MATEMÁTICA

BINOMIO E COMPLEXOS

06

01| Determine o algarismo das unidades da seguinte soma $S = \sum_{n=1}^{2016} n!$, em que $n!$ é o fatorial do número natural n.

A 0

B 1

C 2

D 3

E 4

02| O coeficiente de x^{12} na expansão de $(1+x^4+x^5)^{10}$ é igual a

A 120.

B 90.

C 81.

D 60.

E 54.

03| O coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^3$ é

A 18.

B 24.

C 34.

D 30.

04| O valor da expressão

$E = (999)^5 + 5\cdot(999)^4 + 10\cdot(999)^3 + 10\cdot(999)^2 + 5\cdot(999) + 1$ é igual a

A $9\cdot 10^3$

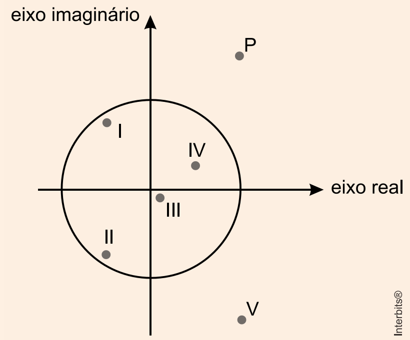
B $9\cdot 10^{15}$

C 10^{15}

D 999.999

E $999\cdot 10^{15}$

05| Seja Z um número complexo cujo afixo P está localizado no 1º quadrante do plano complexo, e sejam I, II, III, IV e V os afixos de cinco outros números complexos, conforme indica a figura seguinte.



Se a circunferência traçada na figura possui raio 1 e está centrada na origem do plano complexo, então o afixo de $\frac{1}{Z}$ pode ser

A I.

B II.

C III.

D IV.

E V.

06| Resolva a equação $z^3 - 1 = 0$ no conjunto dos números complexos. Considerando as raízes encontradas, analise as proposições abaixo e classifique-as em V (VERDADEIRA) ou F (FALSA).

( ) A equação possui três raízes de multiplicidade 1.

( ) Os afixos das raízes formam um triângulo equilátero cuja área é $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ unidades de área.

( ) Duas das raízes são conjugadas.

( ) Todas as raízes têm o mesmo módulo.

A sequência correta é

A V – F – V – V

B V – V – F – V

C F – F – V – F

D V – F – V – F

07| Se i é o número complexo cujo quadrado é igual a -1, e n é um número natural maior do que 2, então, pode-se afirmar corretamente que $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^n$ é um número real sempre que

A n for ímpar.

B n for um múltiplo de 4.

C n for um múltiplo de 3.

D n for um múltiplo de 5.

08| Considere as igualdades abaixo.

I. $(1-2i)(1+2i) = 5$, sendo i a unidade imaginária.

II. $2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \ldots = 2$.

III. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 99 - 100 = 50$.

Quais igualdades são verdadeiras?

A Apenas I.

B Apenas III.

C Apenas I e II.

D Apenas II e III.

E I, II e III.

09| Considere a equação

$$(a - bi)^{501} = \frac{2(a + bi)}{(a^2 + b^2)^{250} + 1}.$$

O número de pares ordenados $(a, b) \in \square^2$ que satisfazem a equação é

A 500.

B 501.

C 502.

D 503.

E 504.

10| Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3 + 1 = 0$, tomando como base o conjunto dos números complexos. Ao representarmos geometricamente essas raízes no plano de Argand-Gauss, obtemos um triângulo, cujos vértices são os afixos de x_1, x_2 e x_3. A área do triângulo é:

A $\frac{\sqrt{3}}{4}$

B $\frac{3}{4}$

C $\frac{2\sqrt{3}}{4}$

D $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

E $\frac{3}{2}$

11| Sejam Z_1 e Z_2 números complexos tais que Z_2 é imaginário puro e $|Z_1 - Z_2| = |Z_2|$. Para quaisquer valores de Z_1 e Z_2 que atendam a essas condições tem-se que:

A $\text{Im}(Z_2) > 0$

B $\text{Im}(Z_2) \leq 0$

C $|Z_1| \leq 2|Z_2|$

D $\text{Re}(Z_1) \geq 0$

E $\text{Re}(Z_1) \leq \text{Im}(Z_2)$

12| Se i é o número complexo cujo quadrado é igual a -1, então, o valor de $5 \cdot i^{227} + i^{6} - i^{13}$ é igual a

A $i+1.$

B $4i-1.$

C $-6i-1.$

D $-6i.$

13| Se i é a unidade imaginária, então $2i^3 + 3i^2 + 3i + 2$ é um número complexo que pode ser representado no plano de Argand-Gauss no __________ quadrante.

