FUNÇÃO INVERSA

1. (UEPG 2016) Sobre relações e funções, assinale o que for correto.

01) A função $f(x)=3x^2-6x-9$ de A em B admite inversa se $A=\{x \in \mathbb{R} | x>1\}$ e $B=\{x \in \mathbb{R} | x<-12\}$.

02) $f(x)=ax+c$, $g(x)=ax^2+bx+c$, $f(-3)=0$, $g(0)=3$ e $g(f(0))=24$, então $b=4$.

04) Se $f(x)=x-2$ e $g[f(x)]=2x^2-11x+15$, então $g(1)=0$.

08) O domínio da função $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+3x}{2x^2+4x-6}}$ é o conjunto $D=\{x \in \mathbb{R} | x<0 \text{ ou } x>1\}$.

16) Se $R=\{(x, y) \in A \times B \,|\, x+y>5\}$ é uma relação de $A=\{1, 2, 3\}$ em $B=\{2, 3, 4\}$, então a relação inversa R^{-1} de B em A tem quatros elementos.

2. (ITA 2017) Sejam A e B dois conjuntos com 3 e 5 elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetivas $f: B \to A$ existem?

____

____

____

____

____

3. (UFSC 2016) Em relação às proposições abaixo, é **CORRETO** afirmar que:

01) A função $f: \mathbb{R}-\{2\} \to \mathbb{R}-\{2\}$ definida por $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-2}$ satisfaz $(f \circ f)(x)=x$ para todo $x \in \mathbb{R}-\{2\}$. Se f^{-1} é a função inversa da f, então f^{-1} coincide com a f.

02) Considere a função $g(x)=\begin{cases} 3x-2, \text{se } x<0 \\ 5x, \quad \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. O domínio da função g é $\mathbb{R}$ e o conjunto imagem é $\mathbb{R}$.

04) Se a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, então f é decrescente e sobrejetiva.

08) Seja $A \subset \mathbb{R}$ com $A \neq \varnothing$. Se $f: A \to \mathbb{R}$ é uma função estritamente crescente em A, então f é injetiva.

16) Considere a função definida por $f(x)=\sqrt{x+a^2}$, sendo $a \in \mathbb{R}_+^*$. Então, $f(81)=9+a$.

4. (UEM 2013) Sobre funções reais (domínio e contradomínio real), assinale o que for **correto**.

01) Uma função constante é sempre injetora.

02) Uma função de segundo grau é sempre sobrejetora.

04) Sejam f e g funções, tais que $g(x)=f(x)+1$, para todo x real. Então o gráfico da função g corresponde sempre ao gráfico da função f, transladado de uma unidade para baixo no plano cartesiano.

08) Toda função do primeiro grau é injetora e sobrejetora e, portanto, possui inversa.

16) A imagem da função f, tal que, para todo x real, $f(x)=\text{sen}\, x$, é o intervalo fechado $[-1,1]$.

5. (ITA 2012)

Notações

$\mathbb{N}$: Conjunto dos números naturais;

$\mathbb{R}$: Conjunto dos números reais;

$\mathbb{R}^{+}$: Conjunto dos números reais não negativos;

i: unidade imaginária; $i^2 = -1$;

$P(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A;

$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A;

$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B;

$\arg z$: argumento do número complexo z;

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$

$A \backslash B = \{x: x \in A \text{ e } x \notin B\}$

A^c: complementar do conjunto A;

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Analise se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \&3 + x^2, \ x \geq 0 \\ \&3 - x^2, \ x < 0 \end{cases}$ é bijetora e, em caso afirmativo, encontre $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

6. (UFBA 2011) Considerando-se as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \log(x^2 + 1)$, é correto afirmar:

01) A função f é bijetora, e sua inversa é a função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x + 1$.

02) O conjunto imagem da função g é o intervalo $[0, +\infty[$.

04) A função g é uma função par.

