Capítulo 8
Função exponencial

Para pensar

1. De acordo com a lei de Moore, o número de transistores integrados em um *chip* dobraria a cada dois anos. Assim, se em 1971, um processador tivesse 2.300 transistores, em 2013, 42 anos (21 períodos de 2 anos) depois, o número de transistores em um processador seria:
$2^{21} \cdot 2.300 = 4.823.449.600$

2. Sendo t o número de períodos de 2 anos decorridos a partir de 1971 para que o número de transistores ultrapasse 19 bilhões, temos:
$2.300 \cdot 2^t > 19.000.000.000 \Rightarrow 2^t > 8.260.870$
Para t = 22, temos:
$2^t = 2^{22} = 4.194.304$
Para t = 23, temos:
$2^t = 2^{23} = 8.388.608$
Assim, t = 23 satisfaz a condição acima. Podemos então fazer:
$23 \cdot 2 = 46$
$1971 + 46 = 2017$
Logo, o número de transistores ultrapassará a marca dos 19 bilhões em 2017.

Exercícios propostos

1.
a) $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$
b) $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$
c) $-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$
d) $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$
e) $-2^3 = -(2 \cdot 2 \cdot 2) = -8$
f) $9^0 = 1$
g) $(-9)^0 = 1$
h) $-9^0 = -1$
i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$
j) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$
k) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$
l) $0^{17} = 0$
m) $1^{43} = 1$
n) $(-1)^{12} = 1$
o) $(-1)^{13} = -1$
p) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$
q) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$
r) $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$
s) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8}$
t) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 = -\frac{125}{8}$
u) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$ ou
$(-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

2.
a) $(5x)^3 = 5^3 \cdot x^3 = 125x^3$
b) $(x^2)^4 = x^{2 \cdot 4} = x^8$
c) $(3x^3)^2 = 3^2 \cdot (x^3)^2 = 9 \cdot x^{3 \cdot 2} = 9x^6$
d) $(2ab^3)^4 = 2^4a^4b^{3 \cdot 4} = 16a^4b^{12}$
e) $(-4x^2y^3)^2 = (-4)^2\, x^{2 \cdot 2}\, y^{3 \cdot 2} = 16x^4y^6$
f) $\left(\frac{2}{b^5}\right)^3 = \frac{2^3}{b^{5 \cdot 3}} = \frac{8}{b^{15}}$
g) $\left(\frac{ab^3}{3c^2}\right)^3 = \frac{a^3b^{3 \cdot 3}}{3^3c^{2 \cdot 3}} = \frac{a^3b^9}{27c^6}$
h) $\left(\frac{2x^3}{5yz^2}\right)^{-2} = \frac{(5yz^2)^2}{(2x^3)^2} = \frac{25y^2z^4}{4x^6}$
i) $\left(\frac{-3t^3}{2u^2}\right)^{-4} = \frac{(2u^2)^4}{(-3t^3)^4} = \frac{16u^8}{81t^{12}}$
j) $\left(\frac{ab^2}{c^5}\right)^{-3} = \frac{(c^5)^3}{(ab^2)^3} = \frac{c^{15}}{a^3b^6}$

3.
a) $x^5 \cdot x^3 = x^{5+3} = x^8$
b) $y^6 : y^2 = y^{6-2} = y^4$
c) $(3a^4b)^2 \cdot (2a^3b^2)^3 = 9a^8b^2 \cdot 8a^9b^6 = 72a^{17}b^8$
d) $\left(\frac{2xy^5}{z^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{xz^3}{y}\right)^4 = \frac{8x^3y^{15}}{z^6} \cdot \frac{x^4z^{12}}{y^4} = 8x^7y^{11}z^6$
e) $\left(\frac{3a^2b^3}{cd}\right)^3 : \left(\frac{3ab^4}{c^2d^3}\right)^2 = \frac{27a^6b^9}{c^3d^3} \cdot \frac{c^4d^6}{9a^2b^8} = 3a^4bcd^3$
f) $\left(\frac{2pq^2}{u^2v}\right)^2 \cdot \left(\frac{4p^2q}{uv^2}\right)^{-2} = \frac{4p^2q^4}{u^4v^2} \cdot \frac{u^2v^4}{16p^4q^2} = \frac{q^2v^2}{4p^2u^2}$

4.
a) $3.000.000.000 = 3 \cdot 10^9$
b) $15.000.000 = 1{,}5 \cdot 10^7$
c) $0{,}000000003 = 3 \cdot 10^{-9}$
d) $0{,}0000000025 = 2{,}5 \cdot 10^{-9}$
e) $-423.000.000 = -4{,}23 \cdot 10^8$
f) $-0{,}00000623 = -6{,}23 \cdot 10^{-6}$

5. $325.000 = 3{,}25 \cdot 10^5$
Logo, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é $3{,}25 \cdot 10^5$ km.
Alternativa **d**.

6. Um cubo com 1 cm de aresta tem volume 1 cm³ e um cubo de 2 cm de aresta tem volume de 8 cm³. Logo, o volume octuplicou. Sendo *v* o volume do cubo de 2 cm de aresta e *n* o número de moles de átomos neste cubo, temos:
$v = 8 \cdot 4{,}816 \cdot 10^{24}$
$$n = \frac{8 \cdot 4{,}816 \cdot 10^{24}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 6{,}4 \cdot 10 = 64$$
Portanto, 64 moles de átomos formam um cubo maciço de alumínio de 2 cm de aresta.

7. $0{,}05\% \cdot 400.000.000.000 = 0{,}0005 \cdot 4 \cdot 10^{11} =$
$= 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{11} = 2 \cdot 10^8$
Alternativa **c**.

8. a) $2{,}7 \cdot 10^{19}$

b) Temos que:

$1\ dm^3 = (1\ dm)^3 = (10\ cm)^3 = 1.000\ cm^3$

Sendo n o número de moléculas que compõem $1\ dm^3$ e sabendo que $2{,}7 \cdot 10^{19}$ moléculas compõem $1\ cm^3$ de ar, podemos fazer:

$n = 1.000 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{19} = 2{,}7 \cdot 10^{22}$

9. a) $\sqrt{25} = 5$

b) $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

c) $\sqrt[3]{8} = 2$

d) $\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}2$

e) $\sqrt[5]{-32} = -2$

f) $\sqrt{\dfrac{1}{100}} = \dfrac{1}{10}$

g) $\sqrt[5]{1} = 1$

h) $\sqrt[3]{0} = 0$

i) $\sqrt[1]{12} = 12$

10. a) V, pela propriedade P1.

b) F, pois temos que:

$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ e $\sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$

Logo: $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{(9 + 16)}$

c) V, pois pela propriedade P2 temos que:

$\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{10}{5}} = \sqrt[3]{2}$

d) V, pois pela propriedade P4 temos que:

$\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^3$

e) F, pois pela propriedade P4 temos que:

$\left(\sqrt{5}\right)^2 = \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$, logo: $5 \neq \sqrt[4]{5}$

f) V, pela propriedade P5.

g) F, pois pela propriedade P5 temos que:

$\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[3 \cdot 2]{7} = \sqrt[6]{7}$

h) V, pois temos que:

$\sqrt{2\sqrt[3]{5}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}} = \sqrt[6]{40}$

11. a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^{1 \cdot 2}} \cdot \sqrt[2 \cdot 3]{2^{1 \cdot 3}} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 2^3} = \sqrt[6]{2^5}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[6]{2}} = \dfrac{\sqrt[4 \cdot 3]{2^{1 \cdot 3}}}{\sqrt[6 \cdot 2]{2^{1 \cdot 2}}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^3}{2^2}} = \sqrt[12]{2}$

12. a) $\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{5}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}$

b) $\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{5}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}$

c) Neste caso, devemos primeiramente simplificar a raiz:

$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

$\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$

13. a) $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3^3} = 9$

b) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

c) $\sqrt{1.024} = \sqrt{2^{10}} = 2^5 = 32$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{512}{125}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3}{5^3}} = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5} = \dfrac{8}{5}$

e) $\sqrt{0{,}1296} = \sqrt{\dfrac{1.296}{10.000}} = \sqrt{\dfrac{2^4 \cdot 3^4}{10^4}} =$

$= \dfrac{2^2 \cdot 3^2}{10^2} = \dfrac{36}{100} = 0{,}36$

f) $\sqrt[5]{-32} = -2$

g) $\sqrt[3]{-0{,}027} = -0{,}3$

h) $\sqrt{\left(1 - \sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{2} = \left|1 - \sqrt{2}\right| - \sqrt{2} =$

$= \left(\sqrt{2} - 1\right) - \sqrt{2} = -1$

Note que, como $1 < \sqrt{2}$, temos:

$\left|1 - \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - 1$

14. a) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

b) $\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

d) $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2} = 2\sqrt[4]{2}$

e) $\sqrt{40} = \sqrt{2^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$

f) $\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = 2\sqrt[5]{3}$

g) $\sqrt{\dfrac{48}{25}} = \dfrac{\sqrt{2^4 \cdot 3}}{\sqrt{5^2}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{5}$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{81}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{3^3 \cdot 3}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{3\sqrt[3]{3}}{2}$

i) $\sqrt{\dfrac{75}{64}} = \dfrac{\sqrt{3 \cdot 5^2}}{\sqrt{2^6}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{8}$

15. a) $4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}\,(4 + 6 - 2) = 8\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{50} + \sqrt{125} - 6\sqrt{5} =$

$= 2\sqrt{5^2 \cdot 2} + \sqrt{5^2 \cdot 5} - 6\sqrt{5} =$

$= 2 \cdot 5\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 10\sqrt{2} - \sqrt{5}$

c) $4\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128} =$

$= 4\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + 2\sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{4^3 \cdot 2} =$

$= 4 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} =$

$= 8\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 18\sqrt[3]{2}$

d) $4\sqrt[5]{3} \cdot 2\sqrt[5]{4} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt[5]{3 \cdot 4} = 8\sqrt[5]{12}$

e) $6\sqrt{10} : 2\sqrt{5} = \dfrac{6\sqrt{10}}{2\sqrt{5}} = 3\sqrt{\dfrac{10}{5}} = 3\sqrt{2}$

f) $12\sqrt[3]{16} : 6\sqrt[3]{2} = \dfrac{12\sqrt[3]{16}}{6\sqrt[3]{2}} = 2\sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = 2\sqrt[3]{8} =$

$= 2 \cdot 2 = 4$

g) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^4 + 2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^4} + 2\sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} = 7\sqrt[3]{5}$

16. a) V, pois temos:

$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2^2 \cdot 2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{8\sqrt{2}}} =$

$= \sqrt{\sqrt{\sqrt{8^2 \cdot 2}}} = \sqrt[8]{128}$

b) F, pois temos:

