Aref Antar Neto
José Luiz Pereira Sampaio
Nilton Lapa
Sidney Luiz Cavallantte

GEOMETRIA

Noções de Matemática

VOLUME 5

SEGUNDO GRAU

2ª edição

EDITORA MODERNA

Capa:
Ricardo Van Steen

CIP-Brasil. Catalogação-na-Fonte
Câmara Brasileira do Livro, SP

G298 Geometria : 2º grau / Aref Antar Neto . . . | et al. | . — — São Paulo : Ed. Moderna, 1982.
(Noções de matemática ; v. 5)

1. Geometria (2º grau) I. Antar Neto, Aref, 1949– II. Série.

81-1577 17. CDD-513.07
18. -516.007

Índices para catálogo sistemático:
1. Geometria : Estudo e ensino 513.07 (17.)
516.007 (18.)

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Afonso Brás, 431
Tel.: 531-5099
CEP 04511 - São Paulo - SP - Brasil

1982

Impresso no Brasil

2 4 6 8 10 9 7 5 3 1

Índice

Parte I

Parte II

Parte III

Parte IV

Parte V

Capítulo 13. **Prismas**

Capítulo 14. **Pirâmides**

Capítulo 15. **Poliedros convexos**

Parte VI

Capítulo 16. **Cilindros circulares**

Capítulo 17. **Cones circulares**

Capítulo 18. **Esfera**

PARTE I

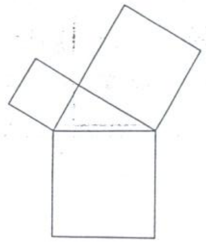
Capítulo 1

Ponto, reta e plano

1.1 — ORIGENS DA GEOMETRIA

Existem indícios de que a civilização da Babilônia, desde cerca de 2000 a.C., desenvolveu um considerável conhecimento geométrico, e assim também o Egito, desde datas que alcançam 1 300 anos antes de Cristo. As finalidades originais do conhecimento geométrico eram de natureza prática, como construção de edifícios e demarcação de terras (agrimensura). A existência das grandes pirâmides perto do Nilo prova que os egípcios conheciam a sua Geometria e sabiam usá-la bem.

Por volta de 600 a.C., alguns filósofos e matemáticos gregos começaram a sistematizar o conhecimento geométrico acumulado. Tales e Pitágoras podem ser apontados entre eles. Há quem diga que a Geometria antes dos gregos era puramente experimental e que os gregos foram os primeiros a introduzir o raciocínio dedutivo. Não podemos concordar com isso inteiramente, mas é sem dúvida verdade que os gregos foram os primeiros a sistematizar e organizar o conjunto de fatos geométricos conhecidos até seu tempo. O trabalho fundamental dos gregos foi feito por **Euclides**, que por volta de 300 a.C. escreveu um tratado de Geometria chamado *Elementos*, contendo virtualmente tudo o que era conhecido de Geometria naquela época.



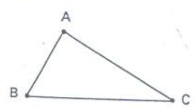
Com o auxílio da figura ao lado, que aparece no Livro V da sua obra *Elementos*, Euclides dá uma demonstração do famoso **teorema de Pitágoras**, segundo o qual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa. A *demonstração* das propriedades das figuras, com o auxílio da Lógica, foi a preocupação central dos filósofos e matemáticos gregos.

1.2 — OS CONCEITOS E SUAS DEFINIÇÕES

A Geometria, como se apresenta na atualidade, pode ser vista como uma seqüência de **propriedades** que caracterizam um conjunto de **objetos** ou **entes**. Os entes, cujas propriedades são estudadas pela Geometria, são na sua maioria os *pontos* e os *conjuntos de pontos*, como, por exemplo, as retas, os planos, os poliedros, as curvas, as superfícies, etc.

Todo texto matemático utiliza a linguagem da Lógica para expor as suas idéias. A característica marcante dessa linguagem é o fato de que os conceitos, de um modo geral, só podem ser considerados como conhecidos depois que são definidos e as propriedades só podem ser consideradas como verdadeiras depois que são demonstradas.

Um conceito é definido por meio de uma sentença. Por exemplo, a sentença "**triângulo** é a união dos três segmentos cujas extremidades são três pontos não situados numa mesma reta" define o conceito de **triângulo**. Entretanto, ao dar essa definição, estamos supondo que a pessoa que irá lê-la já sabe o significado de *união*, *segmento*, *extremidade*, *ponto*, *estar situado* e *reta*. A definição de um conceito se faz relacionando entre si outros conceitos já conhecidos. Estes, por sua vez, podem ter sido definidos com o auxílio de conceitos anteriores. Mas um tal encadeamento de definições, na prática, não pode ser prolongado indefinidamente. A afirmação de que em Matemática **todo conceito é definido** é excessivamente pretensiosa. É necessário estabelecer um ponto de partida, isto é, alguns conceitos devem ser adotados sem definição (**conceitos primitivos**), para que todos os demais possam ser definidos a partir deles. Além disso, para que uma teoria

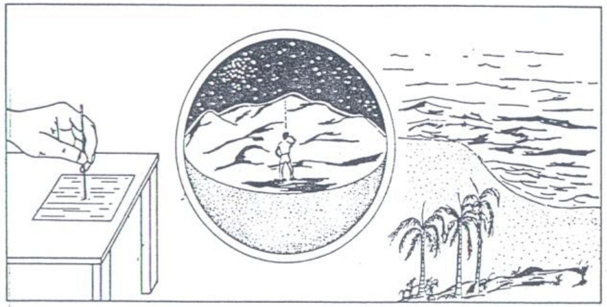


tenha finalidade prática, é importante que um conceito primitivo seja simples, de modo que haja uma concordância entre todas as pessoas a respeito do seu significado, sem que seja necessário defini-lo.

1.3 — O CONCEITO DE PONTO

O conceito fundamental da Geometria é o de ponto. Todas as demais figuras, como retas, círculos, planos, triângulos, etc., são **conjuntos de pontos**.

Como devemos imaginar um ponto? Podemos dar muitos exemplos que sugerem a idéia de ponto, bastando para isso associá-la a coisas do nosso mundo físico, tais como a marca deixada pela ponta de uma agulha numa folha de papel,



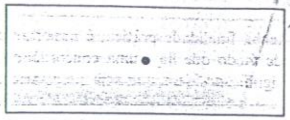
A marca de uma agulha numa folha de papel, uma estrela vista da Terra, um grão de areia são coisas que sugerem a idéia de ponto.

uma estrela vista da Terra, um grão de areia. Poderíamos também escolher o átomo, como uma partícula muito pequena existente no mundo; mas o átomo se divide em partículas menores, das quais a menor é o elétron. Seria, então, o elétron um bom exemplo de ponto? Certamente que não, pois os elétrons, apesar de "pequenos", têm um certo tamanho e uma certa massa e, além de tudo, não sabemos se um elétron é realmente indivisível. A idéia de ponto não pode ser materializada por algo que tenha dimensão, espessura, massa ou que possa ser subdividido em partes. A Geometria não dá uma definição formal do conceito de ponto, mas espera-se que todas as pessoas imaginem a mesma coisa quando lêem essa palavra, sem necessidade de uma definição.

Ponto é um conceito primitivo.

Representamos graficamente um ponto por meio de uma *bolinha* impressa no papel. Os pontos são indicados sempre por letras latinas maiúsculas:

A, B, C, D, ...



Representação gráfica de um ponto

A partir do conceito de ponto, podemos definir outros conceitos.

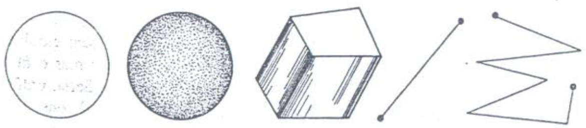
Definição D1

> **Espaço** é o conjunto de todos os pontos.

Definição D2

> **Figura geométrica** é qualquer conjunto não-vazio de pontos.

Assim, todas as figuras são subconjuntos do espaço. O próprio espaço é uma figura. Outros exemplos de figuras são as retas, os planos, os círculos, os poliedros, os segmentos.



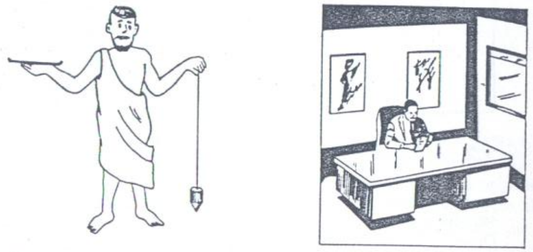
Um círculo, uma esfera, um poliedro, um segmento, uma linha poligonal são exemplos de *figuras*, pois são *conjuntos de pontos*.

1.4 — RETA E PLANO

Em Geometria, há ainda dois conceitos primitivos que são fundamentais: o de reta e o de plano

A idéia de uma reta pode ser sugerida por um fio de prumo bem esticado e a idéia de plano, pela superfície de uma mesa. Entretanto, um fio de prumo tem *começo* e *fim* e uma mesa tem a sua *beirada*, e ambos têm a sua *espessura*. Para materializar as idéias de reta e de plano, seriam necessárias coisas sem espessura e que se estendessem ilimitadamente. Coisas assim só existem na nossa imaginação.

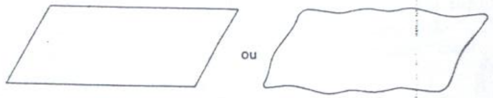
> Reta e plano são conceitos primitivos.



Um fio de prumo sugere a idéia de uma reta e a superfície de uma mesa sugere a idéia de um plano.

Representamos graficamente uma reta pelo desenho

e o plano por



Todavia, deve-se imaginar que a linha da primeira figura se prolonga em ambos os sentidos, como sugerem as setas, e que as outras duas figuras mostram apenas "pedaços" do plano, o qual, na realidade, não tem o contorno que lhe foi desenhado.

As retas são indicadas por letras latinas minúsculas:

a, b, c, ...

e os planos, por letras gregas minúsculas:

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Aproveitemos agora a oportunidade e examinemos mais duas definições.

Definição D3

> **Dois ou mais pontos são ditos colineares se todos eles pertencem a uma mesma reta.**

Dizemos também que esses pontos estão *alinhados*.

Definição D4

> Duas ou mais figuras são ditas **coplanares** se todos os seus pontos pertencem a um mesmo plano.