A primeiro

B segundo

C terceiro

D quarto

14| Em relação ao número complexo $z = i^{87} \cdot \left(i^{105} + \sqrt{3}\right)$ é correto afirmar que

A sua imagem pertence ao 3° quadrante do plano complexo.

B é imaginário puro.

C o módulo de z é igual a 4.

D seu argumento é igual ao argumento do número complexo $v = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

15| A parte real do número complexo $z = \dfrac{1+(3i)^2}{1-i}$ é

A 1

B -1

C 2

D -2

E -4

16| O lugar geométrico dos pontos $(a, b) \in \square^2$ tais que a equação, em $z \in \square$,

$$z^2 + z + 2 - (a + ib) = 0$$

possua uma raiz puramente imaginária é

A uma circunferência.

B uma parábola.

C uma hipérbole.

D uma reta.

E duas retas paralelas.

17| Sejam z e v números complexos onde $|z| = 1$ e v tem coordenadas no plano de Argand-Gauss $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Sobre o número complexo z e v (resultante da multiplicação dos complexos z e v), podemos afirmar que

A sempre é um número real.

B sempre tem módulo igual a 2.

C sempre é um número imaginário puro.

D pertence à circunferência $x^2 + y^2 = 1.$

E sempre tem argumento igual a $\frac{ð}{4}$.

18| Considere è um número real qualquer. Sobre os números complexos $z = \cos(2\text{è}) + i\,\text{sen}(\text{è})$ e $w = \cos(\text{è}) + i\,\text{sen}(2\text{è})$, pode-se afirmar que

A $|z| + |w| = 1.$

B $z^2 - w^2 = 0.$

C $z = \overline{w}.$

D $z - iw = 0.$

E $|z|^2 + |w|^2 = 2.$

GABARITO

01| **D**

$$S = \sum_{n=1}^{2016} n! = 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720 + \ldots$$

O último algarismo da soma acima é igual ao último algarismo da soma:

$1 + 2 + 6 + 24 = 33,$ já que a partir do fatorial de cinco todos os últimos algarismos valem zero.

Portanto, o último algarismo da soma pedida é 3.

02| **A**

Sendo $á_1, á_2$ e $á_3$ números naturais, temos

$$(1+x^4+x^5)^{10} = \sum \frac{10!}{\acute{a}_1! \cdot \acute{a}_2! \cdot \acute{a}_3!} \cdot 1^{\acute{a}_1} \cdot (x^4)^{\acute{a}_2} \cdot (x^5)^{\acute{a}_3}$$
$$= \sum \frac{10!}{\acute{a}_1! \cdot \acute{a}_2! \cdot \acute{a}_3!} \cdot x^{4\acute{a}_2 + 5\acute{a}_3}.$$

A fim de calcularmos o coeficiente de x^{12}, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \acute{a}_1 + \acute{a}_2 + \acute{a}_3 = 10 \\ 4\acute{a}_2 + 5\acute{a}_3 = 12 \end{cases}.$$

Portanto, como tal sistema possui solução única $(\acute{a}_1, \acute{a}_2, \acute{a}_3) = (7, 3, 0)$, segue que a resposta é $\frac{10!}{7! \cdot 3! \cdot 0!} = 120.$

03| B

Sendo

$$T_{p+1} = \binom{3}{p} \cdot (2x)^{3-p} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^p = \binom{3}{p} \cdot 2^{3-p} \cdot x^{3-3p},$$

o termo geral de $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3$, e

$$T_{q+1} = \binom{3}{q} \cdot (x^2)^{3-q} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^q = \binom{3}{q} \cdot 2^{-q} \cdot x^{6-3q},$$

o termo geral de $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3$, e

$$T_{p+1} \cdot T_{q+1} = \binom{3}{p} \cdot \binom{3}{q} \cdot 2^{3-(p+q)} \cdot x^{9-3(p+q)}.$$

Logo, deve-se ter $p+q=1$, o que implica em $(p, q) = (0, 1)$ ou $(p, q) = (1, 0)$. Em consequência, a resposta é

$$\binom{3}{0} \cdot \binom{3}{1} \cdot 2^2 + \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{0} \cdot 2^2 = 24.$$

04| C

$$E = (999)^5 + 5 \cdot (999)^4 + 10 \cdot (999)^3 + 10 \cdot (999)^2 + 5 \cdot (999) + 1 = (1+999)^5 = 1000^5 =$$
$$\left(10^3\right)^5 = 10^{15}$$

05| C

Seja $Z = x + yi$, com $i = \sqrt{-1}$, $x > 1$ e $y > 1$. Assim, vem

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{x+yi}$$
$$= \frac{1}{x+yi} \cdot \frac{x-yi}{x-yi}$$
$$= \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i.$$

Portanto, como $0 < \frac{x}{x^2+y^2} < 1$ e $0 < \frac{y}{x^2+y^2} < 1,$ tem-se que a imagem de $\frac{1}{Z}$ pode ser III.