$\sqrt{\left(1 - \sqrt{5}\right)^2} = \left|1 - \sqrt{5}\right|$

Como $\sqrt{5} > 1$, temos que $1 - \sqrt{5} < 0$; logo,

$\left|1 - \sqrt{5}\right| = -\left(1 - \sqrt{5}\right) = -1 + \sqrt{5}$

Portanto, $\sqrt{\left(1 - \sqrt{5}\right)^2} = -1 + \sqrt{5}$

c) V

d) V, pois temos:

$\sqrt{\left(6 - \sqrt{3}\right)^2} = \left|6 - \sqrt{3}\right| = 6 - \sqrt{3}$

$\sqrt{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2} = \left|1 - \sqrt{3}\right| = \sqrt{3} - 1$

Portanto:

$\sqrt{\left(6 - \sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(1 - \sqrt{3}\right)^2} =$

$= \left(6 - \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3} - 1\right) = 5$

17. a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

b) $\dfrac{10}{3\sqrt{5}} = \dfrac{10\cdot\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{15} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{7}} = \dfrac{2\cdot\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{7^2}}{7} = \dfrac{2\sqrt[3]{49}}{7}$

18. a) $\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

b) $\dfrac{23(4\sqrt{2}-3)}{(4\sqrt{2}+3)(4\sqrt{2}-3)} = \dfrac{23(4\sqrt{2}-3)}{32-9} =$

$= 4\sqrt{2}-3$

c) $\dfrac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \dfrac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} =$

$= \dfrac{7(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$

19. Para $m = 2m_0$, temos:

$$2m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}\,c}{2}$$

Logo, para que sua massa duplique, o objeto deve viajar à velocidade v dada por:

$$v = \frac{\sqrt{3}\,c}{2}$$

20. a) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

b) $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

c) $2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^{-3}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{8}}$

d) $10^{0,5} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

e) $6^{0,75} = 6^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{6^3} = \sqrt[4]{216}$

f) $4^{-0,2} = 4^{-\frac{2}{10}} = 4^{-\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4^{-1}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{4}}$

21. a) $\sqrt[4]{3^1} = 3^{\frac{1}{4}}$

b) $\sqrt[5]{7^3} = 7^{\frac{3}{5}}$

c) $\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$

22. a) Temos:

$36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$

$27^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27^{-1}} = \dfrac{1}{3}$

$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8$

Portanto:

$36^{\frac{1}{2}} + 27^{-\frac{1}{3}} - 16^{\frac{3}{4}} = 6 + \dfrac{1}{3} - 8 = -\dfrac{5}{3}$

b) Temos:

$100^{0,5} = 100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$

$81^{0,75} = 81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3 = 27$

$16^{-1,25} = 16^{-\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{(2^4)^{-5}} = 2^{-5} = \dfrac{1}{32}$

Portanto:

$100^{0,5} - 81^{0,75} + 16^{-1,25} = 10 - 27 + \dfrac{1}{32} = -\dfrac{543}{32}$

23. Como $a \geqslant 0$, podemos extrair a raiz cúbica de ambos os membros da igualdade $a^3 = b$. Assim, temos:

$a^3 = b \Rightarrow \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{b}$

$\therefore\ a = \sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}}$

Portanto:

$(\sqrt[5]{a})^4 = a^{\frac{4}{5}} = \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = b^{\frac{4}{15}}$

Alternativa **e**.

24. $A = k\cdot m^{\frac{2}{3}}$

Determinando a nova área A' para $m' = 8m$, temos:

$A' = k\cdot(m')^{\frac{2}{3}} = k\cdot(8m)^{\frac{2}{3}} = k\cdot 8^{\frac{2}{3}}\cdot m^{\frac{2}{3}} = k\cdot(2^3)^{\frac{2}{3}}\cdot m^{\frac{2}{3}}$

$\therefore\ A' = 4km^{\frac{2}{3}} = 4A$

Alternativa **b**.

25. a) $\left[(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}} = (\sqrt{3})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{3})^2 = 3$

b) $(7^{\sqrt{2}})^{\sqrt{\frac{1}{2}}} = (7^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 7^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = 7^1 = 7$

c) $(3^{\sqrt{3}}\cdot 2^{\sqrt{27}})^{\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\cdot 2^{\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}} = 3^3\cdot 2^9 =$

$= 27\cdot 512 = 13.824$

d) $1^{\sqrt{5}} + 0^{\pi} = 1 + 0 = 1$

26. $\dfrac{16^{\sqrt{2}}}{2^{3\sqrt{2}}} = \dfrac{(2^4)^{\sqrt{2}}}{(2^3)^{\sqrt{2}}} = \left(\dfrac{2^4}{2^3}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}}$

Alternativa **a**.

27. Temos que $6^{1+\sqrt{2}} = 6^1\cdot 6^{\sqrt{2}}$ e $6^{1+\sqrt{2}} \approx 75{,}6$. Logo:

$6^1\cdot 6^{\sqrt{2}} \approx 75{,}6 \Rightarrow 6^{\sqrt{2}} \approx \dfrac{75{,}6}{6}$

$\therefore\ 6^{\sqrt{2}} \approx 12{,}6$

Alternativa **d**.

28. $\sqrt{5} \approx 2{,}236067978 \Rightarrow \sqrt{5} \approx 2{,}236$

2,236 está mais próximo de 2,240 do que 2,230. Logo, está mais próximo de 2,24.

Portanto: $7^{\sqrt{5}} \approx 7^{2,24}$

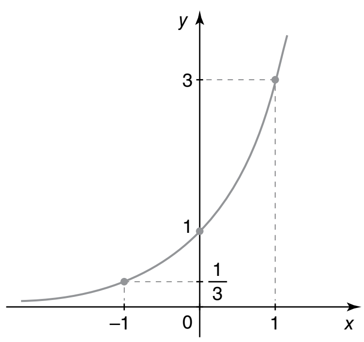
Alternativa **e**.

29. a) $f(x) = 3^x$

x	y
−1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3

$D = \mathbb{R}$

$Im = \mathbb{R}_+^*$

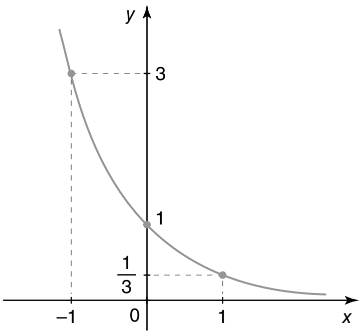


b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	y
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$

$D = \mathbb{R}$

$Im = \mathbb{R}_+^*$

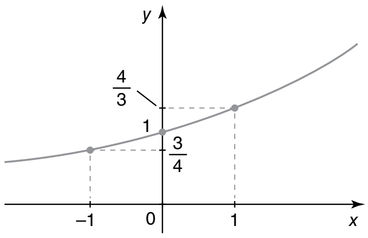


c) $h(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

x	y
-1	$\frac{3}{4}$
0	1
1	$\frac{4}{3}$

$D = \mathbb{R}$

$Im = \mathbb{R}_+^*$

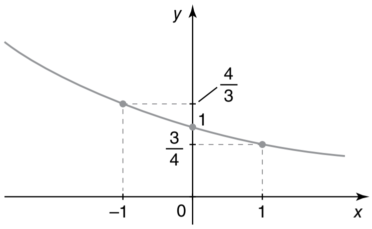


d) $t(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

x	y
-1	$\frac{4}{3}$
0	1
1	$\frac{3}{4}$

$D = \mathbb{R}$

$Im = \mathbb{R}_+^*$



30. Os pontos $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ e $\left(2, \frac{18}{5}\right)$ pertencem ao gráfico de f; logo:

$$\begin{cases} f(0) = \frac{5}{2} \\ f(2) = \frac{18}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \cdot a^0 = \frac{5}{2} \\ k \cdot a^2 = \frac{18}{5} \end{cases}$$

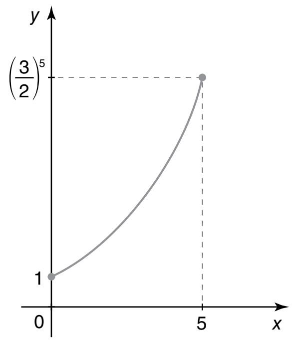
$\therefore\ k = \frac{5}{2}$ e $a = \frac{6}{5}$

Assim, $f(x) = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^x$ e, portanto:

$$f(3) = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{108}{25}$$

31. a) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

x	y
0	1
1	$\frac{3}{2}$
2	$\frac{9}{4}$
3	$\frac{27}{8}$
4	$\frac{81}{16}$
5	$\frac{243}{32}$



b) Como f é crescente em todo o seu domínio, temos:

I. V, pois $4 > 3 \Rightarrow f(4) > f(3)$

II. F, pois $2 > 1 \Rightarrow f(2) > f(1)$

III. V, pois a função é crescente.

IV. F, pois a função é crescente.

V. V, pois a função é injetora (bijetora).

32. $0 \leqslant t \leqslant 4$

$i = -10\% = -0{,}1$ (taxa anual)

$C = 200.000$

$M = ?$

a) Aplicando a fórmula $M = C(1 + i)^t$, temos:

$M = 200.000(1 - 0{,}1)^t \Rightarrow M = 200.000(0{,}9)^t$, com $0 \leqslant t \leqslant 4$

b) Substituindo t por 4, obtemos:

$M = 200.000(0{,}9)^4 \Rightarrow M = 200.000 \cdot 0{,}6561$

$\therefore\ M = 131.220$

Logo, o valor do imóvel daqui a 4 anos será R$ 131.220,00.

33. Sendo I a população inicial, i a taxa diária de crescimento, t o tempo decorrido em dias e P a população final, temos:

$I = 10.000$

$i = 20\% = 0{,}2$ (taxa diária)

$t \geqslant 0$

$(1{,}2)^5 \approx 2{,}49$

$P = ?$

a) Nessa situação, podemos empregar a fórmula do montante para taxa constante. Assim:

$P = I(1 + i)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow P = 10.000(1 + 0{,}2)^t$

$\therefore\ P = 10.000 \cdot (1{,}2)^t$, com $t \geqslant 0$

b) Substituindo t por 5, temos:

$P = 10.000 \cdot (1{,}2)^5 \approx 10.000 \cdot 2{,}49 \Rightarrow$

$\Rightarrow P \approx 24.900$

Logo, daqui a 5 dias a população será de, aproximadamente, 24.900 indivíduos.

34. Como $f(x)$ é uma função constante, concluímos que a inflação se mantém mês a mês. O preço $p(x)$ do produto pode ser calculado de acordo com a fórmula:

$p(x) = 10 \cdot (1 + f(x))^x = 10 \cdot (1{,}02)^x$

Desse modo, concluímos que o preço do produto também vai aumentar, mês a mês.

