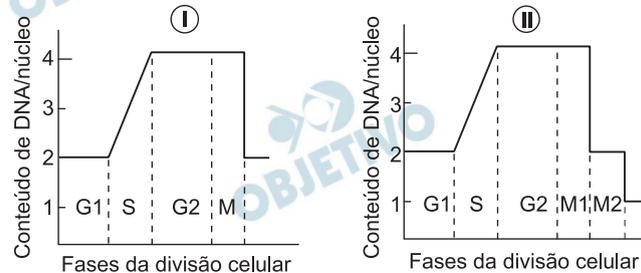




# BIOLOGIA

**1**

Os gráficos I e II representam o conteúdo de DNA durante divisões celulares.



Considerando-se um cromossomo:

- quantas cromátides estão presentes no início da fase M do gráfico I? E ao final da fase M2 do gráfico II?
- quantas moléculas de DNA estão presentes no início da fase M do gráfico I? E ao final da fase M2 do gráfico II?

**Resolução**

- No início da mitose, o cromossomo está duplicado, portanto, apresenta **duas cromátides-irmãs**.  
No final da fase M2 (meiose), não apresenta **nenhuma cromátide**, pois o cromossomo não está duplicado.
- Duas, no início da fase M, pois cada cromátide é formada por uma molécula de DNA. Uma molécula de DNA, ao final da fase M2, pois o cromossomo não está duplicado, ou seja, não apresenta cromátides-irmãs.

## 2

Considere duas árvores da mesma espécie: uma jovem, que ainda não atingiu seu tamanho máximo, e uma árvore adulta, que já atingiu o tamanho máximo. Ambas ocupam o mesmo ambiente e possuem a mesma quantidade de estômatos por unidade de área foliar.

- Por unidade de massa, quem absorve  $\text{CO}_2$  mais rapidamente? Justifique.
- Considerando apenas o transporte de água no corpo da planta, qual das duas árvores deve manter os estômatos abertos por mais tempo? Justifique.

### Resolução

- A planta jovem, porque nela a velocidade de fotossíntese é muito maior do que a de respiração. Desse modo, há excesso de alimento indispensável ao seu crescimento. Estima-se que numa árvore jovem a velocidade de fotossíntese chega a ser de 30 a 35 vezes maior do que a sua respiração.
- A planta jovem, porque o transporte de água depende da transpiração, principalmente pelos estômatos. Por outro lado, a abertura estomática garante a entrada de  $\text{CO}_2$  para a realização de sua fotossíntese.

## 3

Um estudante levantou a hipótese de que a digestão do alimento no sistema digestório de um anelídeo ocorre na mesma seqüência que em um ser humano. Para isso, analisou o conteúdo do trato digestório do anelídeo, segmento por segmento, à medida que a digestão progredia, e encontrou o seguinte resultado:

Segmento	Conteúdo químico
3	Dissacarídeos, gorduras, polipeptídios longos.
5	Dissacarídeos, gorduras, ácidos graxos, glicerol, polipeptídios curtos, aminoácidos.
7	Monossacarídeos, ácidos graxos, glicerol e aminoácidos.
11	Nada digerível, pequena quantidade de água.

- Com base nos dados obtidos, a hipótese do estudante deve ser aceita ou rejeitada? Justifique.
- Após o final da digestão, que tipo de sistema promoverá o transporte dos nutrientes até as células do anelídeo? Explique.

### Resolução

- A hipótese deve ser rejeitada porque a seqüência na digestão humana é: inicialmente, na boca, hidrólise parcial de carboidratos; no estômago, início da digestão protéica; no intestino delgado, início e término da digestão lipídica e finalização da digestão de carboidratos e de proteínas. Esse processo não é totalmente igual ao dos anelídeos.
- O sistema circulatório, porque os nutrientes são absorvidos por células do tubo digestório e transferidos ao sangue, que faz o transporte para as células do corpo.

Uma espécie de peixe possui indivíduos verdes, vermelhos, laranja e amarelos. Esses fenótipos são determinados por um gene com diferentes alelos, como descrito na tabela.

Fenótipos	Genótipos
Verde	$GG, GG^1, GG^2$
Vermelho	$G^1 G^1$
Laranja	$G^1 G^2$
Amarelo	$G^2 G^2$

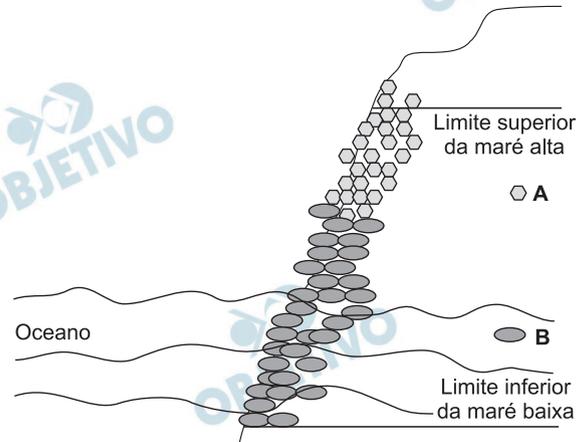
Suponha que esses peixes vivam em lagoas onde ocorre despejo de poluentes que não causam a morte dos mesmos, porém os tornam mais visíveis aos predadores.