06| A

[I] Verdadeira. Calculando as raízes:

$$z^3 = 1 \to z^3 = \text{cis}(2k\eth) \to z = \text{cis}\left(\frac{2k\eth}{3}\right)$$

$$\begin{cases} k = 0 \to z = 1 \\ k = 1 \to z = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ k = 2 \to z = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

[II] Falsa. Calculando:

$$\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\ell^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \to \ell^2 = 3$$

$$S = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

[III] Verdadeira. Sim, quando $k = 1$ ou $k = 2$ obtêm-se raízes conjugadas.

[IV] Verdadeira. Calculando:

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |z| = \sqrt{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{+\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \\ |z| = \sqrt{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \end{cases}$$

07| B

Sendo $|z|$ e θ, respectivamente, o módulo e o argumento principal de $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, temos

$$|z|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$$

e

$$tg\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow tg\theta=1\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{4}rad.$$

Assim, vem $z=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,sen\frac{\pi}{4}\right)$ e, portanto, pela Primeira Fórmula de Moivre, encontramos

$$(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^n=z^n$$
$$=2^n\cdot\left(\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)+i\,sen\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Desse modo, $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^n$ é um número real sempre que $sen\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)=0$, ou seja, sempre que $n=4\cdot(2k)$ ou $n=4\cdot(2k+1)$, com $k\in\square$. Em outras palavras, z^n é um número real sempre que n for um múltiplo de 4.

08| C

[I] Verdadeira.

$$(1-2i)(1+2i)=1^2-(2i)^2=1-(-4)=5$$

[II] Verdadeira.

$2^0+2^{-1}+2^{-2}+2^{-3}+\ldots=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$ (PG infinita de razão meio).

[III] Falsa.

$$1-2+3-4+5-6+\ldots+99-100=(1-2)+(3-4)+(5-6)+\ldots+(99-100)=$$
$$(-1)+(-1)+(-1)+\ldots+(-1)=50\cdot(-1)=-50$$

09| D

Calculando:

$$z=a+bi$$
$$\bar{z}=a-bi$$
$$|z|^2=a^2+b^2$$

Caso 1)

$$z^{-501}=\frac{2\cdot(z)}{|z|^{500}+1}\cdot z^{501}\Rightarrow|z|^{1002}=\frac{2\cdot z^{502}}{|z|^{500}+1}\cdot z^{501}\Rightarrow z^{502}=\frac{|z|^{1002}\cdot\left(|z|^{500}+1\right)}{2}$$
$$\frac{|z|^{1002}\cdot\left(|z|^{500}+1\right)}{2}=1\Rightarrow z^{502}=1\Rightarrow 502\text{ soluções}$$

Caso 2)

$$z^{-501}=\frac{2z}{|z|^{500}+1}\Rightarrow\text{zero é solução}$$

$$\text{Para } z\neq0\Rightarrow z^{-501}=\frac{2\cdot|z|}{|z|^{500}+1}\Rightarrow|z|^{500}=\frac{2}{|z|^{500}+1}$$

$$|z|^{500}=w\Rightarrow w=\frac{2}{w+1}\Rightarrow w^2+w-2=0\Rightarrow\begin{cases}w=1\\ w=-2\ \text{(não convém)}\end{cases}$$

$$|z|^{500}=1\Rightarrow|z|=1$$

Uma solução!

Total de soluções $=503$.

10| D

$$x^3+1=0$$
$$x_1=1\Rightarrow(1;0)$$
$$x_2=1\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot sen\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow x_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$x_3=1\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\cdot sen\frac{4\pi}{3}\right)\Rightarrow x_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}1&0&1\\-1/2&\sqrt{3}/2&1\\-1/2&-\sqrt{3}/2&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow A=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

11| C

Calculando:

$$Z_2=ai,\ a\in\square$$
$$|Z_1-ai|=|a|$$

distância de Z_1 até $ai=|a|$

$Z_1\rightarrow$ circunferência do centro em ai e raio $|a|$

$|Z_1|\rightarrow$ corda da circunferência de diâmetro $=2|Z_2|$

$$|Z_1|\leq2|Z_2|$$

12| C

Sabemos que:

$$227 = 56 \cdot 4 + 3$$
$$6 = 1 \cdot 4 + 2$$
$$13 = 3 \cdot 4 + 1$$

Portanto,

$$5 \cdot i^{227} + i^{6} - i^{13} = 5 \cdot i^{3} + i^{2} - i = -5i - 1 - i = -6i - 1$$

13| B

Sendo

$$\begin{aligned} 2i^3 + 3i^2 + 3i + 2 &= -2i - 3 + 3i + 2 \\ &= -1 + i \\ &= (-1, 1), \end{aligned}$$

podemos concluir que a imagem do complexo $2i^3 + 3i^2 + 3i + 2$ está situada no segundo quadrante.