35. a) $64^x = 256 \Rightarrow (2^6)^x = 2^8$, ou seja, $2^{6x} = 2^8 \Rightarrow 6x = 8$

$\therefore x = \frac{4}{3}$

Logo, $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$.

b) $25^{x+2} = 125^{x+5} \Rightarrow (5^2)^{x+2} = (5^3)^{x+5}$, ou seja,

$2x + 4 = 3x + 15 \Rightarrow x = -11$

Logo, $S = \{-11\}$.

c) $\left(\frac{8}{125}\right)^{2x-1} = \left(\frac{25}{4}\right)^{2x} \Rightarrow \left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^{2x-1} = \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^{2x}$, ou seja, $6x - 3 = -4x \Rightarrow x = \frac{3}{10}$

Logo, $S = \left\{\frac{3}{10}\right\}$.

d) $5^{2x-1} = 1 \Rightarrow 5^{2x-1} = 5^0$ e, portanto, $2x - 1 = 0$, ou seja, $x = \frac{1}{2}$.

Logo, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

e) $7^x = 8^x \Rightarrow \frac{7^x}{8^x} = \frac{8^x}{8^x}$, ou seja, $\left(\frac{7}{8}\right)^x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^x = \left(\frac{7}{8}\right)^0$

$\therefore x = 0$

Logo, $S = \{0\}$.

f) $\sqrt[3]{25^x} = \sqrt{5} \Rightarrow 25^{\frac{x}{3}} = 5^{\frac{1}{2}}$, ou seja,

$5^{\frac{2x}{3}} = 5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{2x}{3} = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{3}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

36. $P(t) = \frac{1.560}{3 + 5 \cdot 2^{0,5t}}$

a) A estimativa atual se dá para $t = 0$:

$P(0) = \frac{1.560}{3 + 5 \cdot 2^{0,5 \cdot 0}} = \frac{1.560}{3 + 5} = \frac{1.560}{8} = 195$

Logo, a estimativa atual da região é de 195 mil habitantes.

b) Para $t = 1$, temos:

$P(1) = \frac{1.560}{3 + 5 \cdot 2^{0,5 \cdot 1}} = \frac{1.560}{3 + 5 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1.560}{3 + 5 \cdot \sqrt{2}}$

Adotando $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, temos:

$P(1) = \frac{1.560}{3 + 5 \cdot \sqrt{2}} \approx \frac{1.560}{3 + 5 \cdot 1{,}41} \approx 155$

Logo, a estimativa da população dessa região daqui a 1 ano é de 155 mil habitantes.

c) Para $P(t) = 120$, temos:

$\frac{1.560}{3 + 5 \cdot 2^{0,5t}} = 120 \Rightarrow 3 + 5 \cdot 2^{0,5t} = 13$

$\therefore 5 \cdot 2^{0,5t} = 10 \Rightarrow 2^{0,5t} = 2^1$

$\therefore 0{,}5t = 1 \Rightarrow t = 2$

Logo, daqui a 2 anos a população será estimada em 120 mil habitantes.

37. Se uma quantidade inicial C cresce ou decresce a uma taxa constante i durante t unidades de tempo, então a quantidade final M, ao término desse período, é dada por $M = C(1 + i)^t$. Assim, temos:

a) Ao final de três dias, a quantidade M, em mg, da substância no sangue do atleta é dada por:

$M = 10(1 - 0{,}2)^3 \Rightarrow M = 5{,}12$

b) Após o teste, o tempo t, em dia, para que a quantidade da substância no sangue do atleta seja reduzida a 6,4 mg, é dado por:

$6{,}4 = 10(1 - 0{,}2)^t \Rightarrow 0{,}64 = (0{,}8)^t$

$\therefore (0{,}8)^2 = (0{,}8)^t \Rightarrow t = 2$

38. a) $2^x \cdot 2 + \frac{2^x}{2} = 20 \Rightarrow 2^x \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 20$, ou seja: $2^x = 8$

Logo, $x = 3$.

Portanto, $S = \{3\}$.

b) $3^x \cdot 3^1 - 3^x \cdot 3^2 = -54 \Rightarrow 3^x \cdot (3 - 9) = -54$, ou seja, $3^x = 9$; logo, $x = 2$.

Portanto, $S = \{2\}$.

39. a) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \Rightarrow 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

Fazendo $y = 5^x$:

$y^2 - 6y + 5 = 0 \Rightarrow y = 5$ ou $y = 1$

Ou seja: $5^x = 5$ ou $5^x = 1$

- $5^x = 5 \Rightarrow 5^x = 5^1$
  $\therefore x = 1$
- $5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0$
  $\therefore x = 0$

  Logo, $S = \{0, 1\}$.

b) $49^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0 \Rightarrow 7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$

Fazendo $y = 7^x$:

$y^2 - 6y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7$ ou $y = -1$

Assim:

- $7^x = 7 \Rightarrow x = 1$
- $7^x = -1 \Rightarrow \nexists x$

  Logo, $S = \{1\}$.

c) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 3 \cdot 2^x \cdot 2 + 8 = 0$

Fazendo $y = 2^x$:

$y^2 - 6y + 8 = 0 \Rightarrow y = 4$ ou $y = 2$

Ou seja: $2^x = 4$ ou $2^x = 2$

- $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$
- $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

Logo, $S = \{1, 2\}$.

d) $3^{2x+1} + 2 \cdot 3^x = 1 \Rightarrow 3^{2x} \cdot 3 + 2 \cdot 3^x = 1$

Fazendo $3^x = y$:

$3y^2 + 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$ ou $y = -1$

Assim:

- $3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = 3^{-1}$
  $\therefore x = -1$
- $3^x = -1 \Rightarrow \nexists x$

  Logo, $S = \{-1\}$.

40. Podemos fazer:

$f(t) = g(t) \Rightarrow 2^{t+1} + 200 = 4^t + 152$

$\therefore 2^t \cdot 2 + 200 = 2^{2t} + 152$

Fazendo $2^t = k$, temos:

$2k + 200 = k^2 + 152 \Rightarrow k^2 - 2k - 48 = 0$

$\therefore k = -6$ ou $k = 8$

Ou seja: $2^t = -6$ ou $2^t = 8$

- $2^t = -6 \Rightarrow \nexists x$
- $2^t = 8 \Rightarrow t = 3$

Logo, daqui a 3 anos os quilombos terão o mesmo número de indivíduos.

41. Se a cultura A tem no instante zero ($t = 0$) 20.000 indivíduos e, sabendo que sua população dobra a cada hora, a sua população P_A em função do tempo t, em horas, é dada por: $P_A(t) = 20.000 \cdot 2^t$

Se a cultura B tem após 3 horas ($t = 3$) uma população de 32.000 indivíduos e, sabendo que a sua população também dobra a cada hora, a sua população P_B em função do tempo t, em horas, é dada por: $P_B(t) = 32.000 \cdot 2^{t-3}$, para $t \geqslant 3$.

Assim, para sabermos quantas horas após o instante zero a população A possuía 256.000 indivíduos a mais do que a da cultura B, podemos fazer:

$P_A(t) = P_B(t) + 256.000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20.000 \cdot 2^t = 32.000 \cdot 2^{t-3} + 256.000$

$\therefore 20 \cdot 2^t = \dfrac{32 \cdot 2^t}{2^3} + 256 \Rightarrow 16 \cdot 2^t = 256$

$\therefore 2^t = 16 \Rightarrow t = 4$

42. a) $32^{2x-1} < 4^{2x+1} \Rightarrow 2^{5(2x-1)} < 2^{2(2x+1)}$

Como $2 > 1$, o sentido da desigualdade se mantém para os expoentes:

$10x - 5 < 4x + 2 \Rightarrow 6x < 7$

$\therefore x < \dfrac{7}{6}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{7}{6}\right\}$.

b) $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x+3} \geqslant \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+4} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{5}\right)^{2(x+3)} \geqslant \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+4}$

Como $0 < \dfrac{1}{5} < 1$, o sentido da desigualdade é invertido para os expoentes:

$2x + 6 \leqslant x + 4 \Rightarrow x \leqslant -2$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2\}$.

c) $5^x > 1 \Rightarrow 5^x > 5^0$

$\therefore x > 0$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

d) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x+2} \leqslant 1 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x+2} \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^0$

$\therefore x + 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -2$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$.

e) $2^x < -1$

Não existe x tal que 2^x é negativo. Logo, $S = \varnothing$.

f) $7^x > 0$

Toda potência de base positiva é um número positivo. Logo, $S = \mathbb{R}$.

g) Dividindo por 7^x ambos os membros da desigualdade $3^x > 7^x$, obtemos:

$\dfrac{3^x}{7^x} > 1 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{7}\right)^x > \left(\dfrac{3}{7}\right)^0$

$\therefore x < 0$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

h) $(0,2)^{2x+1} > (0,04)^{3x+6} \Rightarrow (0,2)^{2x+1} > (0,2)^{2(3x+6)}$

$\therefore 2x + 1 < 6x + 12 \Rightarrow x > -\dfrac{11}{4}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\dfrac{11}{4}\right\}$.

i) $\left(\sqrt{2}\right)^{2x+1} < \left(\sqrt{2}\right)^{4x+2} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}(2x+1)} < 2^{\frac{1}{2}(4x+2)}$

$\therefore x + \dfrac{1}{2} < 2x + 1 \Rightarrow x > -\dfrac{1}{2}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\dfrac{1}{2}\right\}$.

j) $\left(\sqrt{0,5}\right)^{2x+1} \leqslant \left(\sqrt{0,5}\right)^{x+4} \Rightarrow 0,5^{\frac{1}{2}(2x+1)} \leqslant 0,5^{\frac{1}{2}(x+4)}$

$\therefore x + \dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{x}{2} + 2 \Rightarrow x \geqslant 3$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

43. a) Observamos que os pontos (5; 0,5) e (0, 16) pertencem ao gráfico da função $f(x) = ka^x$. Assim:

$\begin{cases} 0,5 = ka^5 \\ 16 = ka^0 \Rightarrow k = 16 \end{cases}$

Substituindo k por 16:

$0,5 = 16a^5 \Rightarrow a^5 = \dfrac{1}{32}$

$\therefore a^5 = 2^{-5} \Rightarrow a = 2^{-1}$

Logo, $k = 16$ e $a = \dfrac{1}{2}$.

b) Pelo item **a**, temos:

$f(x) = 16 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \Rightarrow f(x) = 2^{4-x}$

Assim:

$f(x) < 8 \Rightarrow 2^{4-x} < 2^3$

$\therefore 4 - x < 3 \Rightarrow x > 1$

Como o período considerado é de 5 anos, concluímos que $1 < x \leqslant 5$.

c) No período considerado, a taxa de inflação esteve abaixo de 8% durante 4 anos.