- Em uma dessas lagoas, os peixes amarelos ficam mais visíveis para os predadores, sendo completamente eliminados naquela geração. Haverá a possibilidade de nascerem peixes amarelos na geração seguinte? Explique.
- Em outra lagoa, os peixes verdes ficam mais visíveis aos predadores e são eliminados naquela geração. Haverá possibilidade de nascerem peixes verdes na geração seguinte? Explique.

#### Resolução

- Sim.** Os cruzamentos de peixes verdes heterozigotos ( $GG^2$ ) entre si, de laranjas heterozigotos ( $G^1G^2$ ) entre si e de verdes e laranjas ( $GG^2 \times G^1G^2$ ) produzem descendência amarela ( $G^2G^2$ ).
- Não.** As variedades sobreviventes (vermelho, laranja e amarelo) não são portadores do alelo  $G$ , determinante da coloração verde.

Observe o esquema, que mostra a distribuição de duas espécies de cracas, A e B, em um costão rochoso.



Nesse costão, um pesquisador delimitou três áreas e as observou ao longo de um ano.

Área 1: os indivíduos de ambas as espécies foram mantidos intactos e os mesmos portaram-se como no esquema apresentado.

Área 2: foram removidos os indivíduos da espécie A e, depois de um ano, a rocha continuava nua, sem quaisquer indivíduos desta espécie recobrindo-a.

Área 3: foram removidos os indivíduos da espécie B e, depois de um ano, os indivíduos da espécie A haviam se expandido, colonizando a rocha nua.

- Qual espécie tem seu crescimento limitado por um fator abiótico e qual é ele?
- Qual espécie tem seu crescimento limitado por um fator biótico e qual é ele?

#### Resolução

a) Espécie B. Fator abiótico: água.

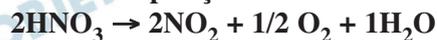
b) Espécie A. Fator biótico: competição.

O ácido nítrico é um dos ácidos mais utilizados na indústria e em laboratórios químicos. É comercializado em diferentes concentrações e volumes, como frascos de 1 litro de solução aquosa, que contém 60% em massa de  $\text{HNO}_3$  (massa molar 63 g/mol). Por se tratar de ácido forte, encontra-se totalmente na forma ionizada quando em solução aquosa diluída. É um líquido incolor, mas adquire coloração castanha quando exposto à luz, devido à reação de fotodecomposição. Nesta reação, o ácido nítrico decompõe-se em dióxido de nitrogênio, gás oxigênio e água.

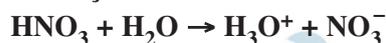
- Escreva as equações químicas, devidamente balanceadas, da reação de fotodecomposição do ácido nítrico e da ionização do ácido nítrico em meio aquoso.
- A  $20^\circ\text{C}$ , a solução aquosa de ácido nítrico descrita apresenta concentração 13,0 mol/L. Qual é a densidade desta solução nessa mesma temperatura? Apresente os cálculos efetuados.

### Resolução

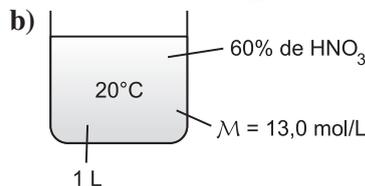
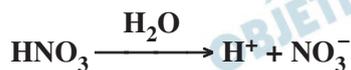
#### a) Fotodecomposição do ácido nítrico



#### Ionização do ácido nítrico em meio aquoso



ou



#### Cálculo da massa de $\text{HNO}_3$ em 1L de solução

$$1 \text{ mol de } \text{HNO}_3 \quad \text{-----} \quad 63\text{g}$$

$$13,0 \text{ mol de } \text{HNO}_3 \quad \text{-----} \quad x$$

$$x = 819\text{g de } \text{HNO}_3$$

#### Cálculo de massa da solução

$$819\text{g} \quad \text{-----} \quad 60\%$$

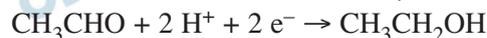
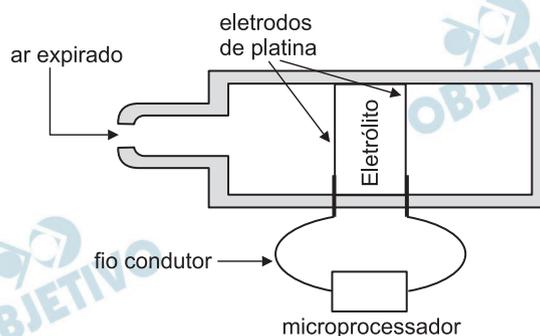
$$y \quad \text{-----} \quad 100\%$$

$$y = 1365\text{g de solução}$$

#### Densidade da solução

$$d = \frac{m}{V} \quad d = \frac{1365\text{g}}{1\text{L}} = 1365\text{g/L} = 1,365\text{g/mL}$$