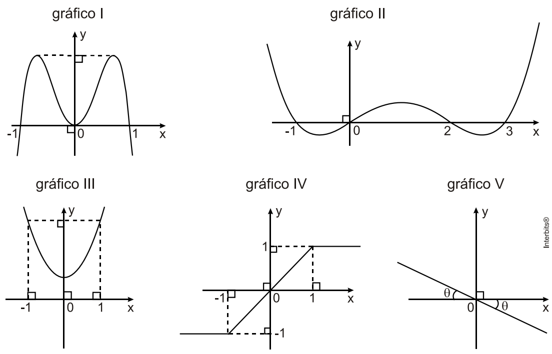
08) Existe um número real x tal que $f(g(x)) = g(f(x))$.

16) O ponto (0, 0) pertence ao gráfico da função g.

7. (ITA 2010) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: bijetora e ímpar. Mostre que a função inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também e ímpar.

8. (UNIFESP 2010) Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se par quando $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

a) Quais, dentre os gráficos exibidos, melhor representam funções pares ou funções ímpares? Justifique sua resposta.



b) Dê dois exemplos de funções, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, sendo uma par e outra ímpar, e exiba os seus gráficos.

9. (ITA 2006) Seja $f: [0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases},$$

Seja $g: \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} f\left(x + \frac{1}{2}\right), & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 1 - f\left(x + \frac{1}{2}\right), & 0 \le x < \frac{1}{2} \end{cases},$$

com f definida acima. Justificando a resposta, determine se g é par, ímpar ou nem par nem ímpar.

10. (G1 - CFTCE 2004) Considere a função f(x) = (3x - 1)/(1 - 2x), x ≠ 1/2. Calcule $f(f^{-1}(x))$, onde $f^{-1}(x)$ é a lei da função inversa de f.

11. (UFSC 2018) É correto afirmar que:

01) O domínio da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5 - |x-3|}}$ é um intervalo (a, b). A soma de a com b é 6.

02) Se $f:[1, +\infty) \to [1, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$ admite inversa, então $f^{-1}(5) = 3$.

04) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ se } & x \ge 0 \\ x + 1, \text{ se } & x < 0 \end{cases}$, então $(f \circ f)(-1) = 1$.

08) O sistema $\begin{cases} \log_2(x+y) = 0 \\ \log_3 2 + \log_3 y = \log_3 x \end{cases}$ tem infinitas soluções.

16) Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são injetoras, então $gof: A \to C$ pode não ser injetora.

12. (UEM-PAS 2017) Considere as seguintes funções reais:

$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x - c}, \quad c \in \mathbb{R}, \ x \neq c$$

$$h(x) = (x - d)(x - e), \ d, \ e \in \mathbb{R}$$

Assinale a(s) alternativa(s) **correta**(**s**).

01) f é uma função crescente.

02) Os números d e e são os zeros da função h.

04) Se $d < 0$ e $e < 0$, então o gráfico da função h é uma parábola cuja concavidade é voltada para baixo.

08) Se $a = 1$ e $b = 0$, então $(g \circ f)(x) = g(x)$.

16) Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então a função f é invertível e sua inversa é dada por $f^{-1}(x) = \frac{1}{ax + b}$.

13. (ITA 2018) Considere as funções $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Se $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, então uma relação entre as constantes a, b, c e d é dada por

a) $b + ad = d + bc$.

b) $d + ba = c + db$.

c) $a + db = b + cd$.

d) $b + ac = d + ba$.

e) $c + da = b + cd$.

ANOTAÇÕES

GABARITO

1: 02 + 04 = 06.

[01] Falsa. Reescrevendo a lei de f na forma canônica, temos $f(x) = 3(x-1)^2 - 12$. Logo, sendo $a = 3$, a parábola tem concavidade voltada para cima e, portanto, f é estritamente decrescente para $x < 1$ e estritamente crescente para $x > 1$. Ademais, o valor mínimo de f é -12.