Se uma figura está contida num plano, dizemos que é uma **figura plana**.(*)

1.5 — AS PROPRIEDADES E SUAS DEMONSTRAÇÕES

As propriedades que caracterizam os entes matemáticos são estabelecidas por meio de uma demonstração. Numa demonstração, utilizamos as regras de raciocínio lógico para interligar a propriedade em estudo e outras já conhecidas anteriormente. Se for possível estabelecer um encadeamento lógico pelo qual o fato de serem verdadeiras as propriedades já conhecidas garanta que é também verdadeira a propriedade em estudo, diremos que esta última *está demonstrada* e passaremos, a partir daí, a considerá-la verdadeira. Toda propriedade que pode ser demonstrada é chamada teorema

Assim, a demonstração de um teorema se faz com o auxílio de outras propriedades já conhecidas. Estas, por sua vez, podem ter sido demonstradas com o auxílio de propriedades anteriores. Mas um tal encadeamento de demonstrações, na prática, não pode ser prolongado indefinidamente. Trata-se de um exagero afirmar que em Matemática **todas as propriedades podem ser demonstradas**. É necessário que algumas propriedades sejam admitidas sem demonstração, para que sirvam de ponto de partida. A partir delas, todas as demais poderão

(*) Note que não dissemos que a figura *pertence* ao plano e sim que ela *está contida* no plano, pois uma figura não é um **elemento** do plano, mas um seu **subconjunto**. **Os elementos do plano são pontos.**

ser demonstradas. As propriedades admitidas sem demonstração chamam-se **postulados.**

$$\overbrace{\begin{array}{ccc} \text{admitidas sem demonstração:} & \qquad\qquad & \text{que podem ser demonstradas:} \\ \boxed{\text{postulados}} & & \boxed{\text{teoremas}} \end{array}}^{\boxed{\text{propriedades}}}$$

Um postulado básico em Geometria é o seguinte.

Postulado P1

> Existem infinitos(*) pontos.

A primeira vista, pode parecer ingênua e até mesmo desnecessária esta afirmação, mas, se desejarmos desenvolver a nossa teoria com rigor, veremos que este postulado tem seu lugar no encadeamento lógico. Por exemplo, sabendo que existem pontos, teremos certeza de que o espaço, que é o conjunto de todos os pontos, *não é vazio*. Assim, também, toma consistência a definição de figura geométrica como sendo todo conjunto *não-vazio* de pontos. Um leitor exigente concordará com que o simples fato de um conceito ser "definido" através de uma sentença não garante que tal conceito exista. Por exemplo, poderíamos "definir":

"Dois planos distintos são chamados **irmãos** se a sua interseção é um triângulo."

É uma definição bem clara, mas ao mesmo tempo inútil, pois todos sabemos que os tais "planos irmãos" não existem, simplesmente porque quando dois planos distintos se interceptam, a interseção é sempre **uma reta**.

(*) **Infinitos** significa *tantos quantos quisermos imaginar*. Em outras palavras, quando dizemos que existem infinitos pontos, isto significa que, se é considerado um certo número de pontos, é sempre possível imaginar um outro ponto diferente de todos os pontos já considerados.

1.6 — MAIS ALGUNS POSTULADOS

Vamos examinar cinco novos postulados, que permitirão caracterizar de modo mais preciso os conceitos primitivos de reta e plano.

Postulado P2

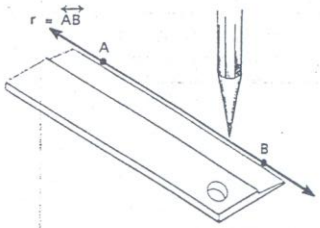
> Dados dois pontos *distintos* A e B, **existe uma única reta r** tal que $A \in r$ e $B \in r$.

Podemos dizer ainda que *dois pontos distintos determinam completamente uma reta, à qual ambos pertencem*. Ou então: *por dois pontos distintos passa uma única reta*. São modos diferentes de se dizer a mesma coisa. Em símbolos:

$$A \neq B \Rightarrow \exists\, r \mid (A \in r \text{ e } B \in r)$$

o que se lê: se A é distinto de B, então existe uma única r, tal que A pertence a r e B pertence a r.

A reta determinada pelos pontos A e B pode ser indicada por $\overleftrightarrow{AB}$ ou $\overleftrightarrow{BA}$ (indiferentemente).

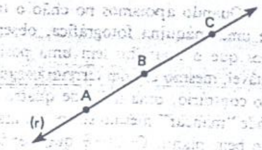


Quando apoiamos uma régua em dois pontos desenhados no papel e riscamos com um lápis de ponta bem fina, estamos materializando a idéia contida no postulado P2. Não existem duas retas distintas que contenham ambos os pontos dados.

Observações

1.ª) Quando dizemos que a reta r fica determinada por dois pontos distintos A e B, queremos dizer que existe uma única reta que passa por A e B. Assim, uma figura é determinada quando está garantida não só a sua existência como também a sua unicidade.

2.ª) Para caracterizarmos uma reta, podemos tomar sobre ela *qualquer par* de pontos distintos. A reta r da figura ao lado, por exemplo, pode ser indicada por $\overleftrightarrow{AB}$ ou por $\overleftrightarrow{BC}$ ou por $\overleftrightarrow{AC}$, indiferentemente.



Postulado P3

> Dada uma reta, existem infinitos pontos que pertencem a ela, e também infinitos pontos que estão fora dela.

Em outras palavras, na reta, e também fora dela, podemos considerar tantos pontos quantos quisermos.

Postulado P4

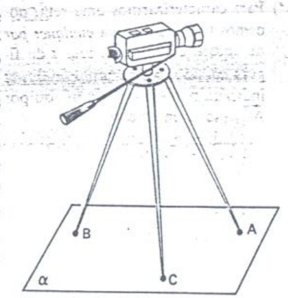
> Dados três pontos A, B e C *não colineares*, **existe um único plano** α tal que $A \in \alpha$ e $B \in \alpha$ e $C \in \alpha$.

Podemos dizer ainda que *três pontos não alinhados determinam completamente um plano, ao qual eles pertencem*. Ou então: *por três pontos não colineares passa um único plano*. Em símbolos:

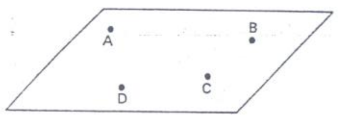
$$\boxed{\text{A, B, C não alinhados}} \Rightarrow \exists\, \alpha \mid (A \in \alpha \text{ e } B \in \alpha \text{ e } C \in \alpha)$$

O plano determinado pelos pontos A, B e C pode ser indicado por pl (ABC), ou pl (ACB), ou pl (BCA), etc., indiferentemente.

Quando apoiamos no chão o tripé de uma máquina fotográfica, observamos que o aparelho tem uma posição estável, mesmo em um terreno irregular. Ao contrário, uma mesa de quatro pés pode "mancar" mesmo sobre um assoalho bem plano. O fato é que, sendo o chão bastante plano, é garantido que *três* pés da mesa irão ficar apoiados; o quarto pé, entretanto, poderá não pertencer ao plano determinado pelos outros três. Tem-se, assim, uma materialização da idéia transmitida pelo postulado P4.

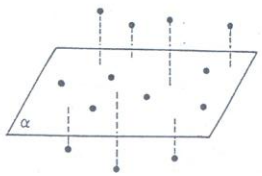


Observação: *Qualquer terno* de pontos não colineares tomados sobre um plano α caracteriza esse plano. O plano α da figura abaixo, por exemplo, pode ser indicado indiferentemente por pl (ABC), ou pl (ABD), ou pl (ACD), ou pl(BCD).



Postulado P5

Dado um plano, existem infinitos pontos que pertencem a ele, e também infinitos pontos que estão fora dele.

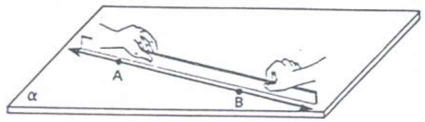


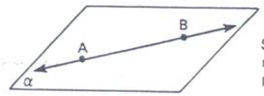
Em outras palavras, no plano, e também fora dele, podemos considerar tantos pontos quantos quisermos.

Postulado P6

Se dois pontos distintos A e B de uma reta r pertencem a um plano α, então todos os pontos dessa reta pertencem a α.

Dizemos também que *uma reta que tem dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.*





Se encostarmos dois pontos A e B de uma régua sobre a superfície de uma mesa, todos os pontos da régua ficarão encostados na mesa.

Em simbolos, escrevemos:

$$(A \neq B,\ A \in \alpha,\ B \in \alpha) \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$$

Note que não escrevemos $\overleftrightarrow{AB} \in \alpha$ e sim $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$, pois a reta $\overleftrightarrow{AB}$ não é um *elemento* do plano, mas um, seu *subconjunto*.

1.7 – UM RESUMO

O leitor verá que a exposição que faremos a seguir, da Geometria, é uma sucessão de definições de conceitos, que tem como ponto de partida alguns conceitos primitivos, acompanhada de outra sucessão de teoremas, cujas demonstrações têm fundamento em um grupo de postulados.

A discussão dos itens anteriores já nos conduziu ao estabelecimento de alguns conceitos primitivos, seis postulados e quatro definições, que estão aqui resumidos.

Conceitos primitivos: ponto, reta e plano.

Postulados

P1 – Existem infinitos pontos.

P2 – Dados dois pontos distintos A e B, **existe uma única reta r** tal que $A \in r$ e $B \in r$.

P3 – Dada uma reta, existem infinitos pontos que pertencem a ela, e também infinitos pontos que estão fora dela.

P4 – Dados três pontos A, B e C não-colineares, **existe um único plano** α tal que $A \in \alpha$ e $B \in \alpha$ e $C \in \alpha$.

P5 – Dado um plano, existem infinitos pontos que pertencem a ele, e também infinitos pontos que estão fora dele.

P6 – Se dois pontos distintos A e B de uma reta **r** pertencem a um plano α, então todos os pontos dessa reta pertencem a α.

Definições

D1 – **Espaço** é o conjunto de todos os pontos.

D2 – **Figura geométrica** é qualquer conjunto não-vazio de pontos.

D3 – Dois ou mais pontos são ditos **colineares** se todos eles pertencem a uma mesma reta.

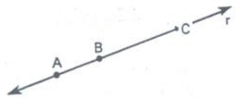
D4 – Duas ou mais figuras são ditas **coplanares** se todos os seus pontos pertencem a um mesmo plano.

Exercícios Resolvidos

1.1) Podem três pontos estar sobre uma mesma reta? Por quê?

Solução

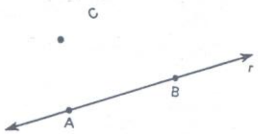
Sim. Conforme o postulado P3, existem *infinitos* pontos sobre uma reta. Assim, sempre podemos considerar três deles.



1.2) Três pontos são sempre colineares? Por quê?