A “Lei Seca”, de 19 de junho de 2008, tornou mais severas as punições para motoristas flagrados dirigindo após a ingestão de bebida alcoólica. A maioria dos etilômetros portáteis (“bafômetros”, esquema representado na figura), utilizados pela autoridade policial, baseia-se em medidas eletroquímicas, usando células a combustível. A célula tem dois eletrodos de platina com um eletrólito colocado entre eles. A platina catalisa a reação de oxidação do álcool e os íons  $H^+$  migram para o outro eletrodo através do eletrólito, reagindo com gás oxigênio. Quanto maior a quantidade de etanol no ar expirado pelo cidadão, maiores serão a quantidade de etanol oxidado e a intensidade de corrente elétrica, a qual é registrada por um microprocessador que, acoplado ao circuito externo, calcula a concentração de álcool no sangue.

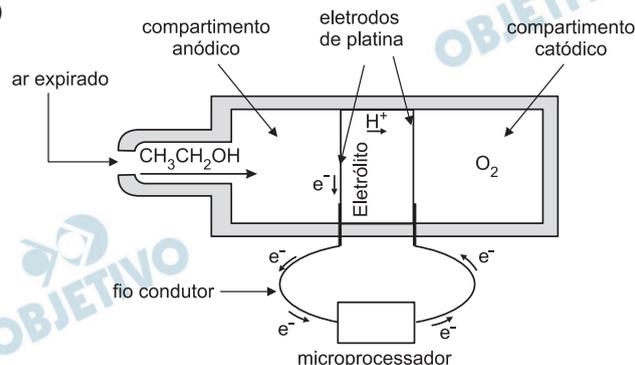


(www.portal.mec.gov.br/seb/arquivos. Adaptado.)

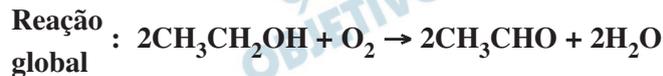
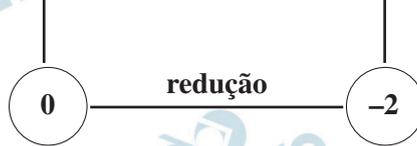
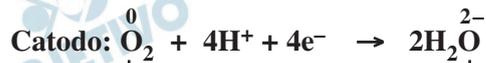
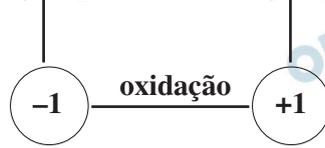
- a) Transcreva para a folha de respostas o esquema do “bafômetro” e indique nele o sentido do fluxo dos elétrons e os compartimentos catódico e anódico.
- b) Escreva a equação da reação global da pilha.

### Resolução

a)

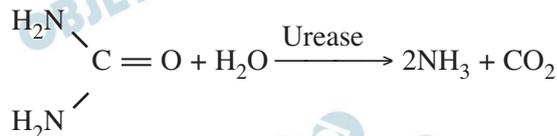


b) Reação de oxidação do álcool



## 8

No metabolismo humano, parte dos resíduos nitrogenados, provenientes da decomposição de proteínas, é eliminada como uréia, presente na urina. A urease é uma enzima encontrada em certos microorganismos e, em meio aquoso, atua na hidrólise da uréia, que tem como produtos de reação a amônia e o dióxido de carbono. A equação a seguir representa a reação de hidrólise da uréia.



- Considerando que a hidrólise da uréia ocorre em meio aquoso, qual é o caráter ácido-base predominante do meio reacional? Justifique.
- Na hidrólise da uréia, de que forma a presença da urease influencia os valores da energia de ativação e da entalpia de reação?

### Resolução

a) Nos produtos, temos:

2 mol de  $\text{NH}_3$  para 1 mol de  $\text{CO}_2$



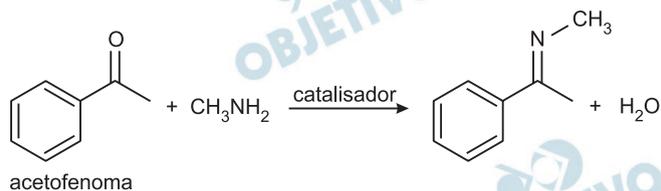
Predomina no meio reacional o caráter básico, pois os produtos são eletrólitos fracos e a concentração da amônia no meio reacional é maior que a do gás carbônico. O vestibulando não precisaria saber que o  $K_b$  da amônia é maior que o  $K_a$  do ácido carbônico.

- A presença de urease (enzima) *diminui a energia de ativação e não altera a entalpia da reação*, pois trata-se de um catalisador.

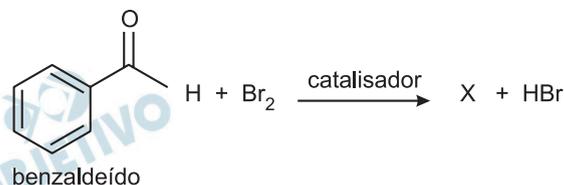
Na indústria química, aldeídos e cetonas são empregados como solventes e matérias-primas para síntese de outros produtos orgânicos. Algumas substâncias dessas classes de compostos apresentam odores bastante agradáveis, sendo usadas em perfumaria e como agentes aromatizantes em alimentos. Dentre elas, há a acetofenona, com odor de pistache, e o benzaldeído, com odor de amêndoas.