44. a) $5^x + 5^{x-2} \leqslant 26 \Rightarrow 5^x + \dfrac{5^x}{5^2} - 26 \leqslant 0$

Fazendo $y = 5^x$:

$25y + y - 650 \leqslant 0 \Rightarrow 26y \leqslant 650$

$\therefore y \leqslant 25$

Voltando à variável original x, temos:

$5^x \leqslant 25 \Rightarrow 5^x \leqslant 5^2$

$\therefore x \leqslant 2$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$.

b) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x-1} \geqslant 11 \Rightarrow 3^x \cdot 3 + \dfrac{2 \cdot 3^x}{3} \geqslant 11$

Fazendo $y = 3^x$:

$9y + 2y \geqslant 33 \Rightarrow 11y \geqslant 33$

$\therefore y \geqslant 3$

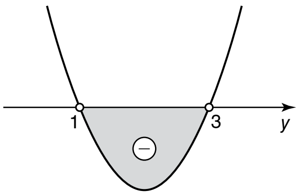
Ou seja: $3^x \geqslant 3^1 \Rightarrow x \geqslant 1$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$.

c) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$

$3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$

Fazendo $y = 3^x$, obtemos: $y^2 - 4y + 3 < 0$



$\therefore\ 1 < y < 3$

Retornando à variável original x, temos:

$1 < 3^x < 3 \Rightarrow 3^0 < 3^x < 3^1$

$\therefore\ 0 < x < 1$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$.

45. $f(t) = 300 \cdot 2^{t-1} + 900$

$g(t) = 70 \cdot 2^{t+2} - 140$

a) Para $t = 0$, temos:

$f(0) = 300 \cdot 2^{0-1} + 900 = 300 \cdot 2^{-1} + 900 = 1.050$

$g(0) = 70 \cdot 2^{0+2} - 140 = 70 \cdot 2^2 - 140 = 140$

Logo, no início do estudo, a população A era de 1.050 indivíduos e a população B, de 140 indivíduos.

b) Como o estudo terminou após 7 minutos, temos:

$f(7) = 300 \cdot 2^{7-1} + 900 = 20.100$

$g(7) = 70 \cdot 2^{7+2} - 140 = 35.700$

Logo, ao final do estudo o número de indivíduos da população A era de 20.100 e o número de indivíduos da população B era de 35.700.

c) $g(t) > f(t) \Rightarrow 70 \cdot 2^{t+2} - 140 > 300 \cdot 2^{t-1} + 900$

$\therefore\ 70 \cdot 2^t \cdot 2^2 - 140 > 300 \cdot \dfrac{2^t}{2} + 900 \Rightarrow$

$\Rightarrow 280 \cdot 2^t - 140 > 150 \cdot 2^t + 900$

$\therefore\ 130 \cdot 2^t > 1.040 \Rightarrow 2^t > 8$

$\therefore\ t > 3$

Logo, o número de indivíduos de A superou o número de indivíduos de B após 3 minutos.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. $\dfrac{3^{3-n} + 3 \cdot 3^{2-n} - 9 \cdot 3^{1-n}}{9 \cdot 3^{2-n}} =$

$= \dfrac{3^3 \cdot 3^{-n} + 3 \cdot 3^2 \cdot 3^{-n} - 9 \cdot 3^1 \cdot 3^{-n}}{9 \cdot 3^2 \cdot 3^{-n}}$

$\therefore\ \dfrac{3^3 \cdot 3^{-n} + 3 \cdot 3^2 \cdot 3^{-n} - 9 \cdot 3^1 \cdot 3^{-n}}{9 \cdot 3^2 \cdot 3^{-n}} =$

$= \dfrac{3^{-n} \cdot (3^3 + 3^3 - 3^3)}{3^{-n} \cdot 3^4} = \dfrac{3^3}{3^4}$

$\therefore\ \dfrac{3^3}{3^4} = \dfrac{1}{3}$

Alternativa **b**.

2. $5^{17} \cdot 4^9 = 5^{17} \cdot (2^2)^9 = 5^{17} \cdot 2^{18} = 5^{17} \cdot 2^{17} \cdot 2 =$

$= 2 \cdot (5 \cdot 2)^{17} = 2 \cdot 10^{17}$

Esse número tem 17 zeros e o algarismo 2, ou seja, 18 algarismos.

Alternativa **b**.

3. **a)** $x \cdot y = 4{,}2 \cdot 10^{18} \cdot 5 \cdot 10^{-9} = 21 \cdot 10^9 = 2{,}1 \cdot 10^{10}$

b) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4{,}2 \cdot 10^{18}}{5 \cdot 10^{-9}} = 0{,}84 \cdot 10^{27} = 8{,}4 \cdot 10^{26}$

c) $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5 \cdot 10^{-9}} = 0{,}2 \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^8$

4. Temos:

$M = 2{,}45 \cdot 10^{18} = 245 \cdot 10^{16}$

$N = 4{,}7 \cdot 10^{16}$

Logo:

$M + N = (245 + 4{,}7) \cdot 10^{16} = 249{,}7 \cdot 10^{16} =$

$= 2{,}497 \cdot 10^{18}$

Alternativa **b**.

5. Temos:

$M = 9{,}84 \cdot 10^{15}$

$N = 1{,}23 \cdot 10^{16} = 12{,}3 \cdot 10^{15}$

Logo:

$M < N$

$M + N = (9{,}84 + 12{,}4) \cdot 10^{15} = 22{,}24 \cdot 10^{15} = 2{,}224 \cdot 10^{16}$

$M \cdot N = 9{,}84 \cdot 12{,}3 \cdot 10^{15}.\ 10^{15} =$

$= 121{,}032 \cdot 10^{30} \approx 1{,}21 \cdot 10^{32}$

Alternativa **a**.

6. **a)** $5\sqrt{24} + 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3} + \sqrt{6} =$

$= 5 \cdot 2\sqrt{6} + 8\sqrt{6} + \sqrt{6} = 19\sqrt{6}$

b) $10\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2} =$

$= 10\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 11\sqrt[3]{2}$

7. **a)** $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{49} = 7$

b) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

c) $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5]{3^5} = 3$

d) $\sqrt[25]{3^{18}} \cdot \sqrt[25]{3^7} = \sqrt[25]{3^{25}} = 3$

e) $4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$

f) $2\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{3^4} = 2 \cdot \sqrt[5]{3^5} = 2 \cdot 3 = 6$

8. **a)** $\dfrac{1 \cdot \sqrt[6]{2^5}}{3\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{2^5}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^5}}{3 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt[6]{32}}{6}$

b) $\dfrac{2 \cdot \sqrt{a}}{3\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \dfrac{2\sqrt{a}}{3a}$

c) $\dfrac{a \cdot \sqrt[5]{c^3}}{b\sqrt[5]{c^2} \cdot \sqrt[5]{c^3}} = \dfrac{a\sqrt[5]{c^3}}{bc}$

d) $\dfrac{6(2\sqrt{5} + \sqrt{7})}{(2\sqrt{5} - \sqrt{7})(2\sqrt{5} + \sqrt{7})} = \dfrac{6(2\sqrt{5} + \sqrt{7})}{20 - 7} =$

$= \dfrac{6(2\sqrt{5} + \sqrt{7})}{13}$

e) $\dfrac{20(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}{(5\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3})} =$

$= \dfrac{20(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}{50 - 12} = \dfrac{20(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}{38} =$

$= \dfrac{10(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}{19}$

f) $\dfrac{\sqrt{2}(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})} =$

$= \dfrac{\sqrt{2}(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})}{18 - 12} = \dfrac{6 + 2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{3 + \sqrt{6}}{3}$

9. $\sqrt[3]{\dfrac{60.000 \cdot 0{,}00009}{0{,}0002}} = \sqrt[3]{\dfrac{6 \cdot 10^4 \cdot 9 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 10^{-4}}} =$

$= \sqrt[3]{27 \cdot 10^3} = 3 \cdot 10$

Alternativa **c**.

10. Para $a = 70$, $b = 90$ e $c = 120$, temos:

$m = \dfrac{a + b + c}{2} = \dfrac{280}{2} = 140$

Aplicando a fórmula de Herão:

$A = \sqrt{m(m - a)(m - b)(m - c)} =$

$= \sqrt{140 \cdot (140 - 70) \cdot (140 - 90) \cdot (140 - 120)}$

$\therefore\ A = \sqrt{140 \cdot 70 \cdot 50 \cdot 20} = \sqrt{9.800.000} = 1.400\sqrt{5}$

Logo, a área do triângulo é $1.400\sqrt{5}$ cm^2.

11. Temos:

$\sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2}$

$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt[4]{324} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^4} = 3\sqrt[4]{2^2} = 3\sqrt{2}$

Portanto:

$\dfrac{5 \cdot \sqrt[12]{64} - \sqrt{18}}{\sqrt{50} - \sqrt[4]{324}} = \dfrac{5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$

Alternativa **e**.

12. a) $\dfrac{1\left(\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2} \cdot 1 + 1^2\right)}{\left(\sqrt[3]{2} + 1\right)\left(\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2} \cdot 1 + 1^2\right)} =$

$= \dfrac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2^3} + 1^3} = \dfrac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1}{3}$

b) $\dfrac{3\left(\sqrt[3]{10^2} + \sqrt[3]{10} \cdot 2 + 2^2\right)}{\left(\sqrt[3]{10} - 2\right)\left(\sqrt[3]{10^2} + \sqrt[3]{10} \cdot 2 + 2^2\right)} =$

$= \dfrac{3\left(\sqrt[3]{100} + 2\sqrt[3]{10} + 4\right)}{\sqrt[3]{10^3} - 2^3} =$

$= \dfrac{3\left(\sqrt[3]{100} + 2\sqrt[3]{10} + 4\right)}{10 - 8} = \dfrac{3\sqrt[3]{100} + 6\sqrt[3]{10} + 12}{2}$

13. a) $5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{625}$

b) $9^{0{,}3} = 9^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{9^3} = \sqrt[10]{729}$

c) $8^{1{,}2} = 8^{\frac{12}{10}} = 8^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{8^6} = 8\sqrt[5]{8}$

14. a) $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt[5]{x^{10}} = x^{\frac{10}{5}} = x^2$

c) $\sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$

15. a) Temos:

$16^{0{,}75} = 16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = 2^3 = 8$

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

$25^{-0{,}5} = 25^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{25^{-1}} = \dfrac{1}{5}$

Portanto:

$16^{0{,}75} + 8^{\frac{1}{3}} - 25^{-0{,}5} = 8 + 2 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{49}{5}$

b) Temos:

$\sqrt{256^{0{,}25}} = \sqrt{(2^8)^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{2^2} = 2$

$[(3^{25})^{0{,}4}]^{0{,}2} = 3^{25 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{2}{10}} = 3^2 = 9$

$1.000^{\frac{2}{3}} = (10^3)^{\frac{2}{3}} = 100$

Portanto:

$\sqrt{256^{0{,}25}} - [(3^{25})^{0{,}4}]^{0{,}2} + 1.000^{\frac{2}{3}} = 2 - 9 + 100 = 93$

c) Temos:

$(0{,}09)^{0{,}5} = 0{,}09^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}09} = 0{,}3$

$(0{,}0016)^{0{,}25} = (0{,}0016)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{0{,}0016} = 0{,}2$

Portanto:

$(0{,}09)^{0{,}5} + (0{,}0016)^{0{,}25} = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$

16. $\dfrac{a^{-\frac{1}{9}} \cdot \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2}{-a^2} : \left(-\dfrac{1}{a}\right)^2 = \dfrac{a^{-\frac{1}{9}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{-a^2} : \left(-\dfrac{1}{a}\right)^2 =$

$= -\dfrac{a^{-\frac{1}{9} + \frac{2}{3}}}{\cancel{a^2}} \cdot \cancel{a^2} = -a^{\frac{5}{9}} = -\sqrt[9]{a^5} = \sqrt[9]{-a^5}$

Alternativa **a**.