Solução

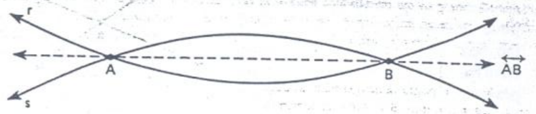
Não. Dados dois pontos A e B, pelo P2 existe uma única reta r que passa por eles. Pelo P3, existem *infinitos* pontos fora dessa reta. Se tomarmos *um deles*, teremos três pontos A, B e C não colineares.



1.3) Demonstre que se duas retas **distintas r e s** têm um ponto A em comum, então esse ponto é o único comum às duas retas, isto é, $r \cap s = \{A\}$.

Solução

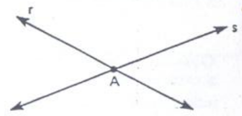
Temos $A \in r$ e $A \in s$. Se existisse um ponto $B \neq A$ comum às retas **r e s**, isto é, se $B \in r$ e $B \in s$, então ambas as retas deveriam *coincidir* com a reta $\overleftrightarrow{AB}$, conforme o P2 garante. Isso é **absurdo**, portanto é impossível existir outro ponto, além de A, comum às retas **r e s**.



Em símbolos:

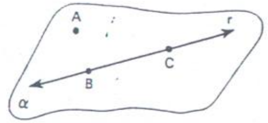
$$(r \neq s,\ A \in r,\ A \in s) \Rightarrow r \cap s = \{A\}$$

Nota: Duas retas, que têm na interseção *um único ponto*, chamam-se **retas concorrentes**.



1.4) Demonstre que dados uma reta r e um ponto A fora dela, existe um único plano α tal que $r \subset \alpha$ e $A \in \alpha$.

Solução



Devemos demonstrar a **existência** de α e a sua **unicidade**.

Existência

Para provarmos a *existência* do plano α, tomemos dois pontos distintos B e C sobre a reta r. Os pontos A, B e C não são colineares. Pelo P4 existe um único plano α = pl (ABC), tal que $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ e $C \in \alpha$. Pelo P6, temos ainda $r \subset \alpha$. O plano α assim construído satisfaz a condição desejada, isto é, contém a reta r e passa por A.

Unicidade

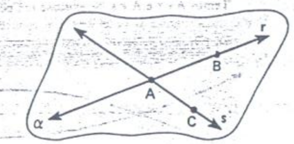
Provemos agora que esse plano é o *único* possível. De fato, se existisse um outro plano β contendo r e passando por A, é claro que os pontos B e C pertenceriam a ele. Assim, β seria o próprio plano determinado por A; B e C, ou seja, $\beta = \alpha$ = pl (ABC).

Nota: Dizemos também que *uma reta e um ponto fora dela determinam um plano que contém essa reta e o ponto*. Em símbolos:

$$A \notin r \Rightarrow \exists\, \alpha \mid (A \in \alpha \text{ e } r \subset \alpha)$$

Indicamos α = pl (A, r) = pl (r, A). Esta propriedade será chamada, de agora em diante **teorema T1**.

1.5) Demonstre que dadas duas retas **r e s** *concorrentes*, existe um único plano α tal que $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$.



Solução

Existência

Seja A o ponto (único) comum às duas retas. Em r tomamos $B \neq A$ e em s tomamos $C \neq A$. É claro que A, B e C não são colineares, pois se o fossem, r e s coincidiriam. Assim, pelo P4, existe um único plano $\alpha = pl(ABC)$. Pelo P6, temos $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$.

Unicidade

Se existisse outro plano β tal que $r \subset \beta$ e $s \subset \beta$, é claro que os pontos A, B e C pertenceriam a ele. Assim, o plano β iria coincidir com o plano determinado por esses três pontos: $\beta = \alpha = pl(ABC)$.

Nota: Dizemos também que *duas retas concorrentes determinam um plano que as contém*. Em símbolos:

$$r \cap s = \{A\} \Rightarrow \exists\, \alpha \mid r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha$$

Indicamos $\alpha = pl(r, s)$.

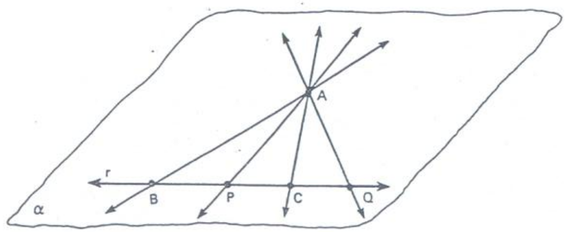
Esta propriedade, de agora em diante, será chamada de **teorema T2**.

1.6) Demonstre que um plano contém infinitas retas.

Solução

Sejam A, B e C três pontos não colineares pertencentes ao plano α. Pelo P6, a reta $r = \overleftrightarrow{BC}$ está contida em α. Tomando-se qualquer ponto $P \in r$, obtemos uma reta $\overleftrightarrow{AP} \subset \alpha$.

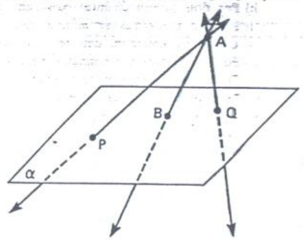
Se tomássemos *outro* ponto $Q \in r$, obteríamos **uma nova reta** $\overleftrightarrow{AQ} \subset \alpha$. Como a reta r tem infinitos pontos, é possível obter *infinitas retas contidas no plano* α.



1.7) Demonstre que por um ponto A passam infinitas retas.

Solução

Na resolução do exercício anterior, já ficou provado que pelo ponto A passam infinitas retas, embora naquele caso todas essas retas estivessem contidas em um só plano. Podemos dar uma demonstração mais abrangente, na qual as retas por A não sejam necessariamente coplanares. Para isso, consideremos um plano α e um ponto A fora dele. Tomando-se qualquer ponto $P \in \alpha$, obtemos uma reta $\overleftrightarrow{AP}$. Se tomássemos *outro* ponto $Q \in \alpha$, obteríamos **uma nova reta** $\overleftrightarrow{AQ}$. Como, pelo P5, existem infinitos pontos em α, é possível obter *infinitas retas que passam pelo ponto* A.

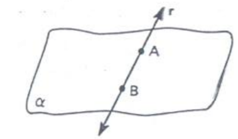


1.8) Se uma reta r não está contida em um plano α e tem com ele o ponto A em comum, então $r \cap \alpha = \{A\}$. Demonstre!

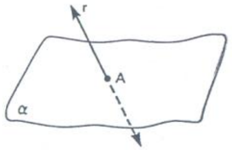
Solução

Se existisse um outro ponto B comum a r e α, então pelo P6 a reta r deveria estar contida em α, o que não acontece na realidade. Portanto, não pode existir tal ponto B, isto é, A é o único ponto comum a r e α:

$$r \cap \alpha = \{A\}$$



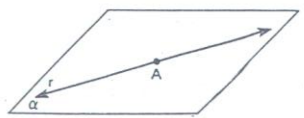
Nota: Quando $r \cap \alpha = \{A\}$ dizemos que a reta r *fura* o plano α no ponto A; dizemos também que r e α são *secantes*.



Exercícios Propostos

1.9) Sejam A um ponto, r uma reta que passa por esse ponto e α um plano que passa por essa reta. Classifique – verdadeira (V) ou falsa (F) – cada afirmação dada abaixo:

a) $A \subset r$
b) $A \in r$
c) $A \subset \alpha$
d) $A \in \alpha$
e) $r \in \alpha$
f) $r \subset \alpha$



1.10) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F):
F a) Um ponto é todo corpo pequeno.
F b) Um ponto é tudo o que não se subdivide em partes.
V c) O conceito de ponto não é definido.
F d) Um ponto é tudo que não tem dimensão.
V e) Toda reta é um conjunto de pontos.
F f) Todo plano é um conjunto de retas.
F g) Por um ponto dado passa uma única reta.
V h) Por dois pontos distintos passa uma única reta.
V i) Por um ponto passam infinitas retas.
F j) Um ponto determina uma reta que passa por ele.
V k) Por três pontos não alinhados passa um único plano.
F l) Dois pontos distintos determinam um plano.
F m) Três pontos distintos determinam um plano.
V n) Três pontos não alinhados são distintos.
V o) Dois pontos são sempre coplanares.
F p) Três pontos distintos não podem ser colineares.
V q) Se uma reta tem dois pontos distintos sobre um plano, ela tem pelo menos mais um ponto nesse plano.
r) Uma reta que tem um ponto sobre um plano está contida nesse plano.
s) Uma reta contida num plano tem um ponto que pertence a esse plano.
t) Uma reta contida num plano tem um único ponto que pertence a esse plano.
u) Três pontos coplanares são colineares.
v) Três pontos colineares são coplanares.

1.11) Quantas retas ficam determinadas por três pontos não alinhados?

1.12) Quantas retas ficam determinadas por quatro pontos, três a três não alinhados?

1.13) Quantos planos ficam determinados por quatro pontos não coplanares?

1.14) Prove que se dois planos distintos α e β têm dois pontos A e B em comum, então a interseção deles é a reta $\overleftrightarrow{AB}$:

$$\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AB}$$

Capítulo 2

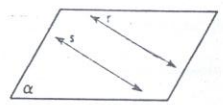
Duas retas no espaço. Interseção de planos

2.1 — RETAS PARALELAS. POSTULADO DE EUCLIDES

Definição D5

> Duas retas são **paralelas** se ambas estão contidas em um mesmo plano e não têm ponto em comum.

Em outras palavras, para que duas retas **r** e **s** sejam paralelas, deve existir um plano α tal que $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$, *além disso*, deve-se ter $r \cap s = \varnothing$. Indicamos $r /\!/ s$. Em símbolos:

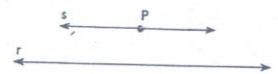


$$r /\!/ s \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \mid (r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha) \\ \text{e} \\ r \cap s = \varnothing \end{cases}$$

O seguinte postulado, conhecido como postulado das paralelas ou postulado de Euclides, garante a existência de retas paralelas.

Postulado P7

> Dados uma reta **r** e um ponto P fora dela, existe uma única reta que passa por P e é paralela à reta **r**.



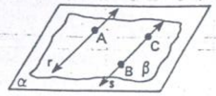
Em outras palavras, *por um ponto fora de uma reta dada passa uma única reta paralela à reta dada*. Em símbolos:

$$P \notin r \Rightarrow \exists s \mid (P \in s \text{ e } r /\!/ s)$$

Exercício Resolvido

2.1) Demonstre que, dadas duas retas r e s paralelas, existe um único plano α tal que $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$.

Solução



Existência

A existência de um plano α que contém ambas as retas r e s é garantida pela própria definição D5, isto é, o fato de r e s serem paralelas significa que existe um plano α tal que $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$ (além de garantir também que $r \cap s = \emptyset$).