Dadas as reações:

I. Formação de uma imina com 80% de rendimento de reação.



II. Formação de um único produto orgânico X na reação de bromação.



- Determine a massa de imina produzida a partir de 1 mol de acetofenona.
- Dê a fórmula estrutural do composto orgânico X, sabendo-se que a reação é de substituição aromática.

### Resolução

a) imina:  $C_9H_{11}N$   $M = 133,11g/mol$

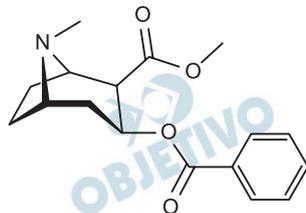
Através da equação química fornecida, temos:

acetofenona	_____	imina
1 mol	_____	1 mol (rendimento 100%)
1 mol	_____	0,8 mol (rendimento 80%)
1 mol	_____	0,8 . 133,11g
massa de imina formada $\approx 106,49g$		

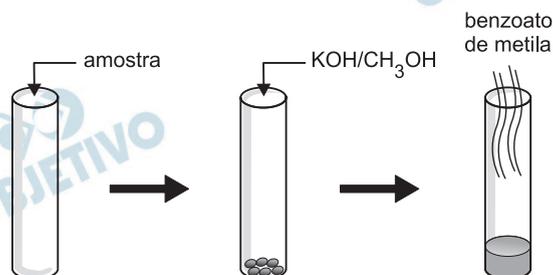
b) O grupo  $\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{C} \\ \diagdown \\ \text{H} \end{array}$  é meta-dirigente, portanto a substituição ocorrerá na posição meta



A Química Forense é uma importante área de aplicação da Química, auxiliando na investigação de crimes, permitindo identificar drogas ilícitas, reconhecer a adulteração de combustíveis e constatar a existência de vestígios de sangue em locais onde ocorreram crimes. Um dos testes que podem ser utilizados na identificação da cocaína, fórmula estrutural representada na figura, é denominado ensaio de odor.



O ensaio de odor consiste na reação da cocaína com metanol, catalisada por hidróxido de potássio, com produção de benzoato de metila, cujo odor é característico. O procedimento para a realização desse ensaio encontra-se ilustrado na figura a seguir.

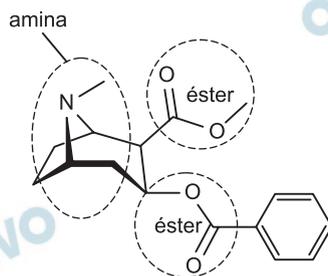


(www.apcf.org.br/Portals/0/revistas. Adaptado.)

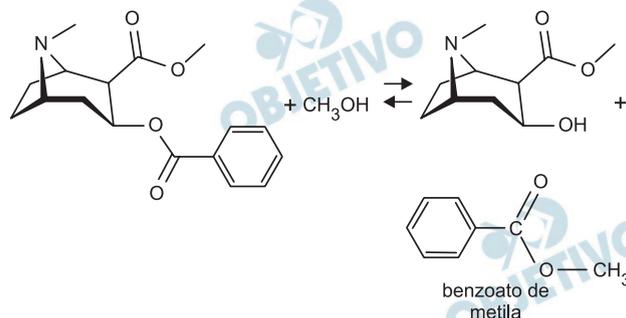
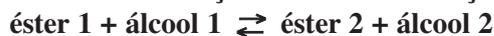
- Quais são os grupos funcionais presentes na estrutura da cocaína?
- Escreva a equação e o nome da reação química que ocorre no ensaio de odor para a identificação da cocaína.

### Resolução

- Grupos das funções amina e éster.

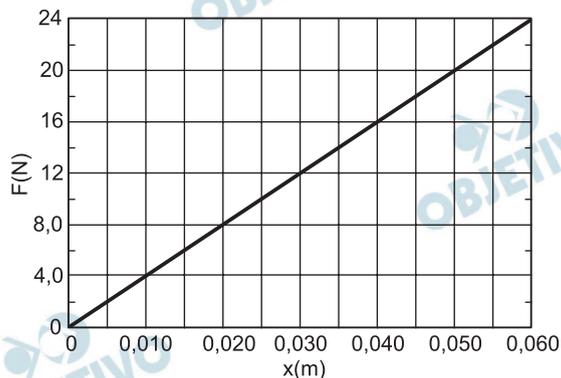


- O nome da reação é transesterificação:



## 11

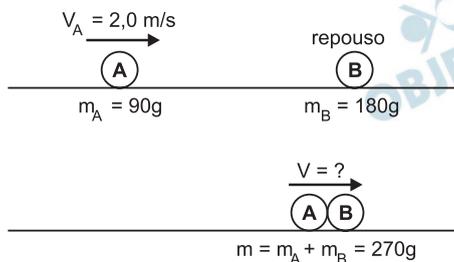
Uma pequena esfera A, com massa de 90 g, encontra-se em repouso e em contato com a mola comprimida de um dispositivo lançador, sobre uma mesa plana e horizontal. Quando o gatilho é acionado, a mola se descomprime e a esfera é atirada horizontalmente, com velocidade de 2,0 m/s, em direção frontal a uma outra esfera B, com massa de 180 g, em repouso sobre a mesma mesa. No momento da colisão, as esferas se conectam e passam a se deslocar juntas. O gráfico mostra a intensidade da força elástica da mola em função de sua elongação.



