Matemática Aplicada

1 Um mapa de um pequeno parque é uma região em forma de quadrilátero, limitado pelas retas $y = x$, $y = x + 4$, $y = -x + 4$ e $y = -x$, sendo que as unidades estão em quilômetros. A altitude em relação ao nível do mar em cada ponto (x, y) do parque é dada pela expressão $\frac{\sqrt{3}}{4}.(0{,}75x + y^3)$ quilômetros.

A Demonstre que o quadrilátero do parque é um quadrado.

B Qual é a altitude do centro do parque, ponto de encontro das diagonais, em relação ao nível do mar?

Resolução

A Os vértices do quadrilátero são os pontos A(0, 0), B(-2, 2), C(0, 4) e D(2, 2). Temos que AB = BC = CD = DA = $2\sqrt{2}km$. As declividades dos lados são -1, 1, -1 e 1, respectivamente. O produto das declividades dos pares de lados AB e BC; BC e CD; DA e AB é igual a -1. Portanto, os quatro ângulos do quadrilátero são retos e as medidas dos lados são iguais. O quadrilátero é um quadrado.

B O centro do quadrado é o ponto (0, 2). A altitude do centro do parque em relação ao nível do mar é igual a $\frac{\sqrt{3}}{4}.(0+2^3)=2\sqrt{3}km$.

2 Certo município pode ser representado em um mapa como uma malha retangular, $0 \le x \le 5$ e $0 \le y \le 5$ com uma cidade na origem. Uma construtora estimou que o valor do metro quadrado no ponto (x, y) do mapa, x e y números naturais, é dado pela relação:

$$\ln V = \ln 45 - \ln 10 - \left(\frac{x^2 + y^2}{100}\right)$$, sendo V expresso em milhares de reais.

A Expresse V em termos de x e y.

B Quais são o maior e o menor valor, em reais, do metro quadrado no município?

Se necessário, use as aproximações: ln2 = 0,7; ln3 = 1,1.
Observe que o número e é igual a 2,718... e que $y = \ln x$ se e somente se $e^y = x$, com x > 0.

Resolução

A Temos que: $\ln \frac{V}{4,5} = e^{\frac{-x^2 - y^2}{100}}$ e, portanto: $V = 4,5.e^{\frac{-x^2 - y^2}{100}}$

B O maior valor do metro quadrado no município ocorre na origem:

$$4,5.e^0 = 4,5; R\$4500,00$$

O menor valor do metro quadrado no município ocorre no ponto (5, 5):

$$V = 4,5.e^{\frac{-25-25}{100}} = 4,5.e^{-0,5}$$

$$\ln V = \ln \frac{45}{10} + \ln e^{-0,5} = (2\ln 3 + \ln 5) - (\ln 2 + \ln 5) - 0,5 = 2\ln 3 - \ln 2 - 0,5 = 1$$

$V = e^1 = 2,718; R\$2718,00$ aproximadamente.

3 Atenda ao que se pede:

A Determine o produto das raízes da equação cúbica $x^3 + 64 = 0$ que não são números reais.

B Para resolver uma equação cúbica expressa na forma $x^3+3ax=2b$, o matemático francês François Viète (1540 – 1603) substituiu a variável x por $x=\frac{a}{y}-y$ e obteve a equação: $y^6+2by^3-a^3=0$. Obteve os valores de y e depois, os de x. Use esse método para determinar uma raiz da seguinte equação (considere x e y números reais e positivos):

$$x^3+3x.\sqrt[3]{5}=4$$

Resolução

A A única raiz real da equação é -4 e o produto das três raízes é igual a $\frac{-64}{1}=$

- 64. O produto das duas raízes não reais é igual a $\frac{-64}{-4}=16$.