Portanto, se $A = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$, então $B = \{x \in \mathbb{R} | x > -12\}$.

[02] Verdadeira. De fato, pois $f(-3) = 0$ implica em $c = 3a$. Ademais, $g(0) = 3$ implica em $c = 3$. Logo, temos $a = 1$.

Portanto, vem

$$\begin{aligned} g(f(0)) &= g(c) \\ &= g(3) \\ &= 1 \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 3 \\ &= 3b + 12. \end{aligned}$$

Mas $g(f(0)) = 24$ implica em $3b + 12 = 24 \Leftrightarrow b = 4$.

[04] Verdadeira. De fato, se $f(x) = 1$, então $x = 3$. Logo,temos $g(f(3)) = 2 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 + 15 = 0$.

[08] Falsa. Lembrando que uma função está bem definida quando são fornecidos o domínio, o contradomínio e a lei de associação, vamos supor que o item se refere ao maior subconjunto dos números reais para o qual f está definida.

Basta observar que

$$\begin{aligned} f(-3) &= \sqrt{\frac{(-3)^2 + 3 \cdot (-3)}{2 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 6}} \\ &= \sqrt{\frac{0}{0}}. \end{aligned}$$

[16] Falsa. Temos $R = \{(2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$ e, portanto, $R^{-1} = \{(4, 2), (3, 3), (4, 3)\}$. Em consequência, a relação inversa de B em A possui 3 elementos.

2: Calculando:

$$\begin{aligned}
&n^{o}\ \text{funções} = 3^5 = 243 \\
&A_1 = \text{funções em que } a_1 \notin \operatorname{Im} f \\
&A_2 = \text{funções em que } a_2 \notin \operatorname{Im} f \\
&A_3 = \text{funções em que } a_3 \notin \operatorname{Im} f \\
&n^{o}\ \text{funções sobrejetivas} = 243 - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\
&n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = 2^5 = 32 \\
&n(A_1 \cap A_2) = n(A_2 \cap A_3) = n(A_1 \cap A_3) = 1 \\
&n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0 \\
&n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3 \cdot 32 - 3 \cdot 1 = 93 \\
&n^{o}\ \text{funções sobrejetivas} = 243 - 93 = 150
\end{aligned}$$

3: 01 + 08 = 09.

[01] CORRETA. Calculando:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{2 \cdot \left(\frac{2x+3}{x-2}\right) + 3}{\left(\frac{2x+3}{x-2}\right) - 2} = \left(\frac{4x+6+3x-6}{x-2}\right) \cdot \left(\frac{x-2}{2x+3-2x+4}\right) = \frac{7x}{7} \to (f \circ f)(x) = x$$

$$f^{-1}(x) \to x = \frac{2y+3}{y-2} \to x \cdot (y-2) = 2y+3 \to y = \frac{2x+3}{x-2} \to f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-2}$$

[02] INCORRETA. Fazendo o gráfico da função percebe-se que o conjunto imagem será $\operatorname{Im} =]-\infty, -2[\cup [0, +\infty[$.

[04] INCORRETA. Fazendo o gráfico da função percebe-se que a função será decrescente e não-sobrejetiva (a imagem da função será $Im = \mathbb{R}_+^*$).

[08] CORRETA. Se A é estritamente crescente, então para cada valor distinto

de x há um valor distinto de y, logo, a função é injetiva.

[16] INCORRETA. Substituindo: $f(81)=\sqrt{81+a^2}\neq 9+a.$

4: 08 + 16 = 24.

[01] **Falsa**. A função constante nunca será injetora, pois o conjunto imagem possui um único elemento.

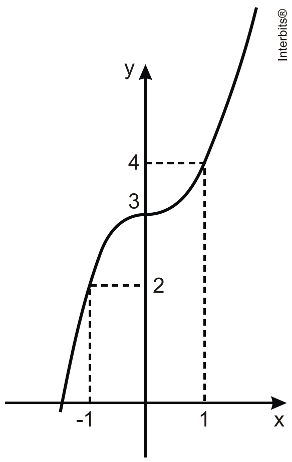
[02] **Falsa**. Isto dependerá do contradomínio considerado.