Considerando que as esferas não adquirem movimento de rotação, que houve conservação da quantidade de movimento na colisão e que não há atrito entre as esferas e a mesa, calcule:

- a energia cinética da composição de esferas AB após a colisão.
- quanto a mola estava comprimida no instante em que o gatilho do dispositivo lançador é acionado.

### Resolução



- a) 1) **Conservação da quantidade de movimento do sistema no ato da colisão:**

$$Q_{\text{após}} = Q_{\text{antes}}$$

$$(m_A + m_B) V = m_A V_A$$

$$270V = 90 \cdot 2,0$$

$$V = \frac{180}{270} \text{ m/s} = \frac{2}{3} \text{ m/s}$$

$$2) E_{\text{cin,após}} = \frac{(m_A + m_B)}{2} V^2$$

$$E_{\text{cinapós}} = \frac{0,27}{2} \cdot \frac{4}{9} \text{ (J)}$$

$$E_{\text{cinapós}} = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

b) 1) Cálculo da constante elástica da mola:

$$F = kx$$

$$x = 0,060 \text{ m}$$

$$F = 24 \text{ N}$$

$$k = \frac{24}{0,060} \text{ N/m} \Rightarrow k = 4,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$$

2) Conservação da energia mecânica no lançamento da esfera:

$$E_{\text{elástica}} = E_{\text{cin}}$$

$$\frac{k x^2}{2} = \frac{m V_A^2}{2}$$

$$x^2 = \frac{m}{k} V_A^2$$

$$x = \sqrt{\frac{m}{k}} V_A$$

$$x = \sqrt{\frac{90 \cdot 10^{-3}}{4,0 \cdot 10^2}} \cdot 2,0 \text{ (m)}$$

$$x = \frac{3,0}{2,0} \cdot 10^{-2} \cdot 2,0 \text{ (m)}$$

$$x = 3,0 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 3,0 \text{ cm}$$

Respostas: a)  $6,0 \cdot 10^{-2} \text{ J}$

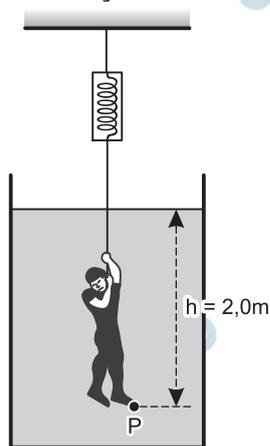
b)  $3,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  ou  $3,0 \text{ cm}$

## 12

Uma pessoa com massa de 80 kg, suspensa por um cabo de massa e volume desprezíveis, atado a um dinamômetro, é colocada em um tanque com água de tal forma que fique ereta, na posição vertical e completamente imersa. Considerando que a massa específica da água é de  $10^3 \text{ kg/m}^3$ , que a pressão atmosférica local é de  $1,0 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  e a aceleração da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e que a água e a pessoa estão em repouso em relação ao tanque, calcule:

- a) a pressão externa nos pés dessa pessoa, que se encontram 2,0 m abaixo do nível da água.
- b) o volume da pessoa, se o peso aparente registrado pelo dinamômetro é de 40 N.

### Resolução



a)  $p_P = p_{\text{atm}} + \mu_a g h$   
 $p_P = 1,0 \cdot 10^5 + 1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 2,0 \text{ (Pa)}$

$$p_P = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

b)  $F_{\text{din}} = P_{\text{ap}} = P - E$   
 $40 = 800 - E$

$$E = 760 \text{ N}$$



2) Lei de Arquimedes:

$$E = \mu_a V g$$

$$760 = 1,0 \cdot 10^3 \cdot V \cdot 10$$

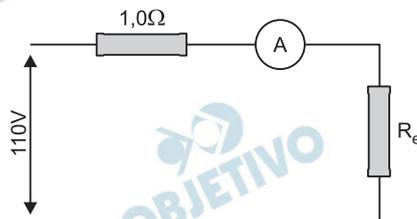
$$V = 760 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

$$V = 7,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

Respostas: a)  $1,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  ou 1,2 atm

b)  $7,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$  ou 76 litros

Em um enfeite de Natal alimentado com tensão de 110 V, há 5 lâmpadas idênticas ligadas em paralelo, todas acesas, e os fios de ligação apresentam resistência elétrica de  $1,0 \Omega$ . O circuito elétrico correspondente a esta situação está esquematizado na figura, na qual as lâmpadas estão representadas pela sua resistência equivalente  $R_e$ .