Unicidade

Consideremos sobre a reta r o ponto A e sobre a reta s os pontos B e C. Como $A \notin s = \overleftrightarrow{BC}$, é claro que os pontos A, B e C não são colineares. Se existissem dois planos α e β contendo as retas r e s, ambos teriam que *coincidir* com o plano determinado pelos pontos A, B e C, isto é,

$$\alpha = \beta = pl\,(ABC)$$

Sendo assim, não pode haver dois planos distintos contendo r e s.

Nota: Dizemos que *duas retas paralelas determinam um plano que contém ambas*. Em símbolos:

$$r \parallel s \Rightarrow \exists\, \alpha \mid (r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha)$$

Indicamos $\alpha = pl\,(r, s)$.

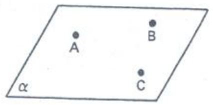
Esta propriedade será chamada, de agora em diante, **teorema T3**.

2.2 — DETERMINAÇÃO DE UM PLANO

Há quatro casos, principalmente, em que um plano fica determinado, isto é, em que podemos garantir a *existência* e a *unicidade* de um plano. Vejamos agora um resumo desses quatro casos possíveis.

1.° caso

Três pontos não alinhados

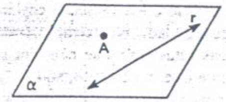


Este é o caso que já vimos, correspondente ao postulado P4. Temos

$$\alpha = pl\,(ABC)$$

2.° caso

Uma reta e um ponto fora dela

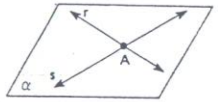


Este é o caso que já vimos, através do *exercício resolvido* 1.4 (teorema T1). Temos

$$\alpha = pl\,(r, A)$$

3.° caso

Duas retas concorrentes

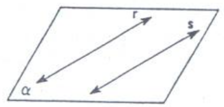


Este é o caso que já vimos, através do *exercício resolvido* 1.5 (teorema T2). Temos

$$\alpha = pl\,(r, s)$$

4.° caso

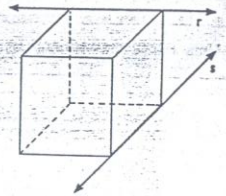
Duas retas paralelas



Este é o caso que já vimos, através do *exercício resolvido* 2.1 (teorema T3). Temos

$$\alpha = pl\,(r, s)$$

2.3 — RETAS REVERSAS



Devemos notar que, para se ter r // s, é obrigatório que **r e s** sejam **coplanares**. Na figura ao lado, por exemplo, podemos ver duas retas **r e s** que não têm ponto comum e que, no entanto, *não são paralelas*, pois não existe plano que contenha ambas. Neste caso, as duas retas chamam-se **reversas**.

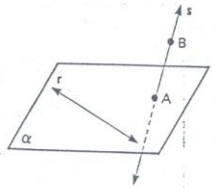
Definição D6

> Duas retas são **reversas** se não existe plano que contenha ambas.

Exercícios Resolvidos

2.2) Prove que existem retas reversas.

Solução



Consideremos uma reta **r** e o ponto A fora dela. Seja α o plano determinado por **r** e A, isto é, α = pl (r, A). Tomemos o ponto B fora do plano α e consideremos a reta s = $\overleftrightarrow{AB}$. Podemos provar que essas duas retas **r** e **s**, assim construídas, são **reversas**, isto é, não existe plano que contenha ambas.

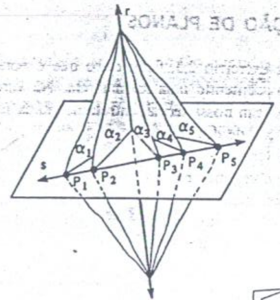
De fato, *se existisse* algum plano β tal que r ⊂ β e s ⊂ β, então, como A ∈ s, teríamos A ∈ β. Mas se isto fosse verdade, seria β = pl (r, A) = α, o que é *absurdo*, pois o ponto B pertence a β e não pertence a α, ou seja, é impossível que α e β coincidam.

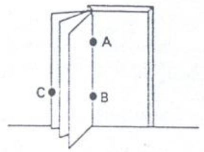
Sendo assim, conclui-se que não pode existir um plano contendo ambas as retas **r** e **s**.

2.3) Prove que por uma reta passam infinitos planos.

Solução

Dada uma reta **r**, consideremos uma outra reta **s**, tal que **r** e **s** sejam reversas. Tomando-se qualquer ponto $P_1 \in s$, obtemos um plano $\alpha_1 = pl\ (r, P_1)$. Se tomássemos *outro* ponto $P_2 \in s$, obteríamos **um novo plano** $\alpha_2 = pl\ (r, P_2)$. É claro que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, pois se α_1 coincidisse com α_2, esse plano conteria **r** e **s**, o que é impossível. Como a reta **s** tem infinitos pontos, é possível obter *infinitos planos que passam pela reta* **r**.





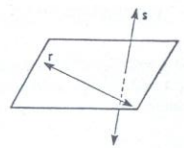
Uma idéia concreta desta situação temos ao observarmos uma porta. A porta passa pelos pontos A e B, situados nas dobradiças; mas, a cada posição da porta, corresponde um plano que contém a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Para determinar um desses planos, é necessário fixar um terceiro ponto C, não situado na reta $\overleftrightarrow{AB}$.

2.4 — POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS DISTINTAS

Conhecendo as noções de retas paralelas e retas reversas, podemos resumir as diversas posições relativas de duas retas distintas **r** e **s**.

1.ª) **Retas reversas**

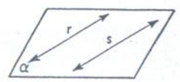
Neste caso, não existe plano que contenha ambas.
Temos: r ∩ s = ∅.



2.ª) **Retas coplanares** (isto é, ambas contidas em um mesmo plano):

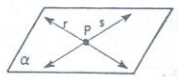
a) **paralelas**
Neste caso,

r ∩ s = ∅



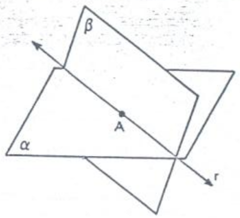
b) **concorrentes**
Neste caso,

r ∩ s = {P}



2.5 — INTERSEÇÃO DE PLANOS

Na resolução do exercício 2.3, ficou claro que é possível termos dois (ou mais) planos distintos contendo uma mesma reta. Na verdade, tal reta é a **interseção** desses planos. Em nossa teoria, entretanto, nada foi dito até agora para esclarecer se a interseção de dois planos distintos pode ou não ser *algo diferente de uma reta*. Conforme veremos no postulado seguinte, se dois planos distintos possuem pontos em comum, tais pontos constituem obrigatoriamente uma reta.



Postulado P8

> Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

Em símbolos:

$$\left.\begin{matrix} A \in \alpha \\ A \in \beta \\ \alpha \neq \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \exists\, r \mid r = \alpha \cap \beta$$

Os dois planos α e β, neste caso, chamam-se secantes. Note que, no exercício 2.3 que resolvemos anteriormente, ficou provada a **existência** de planos secantes.

Definição D7

> Dois planos são **secantes** se a sua interseção é uma reta.

2.6 — UM RESUMO

A seguir fazemos um resumo das definições e postulados apresentados neste capítulo, além dos teoremas vistos até agora.

Definições

D5 – Duas retas são **paralelas** se ambas estão contidas em um mesmo plano e não têm ponto em comum.
D6 – Duas retas são **reversas** se não existe plano que contenha ambas.
D7 – Dois planos são **secantes** se a sua interseção é uma reta.

Postulados

P7 – **Postulado das paralelas** ou **de Euclides** – Dados uma reta **r** e um ponto P fora dela, existe uma única reta que passa por P e é paralela à reta **r**.
P8 – Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

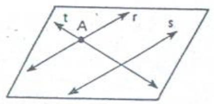
Teoremas

T1 – Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano que contém essa reta e o ponto.
T2 – Duas retas concorrentes determinam um plano que as contém.
T3 – Duas retas paralelas determinam um plano que as contém.

Exercícios Resolvidos

2.4) Sejam r, s e t três retas contidas em um mesmo plano, tais que $r \parallel s$. Prove que se t é concorrente com r, então t também é concorrente com s.

Solução



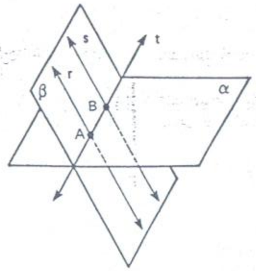
Seja A o ponto comum a r e t: $r \cap t = \{A\}$. Como t e s são coplanares, só há duas possibilidades: ou $t \parallel s$ ou t e s são concorrentes. Mas se fosse $t \parallel s$, então pelo ponto A estariam passando duas retas distintas, paralelas à reta s, o que é absurdo pelo postulado P7. Logo, t e s são concorrentes.

2.5) Prove que se a reta r fura o plano α e a reta s é paralela a r, então s também fura α.

Solução

Para provar que s fura α, devemos provar que s tem um ponto em comum com α e que esse ponto é único, isto é,

$$s \cap \alpha = \{B\}$$



Vamos então construir o ponto B. Seja A o ponto comum a r e α:

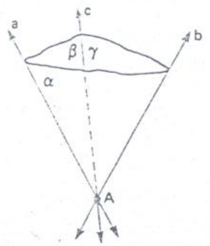
$$r \cap \alpha = \{A\}$$

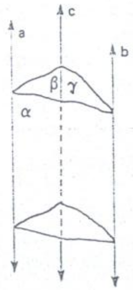
Como $r /\!/ s$, existe o plano $\beta = pl(r, s)$, o qual tem o ponto A em comum com α. Logo, pelo P8, existe uma única reta t tal que $t = \alpha \cap \beta$. É claro que t passa por A e é distinta de r e de s. Assim, tem-se três retas coplanares r, s e t tais que $r /\!/ s$. Pelo exercício 2.4, como t é concorrente com r, então t e s também são concorrentes. Seja B o ponto comum: $\{B\} = t \cap s$. Assim, escrevemos:

$$\{B\} = t \cap s = (\alpha \cap \beta) \cap s = \alpha \cap (\beta \cap s) = \alpha \cap s$$

ou seja: $s \cap \alpha = \{B\}$

2.6) Teorema T4 – Prove o seguinte teorema das três interseções: sejam α β e γ três planos secantes dois a dois tais que $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \cap \gamma = b$ e $\beta \cap \gamma = c$. Se as retas a, b e c são *distintas*, então há somente duas possibilidades: ou as três concorrem em um mesmo ponto, ou elas são paralelas duas a duas.





