
OBJETIVO
ITA
Matemática
11

MÓDULO 41

Funções II

1. **(OPM)** – Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$. Determine o conjunto-imagem da função.

2. Considere a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 5x + 1}{x^2}.$$

O conjunto-imagem de f é:

a) $[-3; +\infty[$

b) $[-6; +\infty[$

c) $\left[-\dfrac{25}{4}; +\infty\right[$

d) $]-\infty; -6]$

e) $\left[-\infty; \dfrac{25}{4}\right]$

MÓDULO 42

Funções II

1. **(ITA)** – Considere os conjuntos $S = \{0,2,4,6\}$, $T = \{1,3,5\}$ e $U = \{0,1\}$ e as afirmações:

I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \emptyset$.

II. $\{2\} \subset S \backslash U$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.

III. Existe uma função $f: S \to T$ injetiva.

IV. Nenhuma função $g: T \to S$ é sobrejetiva.

Então, é(são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas IV.
c) apenas I e IV.
d) apenas II e III.
e) apenas III e IV.

2. **(ITA)** – Seja $f: \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x + 1}.$$

a) Mostre que f é injetora.

b) Determine $D = \{f(x);\ x \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}\}$ e $f^{-1}: D \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

MÓDULO 43

Funções II

1. **(ITA)** – Sejam f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções tais que:

a) gof: g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é injetora. Verifique se f é injetora e justifique sua resposta.

b) gof: g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é sobrejetora. Verifique se g é sobrejetora e justifique sua resposta.

2. **(ITA)** – Seja f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijetora e ímpar. Mostre que a função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é ímpar.

MÓDULO 44

Funções II

1. **(ITA)** – Mostre que toda função $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $f(xy) = f(x) + f(y)$ em todo seu domínio, é par.

2. **(ITA)** – Sejam a, b, c reais não nulos e distintos, $c > 0$. Sendo par a função dada por

$$f(x) = \frac{ax + b}{x + c}, -c < x < c,$$

então f(x), para $-c < x < c$, é constante e igual a:
a) a + b b) a + c c) c d) b e) a

3. **(ITA)** – Denotemos por R o conjunto dos números reais. Seja g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função não nula que satisfaz, para todo x e y reais, a relação $g(x + y) = g(x) + g(y)$

Se f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for definida por: $f(x) = \text{sen}\left[\dfrac{2g(x)}{a}\right]$, $a \neq 0$

então podemos garantir que:

a) f é periódica com período π a:

b) Para a = n (n natural), temos: $f(n) = 2\,\text{sen}\,[g(1)]$

c) Se $g(1) \neq 0$ então $g(1) = f(0)$.

d) Se $g(T) = \pi$ a então T é período de f.

e) Se $g(T) = 2\pi$ então T é período de f.

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 41

1. O conjunto-imagem da função f definida em $\mathbb{R}^*$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{3x}$ é

a) $\{0; 1\}$

b) $\left\{a \in \mathbb{R} \mid \dfrac{2}{3} < a \leq 1\right\}$

c) $\left\{a \in \mathbb{R} \mid a \leq -\dfrac{2}{3} \text{ ou } a \geq \dfrac{2}{3}\right\}$

d) $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

e) $\mathbb{R}$

2. Seja f uma função de domínio R / {– 1} dada por $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$. Determine o conjunto-imagem da função f.

■ MÓDULO 42

1. **(ITA)** – Se Q e I representam, respectivamente, o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais, considere as funções f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \in Q \\ 1, \text{ se } x \in I \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in Q \\ 0, \text{ se } x \in I \end{cases}$

Seja J a imagem da função composta fog: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Podemos afirmar que:

a) J = R b) J = Q c) J = {0}
d) J = {1} e) J = {0,1}

2. **(ITA)** – Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$, não vazios, possuindo B mais de um elemento.
Dada uma função f: A → B, definimos L : A → A × B por L(a) = (a, f(a)), para todo a ∈ A. Podemos afirmar que:

a) A função L sempre será injetora.
b) A função L sempre será sobrejetora.
c) Se f for sobrejetora, então L também o será.
d) Se f for injetora, então L também não o será.
e) Se f for bijetora, então L será sobrejetora.

■ MÓDULO 43

1. **(ITA)** – Seja a função f: $\mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x - 2} + 1$. Sobre a sua inversa podemos garantir que:

a) não está definida pois f é injetora.

b) não está definida pois f não é sobrejetora.

c) está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{y - 2}{y - 3}$, $y \neq 3$.

d) está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{y + 5}{y - 3} - 1$, $y \neq 3$.

e) está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{2y - 5}{y - 3}$, $y \neq 3$.

2. **(IME)** – Seja uma função f: $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais, tal que f(a / b) = f(a) – f(b) para a e b pertencentes ao domínio de f. Demonstre que f é uma função par.

■ MÓDULO 44

1. **(ITA)** – Sejam f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que f é par e g é ímpar. Das seguintes afirmações:
I. f . g é ímpar,
II. f o g é par,
III. g o f é ímpar,
é (são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.
d) apenas I e II. e) todas.