Considerando que o amperímetro ideal registra uma corrente de  $2,2 \text{ A}$ , calcule:

- o valor da resistência elétrica de cada lâmpada.
- a energia dissipada em 30 dias pelos fios de ligação, em Wh, se as lâmpadas ficarem acesas por 5 horas diárias.

### Resolução

$$\text{a) } U = (R_{\text{fios}} + R_e) i$$

$$110 = (1,0 + R_e) \cdot 2,2$$

$$50,0 = 1,0 + R_e \Rightarrow R_e = (50,0 - 1,0)\Omega$$

$$R_e = 49,0\Omega$$

Como há cinco lâmpadas de resistência  $R_1$  (cada uma) em paralelo, escreveremos:

$$R_e = \frac{R_L}{5} \Rightarrow R_1 = 5 \cdot R_e$$

$$R_1 = 5 \cdot 49,0\Omega$$

$$\boxed{R_1 = 245\Omega}$$

b) A potência dissipada nos fios de ligação é:

$$P = R_{\text{fios}} \cdot i^2 \Rightarrow P = 1,0 \cdot (2,2)^2 \text{ (W)}$$

$$P = 4,84 \text{ W}$$

O tempo total de funcionamento é:

$$\Delta t = 30 \cdot 5 \text{ h} = 150 \text{ h}$$

A energia dissipada nos fios é:

$$W_{el} = P \cdot \Delta t$$

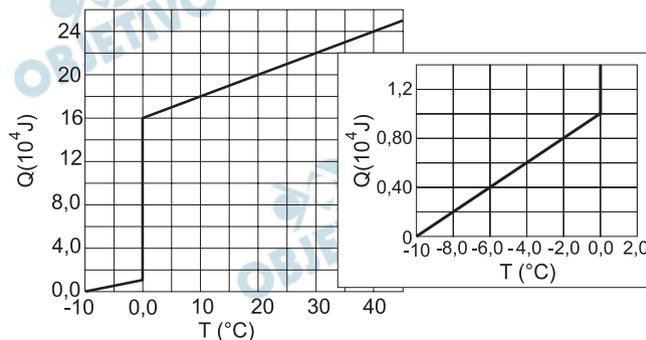
$$W_{el} = 4,84 \cdot 150 \text{ (Wh)}$$

$$\boxed{W_{el} = 726 \text{ Wh}}$$

**Observação:** no cálculo da energia acima, não se levou em conta a energia elétrica dissipada pelas lâmpadas. Como se pede no enunciado, basta calcular a *energia dissipada pelos fios de ligação*.

# 14

0,50 kg de uma substância a temperatura  $T_0 = 40\text{ }^\circ\text{C}$ , na fase líquida, é colocado no interior de um refrigerador, até que a sua temperatura atinja  $T_1 = -10\text{ }^\circ\text{C}$ . A quantidade de calor transferida em função da temperatura é apresentada no gráfico da figura.



A parte do gráfico correspondente ao intervalo de  $-10\text{ }^\circ\text{C}$  a  $2,0\text{ }^\circ\text{C}$  foi ampliada e inserida na figura, à direita do gráfico completo. Calcule:

- o calor latente específico de solidificação.
- o calor específico na fase sólida.

### Resolução

a) Para o cálculo do calor específico latente de solidificação, usamos o patamar que, na figura, se encontra no eixo da quantidade de calor.

Assim:

$$Q = m L_S$$

$$(1,0 - 16) \cdot 10^4 = 0,50 \cdot L_S$$

$$L_S = -30 \cdot 10^4 \text{ J/kg}$$

O sinal negativo indica que essa energia é retirada do sistema durante a solidificação.

$$|L_S| = 3,0 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$$

b) O cálculo do calor específico na fase sólida é feito considerando-se a parte ampliada do gráfico, quando o gelo esfriou de  $0\text{ }^\circ\text{C}$  para  $-10\text{ }^\circ\text{C}$ .

$$Q = m c \Delta\theta$$

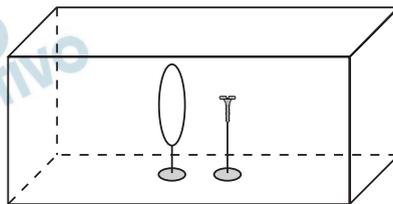
$$(0 - 1,0) \cdot 10^4 = 0,50 \cdot c_{\text{gelo}} \cdot [-10 - (0)]$$

$$c_{\text{gelo}} = 2,0 \cdot 10^3 \text{ J/kg}\cdot^\circ\text{C}$$

Resposta: a)  $3,0 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$

b)  $2,0 \cdot 10^3 \text{ J/kg}\cdot^\circ\text{C}$

Dentro de um aquário sem água são colocados uma lente delgada convergente e um parafuso, posicionado frontalmente à lente, ambos presos a suportes, conforme a figura.



Nessas condições, a imagem conjugada pela lente é direita e tem o dobro do tamanho do objeto.