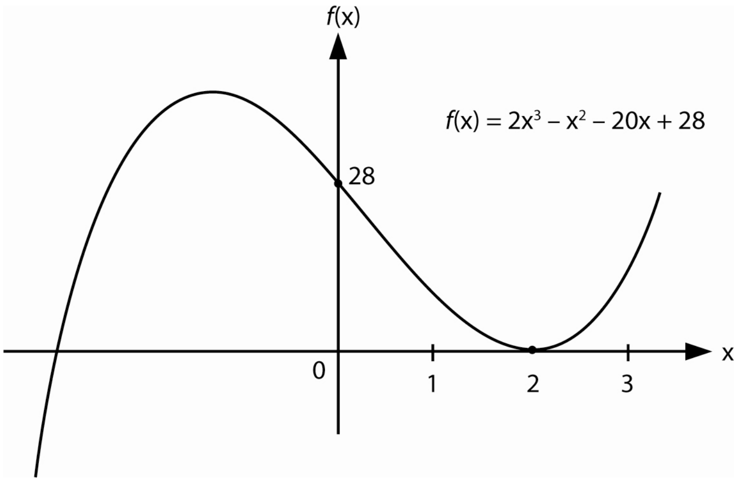
B Observe que $a=\sqrt[3]{5}$ e $2b=4$.

Para resolver a equação $y^6+4y^3-5=0$, substituímos $z=y^3$ e obtemos a equação $z^2+4z-5=0$, cujas raízes são: -5 e 1.
Como y é real e positivo, temos que $y^3 = 1$ e, portanto, $y = 1$.
Encontramos o valor de x: $x=\frac{a}{y}-y=\frac{\sqrt[3]{5}}{1}-1=\sqrt[3]{5}-1$, uma das raízes da equação.

4 A figura mostra o gráfico da função $f(x)=2x^3-x^2-20x+28$.

A Se julgar conveniente, utilize-o para resolver a inequação: $\dfrac{2x^3-x^2-20x+28}{(x^2+x+1)^3}>0$

B Resolva a inequação: $2x^3-x^2-20x+28>28$



Resolução

A A inequação $\dfrac{2x^3-x^2-20x+28}{(x^2+x+1)^3}>0$ é equivalente a $2x^3-x^2-20x-28>0$, pois a expressão do denominador é positiva para qualquer número real x. Como o número 2 é uma raiz da função, podemos escrevê-la nesta forma: $f(x)=(x-2).(2x^2+3x-14)$ cujas raízes são 2, dupla, e, - 3,5, simples.

Observando o gráfico, temos que $f(x)>0$ para x > - 3,5 e x diferente de 2.

B Os valores de x para os quais $f(x)=28$ são as raízes da equação

$2x^3-x^2-20x=x.(2x^2-x-20)=0$, ou seja, $0;\dfrac{1+\sqrt{161}}{4};\dfrac{1-\sqrt{161}}{4}$

A solução da inequação é $\dfrac{1-\sqrt{161}}{4}<x<0$ ou $x>\dfrac{1+\sqrt{161}}{4}$.

5 Uma fábrica constrói dados com a forma de um tetraedro regular. A área de uma face do dado é igual a $9\sqrt{3}cm^2$.

A Qual é a soma das medidas das arestas de um dado?

B As faces do dado são numeradas de 1 a 4. Lançamos dois desses dados. Qual é a probabilidade, expressa em porcentagem, da soma dos números das faces visíveis ser um múltiplo de 5?

Resolução

(a) $\frac{l^2.\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \rightarrow l = 6cm$

A soma das medidas de todas as arestas é igual a 6.6 = 36 cm.

(b)

Dado A	Dado B	Soma
1 2 3	1 2 3	12 13 14 15
1 2 4	1 2 4	13 14 15 16
1 3 4	1 3 4	14 15 16 17
2 3 4	2 3 4	15 16 17 18

A probabilidade da soma ser um múltiplo de 5 é igual a $\frac{4}{16} = 0{,}25 = 25\%$.

6 Uma padaria entrega mensalmente certo tipo de pão, cobrando R$ 1,50 pelo pacote simples, que contém 1 unidade, e R$ 2,50 pelo pacote duplo, que contém 2 unidades.

Na primeira semana, ela entrega a um restaurante 100 pacotes simples e 40 pacotes duplos.
Na segunda semana, 200 pacotes simples e 80 pacotes duplos.
Na terceira semana, 200 pacotes simples e 60 pacotes duplos.
Na quarta semana, 300 pacotes simples e 80 pacotes duplos.