Em símbolos:

Hipótese: $\boxed{\alpha \cap \beta = a,\ \alpha \cap \gamma = b,\ \beta \cap \gamma = c \quad a, b, c \text{ distintas}}$

Tese: $\boxed{a \cap b \cap c = \{A\} \text{ ou } (a /\!/ b \text{ e } b /\!/ c \text{ e } a /\!/ c)}$

Solução

Como as retas a e b são coplanares (contidas em α), há somente duas possibilidades:

1.º) $a \cap b = \{A\}$ 2.º) $a /\!/ b$

1.º) Se $a \cap b = \{A\}$, podemos escrever $\{A\} = a \cap b = (\alpha \cap \beta) \cap (\alpha \cap \gamma) = \alpha \cap (\beta \cap \gamma) = \alpha \cap c$
Logo, $A \in c$. Fica provado, então, que a reta c também passa por A, ou seja,

$$a \cap b \cap c = \{A\}$$

2.º) Se $a /\!/ b$, podemos escrever:

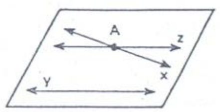
$$a \cap b = \varnothing \Rightarrow (\alpha \cap \beta) \cap (\alpha \cap \gamma) = \varnothing \Rightarrow \alpha \cap (\beta \cap \gamma) = \varnothing \Rightarrow \alpha \cap c = \varnothing$$

Como a e b estão contidas em α, tem-se $a \cap c = \varnothing$ e $b \cap c = \varnothing$.

Assim, a e c são retas coplanares sem ponto comum, isto é, $a /\!/ c$. Pelo mesmo motivo tem-se $b /\!/ c$.

2.7) Sejam três retas x, y e z, distintas duas a duas, *todas contidas em um mesmo plano*. Demonstre que se $x /\!/ y$ e $y /\!/ z$ então $x /\!/ z$.

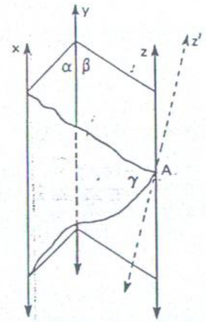
Solução



Como x e z são coplanares, há somente duas possibilidades: ou $x /\!/ z$, ou x e z são concorrentes em um ponto A. Mas se fosse $x \cap z = \{A\}$ então pelo ponto A estariam passando duas retas distintas, paralelas à reta y, o que é absurdo pelo postulado P7. Assim, só pode ser $x /\!/ z$.

2.8) Teorema T5 – Sejam x, y e z três retas distintas duas a duas. Demonstre que se $x /\!/ y$ e $y /\!/ z$ então $x /\!/ z$.

Solução



Se as três retas são coplanares, recaímos no exercício 2.7, já demonstrado. Vamos então supor que não há um plano que contenha as três retas. Assim, sendo $\alpha = pl(x, y)$ e $\beta = pl(y, z)$, tem-se $\alpha \neq \beta$. Se tomarmos sobre a reta z o ponto A, é claro que $A \notin x$, pois se a reta x passasse por A teríamos duas retas distintas paralelas à reta y, concorrentes em A, contra o postulado P7.

Portanto, se $A \notin x$ podemos considerar o plano $\gamma = pl(x, A)$. Os planos γ e β, distintos, têm em comum o ponto A, logo existe a reta $z' = \beta \cap \gamma$. É claro que $z' \neq x$ e $z' \neq y$, pois o ponto A pertence a z' mas não pertence a x nem a y.

Apliquemos agora o **teorema das três interseções** (veja o exercício 2.6: teorema T4).

Os planos α, β e γ são secantes dois a dois e as interseções x, y e z' são distintas. Como $x /\!/ y$, resulta que $z' /\!/ x$ e $z' /\!/ y$.

Mas então as retas z e z' passam por A e são paralelas à reta y. Pelo postulado P7, tem-se $z = z'$ e portanto $x /\!/ z$.

Outro modo: (utilizando o exercício 2.5).

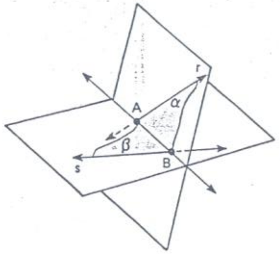
a) x e z *não têm ponto comum*, pois não sendo assim estaria contrariado o postulado P7.

b) Resta provar que x e z *são coplanares*. Sendo $A \in z$, tomamos o plano $\gamma = pl(x, A)$. Se γ não contivesse z, a reta z furaria γ em A, logo a reta $y /\!/ z$ também furaria γ e assim a reta $x /\!/ y$ *também furaria* γ, o que é absurdo, pois $x \subset \gamma$. Assim, $z \subset \gamma$.

Conclui-se então que x e z são retas coplanares sem ponto em comum: $x /\!/ z$.

2.9) Duas retas **r** e **s** são reversas. Se $A \in r$ e $B \in s$, qual é a interseção dos planos $\alpha = \text{pl}(r, B)$ e $\beta = \text{pl}(s, A)$?

Solução



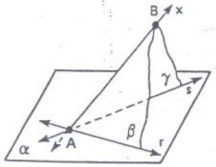
É claro que, sendo **r** e **s** reversas, tem-se $A \neq B$ e $\alpha \neq \beta$. Mas como $A \in \alpha$ e $A \in \beta$, então $A \in \alpha \cap \beta$. Da mesma forma, como $B \in \alpha$ e $B \in \beta$, então $B \in \alpha \cap \beta$. Logo, pelo P8, resulta que

$$\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AB}$$

A interseção pedida é a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

2.10) Por um ponto A conduzem-se duas retas distintas **r** e **s**. Fora do plano $\alpha = \text{pl}(r, s)$ toma-se o ponto B. Qual é a interseção dos planos $\beta = \text{pl}(r, B)$ e $\gamma = \text{pl}(s, B)$?

Solução

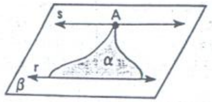


É claro que $\beta \neq \gamma$ (pois se fosse $\beta = \gamma$ teríamos $\beta = \gamma = \alpha = \text{pl}(r, s)$ mas isso é absurdo pois $B \notin \alpha$). Já sabemos que B pertence a β e a γ. Provemos que A também pertence a ambos. Isso é imediato, pois sendo $r \cap s = \{A\}$, tem-se $A \in r$ e $A \in s$, donde $A \in \beta$ e $A \in \gamma$. Assim,

$$x = \beta \cap \gamma = \overleftrightarrow{AB}$$

A interseção procurada é a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

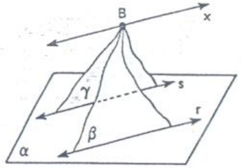
2.11) As retas **r** e **s** são paralelas e $A \in s$. Prove que o plano $\alpha = \text{pl}(r, A)$ contém a reta **s**.



Solução

Seja $\beta = \text{pl}(r, s)$. Basta provar que $\beta = \alpha$. De fato, como $s \subset \beta$ e $A \in s$, tem-se $A \in \beta$. Portanto, $\beta = \text{pl}(r, A) = \alpha$. Conseqüentemente, $s \subset \alpha$.

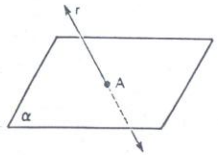
2.12) Duas retas **r** e **s** são paralelas. Fora do plano $\alpha = \text{pl}(r, s)$ toma-se o ponto B. Qual é a interseção dos planos $\beta = \text{pl}(r, B)$ e $\gamma = \text{pl}(s, B)$?



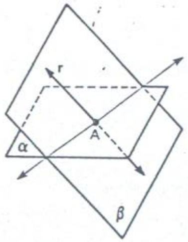
Solução

Os planos β e γ são distintos (pois se fosse $\beta = \gamma$ teríamos $\beta = \gamma = \alpha$, o que é absurdo, pois $B \notin \alpha$). Seja **x** a reta conduzida por B, paralela às retas **r** e **s**. Como $B \in x$, é claro que $\text{pl}(x, r) = \text{pl}(r, B) = \beta$ e $\text{pl}(x, s) = \text{pl}(s, B) = \gamma$. Assim, $\beta \cap \gamma = x$.

2.13) A reta **r** fura o plano α no ponto A. Como são as interseções de α com os planos que contêm **r**?



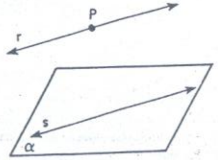
Solução



Se β é um plano qualquer contendo **r**, é claro que $\beta \neq \alpha$ (pois se fosse $\beta = \alpha$, **r** estaria contida em α).

Assim, α e β são planos distintos que têm em comum o ponto A. Pelo postulado P8 a interseção de α e β é uma reta que passa por A. Portanto, as interseções de α com os planos que contêm **r** são retas que passam por A.

2.14) Seja a reta **s** contida no plano α e seja P um ponto fora de α. Por P conduz-se a reta **r** paralela a **s**. É claro que **r** não está contida em α (pois $P \notin \alpha$). Prove que $r \cap \alpha = \varnothing$.



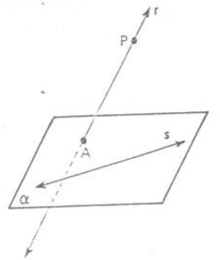
Solução

Seja $\beta = pl(r, s)$. Vamos provar que r não pode ter ponto em comum com α. De fato, se existisse um ponto A comum a r e α, esse ponto não pertenceria à reta s (pois $r \parallel s$). Assim, teríamos $\alpha = pl(s, A)$.

Mas

$$\beta = pl(r, s) = pl(A, s)$$

logo seria $\alpha = \beta$ e portanto $r \subset \alpha$, o que é absurdo. Assim, $r \cap \alpha = \emptyset$.



Exercícios Propostos

2.15) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Se $a \cap \alpha = a$, então $a \subset \alpha$.
b) Se $\alpha \cap \beta = \alpha$, então $\alpha = \beta$.
c) Se $\alpha \cap a \neq \emptyset$, então a fura α.

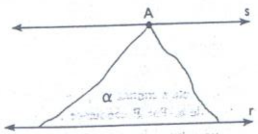
2.16) Se dois planos α e β têm em comum três pontos não colineares, o que acontece com α e β?

2.17) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Duas retas distintas determinam um plano.
b) Uma reta e um ponto determinam um plano.
c) Duas retas concorrentes são coplanares.
d) Dois planos que têm duas retas distintas em comum são iguais.

2.18) Pelo ponto A não pertencente à reta r conduz-se a reta s paralela a r. Prove que

$$s \subset pl(r, A)$$

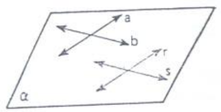


2.19) Se três retas são duas a duas concorrentes em três pontos distintos, então elas são coplanares. Prove.