- a) Calcule a razão  $f/p$ , entre a distância focal da lente e a distância do objeto ao centro óptico da lente.
- b) Preenchido totalmente o aquário com água, a distância focal da lente aumenta para 2,5 vezes a distância focal na situação anterior, e a lente mantém o comportamento óptico convergente. Para as mesmas posições da lente e do objeto, calcule o aumento linear transversal para a nova imagem conjugada pela lente.

### Resolução

a) O aumento linear transversal ( $A$ ) é dado por:

$$A = \frac{f}{f - p}$$

Sendo  $A = 2$ , vem:

$$2 = \frac{f}{f - p}$$

$$2f - 2p = f$$

$$f = 2p$$

$$\frac{f}{p} = 2$$

b)  $f' = 2,5f$

$$p = \frac{f}{2}$$

$$\text{Portanto: } \frac{p}{f'} = \frac{f}{2} \cdot \frac{1}{2,5f} = \frac{1}{5}$$

$$p = \frac{f'}{5}$$

$$A' = \frac{f'}{f' - p} = \frac{f'}{f' - \frac{f'}{5}} = \frac{f'}{\frac{4}{5}f'} = \frac{5}{4}$$

$$A' = \frac{5}{4}$$

Respostas: a)  $\frac{f}{p} = 2$

b)  $A' = \frac{5}{4}$

Seja  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ . Elevando ambos os termos ao cubo, teremos  $x^3 = 4 - 3x$ . Seja  $p(x) = x^3 + 3x - 4$ .

Como  $p(1) = 0$ ,  $p(x)$  é divisível por  $x - 1$  e, então,  $p(x) = (x - 1) \cdot q(x)$ , onde  $q$  é um polinômio.

a) Mostre que  $q(x)$  possui como zeros somente números complexos não reais e, portanto, que o número  $x = 1$  é o único zero real de  $p(x)$ .

b) Mostre que  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$  é um número inteiro.

### Resolução

$$\begin{aligned} 1) \quad x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^3 = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} + 3 \cdot \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} \cdot x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^3 = 4 + 3 \cdot (-1) \cdot x \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \end{aligned}$$

2) O polinômio  $p(x) = x^3 + 3x - 4$  é divisível por  $x - 1$ , pois 1 é raiz de  $p(x)$ . Assim,

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 0 & \end{array}$$

3)  $p(x) = (x - 1)(x^2 + x + 4)$ , em que  $q(x) = x^2 + x + 4$

$$4) \quad x^2 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{15}i}{2} \text{ ou } x = \frac{-1 - \sqrt{15}i}{2}$$

5) O polinômio  $p$  tem, portanto, uma raiz real igual a 1 e duas raízes complexas, não-reais, conjugadas,

$$\text{que são } \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}.$$

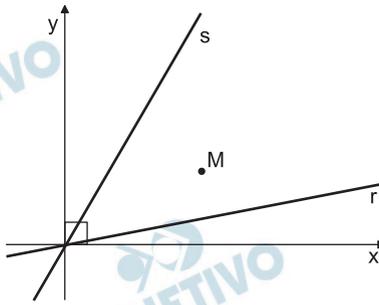
6) Já que  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} \in \mathbb{R}$ , concluímos que  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$  e, portanto, é inteiro.

Respostas: a) as raízes de  $q(x)$  são  $\frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

$$b) \quad \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1 \in \mathbb{Z}$$

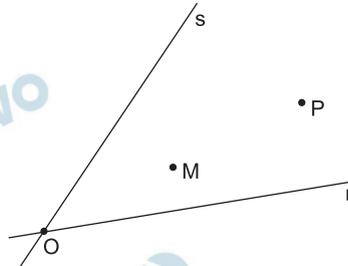
a) Num sistema cartesiano ortogonal, considere as retas

de equações  $r: y = \frac{x}{6}$  e  $s: y = \frac{3x}{2}$  e o ponto  $M(2, 1)$ .



Determine as coordenadas do ponto A, de r, e do ponto B, de s, tais que M seja o ponto médio do segmento de reta AB.

b) Considere, agora no plano euclidiano desprovido de um sistema de coordenadas, as retas r e s e os pontos O, M e P, conforme a figura,



com M o ponto médio do segmento OP. A partir de P, determine os pontos A, de r, e B, de s, tais que M seja o ponto médio do segmento de reta AB.

### Resolução

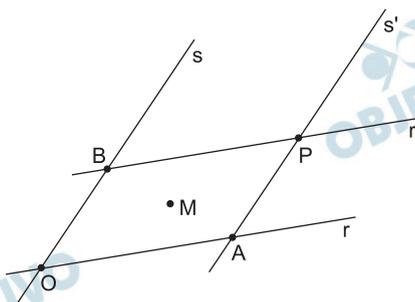
a) Sejam  $A\left(a; \frac{a}{6}\right)$  e  $B\left(b; \frac{3b}{2}\right)$  os pontos de r e s,

respectivamente. Se  $M(2;1)$  é o ponto médio do segmento AB, temos:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 2 \\ \frac{\frac{a}{6} + \frac{3b}{2}}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

Logo,  $A\left(3; \frac{1}{2}\right)$  e  $B\left(1; \frac{3}{2}\right)$

b)



1º) Traça-se pelo ponto P a reta  $r'//r$  que intercepta a reta  $s$  no ponto B.