14| D

Simplificando:

$$z = i^{87} \cdot \left(i^{105} + \sqrt{3}\right) = i^{3} \cdot \left(i + \sqrt{3}\right) \to z = 1 - i\sqrt{3}$$

Analisando as alternativas uma a uma:

[A] FALSA. Seu afixo está no 4º quadrante.

[B] FALSA. Não é imaginário puro.

[C] FALSA. Seu módulo é igual a 2.

[D] VERDADEIRA. Ambos tem o mesmo argumento:

$$v = \frac{1}{2}z.$$

15| E

$$z = \frac{1 + (3i)^2}{1 - i}$$
$$z = \frac{1 + 9i^2}{1 - i}$$
$$z = \frac{1 - 9}{1 - i}$$
$$z = \frac{-8}{1 - i}$$
$$z = \frac{-8}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i}$$
$$z = \frac{-8 - 8i}{1^2 - i^2}$$
$$z = \frac{-8 - 8i}{2}$$
$$z = -4 - 4i$$
$$\mathrm{Re}(z) = -4$$

16| B

Calculando:

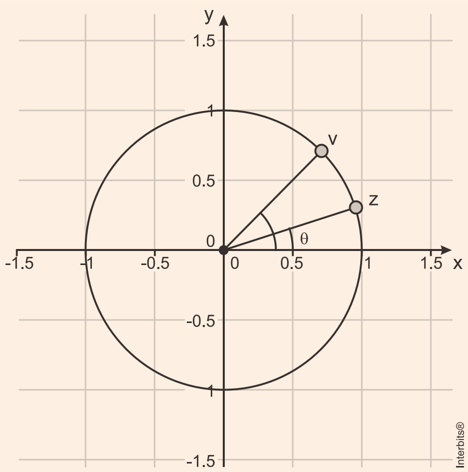
$$z^2 + z + 2 - (a + ib) = 0$$
$$z^2 + z + 2 = a + ib$$

Fazendo $z = ái$:

$$ái^2 + ái + 2 = a + bi$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 - á^2 \\ b = á \end{array}\right\} \Rightarrow a = 2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 2 - a \Rightarrow (b - 0)^2 = \frac{a - 2}{-1} \Rightarrow \text{Parábola}$$

17| D



Escrevendo os complexos z e v na forma trigonométrica, temos:

$$z = 1 \cdot (\cos è + i\,\mathrm{sen}\, è)$$
$$v = 1 \cdot (\cos 45° + i \cdot \mathrm{sen}\, 45°)$$

Efetuando o produto de z e v na forma trigonométrica, temos:

$$z \cdot v = 1 \cdot 1 \cdot (\cos(45° + è) + i \cdot \mathrm{sen}(45° + è)) \cdot = 1 \cdot (\cos(45° + è) + i \cdot \mathrm{sen}(45° + è))$$

Com o módulo do produto continua sendo 1, concluímos que este produto também pertence à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$.

18| E

Tomando $è = 0$, vem $z = 1$ e $w = 1$. Logo, segue que $|z| + |w| = 2$ e $z - iw = 1 - i$.

Por outro lado, para $è = \frac{ð}{4}\text{rad}$, temos $z = \frac{\sqrt{2}}{2}i$ e $w = \frac{\sqrt{2}}{2} + i$. Desse modo, é fácil ver que $z^2 - w^2 = \sqrt{2}i$ e $z \neq w$.

Finalmente, sendo

$$|\, z \,| = \sqrt{\cos^2 2\text{è} + \text{sen}^2\, \text{è}}$$

e

$$|\, w \,| = \sqrt{\cos^2 \text{è} + \text{sen}^2\, 2\text{è}},$$

encontramos

a vértice $(2,0$

$$|\, z \,|^2 + |\, w \,|^2 = \cos^2 2\text{è} + \text{sen}^2\, \text{è} + \cos^2 \text{è} + \text{sen}^2\, 2\text{è} = 2.$$