2. **(ITA)** – Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por
f(x) = 2sen 2x – cos 2x.
Então:

a) f é ímpar e periódica de período π.
b) f é par e periódica de período π/2.
c) f não é par nem ímpar e é periódica de período π.
d) f não é par e é periódica de período π/4.
e) f não é ímpar e não é periódica.

■ MÓDULO 41

1) Como Im(f) = {a ∈ ℝ | ∃ x ∈ ℝ* e f(x) = a}, tem-se

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{3x} = a \Leftrightarrow x^2 - 3ax + 1 = 0$

Para existir x ∈ ℝ*, deve-se ter

$\Delta = (-3a)^2 - 4 . 1 . 1 \geq 0$ e, portanto,

$9a^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -\dfrac{2}{3}$ ou $a \geq \dfrac{2}{3}$

Resposta: C

2) Fazendo f(x) = y temos $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = y \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = yx^2 + 2yx + y \Rightarrow$

$\Rightarrow (y-1)x^2 + (2y+2)x + (y-1) = 0$

Para que esta equação admita x ∈ ℝ | {– 1} devemos ter

$\Delta = (2y+2)^2 - 4 . (y-1) . (y-1) = 16y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$

Assim, Im(f) = $\mathbb{R}_+$

Resposta: $\mathbb{R}_+$

■ MÓDULO 42

1) (fog)(x) = f [g(x)]

De acordo com o enunciado g(x) = 0 ou g(x) = 1, então g(x) ∈ ℚ. Assim (fog)(x) = f[g(x)] = 0, para todo x ∈ ℝ. A imagem J é: {0}.

Resposta: C

2) Se f é uma função de A em B então f(a) é único para todo a ∈ A e {a, f(a)) será único para todo a ∈ A. Pode-se afirmar que L: A → A × B é sempre injetora pois: $L(a_1) = L(a_2) \Leftrightarrow (a_1, f(a_1)) = (a_2, f(a_2)) \Rightarrow a_1 = a_2$, $\forall a_1, a_2 \in A$

Resposta: A

■ MÓDULO 43

1)

a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-2} + 1 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$

b) $y = \dfrac{3x-5}{x-2} \Rightarrow (y-3)x = 2y - 5 \Rightarrow x = \dfrac{2y-5}{y-3}$

Portanto:

$$f^{-1}(y) = \dfrac{2y-5}{y-3}\ ;\ y \neq 3$$

Resposta: E

2)

a) $f\left(\dfrac{1}{1}\right) = f(1) - f(1) = 0$

b) $f(-1) = f\left(\dfrac{1}{-1}\right) = f(1) - f(-1) = 0 - f(-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 . f(-1) = 0 \Leftrightarrow f(-1) = 0$

c) $f(-x) = f\left(\dfrac{x}{-1}\right) = f(x) - f(-1) = f(x) - 0 = f(x)$,

para todo x ∈ D(f). Portanto f é Par

Resposta: Demonstração.

■ MÓDULO 44

1) f(– x) = f(x) e g(–x) = – g(x), pois f e g são respectivamente funções par e ímpar.

I. *Verdadeira*.

$f(-x) . g(-x) = f(x) . (-g(x)) = -f(x) . g(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ f . g é ímpar.

II. *Verdadeira*.

$(fog)(-x) = f[g(-x)] = f[-g(x)] = f[g(x)] = (fog)(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ fog é par.

III. *Falsa*.

$(gof)(-x) = g[f(-x)] = g[f(x)] = (gof)(x) \Leftrightarrow$ gof é par.

Resposta: D

2)

I) f(x) = 2 sen 2x – cos 2x =

$= \sqrt{5}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\text{ sen } 2x - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x\right)$

Existe $\alpha \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ independente de x tal que

$\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ e $\text{sen }\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Assim,

$f(x) = \sqrt{5}\,(\cos\alpha \cdot \text{sen}\,2x - \text{sen}\,\alpha \cdot \cos 2x) \Rightarrow$

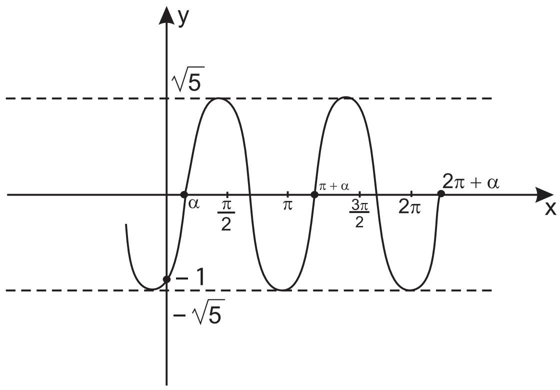
$\Rightarrow f(x) = \sqrt{5} \cdot \text{sen}\,(2x - \alpha)$

II) **f não é par nem ímpar, pois existe** $x \in \mathbb{R}$ **tal que**

$f(-x) = \sqrt{5} \cdot \text{sen}[2(-x) - \alpha] = -\sqrt{5} \cdot \text{sen}\,(2x + \alpha)$

e, portanto, $f(-x) \neq f(x)$ **e** $f(-x) \neq -f(x)$

III) **f é periódica de período** $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$ **e o gráfico de f é**



Resposta: C