17. Sabemos que $10^0 = 1$ e $10^1 = 10$. Logo $0 < x < 1$ tal que $10^x = 2$. Fazendo algumas tentativas:

$10^{0{,}5} \approx 3{,}16$

$10^{0{,}4} \approx 2{,}51$

$10^{0{,}3} \approx 1{,}99$

$10^{0{,}31} \approx 2{,}04$

$10^{0{,}305} \approx 2{,}02$

$10^{0{,}302} \approx 2{,}00$

Logo, $x \approx 0{,}302$.

18. Transformando os radicais em potências com expoentes racionais e usando uma calculadora científica, obtemos:

a) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{0{,}5} \approx 1{,}7321$

b) $\sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}} = 7^{0{,}25} \approx 1{,}6266$

c) $\sqrt[5]{9} = 9^{\frac{1}{5}} = 9^{0{,}2} \approx 1{,}5518$

19. a) $3^{\sqrt{2}} = 3^{2^{0{,}5}} \approx 3^{1{,}4142} \approx 4{,}7288$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}} = (2^{0{,}5})^{3^{0{,}5}} \approx (2^{0{,}5})^{1{,}7320} \approx 2^{0{,}8660} \approx 1{,}8226$

c) $4^{\pi} \approx 77{,}8802$

20. Usando as aproximações $5^{\sqrt{2}} \approx 9{,}7$ e $2^{2\sqrt{2}} \approx 7{,}1$, temos:

$(20)^{\sqrt{2}} = (5 \cdot 4)^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}} \cdot 2^{2\sqrt{2}} \approx 9{,}7 \cdot 7{,}1 = 68{,}87$

21. a) Os pontos $A = (1,3)$ e $B = \left(2, \dfrac{9}{2}\right)$ pertencem ao gráfico de f; logo:

$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f(2) = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \cdot a^1 = 3 \quad \text{(I)} \\ k \cdot a^2 = \dfrac{9}{2} \quad \text{(II)} \end{cases}$

De (II), temos:

$k \cdot a^2 = \dfrac{9}{2} \Rightarrow (k \cdot a^1) \cdot a = \dfrac{9}{2}$ (III)

Substituindo (I) em (III), temos:

$(k \cdot a^1) \cdot a = \dfrac{9}{2} \Rightarrow 3 \cdot a = \dfrac{9}{2}$

$\therefore\ a = \dfrac{3}{2}$

Substituindo a por $\dfrac{3}{2}$ na equação (I), temos:

$k \cdot \dfrac{3}{2} = 3 \Rightarrow k = 2$

Assim, temos $a = \dfrac{3}{2}$ e $k = 2$.

b) A função $f(x) = ka^x$ para $a = \frac{3}{2}$ e $k = 2$ será $f(x) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$. Assim, temos:

$f(0) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^0 = 2$

$f(3) = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{4}$

22. **a)** Para $k = 4$, temos: $f(x) = 2^{x+3}$ e $g(x) = 4 \cdot 2^x + 32$.
A abscissa do ponto comum a f e g é a raiz da equação $f(x) = g(x)$; assim, temos:

$f(x) = g(x) \Rightarrow 2^{x+3} = 4 \cdot 2^x + 32$

$\therefore 2^x \cdot 2^3 = 4 \cdot 2^x + 32 \Rightarrow 8 \cdot 2^x = 4 \cdot 2^x + 32$

$\therefore 8 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^x = 32 \Rightarrow 4 \cdot 2^x = 32$

$\therefore 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

Substituindo x por 3 em qualquer uma das funções f ou g, obtemos a ordenada do ponto comum aos gráficos; por exemplo, substituindo em f, obtemos:

$f(3) = 2^{3+3} = 64$

Logo, o ponto P, comum aos gráficos de f e g, é $P(3, 64)$.

b) Resolvendo a equação $f(x) = g(x)$, em função de k, obtemos:

$f(x) = g(x) \Rightarrow 2^{x+3} = k \cdot 2^x + 32$

$\therefore 2^x \cdot 2^3 = k \cdot 2^x + 32 \Rightarrow 8 \cdot 2^x = k \cdot 2^x + 32$

$\therefore 8 \cdot 2^x - k \cdot 2^x = 32 \Rightarrow (8 - k) \cdot 2^x = 32$

Para que os gráficos de f e g não tenham ponto em comum, essa equação deve ser impossível. Discutindo-a em relação ao parâmetro k, temos:

I. Para $k = 8$, a equação é impossível.

II. Para $k \neq 8$, chegamos a:

$$2^x = \frac{32}{8 - k}$$

Como 2^x é um número positivo para qualquer valor real de x, temos que essa equação é impossível se $\frac{32}{8-k} \leqslant 0$, ou seja, $8 - k < 0$ ou, ainda, $k > 8$.

Por (I) e (II), concluímos que os gráficos de f e g não têm ponto em comum para $k \geqslant 8$.

23. $a^{\sqrt{3}} = b^{\sqrt[3]{9}} \Rightarrow \left(a^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \left(b^{\sqrt[3]{9}}\right)^{\sqrt{\frac{1}{3}}}$

$\therefore a = b^{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}} \Rightarrow a = b^{\sqrt[6]{3}}$

Alternativa **c**.

24. **a)** $\sqrt{a} < \sqrt[3]{a}$, se $a > 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} < a^{\frac{1}{3}}$, se $a > 1$

F, pois pela propriedade P2 da inequação exponencial, para $a > 1$, temos:

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt{a} < a$, se $0 < a < 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} < a^1$, se $0 < a < 1$

F, pois pela propriedade P3 da inequação exponencial, para $0 < a < 1$, temos:

$\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} > a^1$

c) V, pois pela propriedade P3 da inequação exponencial, para $0 < a < 1$, temos:

$3 > 2 \Rightarrow a^3 < a^2$

d) F, pois pela propriedade P3 da inequação exponencial, para $0 < a < 1$, temos:

$3 > 2 \Rightarrow a^3 < a^2$

e) F, supondo $a = 2$, temos:

$a^{-2} = 2^{-2} = 0{,}25$ e

$a^2 = 2^2 = 4$, logo:

$0{,}25 \neq 4$

Alternativa **c**.

25. $h(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{3 - x^2} \Rightarrow h(x) = \frac{1}{125} \cdot 5^{x^2}$

Logo, o menor valor que 5^{x^2} pode assumir é 1, quando $x = 0$. Portanto, o mínimo da função é:

$h(0) = \frac{1}{125} \cdot 5^{0^2} = \frac{1}{125}$

26. **a)** $121^{2x} = 11^{x+3} \Rightarrow (11^2)^{2x} = 11^{x+3}$

$\therefore 4x = x + 3$

$\therefore x = 1$

Logo, $S = \{1\}$.

b) $3^x + 3^{x+2} + 3^{x-1} = \frac{31}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^x + 3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^{-1} = \frac{31}{3}$

Colocando 3^x em evidência:

$3^x\left(1 + 9 + \frac{1}{3}\right) = \frac{31}{3} \Rightarrow 3^x\left(\frac{31}{3}\right) = \frac{31}{3}$

$\therefore 3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0$

$\therefore x = 0$

Logo, $S = \{0\}$.

c) $5^{x+1} + 25^{x+2} = 26 \Rightarrow 5^x \cdot 5 + 5^{2x} \cdot 5^4 = 26$

$\therefore 5^{2x} \cdot 625 + 5^x \cdot 5 - 26 = 0$

Fazendo $5^x = y$, temos:

$625y^2 + 5y - 26 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{5}$ ou $y = -\frac{26}{125}$

Voltando à variável original:

- $5^x = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^x = 5^{-1} \therefore x = -1$
- $5^x = -\frac{26}{125} \Rightarrow \nexists\, x$

Logo, $S = \{-1\}$.

d) $5 \cdot 2^{x+1} - 8 \cdot 4^{x-1} = 8 \Rightarrow 5 \cdot 2^x \cdot 2 - 8 \cdot 2^{2x} \cdot 2^{-2} = 8$

$\therefore 10 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^{2x} - 8 = 0$

Substituindo 2^x por y, temos:

$-2y^2 + 10y - 8 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = 4$

Voltando à variável original:

$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

Logo, $S = \{0, 2\}$.

27. **a)** $16^x - 4^x - 2 = 0 \Rightarrow 4^{2x} - 4^x - 2 = 0$

Sendo $y = 4^x$, temos:

$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$ ou $y = -1$

Voltando à variável original: $4^x = 2$ ou $4^x = -1$

- $4^x = 2 \Rightarrow 2^{2x} = 2^1$

  $\therefore x = \frac{1}{2}$

- $4^x = -1 \Rightarrow \nexists x$

Logo, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) $81^x - 9^x - 6 = 0 \Rightarrow 9^{2x} - 9^x - 6 = 0$
Sendo $y = 9^x$, temos:
$y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow y = 3$ ou $y = -2$
Voltando à variável original:

- $y = 3 \Rightarrow 3 = 3^{2x}$
  $\therefore x = \frac{1}{2}$
- $y = -2 \Rightarrow -2 = 3^{2x}$
  $\therefore \nexists x$

Logo, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

c) $2^{x+3} = (2^x + 2)^2 \Rightarrow 2^x \cdot 2^3 = 2^{2x} + 4 \cdot 2^x + 4$
$\therefore 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 4 = 0$
Fazendo $2^x = y$, temos:
$y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (y - 2)^2 = 0$
$\therefore y = 2$
Voltando à variável original:
$y = 2 \Rightarrow 2^x = 2$
$\therefore x = 1$
Logo, $S = \{1\}$.

d) $4^x - (2 + \sqrt{2})2^x + 2\sqrt{2} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^{2x} - (2 + \sqrt{2})2^x + 2\sqrt{2} = 0$
Sendo $y = 2^x$:
$y^2 - (2 + \sqrt{2})y + 2\sqrt{2} = 0$
Resolvendo pelo método da soma e do produto, concluímos que as raízes são 2 e $\sqrt{2}$.
Logo:

- $y = 2 \Rightarrow 2 = 2^x$
  $\therefore x = 1$
- $y = \sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{1}{2}} = 2^x$
  $\therefore x = \frac{1}{2}$

Portanto, $S = \left\{1, \frac{1}{2}\right\}$.