A Escreva um produto de matrizes que expresse o total de pães entregues pela padaria mensalmente ao restaurante e o valor total, em reais, recebido mensalmente pela padaria.

> A matriz produto deve ter esta forma:
>
> Número de pães - - - -
>
> Valor total em reais - - - -
>
> As colunas representam a primeira, segunda, terceira e quarta semanas, respectivamente.

B Usando a matriz produto do item A, calcule o total de pães entregues mensalmente ao restaurante e o valor total, em reais, recebido mensalmente pela padaria.

Resolução

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 200 & 300 \\ 40 & 80 & 60 & 80 \end{pmatrix} \qquad AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 & 200 & 200 & 300 \\ 40 & 80 & 60 & 80 \end{pmatrix}$$

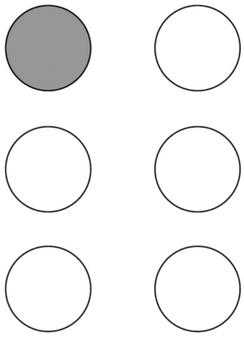
$$AB = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 180 & 360 & 320 & 460 \\ 250 & 500 & 450 & 650 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \textit{número de pães} \\ \to \textit{Valores em reais} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{1ªsem.} & \text{2ª sem.} & \text{3ª sem.} & \text{4ª semana} \end{array} \end{array}$$

(a) Soma = 1320 pães

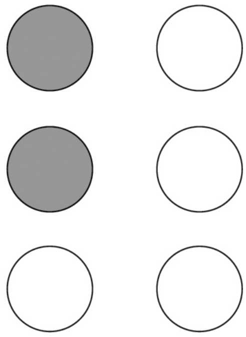
(b) Soma = R$ 1850,00

7

A Braille é um sistema de leitura para cegos inventado pelo francês Louis Braille no ano de 1827, em Paris. Os caracteres são indicados por pontos de alto-relevo que podem representar letras, pontuações, números, sinais matemáticos, notas musicais. Cada célula Braille possui 6 pontos, arrumados num padrão três linhas por duas colunas. Observe como são representadas, por exemplo, as letras A e B.

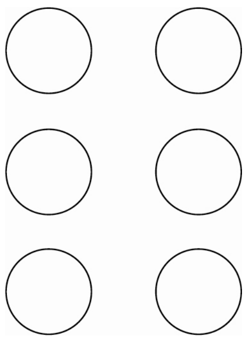


A



B

Considere que quando não há pontos de alto-relevo, não há representação de nenhum caractere:



Quantos caracteres podem ser representados no sistema Braille?

B Nove cobaias numeradas de 1 a 9 são distribuídas igualmente em três grupos: um grupo de controle e dois grupos experimentais. De quantos modos diferentes as cobaias podem ser distribuídas nos grupos, se os três grupos têm tratamentos diferenciados?

Resolução

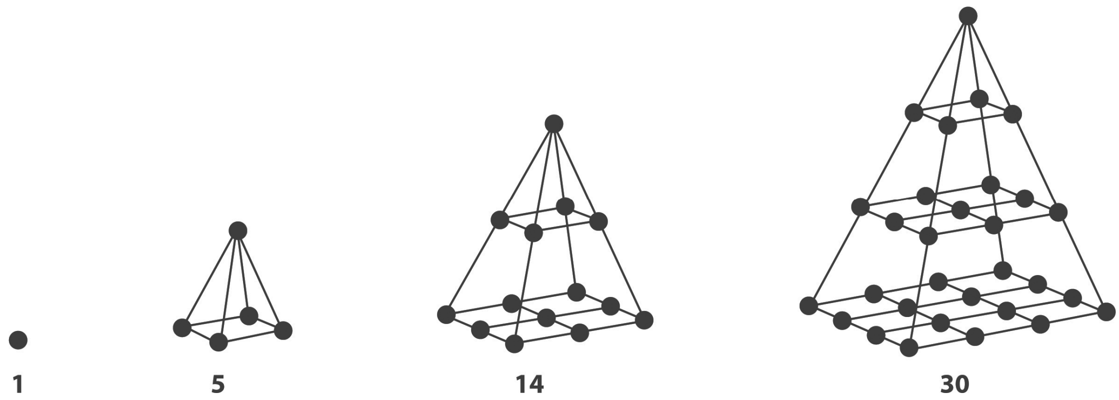
A $2^6 - 1 = 63$ caracteres

B $\frac{9!}{3!6!} \cdot \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{3!}{0!3!} = 1680$ modos diferentes

8 Atenda ao que se pede.

A Considerando que uma geração corresponde a 25 anos, determine o número de ancestrais (pais, avós, bisavós, etc.) que determinada pessoa pode ter em um período de 300 anos.