2.20) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Duas retas reversas a e b são paralelas à mesma reta c.
b) Duas retas distintas r e s, reversas a uma terceira reta t, são reversas entre si.
c) Duas retas ou são coincidentes ou são reversas.
d) Duas retas reversas não têm ponto comum.
e) Duas retas reversas são distintas.
f) Duas retas que têm um ponto comum são concorrentes.
g) Duas retas que têm um único ponto comum são concorrentes.
h) Duas retas reversas não são coplanares.
i) Se duas retas distintas não são reversas, então elas são paralelas.
j) Duas retas que não têm ponto comum são paralelas.
k) Duas retas que não têm ponto comum são reversas.
l) Duas retas que não têm ponto comum ou são paralelas ou são reversas.
m) Duas retas distintas ou são concorrentes ou são paralelas.

2.21) Sejam duas retas, a e b, concorrentes. Sobre o plano $\alpha = pl(a, b)$ tomam-se outras duas retas r e s tais que $r \parallel a$ e $s \parallel b$. Prove que r e s são concorrentes.

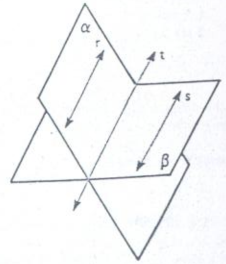


2.22) As retas x e y são reversas. Tomam-se os pontos $A \in x$ e $B \in y$. Demonstre que os planos $\alpha = pl(x, \overleftrightarrow{AB})$ e $\beta = pl(y, \overleftrightarrow{AB})$ são distintos.

2.23) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

a) A interseção de dois planos só pode ser uma reta.
b) Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então eles são secantes.
c) Se dois planos são secantes, eles têm um único ponto em comum.
d) Dois planos secantes têm um ponto em comum.
e) Se $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, então $\alpha = \beta$.

2.24) Dois planos α e β interceptam-se segundo a reta t. As retas r e s, distintas de t, são paralelas entre si e tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$. Prove que t é paralela a r e a s.



Capítulo

3

Reta e plano paralelos. Planos paralelos entre si

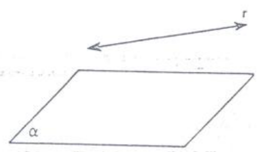
3.1 — RETA E PLANO PARALELOS

Definição D8

Se uma reta r e um plano α são tais que

$$r \cap \alpha = \varnothing$$

dizemos que r *é paralela a* α ou ainda α *é paralelo a* r ou que r *e* α *são paralelos entre si.*



Indicamos $r /\!/ \alpha$ ou $\alpha /\!/ r$.

É natural perguntar, neste ponto, se realmente *existem* uma reta e um plano paralelos entre si. Esta questão já está resolvida. A existência de reta paralela a plano é garantida pelo teorema demonstrado no exercício 2.14, cujo enunciado reescrevemos aqui, com outras palavras:

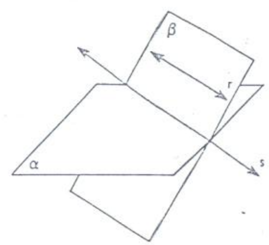
> Se a reta r não está contida em um plano α e é paralela a uma reta $s \subset \alpha$, então r e α são paralelos entre si.

Em símbolos:

$$\boxed{(r \not\subset \alpha,\ r /\!/ s,\ s \subset \alpha) \Rightarrow r /\!/ \alpha}$$

Exercícios Resolvidos

3.1) Dois planos, α e β, são secantes e $\alpha \cap \beta = s$. A reta r está contida em β e é paralela ao plano α. Prove que $r /\!/ s$.



Solução

É claro que $r \neq s$, pois $r \not\subset \alpha$ e $s \subset \alpha$.

Se r e s fossem concorrentes em um ponto A, como $s \subset \alpha$ seria $A \in \alpha$, o que é absurdo, pois $r /\!/ \alpha$, isto é, r não tem ponto em comum com α. Assim, resta uma única possibilidade: $r /\!/ s$.

Notas

1.ª) Este mesmo teorema poderia ser enunciado assim:

"Se dois planos são secantes e uma reta de um deles é paralela ao outro, então ela é paralela à interseção dos dois planos."

ou assim:

"Se uma reta é paralela a um dado plano, então qualquer plano que contém a reta dada e é secante ao plano dado tem com este uma interseção paralela à reta dada."

ou ainda:

"Se $r /\!/ \alpha$, então existe uma reta $s \subset \alpha$ tal que $r /\!/ s$."

2.ª) Este teorema corresponde a uma **condição necessária** para que uma reta seja paralela a um plano:

"Para que a reta r seja paralela ao plano α é **necessário** que r não esteja contida em α e seja paralela a uma reta de α."

3.ª) No início deste capítulo foi enunciado o seguinte teorema, cuja demonstração tinha sido feita no exercício 2.14:

"Se a reta r não está contida em um plano α e é paralela a uma reta $s \subset \alpha$, então r e α são paralelos entre si."

Este teorema corresponde a uma **condição suficiente** para que uma reta seja paralela a um plano:

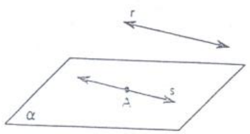
"Para que a reta r seja paralela ao plano α é **suficiente** que r não esteja contida em α e seja paralela a uma reta de α."

4.ª) Unindo-se as 2.ª e 3.ª notas, podemos então resumir:

Teorema T6

> Uma **condição necessária e suficiente** para que uma reta r seja paralela ao plano α é que r não esteja contida em α e seja paralela a uma reta de α.

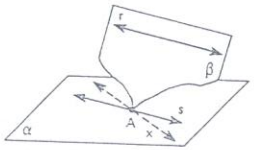
3.2) Teorema T7 — A reta r e o plano α são paralelos. Pelo ponto $A \in \alpha$ conduz-se a reta $s \parallel r$. Prove que $s \subset \alpha$.



Solução

Em símbolos, o teorema pode ser enunciado assim:

$$\left.\begin{array}{l} r \parallel s \\ r \parallel \alpha \\ A \in \alpha \\ A \in s \end{array}\right\} \Rightarrow s \subset \alpha$$

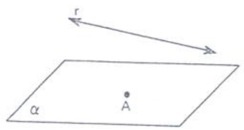


Para demonstrar este teorema, consideremos a figura ao lado, onde "fingimos não saber" que $s \subset \alpha$. Seja $\beta = pl\,(r, s)$. Como A é comum aos dois planos, β e α se interceptam segundo uma reta que provisoriamente chamaremos de x (vamos provar que $x = s$). Pelo exercício 3.1, tem-se $x \parallel r$. Mas então as retas x e s, que passam por A, são ambas paralelas a r. Pelo postulado P7, só pode ser $x = s$. Portanto, $s \subset \alpha$.

Nota: O teorema acima pode também ser enunciado assim:

"Se as retas r e s são paralelas e pelo ponto $A \in s$ conduzimos um plano $\alpha \parallel r$, então $s \subset \alpha$."

3.3) São dados uma reta r e um ponto $A \notin r$. Construa um plano que passa por A e é paralelo à reta r.

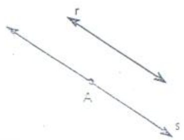


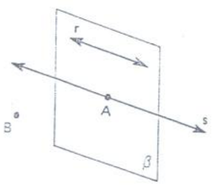
Solução

Devemos descrever primeiramente a seqüência de operações necessárias para **construir** o plano procurado e, em seguida, devemos **provar** que ele satisfaz a condição pedida.

Construção

Conduzimos por $A \notin r$ a reta $s \parallel r$.

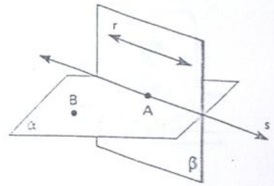




Em seguida, sendo $\beta = pl\,(r, s)$, tomamos *fora de* β o ponto B.

Finalmente, como $B \notin s$, podemos considerar o plano

$$\alpha = pl\,(s, B)$$



Prova

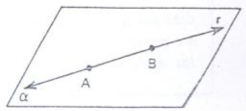
Resta provar que $\alpha \parallel r$. Para isso, basta notar que r não está contida em α e é paralela a uma reta s desse plano (é claro que r não está contida em α, pois se isso acontecesse, os planos α e β coincidiriam).

3.2 — POSIÇÕES RELATIVAS DE UMA RETA E UM PLANO

Vamos agora resumir as diversas posições relativas de uma reta e um plano.

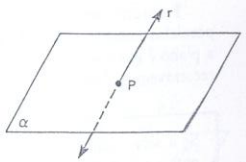
1.º) $\boxed{r \subset \alpha}$

Neste caso, a reta tem todos os pontos em comum com o plano.



2.º) $\boxed{r \cap \alpha = \{P\}}$

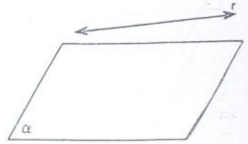
Neste caso, dizemos que r e α são **secantes** ou **concorrentes** ou que a reta **fura** o plano.
O ponto P é o **traço** de r no plano α.



3.º) $\boxed{r \parallel \alpha}$

Neste caso,

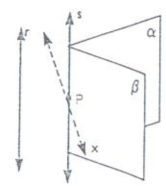
$$r \cap \alpha = \varnothing$$



Exercícios Resolvidos

3.4) **Teorema T8** – Prove que se uma reta é paralela a dois planos secantes, ela é paralela à interseção desses dois planos.

Solução



O enunciado deste teorema, em símbolos, é:

$$\left.\begin{array}{l} r \parallel \alpha \\ r \parallel \beta \\ s = \alpha \cap \beta \end{array}\right\} \Rightarrow r \parallel s$$

Na demonstração utilizamos o teorema T7 (do exercício 3.2). Consideremos pelo ponto $P \in s$ a reta $x \parallel r$ e provemos que:

$$x = s = \alpha \cap \beta$$

Temos:

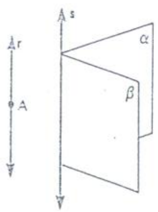
$$\left.\begin{array}{l} r \parallel x \\ r \parallel \alpha \\ P \in x \\ P \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow x \subset \alpha \text{ e também: } \left.\begin{array}{l} r \parallel x \\ r \parallel \beta \\ P \in x \\ P \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow x \subset \beta$$

Assim, $x = \alpha \cap \beta = s$ e, portanto, $r \parallel s$.

3.5) São dados dois planos α e β, secantes, e o ponto A *fora de ambos*. Construa por A uma reta paralela a ambos os planos.

Solução

Construção



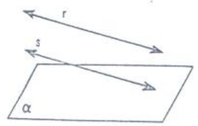
Seja $s = \alpha \cap \beta$. Consideremos pelo ponto $A \notin s$ a reta $r \parallel s$.