28. $(4^{3-x})^{2-x} = 1 \Rightarrow 4^{(3-x)(2-x)} = 4^0$
$\therefore (3 - x)(2 - x) = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 2$
Calculando o produto das soluções, temos:
$3 \cdot 2 = 6$
Alternativa **c**.

29. $\begin{cases} 25^x \cdot 125^y = \frac{1}{5} \\ 32^x \cdot 8^{2y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{2x} \cdot 5^{3y} = 5^{-1} \\ 2^{5x} \cdot 2^{6y} = 2^1 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 5x + 6y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 3$ e $y = -\frac{7}{3}$

Assim, temos:

$x + y = \frac{2}{3}$

$x - y = \frac{16}{3}$

$\frac{x}{y} = -\frac{9}{7}$

Alternativa **c**.

30. $f(x) = \frac{80}{27} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$
$g(x) = 3^{x-1}$

- O ponto A é o ponto de intersecção da função $f(x)$ com o eixo das ordenadas ($x = 0$). Assim, temos:

$\begin{cases} f(x) = \frac{80}{27} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{80}{27} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \\ x = 0 \end{cases}$

$\therefore y = \frac{80}{27} + \left(\frac{1}{3}\right)^{0+1}$

$\therefore y = \frac{89}{27}$

Logo, o ponto A tem coordenadas $\left(0, \frac{89}{27}\right)$.

- O ponto B é o ponto de intersecção da função $g(x)$ com o eixo das ordenadas $x = 0$. Assim, temos:

$\begin{cases} g(x) = 3^{x-1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3^{x-1} \\ x = 0 \end{cases}$

$\therefore y = 3^{0-1}$

$\therefore y = \frac{1}{3}$

Logo, o ponto B tem coordenadas $\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

- O ponto C é o ponto de intersecção da função $f(x)$ com $g(x)$. Assim, temos:

$\begin{cases} y = \frac{80}{27} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \\ y = 3^{x-1} \end{cases}$

$\frac{80}{27} + \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} = 3^{x-1} \Rightarrow \frac{80}{27} + \frac{1}{3^x \cdot 3} = \frac{3^x}{3}$

Fazendo $3^x = k$, temos:

$\frac{80}{27} + \frac{1}{k \cdot 3} = \frac{k}{3} \Rightarrow 9k^2 - 80k - 9 = 0$

$\therefore k = 9$ ou $k = -\frac{1}{9}$

Voltando à variável x, temos:

I) $3^x = 9 \Rightarrow x = 2$

II) $3^x = -\frac{1}{9} \Rightarrow \nexists x$

Portanto, $x = 2$. Substituindo x por 2 na função $y = 3^{x-1}$, temos:
$y = 3^{2-1} \Rightarrow y = 3$
Logo, o ponto C tem coordenadas (2, 3).

31. a) $81^x \leqslant 243^{x+2} \Rightarrow 3^{4x} \leqslant 3^{5(x+2)}$
Como $3 > 1$, o sentido da desigualdade se mantém para os expoentes:
$4x \leqslant 5x + 10 \Rightarrow -x \leqslant 10$
$\therefore x \geqslant -10$
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -10\}$.

b) $(0,5)^{4x+3} > (0,25)^{x+5} \Rightarrow (0,5)^{4x+3} > (0,5)^{2(x+5)}$
Como $0 < 0,5 < 1$, o sentido da desigualdade se inverte para os expoentes:
$4x + 3 < 2x + 10 \Rightarrow 2x < 7$
$\therefore x < \frac{7}{2}$
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{7}{2}\right\}$.

c) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{16}{81}\right)^{2x+3} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} < \left(\frac{3}{2}\right)^{-4(2x+3)}$

Como $\frac{3}{2} > 1$, o sentido da desigualdade se mantém para os expoentes:

$x + 1 < -8x - 12 \Rightarrow 9x < -13$

$\therefore x < -\frac{13}{9}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{13}{9}\right\}$.

d) $(\sqrt[5]{4})^x \geqslant (\sqrt[3]{4})^{2x+1} \Rightarrow \left(4^{\frac{1}{5}}\right)^x \geqslant \left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{2x+1}$

Como $4 > 1$, o sentido da desigualdade se mantém para os expoentes:

$\frac{x}{5} \geqslant \frac{2x+1}{3} \Rightarrow -7x \geqslant 5$

$\therefore x \leqslant -\frac{5}{7}$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{5}{7}\right\}$.

e) $(\sqrt{0,5})^{2x+1} \leqslant (\sqrt{0,5})^{x+4}$

Como $0 < \sqrt{0,5} < 1$, o sentido da desigualdade se inverte para os expoentes:

$2x + 1 \geqslant x + 4 \Rightarrow x \geqslant 3$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

32. a) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^x < 2^{x-2} - 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x \cdot 2 - 3 \cdot 2^x < \frac{2^x}{2^2} - 5$

Sendo $y = 2^x$:

$2y - 3y < \frac{y}{4} - 5 \Rightarrow \frac{5y}{4} > 5$

$\therefore y > 4$

Voltando à variável original:

$y > 4 \Rightarrow 2^x > 2^2$

$\therefore x > 2$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$.

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 3^{x-1} > \frac{82}{3 \cdot 3^x} \Rightarrow \frac{1}{3^x} \cdot \frac{1}{3} + 3^x \cdot \frac{1}{3} > \frac{82}{3 \cdot 3^x}$,

Fazendo $y = 3^x$, temos:

$\frac{1}{3y} + \frac{y}{3} > \frac{82}{3y} \Rightarrow \frac{y^2 - 81}{3y} > 0$

$\therefore y^2 > 81 \Rightarrow y < -9$ ou $y > 9$

Retornando à variável original, $3^x < -9$ ou $3^x > 9$.

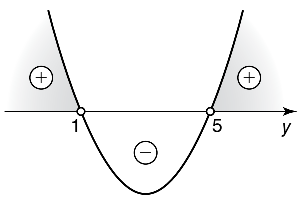
Como a inequação $3^x < -9$ não tem solução, concluímos que as soluções da inequação proposta são as mesmas de $3^x > 9$, ou seja, $x > 2$. Assim, o conjunto solução S é dado por:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

c) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 > 0 \Rightarrow 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 > 0$

Sendo $y = 5^x$:

$y^2 - 6y + 5 > 0$



Portanto, $y < 1$ ou $y > 5$.

Voltando à variável original:

- $y < 1 \Rightarrow 5^x < 5^0$

  $\therefore x < 0$

- $y > 5 \Rightarrow 5^x > 5^1$

  $\therefore x > 1$

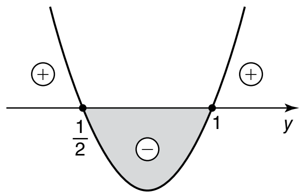
Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0$ ou $x > 1\}$.

d) $2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \leqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \leqslant 0$

Fazendo $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, temos:

$2y^2 - 3y + 1 \leqslant 0$



Portanto, $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1$.

Voltando à variável original:

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow x \leqslant 1$ (I)

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow x \geqslant 0$ (II)

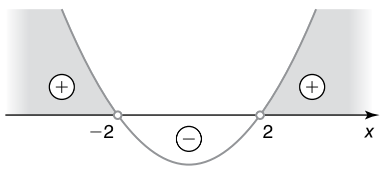
O conjunto solução é dado por (I) ∩ (II); logo,

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

33. $\pi^{x^2} - \pi^4 > 0 \Rightarrow \pi^{x^2} > \pi^4$

Como $\pi > 1$, o sentido da desigualdade se mantém para os expoentes:

$x^2 > 4 \Rightarrow x^2 - 4 > 0$



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2$ ou $x > 2\}$.

O exercício procura um conjunto que pertença a essa solução, que no caso é o intervalo [3, 10].

Alternativa **b**.

34. $3^{x+2} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 27^{x+2} \Rightarrow 3^{x+2} \leqslant 3^{-x} \leqslant 3^{3x+6}$

Como $3 > 1$, o sentido das desigualdades se mantém para os expoentes:

$x + 2 \leqslant -x \leqslant 3x + 6 \Rightarrow \begin{cases} x + 2 \leqslant -x \\ -x \leqslant 3x + 6 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x \leqslant -1 \\ x \geqslant -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant -1$

Logo, o número inteiro que satisfaz a inequação é -1.

Exercícios contextualizados

35. Para saber o número de batimentos do coração dessa pessoa, podemos fazer:

$70 \cdot 360 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 72$

Temos que:

$70 = 7 \cdot 2 \cdot 5$

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

$24 = 2^3 \cdot 3$

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

Portanto:

$70 \cdot 360 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 72 = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7$

Alternativa **e**.

36. 1 *petabyte* = 2^{20} *gigabytes* $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 3 *petabytes* = $3 \cdot 2^{20}$ *gigabytes*

Como um DVD é capaz de armazenar 4 *gigabytes*, para saber o número n de DVDs necessários para se armazenar 3 *petabytes* podemos fazer:

$$n = \frac{3 \cdot 2^{20}\ gigabytes}{4\ gigabytes} = 3 \cdot 2^{18}$$

Temos que:

$2 \cdot 2^{18} < 3 \cdot 2^{18} < 4 \cdot 2^{18} \Rightarrow 2^{19} < n < 2^{20}$

Alternativa **e**.

37. **a)** $3{,}8\ \text{cm} = 3{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{km}$

$d(t) = 3{,}84 \cdot 10^5 + 3{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot t$

b) Para $t = 10^8$, temos:

$d = 384.000 + 3{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^8 \Rightarrow d = 387.800$

Logo, a distância será de 387.800 quilômetros.

c) Para $d = 992.000$, temos:

$992.000 = 384.000 + 3{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot t \Rightarrow$

$\Rightarrow 3{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot t = 608.000$

$$\therefore t = \frac{6{,}08 \cdot 10^5}{3{,}8 \cdot 10^{-5}} = 1{,}6 \cdot 10^{10}$$

Logo, daqui a $1{,}6 \cdot 10^{10}$ anos.