B A figura mostra os quatro primeiros termos da sequência dos números piramidais de base quadrada. Determine o quinto, o sexto e o sétimo termos da sequência.



Resolução

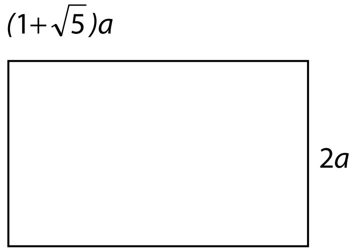
A 300 / 25 = 12

$$2+4+8+...+2^{12}=2.\frac{2^{12}-1}{2-1}=8190 \text{ ancestrais}$$

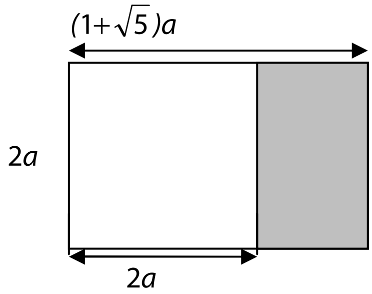
B

$$a_5=30+5^2=55$$
$$a_6=55+6^2=91$$
$$a_7=91+7^2=140$$

9 Um retângulo em que a razão entre as medidas do maior e do menor lado é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é chamado **retângulo de ouro.**



Do retângulo de ouro da figura, retiramos um quadrado de lado $2a$.



Demonstre que o retângulo resultante é um retângulo de ouro.

Resolução

$$\frac{2a}{(1+\sqrt{5})a-2a}=\frac{2a}{a+a\sqrt{5}-2a}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

10 Considere um triângulo ABC de área 12 cm², cujos lados medem AC = 8 cm e BC = 6 cm.

A Calcule a medida do ângulo $\hat{C}$. Faça um esboço de todos os triângulos possíveis.

B Calcule a soma dos quadrados das possíveis medidas do lado AB.

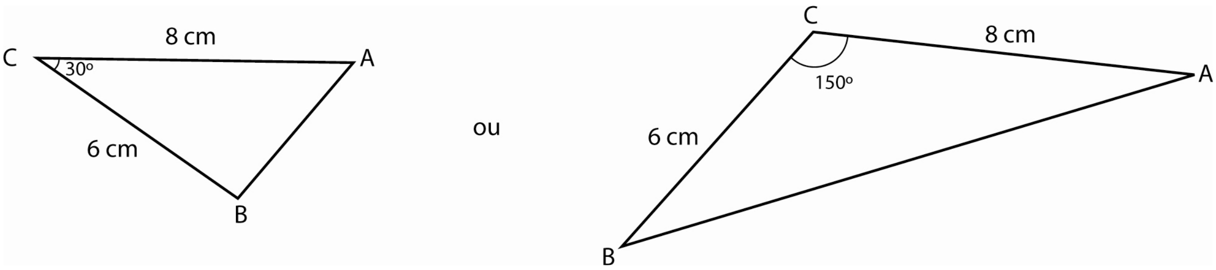
Resolução

A $\frac{1}{2}.(8.6.\text{sen } \hat{C})=12$

$\text{sen } \hat{C} = 0{,}5$

$\hat{C} = 30^\circ$ ou $\hat{C} = 150^\circ$

Dois triângulos são possíveis:



B
$$AB^2 = 8^2 + 6^2 - 2.8.6.cos30^\circ$$
$$AB^2 = 8^2 + 6^2 - 2.8.6.cos150^\circ$$

Soma = 2.(64 + 36) = 200 cm²

Fim da Prova de Matemática Aplicada