2º) Traça-se pelo ponto P a reta  $s'//s$  que intercepta a reta  $r$  no ponto A.

**Justificação:** O quadrilátero OAPB é um paralelogramo e, portanto, M é ponto médio da diagonal  $\overline{AB}$ , pois, de acordo com o enunciado, M é o ponto médio da diagonal  $\overline{OP}$ .

## 18

Seja  $f$  a função (determinante) dada por

$$f(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \text{sen}(x) \\ \text{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix}, \text{ com } x \text{ real.}$$

a) Num sistema cartesiano ortogonal, construa o gráfico de  $y = f(x)$ .

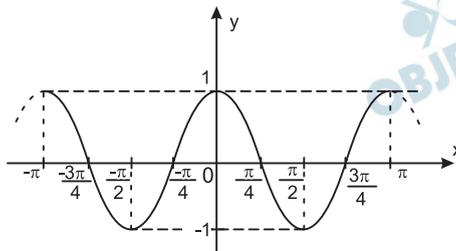
b) Determine os valores de  $x$  para os quais  $f(x) = \frac{1}{f(x)}$ .

**Resolução**

Se  $x$  real, temos:

$$f(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \text{sen } x \\ \text{sen } x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos(2x)$$

a) O gráfico de  $y = f(x)$  é tal que:



$$b) f(x) = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{\cos(2x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2(2x) = 1 \Leftrightarrow \cos(2x) = \pm 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{n \cdot \pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

Respostas: a) gráfico

$$b) x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{n \cdot \pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

O conhecido quebra-cabeça “Leitor Virtual de Pensamentos” baseia-se no seguinte fato: se  $x \neq 0$  é o algarismo das dezenas e  $y$  é o algarismo das unidades do número inteiro positivo “ $xy$ ”, então o número  $z = “xy” - (x + y)$  é sempre múltiplo de 9.

- a) Verifique a veracidade da afirmação para os números 71 e 30.  
b) Prove que a afirmativa é verdadeira para qualquer número inteiro positivo de dois algarismos.

**Resolução**

- a) Para o número 71, temos:

$$z_1 = 71 - (7 + 1) = 63 = 9 \cdot 7 \in M(9)$$

Para o número 30, temos:

$$z_2 = 30 - (3 + 0) = 27 = 9 \cdot 3 \in M(9)$$

- b) Para o número inteiro positivo “ $xy$ ”, em que  $x \neq 0$  é o algarismo das dezenas, temos:

$$\begin{aligned} z &= “xy” - (x + y) = x \cdot 10 + y - x - y = \\ &= 10x - x = 9 \cdot x \in M(9) \end{aligned}$$

Respostas: a) verificação

b) demonstração

O recipiente da figura I é constituído de 10 compartimentos idênticos, adaptados em linha. O recipiente da figura II é constituído de 100 compartimentos do mesmo tipo, porém adaptados de modo a formar 10 linhas e 10 colunas. Imagine que vão ser depositadas, ao acaso, 4 bolas idênticas no recipiente da figura I e 10 bolas idênticas no recipiente da figura II.

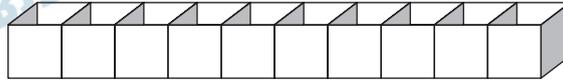


figura I

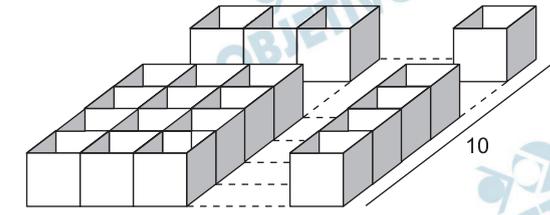


figura II

Com a informação de que em cada compartimento cabe apenas uma bola, determine:

- A probabilidade de que no primeiro recipiente as 4 bolas fiquem sem compartimentos vazios entre elas.
- A probabilidade de que no segundo recipiente as 10 bolas fiquem alinhadas.

#### Resolução

- a) Existem  $C_{10;4} = 210$  formas de se escolher 4 dos dez compartimentos da figura I. Dessas 210 formas, em 7 delas os compartimentos são consecutivos. Dessa forma, a probabilidade de não ficar com-

partimentos vazios entre elas é  $\frac{7}{210} = \frac{1}{30}$ .

- b) Existem  $C_{100;10}$  formas de se escolher 10 compartimentos dos dispostos na figura II. Dessas, existem 22 formas dos dez compartimentos estarem alinhados (dez linhas, dez colunas e duas diagonais). A probabilidade das dez bolas ficarem alinhadas é, portanto,

$$\frac{22}{C_{100;10}} = \frac{22}{\frac{100!}{90! \cdot 10!}} = \frac{22 \cdot 10! \cdot 90!}{100!}$$