[04] **Falsa**. O gráfico da função g corresponde sempre ao gráfico da função f, transladado de uma unidade para cima no plano cartesiano.

[08] **Verdadeira**. Domínio real, contradomínio real e imagem real, além disso, cada elemento do conjunto imagem está associado a um único elemento do domínio.

[16] **Verdadeira**. O conjunto imagem da função seno é [−1,1].

5:



Observando o gráfico, formado por dois ramos de parábolas, concluímos que:

- seu contradomínio é igual ao seu conjunto imagem, logo é sobrejetora.

- cada valor y do conjunto imagem é imagem apenas de um valor x do domínio, logo é injetora.

- Portanto, a função dada é **bijetora.**

Determinando a inversa:

Para $x\geq 0$, temos:

$$f(x)=3+x^2$$
$$x=3-\left(f^{-1}(x)\right)^2$$

$$f^{-1}(x)=\sqrt{x-3}\text{ , para } x\geq 3$$

Para $x<0$, temos:

$$f(x)=3-x^2$$
$$x=3-\left(f^{-1}(x)\right)^2$$

$$f^{-1}(x)=-\sqrt{3-x}\text{ , para } x<3$$

Logo, a função inversa de f(x) será $f^{-1}(x)$ dada por:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-3}\text{ , para } x\geq 3\\ -\sqrt{3-x}\text{ , para } x<3\end{cases}$$

6:

01) Verdadeira, pois a função f é bijetora e sua inversa é x = y -1 $\Leftrightarrow$ y = x + 1.

02) Verdadeira, como x^2 + 1 será sempre maior ou igual a 1, seu conjunto imagem é $[0,+\infty[$.

04) Verdadeira, pois g(a) = g(-a) para todo o valor de a.

08) Falsa, resolvendo a equação (g(x)) = g(f(x)) , temos:

$$\log\left(x^2+1\right)-1=\log((x-1)^2+1)$$
$$\log(x^2+1)-\log 10=\log(x^2-2x+2)$$
$$\log\frac{x^2+1}{10}=\log\left(x^2-2x+2\right)$$
$$\frac{x^2+1}{10}=x^2-2x+2 \Leftrightarrow 9x^2-20x+19=0$$

Resolvendo, encontramos delta igual a -284. Logo, a equação não possui raízes reais.

16) Correto, pois $\log(0^2 + 1) = 0$.

7:

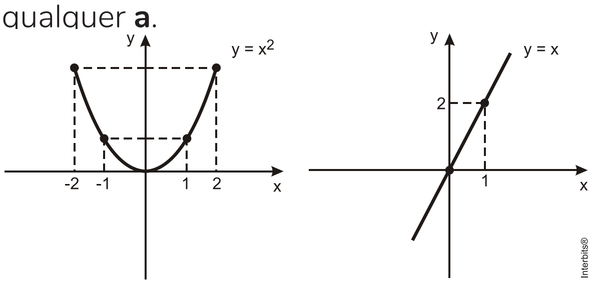
$f(a) = k \Leftrightarrow f^{-1}(k) = a$

$f(-a) = -k \Leftrightarrow f^{-1}(-k) = -a$

logo $f^{-1}(-k) = - f^{-1}(k)$ portanto $f^{-1}(x)$ é ímpar.

8:

a) As funções pares são I e III, pois f(-a) = f(a) para qualquer **a** real. As funções ímpares são IV e V, pois f(-a) = - f(a) para qualquer **a**.