Prova

Provemos que a reta r é paralela a ambos os planos. Basta aplicar aqui a **condição necessária e suficiente do teorema T6** (vista na 4.ª nota do exercício 3.1). Temos:

$$\left.\begin{array}{l} r \not\subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ r \parallel s \end{array}\right\} \Rightarrow r \parallel \alpha \text{ e também: } \left.\begin{array}{l} r \not\subset \beta \\ s \subset \beta \\ r \parallel s \end{array}\right\} \Rightarrow r \parallel \beta$$

3.6) São dadas duas retas **r** e **s** paralelas e um plano α tal que $r \parallel \alpha$. Prove que só há duas possibilidades: ou $s \parallel \alpha$ ou $s \subset \alpha$.



Solução

Em símbolos, o teorema se escreve assim:

$$(r \parallel s \text{ e } r \parallel \alpha) \Rightarrow (s \parallel \alpha \text{ ou } s \subset \alpha)$$

É claro que só há dois casos possíveis:

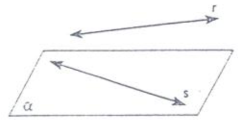
1.º) $s \cap \alpha = \varnothing$ 2.º) $s \cap \alpha \neq \varnothing$

No 1.º caso temos $s \parallel \alpha$.

Provemos que no 2.º caso temos $s \subset \alpha$. Seja A um ponto comum a **s** e α. Basta, então, aplicar o teorema T7 (do exercício 3.2). Temos:

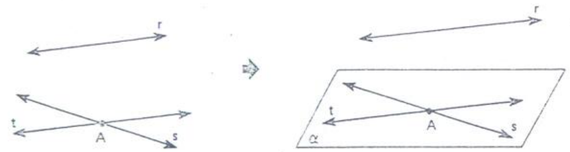
$$\left.\begin{array}{l} r \parallel s \\ r \parallel \alpha \\ A \in s \\ A \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow s \subset \alpha$$

3.7) São dadas duas retas reversas, **r** e **s**. Construa um plano que contém **s** e é paralelo à reta **r**.



Solução

Construção



a) Pelo ponto $A \in s$ tomamos a reta $t \parallel r$.

b) Como **t** e **s** são concorrentes, podemos considerar o plano $\alpha = \text{pl}(s, t)$.

Prova

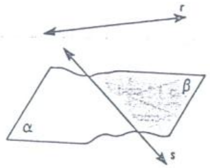
Provemos que o plano α assim obtido é paralelo à reta r. Para isso, basta notar que a reta r não está contida em α (pois r e s são reversas) e é paralela a uma reta de α, que é a reta t.

$$\left.\begin{array}{l} r \not\subset \alpha \\ t \subset \alpha \\ r \parallel t \end{array}\right\} \Rightarrow r \parallel \alpha$$

3.8) Prove que o plano construido no exercício anterior é **único**.

Solução

Sejam **r** e **s** reversas. Admitamos que por **s** são possíveis dois planos α e β *distintos*, paralelos à reta **r**. Apliquemos o teorema T8 (do exercício 3.4). Como a reta **r** é paralela aos dois planos secantes α e β, ela deve ser paralela à sua interseção. Mas $\alpha \cap \beta = s$, logo $r \parallel s$, o que é absurdo. Assim, deve-se ter $\alpha = \beta$.



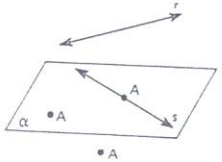
3.9) São dadas as retas reversas **r** e **s** e o ponto A. Construa por A um plano paralelo a ambas as retas.

Solução

A resposta desta questão depende da posição do ponto A em relação às duas retas reversas. Há três casos a considerar, ilustrados na figura abaixo.

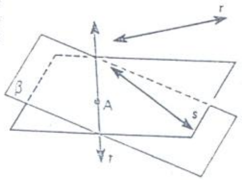
1.° caso: O ponto A pertence a uma das retas (à reta **s**, por exemplo).

Neste caso, como todo plano construido por A tem ao menos esse ponto em comum com a reta **s**, é *impossível* construir um plano que seja paralelo a ambas as retas dadas.



2.° caso: O ponto A não pertence a **s**, mas pertence ao plano α que contém **s** e é paralelo à reta **r** (isto é, o ponto A e uma das retas determinam um plano paralelo à outra reta).

Neste caso também é *impossível* construir por A um plano paralelo a **r** e a **s**. De fato, se existisse um plano β por A, tal que $r \parallel \beta$ e $s \parallel \beta$, sendo $t = \alpha \cap \beta$, deveríamos ter $r \parallel t$ e $s \parallel t$, o que é absurdo, pois **r** e **s** são reversas.



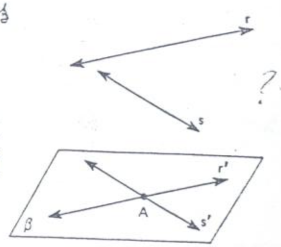
3.° caso: O ponto A está situado de tal modo que o plano pl (r, A) não é paralelo à reta **s** e também o plano pl (s, A) não é paralelo à reta **r** (isto é, o ponto A e qualquer das duas retas determinam um plano que não é paralelo à outra reta).

Neste caso, é *possível* construir por A um plano paralelo a **r** e a **s**.

Construção

Vamos conduzir por A as retas $r' \parallel r$ e $s' \parallel s$, as quais determinam o plano $\beta = \text{pl}(r', s')$.

O plano β é paralelo às retas **r** e **s**.



Prova

Em primeiro lugar notemos que β não contém **r**. De fato, se fosse $r \subset \beta$, teríamos $s \parallel \beta$ e sabemos que o ponto A está situado de tal modo que essa situação é impossível. Sendo assim, pelo teorema T6:

$$\left.\begin{array}{l} r \not\subset \beta \\ r \parallel r' \\ r' \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow r \parallel \beta$$

e com o mesmo raciocínio tiramos $s \parallel \beta$.

3.10) São dadas as retas reversas **r** e **s** e o ponto A. Construa por A uma reta concorrente com ambas as retas dadas.

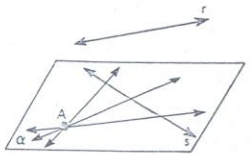
Solução

Como já ocorreu no exercício anterior, a resposta desta questão depende da posição do ponto A em relação às duas retas reversas. Vamos considerar separadamente cada um dos três casos.

1.° caso: O ponto A pertence a uma das retas (à reta **s**, por exemplo).

Neste caso, tomando-se qualquer ponto em **r**, este ponto e A determinam uma reta concorrente com **r** e **s**. São possíveis *infinitas* retas nessas condições, todas elas contidas no plano pl (r, A).

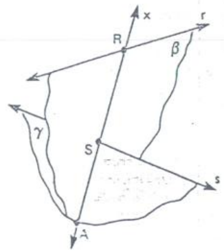
2.° caso: O ponto A e uma das retas determinam um plano paralelo à outra reta.



Suponhamos que o plano $\alpha = \text{pl}(s, A)$ é paralelo à reta **r**. Neste caso, é *impossível* construir uma reta por A, concorrente com **r** e com **s**, pois toda reta que passa por A e encontra a reta **s** está contida em α. Por isso ela não pode ser concorrente com **r**.

3.° caso: O ponto A e qualquer das duas retas determinam um plano que não é paralelo à outra reta.

Neste caso, é *possível* construir por A uma reta concorrente com **r** e **s**.



Construção

Os planos $\beta = pl\,(r, A)$ e $\gamma = pl\,(s, A)$ são distintos e têm em comum o ponto A. Assim a sua interseção $x = \beta \cap \gamma$ passa por A. A reta **x** é concorrente com **r** e **s**.

Prova

Como $s \not\subset \beta$ e **s** não é paralela a β, então **s** fura β no ponto S, o qual logicamente pertence à reta **x**.

Da mesma forma, como $r \not\subset \gamma$ e **r** não é paralela a γ, então **r** fura γ no ponto R, o qual logicamente pertence à reta **x**.

Sendo assim, a reta **x** é concorrente com **r** e com **s**.

3.3 — UM RESUMO

Fazemos a seguir um resumo das principais definições e propriedades vistas até aqui, continuando o resumo anterior (veja o item 2.6).

Definição

D8 — Uma reta **r** é paralela a um plano α (ou o plano α é paralelo à reta **r**) se $r \cap \alpha = \varnothing$.

Teoremas

T4 — **Teorema das três interseções** — Sejam α, β e γ três planos secantes dois a dois tais que $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \cap \gamma = b$ e $\beta \cap \gamma = c$. Se as retas **a**, **b** e **c** são *distintas*, então há somente duas possibilidades: ou as três concorrem em um mesmo ponto, ou elas são paralelas duas a duas.

T5 — Sejam **x**, **y** e **z** três retas distintas duas a duas. Se $x /\!/ y$ e $y /\!/ z$, então $x /\!/ z$.

T6 — Uma **condição necessária e suficiente** para que uma reta **r** seja paralela ao plano α é que **r** não esteja contida em α e seja paralela a uma reta de α.

T7 — Se as retas **r** e **s** são paralelas e pelo ponto $A \in s$ conduzimos um plano $\alpha /\!/ r$, então $s \subset \alpha$.

T8 — Se uma reta é paralela a dois planos secantes, ela é paralela à interseção desses dois planos.

Exercícios Propostos

3.11) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Uma reta que não é paralela a um plano está contida nesse plano.
b) Uma reta que não está contida em um plano é paralela a esse plano.
c) $(r /\!/ s$ e $s \subset \alpha) \Rightarrow r /\!/ \alpha$
d) $(r /\!/ s$ e $s \subset \alpha) \Rightarrow (r \subset \alpha$ ou $r /\!/ \alpha)$
e) Se α e β são planos secantes, existe reta de α que é paralela a β.
f) Uma reta que é paralela a um plano é paralela a todas as retas contidas nesse plano.
g) Se duas retas **r** e **s** são paralelas e o plano α contém **s**, então $r \subset \alpha$.
h) $(r = \alpha \cap \beta$ e $s \subset \alpha) \Rightarrow s /\!/ \beta$
i) $(r /\!/ s$ e $r /\!/ \alpha) \Rightarrow s /\!/ \alpha$
j) $(r /\!/ s$ e $r /\!/ \alpha) \Rightarrow s \subset \alpha$
k) $(r /\!/ s$ e $r /\!/ \alpha) \Rightarrow (s /\!/ \alpha$ ou $s \subset \alpha)$
l) Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a infinitas retas contidas nesse plano.
m) Por um ponto fora de uma reta passa um único plano paralelo a essa reta.
n) Por um ponto fora de um plano passa uma única reta paralela ao plano dado.
o) Duas retas distintas, paralelas a um mesmo plano, são paralelas entre si.