38. Sendo q a carga elétrica correspondente a $8{,}4 \cdot 10^8$ prótons, temos:

$q = 8{,}4 \cdot 10^8 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 13{,}44 \cdot 10^{-11} = 1{,}344 \cdot 10^{-10}$

39. **a)** $5.000.000 = 5 \cdot 10^6$

b) Transformando 1 mL em mm³, temos:

$1\ \text{mL} = 0{,}001\ \text{L} = 0{,}001\ \text{dm}^3 = 10^{-3}\ \text{dm}^3 =$

$= 10^{-3} \cdot 10^6\ \text{mm}^3$

$\therefore 1\ \text{mL} = 10^3\ \text{mm}^3$

Com uma regra de três, encontramos o número x de glóbulos vermelhos de 1 mL de sangue:

$$\begin{array}{ccc} 5 \cdot 10^6 & \text{———} & 1\ \text{mm}^3 \\ x & \text{———} & 10^3\ \text{mm}^3 \end{array} \Rightarrow x = 5 \cdot 10^6 \cdot 10^3$$

$\therefore x = 5 \cdot 10^9$

40. Pelo enunciado, sabemos que 1 *googol* vale 10^{100}.

a) $\dfrac{10^{100}}{2} = \dfrac{10 \cdot 10^{99}}{2} = 5 \cdot 10^{99}$

b) 75% de $10^{100} = \dfrac{75}{100} \cdot 10^{100} = \dfrac{75 \cdot 10^{100}}{10^2} =$

$= 75 \cdot 10^{98} = 7{,}5 \cdot 10^{99}$

c) $\dfrac{3}{10^3} \cdot 10^{100} = 3 \cdot 10^{97}$

d) $4 \cdot \dfrac{1}{10^{100}} = 4 \cdot 10^{-100}$

41. 29,3% · 510,3 milhões de quilômetros quadrados =

$$= \frac{29{,}3 \cdot 510{,}3 \cdot 10^6}{10^2}\ \text{km}^2 = 14.951{,}79 \cdot 10^4 \cdot 10^6\ \text{m}^2 =$$

$= 1{,}495179 \cdot 10^{14}\ \text{m}^2$

42. Descobrindo o volume v do lago:

$v = 12\ \text{km}^2 \cdot 10\ \text{m} = 12 \cdot 10^6\ \text{m}^2 \cdot 10\ \text{m}$

$\therefore v = 1{,}2 \cdot 10^8\ \text{m}^3$

Como uma regra de três encontramos a quantidade total x dessa substância no lago:

$$\begin{array}{ccc} 1\ \text{m}^3 & \text{———} & 5\ \text{g} \\ 1{,}2 \cdot 10^8\ \text{m}^3 & \text{———} & x \end{array}$$

$x = 6 \cdot 10^8\ \text{g}$

Alternativa **a**.

43. Substituindo $\Delta t'$ por 60 e Δt por 20 na fórmula

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \text{ temos:}$$

$$60 = \frac{20}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \Rightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{V}{c}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\therefore \frac{V}{c} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore V = \frac{2c\sqrt{2}}{3}$$

Alternativa **a**.

44. **a)** $y = 10.000 \cdot 2^x$

b) 4 meses $= \dfrac{4}{12}$ ano $= \dfrac{1}{3}$ ano

Para $x = \dfrac{1}{3}$:

$y = 10.000 \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 10.000 \cdot \sqrt[3]{2} \approx 12.599$

Portanto, daqui a 4 meses haverá 12.599 indivíduos, aproximadamente.

45. $R = (5n)^{\frac{2}{3}}$

a) Para $n = 365$, temos:

$R = (5 \cdot 365)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1.825^2} \approx 149{,}334$ milhões de quilômetros

b) Para $n = 687$, temos:

$R = (5 \cdot 687)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3.435^2} \approx 227{,}659$ milhões de quilômetros

c) 778.500.000 quilômetros = 778,5 milhões de quilômetros

Para $R = 778{,}5$, temos:

$778{,}5 = (5n)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow 778{,}5 = \sqrt[3]{(5n)^2}$

Elevando a equação ao cubo nos dois membros:

$471.819.461{,}6 = 25n^2 \Rightarrow n^2 = 18.872.778{,}46$

$\therefore n \approx 4.344$ ou $n \approx -4.344$

Como n representa o número de dias, concluímos que o número de dias terrestres equivalente a um ano jupiteriano é aproximadamente 4.344.

d) $R = (5n)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow R = \sqrt[3]{(5n)^2}$

Elevando a equação ao cubo nos dois membros:

$R^3 = 5^2n^2 \Rightarrow n^2 = \dfrac{R^3}{5^2}$

Elevando a equação a $\dfrac{1}{2}$ nos dois membros:

$n = \left(\dfrac{R^3}{5^2}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow n = \dfrac{R^{\frac{3}{2}}}{5}$

46. Primeiramente precisamos descobrir o valor das constantes a e k da função exponencial $N(t) = ka^t$. Temos que os pares coordenados (0, 3.000) e $\left(\dfrac{1}{3}, 9.000\right)$ pertencem a essa função. Desse modo, podemos fazer:

$\begin{cases} 3.000 = ka^0 \Rightarrow k = 3.000 \\ 9.000 = ka^{\frac{1}{3}} \end{cases}$

Substituindo k por 3.000, temos:

$9.000 = 3.000 \cdot a^{\frac{1}{3}} \Rightarrow a^{\frac{1}{3}} = 3$

$a^{\frac{1}{3}} = 3^1 = 3^{\frac{3}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}}$

Portanto, $k = 3.000$ e $a = 27$.

Logo, o número de indivíduos, após 1 hora, é dado por: $N(1) = 3.000 \cdot 27 = 81.000$

47. a)

t	$f(t)$
0	100.000
1	$100.000 \cdot 2^1$
2	$100.000 \cdot 2^2$
3	$100.000 \cdot 2^3$
4	$100.000 \cdot 2^4$
5	$100.000 \cdot 2^5$

Generalizando:
$f(t) = 100.000 \cdot 2^t$

t	$g(t)$
0	70.000
1	$70.000 + 2.000 \cdot 1$
2	$70.000 + 2.000 \cdot 2$
3	$70.000 + 2.000 \cdot 3$
4	$70.000 + 2.000 \cdot 4$
5	$70.000 + 2.000 \cdot 5$

Generalizando:
$g(t) = 70.000 + 2.000t$

b) O número de ratos que haverá por habitante após 5 anos é dado pela razão $\dfrac{f(5)}{g(5)}$, ou seja:

$\dfrac{100.000 \cdot 2^5}{70.000 + 2.000 \cdot 5}$ ratos/habitante =

= 40 ratos/habitante

48. $A_0 = 580$ m²

$i = 5\% = 0,05$ (taxa diária)

$t = 10$ dias

Aplicando a fórmula $A = A_0(1 + i)^t$, temos:

$A = 580(1 + 0,05)^{10} \Rightarrow A = 580(1,05)^{10} \approx 580 \cdot 1,629$

$\therefore A \approx 944,82$ m²

Logo, a área coberta daqui a 10 dias é, aproximadamente, 944,82 m².

49. a) $y_0 = 18,7$

$i = 25\% = 0,25$ (taxa anual)

Aplicando a fórmula $y = y_0 (1 + i)^x$, temos:

$y = 18,7(1 + 0,25)^x$

$\therefore y = 18,7 \cdot (1,25)^x$

b) $x = 2.020 - 2.011 = 9$

Para $x = 9$, temos:

$y = 18,7 \cdot (1,25)^9 \approx 139,326$

Logo, o faturamento desse segmento comercial em 2020 será de aproximadamente 139,326 bilhões de reais.

50. a) $P_0 = 1$ atm

$i = 9\% = 0,09$

Aplicando a fórmula $P = P_0 (1 + i)^h$, temos:

$P = 1(1 - 0,09)^h$

$\therefore P = (0,91)^h$

b) Para $h = 5$, temos:

$P = (0,91)^5 \approx 0,624$

Portanto, a uma altitude de 5 km a pressão atmosférica será de aproximadamente 0,624 atm.

51. A população com 60 anos de idade ou mais, em 2030, em milhões, será

$y = 363 \cdot e^{0,03 \cdot 30} = 363 \cdot (e^{0,3})^3 = 363 \cdot (1,35)^3 \approx 893$

Alternativa **e**.

52. Das 8 h até às 16 h 30 min do dia seguinte temos 32 h 30 min, ou seja, dois períodos de 13 horas, mais 6 h 30 min. Assim, basta olhar pelo gráfico que entre 26 e 39 horas o percentual da quantidade original de iodo-123 que ainda permanecerá no organismo será um valor maior que 12,5% e menor que 25%.

Alternativa **a**.

53. a) Fazendo uma analogia desse tipo de questão com questões de aplicação ou retirada de dinheiro, uma vez que a retirada de ácido no recipiente se dará sempre em cima do novo valor, temos:

Volume inicial de ácido: $v_0 = 800$

Taxa de retirada de ácido: $i = \dfrac{a}{800}$

Volume final de ácido: v

Número de retiradas: n

E, portanto:

$v = 800 \cdot \left(1 - \dfrac{a}{800}\right)^n$

Para $n = 5$, temos $v = 25$ ml:

$25 = 800 \cdot \left(1 - \dfrac{a}{800}\right)^5 \Rightarrow \left(1 - \dfrac{a}{800}\right)^5 = \dfrac{1}{32}$

$\therefore 1 - \dfrac{a}{800} = \dfrac{1}{2}$

$1 - \dfrac{a}{800} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{a}{800} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore a = 400$

Logo, a quantidade da solução que foi substituída por água em cada uma das cinco etapas foi 400 ml.

b) $v = 25 \cdot \left(1 - \dfrac{a}{25}\right)^n$

Para $n = 1$, temos $v = 20$ ml:

$20 = 25 \cdot \left(1 - \dfrac{a}{25}\right)^1 \Rightarrow 1 - \dfrac{a}{25} = \dfrac{20}{25}$

$\therefore a = 5$

No entanto, como a solução tem 800 ml de ácido, podemos então fazer uma regra de três:

$\dfrac{5}{25} = \dfrac{x}{800} \Rightarrow x = 160$

Logo, deve-se substituir dela por água pura, 160 ml.

