gastos:



a) R$ 300,00
b) R$ 90,00
c) R$ 150,00
d) R$ 200,00
e) R$ 30,00

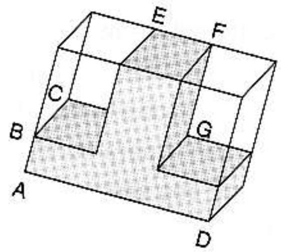
24. (PUC-SP) Para obter a peça esboçada na figura abaixo, um artesão deve recortar 8 cubos iguais, a partir dos vértices de um bloco maciço de madeira que tem as seguintes dimensões: 25 cm × 18 cm × 18 cm.



Se ele pretende que o peso da peça obtida seja 6,603 kg e sabendo-se que a densidade da madeira é 0,93 g/cm^3, a aresta de cada cubo recortado deverá medir, em centímetros:

a) 6,5
b) 6
c) 5,5
d) 5
e) 4,5

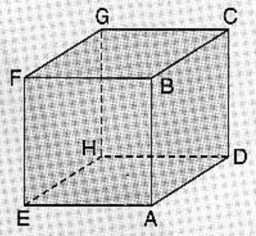
25. (Vunesp-SP) Considere o sólido da figura (em azul), construído a partir de um prisma retangular reto. Se AB = 2 cm, AD = 10 cm, FG = 8 cm e BC = EF = = x cm, o volume do sólido, em cm^3, é:



a) $4x(2x + 5)$
b) $4x(5x + 2)$
c) $4(5 + 2x)$
d) $4x^2(2 + 5x)$
e) $4x^2(2x + 5)$

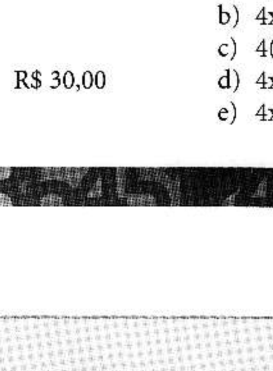
desafios

1. Passe um plano α pelos pontos *G*, *C* e *P*, que é o centro do cubo ao lado, o qual possui aresta $a\sqrt{2}$ cm.



a) Determine a distância entre α e $\overleftrightarrow{HD}$.
b) Forneça a posição relativa entre α e $\overleftrightarrow{BF}$.
c) Encontre o seno do ângulo $C\hat{P}G$.
d) Determine o volume do sólido BCGFP.

2. (UF-RJ) A figura abaixo corresponde à planificação de um prisma regular hexagonal de altura 2a e perímetro da base igual a 3a.



Determine a distância entre os pontos *P* e *Q* no prisma.