9:

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x<\frac{1}{2}\\ 2x-1, & \frac{1}{2}\le x<1\end{cases}$$

$$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}2x+1, & -\frac{1}{2}\le x<0\\ 2x, & 0\le x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

Temos que:

$$g(x)=\begin{cases}f\left(x+\frac{1}{2}\right), & \text{se } -\frac{1}{2}<x<0\\ 1-f\left(x+\frac{1}{2}\right), & \text{se } 0\le x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{se } -\frac{1}{2}<x<0\\ -2x+1, & \text{se } 0\le x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

Como $g(x)=g(-x),\ \forall x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, então g é par.

10:

$f(f^{-1}(x)) = x$

11: 01 + 02 + 04 = 07.

[01] Na função $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5-|x-3|}}$, o domínio é dado por:

$D_f = \{x \in \mathbb{R}: 5 - |x-3| > 0\}$

De $5-|x-3|>0$,

$|x-3|<5$

$-5<x-3<5$

$-5+3<x<5+3$

$-2<x<8$

Assim, $a=-2$ e $b=8$, logo, $a+b=6$.

Portanto, a afirmação [01] é **verdadeira**.

[02] Como $f(x)=x^2-2x+2$ admite inversa e $f(3)=3^2-2\cdot 3+2=5, f^{-1}(5)=3$.

Portanto, a afirmação [02] é **verdadeira**.

[04] De $f(x)=\begin{cases}x^2+1, \text{se } x\ge 0\\ x+1, \text{se } x<0\end{cases}$,

$f(-1)=-1+1=0$

$f(f(-1))=f(0)=0^2+1=1$,

Então,

$(f \circ f)(-1) = 1$

Portanto, a afirmação [04] é **verdadeira**.

[08] $\begin{cases} \log_2(x+y) = 0 & \text{(i)} \\ \log_3 2 + \log_3 y = \log_3 x & \text{(ii)} \end{cases}$

Da equação (i),

$x + y = 2^0$

$x + y = 1 \quad \text{(iii)}$

Da equação (ii),

$\log_3(2y) = \log_3 x$

$2y = x \quad \text{(iv)}$

Das equações (iii) e (iv),

$2y + y = 1$

$3y = 1$

$y = \dfrac{1}{3}$

Substituindo $y = \dfrac{1}{3}$ na equação (iv),

$x = \dfrac{2}{3}$

Assim, o sistema possui solução única.

Portanto, a afirmação [08] é **falsa**.

[16] Como f e g são injetoras, $g \circ f$ também é injetora.

Portanto, a afirmação [16] é **falsa**.

12: 02 + 08 = 10.

[01] Falsa. f será crescente apenas se $a > 0$.

[02] Verdadeira, pois $x - d = 0 \Rightarrow x = d$ e $x - e = 0 \Rightarrow x = e$.

[04] Falsa. Mesmo que d e e sejam negativos o coeficiente de x^2 será positivo. Portanto, o gráfico será uma parábola com concavidade para cima.

[08] Verdadeira. Se $a = 1$ e $b = 0$, temos $f(x) = x$ e $g(f(x)) = g(x)$.

[16] Falsa.

$f(x) = ax + b \Rightarrow x = a \cdot f^{-1}(x) + b \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}.$

13:

[A]

De $f(x) = ax + b$,

$y = ax + b$ e $f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$

De $g(x) = cx + d$,

$y = cx + d$ e $g^{-1}(x) = \dfrac{x-d}{c}$

Então,

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \frac{\frac{x-d}{c} - b}{a} = \frac{x-d-bc}{ac}$$

$$g^{-1} \circ f^{-1} = \frac{\frac{x-b}{a} - d}{c} = \frac{x-b-ad}{ac}$$

Como $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$,

$\dfrac{x-d-bc}{ac} = \dfrac{x-b-ad}{ac}$

$b + ad = d + bc$

ANOTAÇÕES

Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT

contato@biologiatotal.com.br
/biologiajubilut
Biologia Total com Prof. Jubilut
@biologiatotaloficial
@Prof_jubilut
biologiajubilut