54. a) $f(0) = 3^{0+1} = 3$ e $g(0) = 9^{1-0} = 9$

Logo, no início do experimento havia 300 microrganismos do tipo A e 900 do tipo B.

b) $f(t) = g(t) \Rightarrow 3^{t+1} = 9^{1-t}$

$\therefore 3^{t+1} = 3^{2-2t} \Rightarrow t + 1 = 2 - 2t$

$\therefore t = \dfrac{1}{3}$

Logo, o número de microrganismos dos dois tipos se igualaram 20 minutos após o início do experimento.

55. Fazendo uma analogia desse tipo de questão com questões de aplicação ou retirada de dinheiro, uma vez que a diminuição do nível sonoro se dará sempre em cima do novo valor de comprimento, temos:

Nível sonoro inicial: $s_0 = 50$

Nível sonoro final: s

Taxa de diminuição do som: $i = 10\% = 0,1$ (taxa por metro)

Número de metros: n

Assim:

$s = s_0 \cdot (1 - i)^n \Rightarrow s = 50 \cdot (1 - 0,1)^n$

Para $s = 32,805$, temos:

$32,805 = 50 \cdot (1 - 0,1)^n \Rightarrow (0,9)^n = \dfrac{65,61}{100}$

$\therefore \left(\dfrac{9}{10}\right)^n = \dfrac{6.561}{10.000} \Rightarrow \left(\dfrac{9}{10}\right)^n = \left(\dfrac{9}{10}\right)^4$

$\therefore n = 4$

Logo, o comprimento do barbante é 4 metros.

56. Esquematizando os dados do problema, temos:

$C = 4,5$ bilhões de litros

$i = 0,2\% = 0,002$ (taxa anual)

$t = ?$

$M = 4,57245$ bilhões de litros

E aplicando a fórmula $M = C(1 + i)^t$:

$4,57245 = 4,5(1 + 0,002)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{4,57245}{4,5} = (1,002)^t \Rightarrow 1,0161 = (1,002)^t$

Observando a tabela, constatamos que $1,0161 = (1,002)^8$; portanto:

$1,0161 = (1,002)^t \Rightarrow (1,002)^8 = (1,002)^t$

$\therefore t = 8$

Ou seja, o consumo de água dessa cidade será de 4,57245 bilhões de litros daqui a 8 anos.

57. $C =$ R\$ 20.000,00

$i = 10\% = 0,1$ (taxa anual)

$\begin{cases} M > 29.282 \\ M = 20.000 \cdot (1 + 0,1)^t \end{cases} \Rightarrow 20.000 \cdot (1 + 0,1)^t > 29.282$

$\therefore (1,1)^t > 1,4641 \Rightarrow (1,1)^t > (1,1)^4$

$\therefore t > 4$

Logo, o montante acumulado no período da aplicação foi maior que R$ 29.282,00 durante 6 anos.

58. a) Para $t = 5$, temos:

$n(5) = 5 - 2(0,9)^5 = 3,81902 \approx 3,819$

Logo, foram vendidas aproximadamente 3.819 unidades de telefones celulares.

b) $n(t) > 3,38 \Rightarrow 5 - 2(0,9)^t > 3,38$

$\therefore (0,9)^t < 0,81 \Rightarrow (0,9)^t < (0,9)^2$

$\therefore t > 2$

Como a promoção durou 5 dias, concluímos que $2 < t \leqslant 5$.

59. $M(t) = M_0 \times 2^{-kt}$

Primeiramente, precisamos descobrir o valor da constante k. Pelo enunciado, temos $M_0 = 512$ e $M = 32$, para $t = 6$:

$M(t) = M_0 \times 2^{-kt} \Rightarrow 32 = 512 \times 2^{-6k}$

$\therefore 2^{-6k} = \dfrac{1}{16} \Rightarrow 2^{-6k} = 2^{-4}$

$\therefore -6k = -4 \Rightarrow k = \dfrac{2}{3}$

Logo, a equação será dada por $M(t) = 512 \times 2^{-\frac{2}{3}t}$.

Como para manter sua eficácia mínima o doente precisa ter 16 mg do medicamento no organismo, precisamos determinar para que t isso irá acontecer; logo, queremos determinar t para $M = 16$:

$M(t) = 512 \times 2^{-\frac{2}{3}t} \Rightarrow 16 = 512 \times 2^{-\frac{2}{3}t}$

$\therefore 2^{-\frac{2}{3}t} = \dfrac{1}{32} \Rightarrow 2^{-\frac{2}{3}t} = 2^{-5}$

$\therefore -\dfrac{2t}{3} = -5 \Rightarrow t = 7,5$

Logo, a nova dose deve ser ministrada no máximo após 7 horas e 30 minutos, ou seja, até as 15 horas e 30 minutos.

Alternativa **a**.

60. a) Para $t = 0$, temos:

$f(0) = 600 \cdot 2^{0-1} + 1.600 = 1.900$ e

$g(0) = 500 \cdot 2^0 = 500$

Logo, no início do estudo, a população A possuía 1.900 indivíduos e B possuía 500 indivíduos.

b) $f(t) \geqslant g(t) \Rightarrow 600 \cdot 2^{t-1} + 1.600 \geqslant 500 \cdot 2^t$

$\therefore \dfrac{600 \cdot 2^t}{2} + 1.600 \geqslant 500 \cdot 2^t$

Fazendo a mudança de variável: $2^t = y$, obtemos:

$300y + 1.600 \geqslant 500y \Rightarrow y \leqslant 8$

Retornando à variável original, temos:

$2^t \leqslant 8 \Rightarrow 2^t \leqslant 2^3$

$\therefore t \leqslant 3$

Logo, o número de indivíduos da população A permaneceu maior ou igual ao número de indivíduos de B durante 3 meses.

Pré-requisitos para o capítulo 9

1. a) expoente 2, porque $10^2 = 100$

b) expoente -2, porque $10^{-2} = \frac{1}{100}$

c) expoente 0,5, porque $10^{0,5} \approx 3,16$

d) expoente $-0,2$, porque $10^{-0,2} = 0,63$

2. Pela tabela, temos que $2^{2,7} = 6,5$ e $2^{1,2} = 2,3$. Logo:
- $2^{2,7} \cdot 2^{1,2} = 2^{3,9}$ e $6,5 \cdot 2,3 = 14,95$
  $\therefore\ 2^{3,9} = 14,95$
- $2^{2,7} : 2^{1,2} = 2^{1,5}$ e $6,5 : 2,3 \approx 2,83$
  $\therefore\ 2^{1,5} \approx 2,83$

3.
- $f(x)$ é injetora, pois se a e b são números reais, com $f(a) = f(b)$, então
  $\frac{5}{a-2} = \frac{5}{b-2} \Rightarrow a = b$
- $f(x)$ não é sobrejetora, pois não existe x pertencente ao domínio tal que $f(x) = 0$.

4. C = R$ 1.000,00
$i = 0,02\% = 0,0002$ (taxa diária)
M = R$ 1.002,00
Aplicando a fórmula de juro composto $M = C(1 + i)^t$:
$1.002 = 1.000(1 + 0,0002)^t \Rightarrow (1,0002)^t = 1,002$
Com o auxílio da calculadora encontramos o valor de t:
$(1,0002)^1 = 1,0002$
$(1,0002)^2 \approx 1,0004$
$(1,0002)^5 \approx 1,001$
$(1,0002)^{10} = 1,002001801$
Logo, o montante será de R$ 1.002,00 após 10 dias de aplicação.

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. a) $\begin{cases} 2 = C \cdot 16^k \\ 3 = C \cdot 81^k \end{cases}$

Dividindo, membro a membro, as equações do sistema, obtemos:

$\frac{2}{3} = \frac{16^k}{81^k} \Rightarrow \frac{2}{3} = \left(\frac{16}{81}\right)^k$

$\therefore\ \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4k} \Rightarrow 4k = 1$

$\therefore\ k = \frac{1}{4}$

Substituindo k por $\frac{1}{4}$ na primeira equação, obtemos:

$2 = C \cdot 16^{\frac{1}{4}} \Rightarrow C = 1$

b) $\begin{cases} 16 = m \cdot 2^n \\ 81 = m \cdot 3^n \end{cases}$

Dividindo, membro a membro, as equações do sistema, obtemos:

$\frac{16}{81} = \frac{2^n}{3^n} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\therefore\ n = 4$

Substituindo n por 4 na primeira equação, obtemos:
$16 = m \cdot 2^4 \Rightarrow m = 1$

c) Substituindo x por 4 na lei $x = y^{\frac{1}{4}}$, obtemos:

$4 = y^{\frac{1}{4}} \Rightarrow y = 256$
Logo, a medida correspondente do órgão B será 256 mm.

d) Substituindo x por 4 na lei $y = x^4$, obtemos:
$y = 4^4 \Rightarrow y = 256$
Logo, a medida correspondente do órgão B será 256 mm.

2. Quanto maior o animal, menor a razão entre a área da superfície corporal e o volume corporal, o que determina menor perda de calor por unidade de massa. Por isso animais que vivem em regiões frias tendem a ser maiores.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: O aluno esqueceu, ao fazer a substituição, de considerar que $y > 0$, pois $2^x > 0$.

Resolução correta:
Representando a equação sob a forma

$(2^x)^2 + (m - 3) \cdot 2^x + \frac{1}{4} = 0$ e substituindo 2^x por y, obtemos:

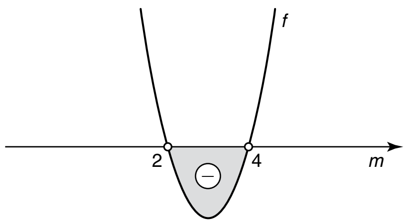
$y^2 + (m - 3)y + \frac{1}{4} = 0 \quad \text{(I)}$

Para que a equação exponencial proposta não admita raiz real, a equação (I):
1. não pode ter raiz ou
2. ter raízes reais negativas

Para que ocorra a consição (1), devemos ter $\Delta < 0$:

$(m - 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} < 0 \Rightarrow m^2 - 6m + 8 < 0$

Esboçando o gráfico da função $f(m) = m^2 - 6m + 8$, temos:



Observando que $f(m) < 0$ se, e somente se, $2 < m < 4$, concluímos que ocorre a condição (1) se, e somente se, $2 < m < 4$.

- Como o produto das raízes da equação (I) é positivo $\left(\frac{1}{4}\right)$, temos que a condição (2) ocorrerá se, e somente se, o discriminante dessa equação não for negativo e a soma das raízes for negativa:

  $\begin{cases} (m-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \geqslant 0 \\ 3 - m < 0 \end{cases} \Rightarrow (m \leqslant 2 \text{ ou } m \geqslant 4) \text{ e } m > 3$

De onde concluímos que $m \geqslant 4$.
Pelas análises das condições (1) e (2), concluímos que a equação exponencial proposta não terá raiz real se, e somente se, $m > 2$.