3.12) Se uma reta é paralela a uma reta de um plano, qual é a sua posição em relação ao plano?

3.13) Prove que se uma reta **r** é paralela a um plano α e a reta **s** está contida em α, então ou $r /\!/ s$ ou **r** e **s** são reversas.

3.14) Demonstre que se uma reta **r** é paralela à interseção de dois planos α e β e não está contida em nenhum deles, então ela é paralela a ambos.

3.15) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Dadas duas retas **r** e **s** reversas, existe plano que contém **r** e é paralelo a **s**.
b) Por um ponto dado, é sempre possível conduzir uma reta que é concorrente com duas retas reversas dadas.
c) Se $r \subset \alpha$ e as retas **r** e **s** são reversas, então a reta **s** fura o plano α.
d) Se duas retas são reversas e um plano contém uma delas, ele necessariamente é paralelo à outra.

3.16) Sejam **r** e **s** retas reversas. Prove que as retas concorrentes com **s**, paralelas a **r**, são coplanares.

3.17) As retas **r**, **s** e **t** são reversas duas a duas. Construa a reta $x /\!/ t$, que seja concorrente com **r** e **s**.

3.18) As retas **r**, **s** e **t** são reversas duas a duas. Construa uma reta concorrente com as três.

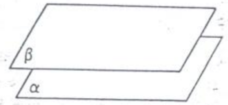
3.19) São dadas as retas reversas **r** e **s**. O ponto A está situado de tal modo que ele e qualquer das duas retas determinam um plano que não é paralelo à outra reta (veja o exercício 3.10, 3.° caso). É possível, assim, conduzir por A uma reta concorrente com **r** e **s**. Prove que essa reta é única.

3.4 – PLANOS PARALELOS ENTRE SI

Definição D9

Dois planos α e β são **paralelos** entre si se a sua interseção é vazia:

$$\alpha \cap \beta = \varnothing$$



Indicamos $\alpha /\!/ \beta$ (ou $\beta /\!/ \alpha$).
Em símbolos:

$$\boxed{\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing}$$

A **existência** de planos paralelos entre si é garantida pelo teorema que é demonstrado no exercício 3.20, a seguir.

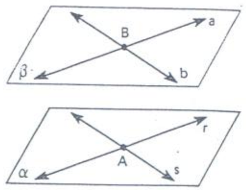
Exercícios Resolvidos

3.20) Demonstre que existem planos paralelos entre si.

Solução

Vamos considerar um plano α qualquer e **construir** um outro plano β tal que $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

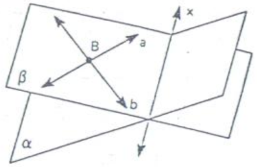
Construção



Dado o plano α, tomemos o ponto $A \in \alpha$ e o ponto $B \notin \alpha$. Vamos conduzir por A duas retas r e s, ambas contidas em α. Em seguida, construímos por B as retas $a /\!/ r$ e $b /\!/ s$ (a existência destas retas é garantida pelo postulado das paralelas, P7).

Seja então $\beta = \text{pl}(a, b)$. Para este plano, tem-se $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

Prova



É claro que $a /\!/ \alpha$ e $b /\!/ \alpha$. Se α e β tivessem um ponto em comum, a sua interseção seria uma reta $x = \alpha \cap \beta$. Nesse caso, teríamos necessariamente $a /\!/ x$ e $b /\!/ x$ (veja o exercício 3.1), o que é absurdo, devido ao postulado das paralelas, P7. Assim, os planos α e β não podem ter ponto em comum, isto é, $\alpha /\!/ \beta$.

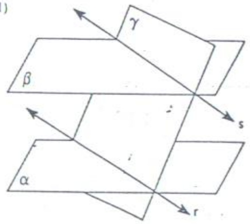
Nota: O teorema demonstrado acima pode ser também enunciado assim:

"Sendo dados dois planos, se um deles contém duas retas concorrentes, respectivamente paralelas a duas retas concorrentes do outro, então os dois planos são paralelos entre si."

ou ainda assim:

"Para que um plano β seja paralelo ao plano α, é **suficiente** que β contenha duas retas concorrentes, paralelas ao plano α."

3.21)



Teorema T9 – Demonstre que se dois planos α e β são paralelos entre si e o plano γ intercepta α segundo a reta r e β segundo a reta s, então $r /\!/ s$.

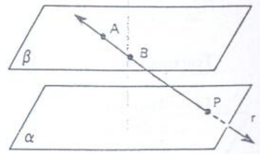
Solução

Não pode haver ponto comum a r e s, pois um tal ponto seria comum aos planos α e β que são paralelos entre si. Logo, $r \cap s = \varnothing$ e como estas duas retas são coplanares (contidas em γ), segue que $r /\!/ s$.

3.22) Prove que se os planos α e β são paralelos entre si, então toda reta de um deles é paralela ao outro.

Solução

Suponhamos que a reta $r \subset \beta$ tem o ponto P em comum com o plano α. Se isso acontecesse, esse ponto P pertenceria aos planos α e β, o que é absurdo, pois $\alpha /\!/ \beta$. Sendo assim, a reta r não pode ter ponto em comum com α, isto é, $r /\!/ \alpha$.



Nota: Decorre deste teorema que, sendo $\alpha /\!/ \beta$, se tomarmos sobre β duas retas concorrentes, ambas serão paralelas a α, o que nos autoriza a escrever:

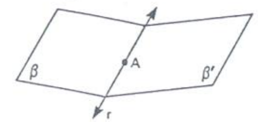
"Para que um plano β seja paralelo ao plano α, é **necessário** que β contenha duas retas concorrentes, paralelas ao plano α."

Unindo, então, este enunciado àquele do exercício 3.20, obtemos o **teorema T10**.

Teorema T10

Uma **condição necessária e suficiente** para que um plano β seja paralelo ao plano α é que β contenha duas retas concorrentes, paralelas ao plano α.

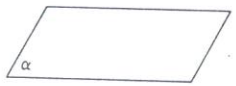
3.23) São dados o plano α e o ponto $A \in \alpha$. Prove que o plano $\beta /\!/ \alpha$ conduzido por A é **único**.

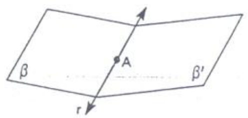


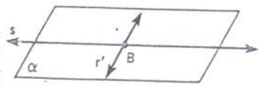
Solução

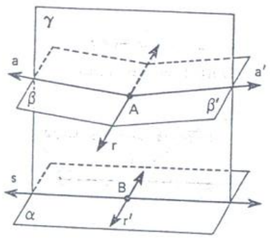
Vamos admitir que por A existam os planos distintos β e β', paralelos a α, e provemos que essa suposição conduz a um absurdo.

Então, supondo $\beta \neq \beta'$, seja $r = \beta \cap \beta'$. É claro que $r /\!/ \alpha$ (veja o exercício 3.22). Vamos construir uma reta s contida em α, **que não seja paralela a r**. Para isso, por um ponto $B \in \alpha$ tomamos $r' /\!/ r$. Qualquer outra reta de α concorrente com r' não será paralela à reta r. Obtemos assim a reta s.









Nestas condições, o plano $\gamma = pl(s, A)$ **não contém a reta r**. De fato, se fosse $r \subset \gamma$, teríamos $\gamma = pl(r, B)$ e nesse caso $r' \subset \gamma$, o que só seria verdade se fosse $\gamma = \alpha$.

Ora, o plano γ intercepta β segundo a reta **a** e β' segundo a reta **a'**. Estas duas retas são concorrentes em A e **distintas de r** (pois $r \not\subset \gamma$). Isto significa que $\beta = pl(a, r)$ e $\beta' = pl(a', r)$.

Mas pelo teorema T9 (do exercício 3.21), temos $a /\!/ s$ e $a' /\!/ s$, donde $a = a'$ (pelo postulado das paralelas, P7). Portanto,

$$\beta = pl(a, r) = pl(a', r) = \beta'$$

e resulta a unicidade.

Nota: Unindo-se os enunciados dos teoremas dos exercícios 3.20 e 3.23, obtemos o **teorema T11**:

Teorema T11

Por um ponto fora de um plano passa um único plano paralelo ao plano dado.

3.5 — POSIÇÕES RELATIVAS DE DOIS PLANOS

Vamos agora resumir as diversas **posições relativas** de dois planos α e β.

1.ª) **Planos coincidentes**
Neste caso, α e β são o mesmo plano.

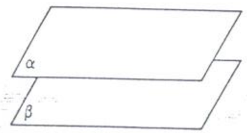
2.ª) **Planos distintos** ($\alpha \neq \beta$):

a) **paralelos**

$$\alpha /\!/ \beta$$

Neste caso,

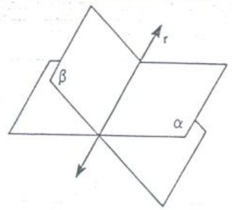
$$\alpha \cap \beta = \varnothing$$



b) **secantes**

Neste caso,

$$\alpha \cap \beta = r$$



Exercícios Resolvidos

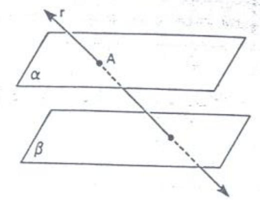
3.24) Teorema T12 – Sejam α, β e γ três planos distintos. Prove que se $\alpha /\!/ \beta$ e $\beta /\!/ \gamma$ então $\alpha /\!/ \gamma$.

Solução

A demonstração é uma aplicação imediata do teorema T11. Se existisse um ponto A comum a α e a γ, por esse ponto estariam passando dois planos distintos, paralelos ao plano β, o que é absurdo. Sendo assim, tem-se $\alpha \cap \gamma = \varnothing$, isto é, $\alpha /\!/ \gamma$.

3.25) São dados dois planos, α e β, paralelos entre si, e uma reta **r** que fura α no ponto A. Prove que **r** também fura o plano β.

Solução



Mostremos que a reta **r** *não pode estar contida* em β e também *não pode ser paralela* a β. Sendo assim, por exclusão, teremos que **r** fura β.

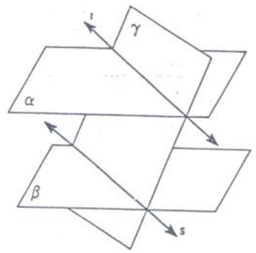
a) **r** não pode estar contida em β, pois, se assim fosse, o ponto A seria comum a α e a β, que são paralelos entre si.

b) **r** não pode ser paralela a β. De fato, se fosse $r \parallel \beta$, existiria em β uma reta $r' \parallel r$, a qual seria por sua vez paralela ao plano α. Poderíamos, então, aplicar o teorema T7:

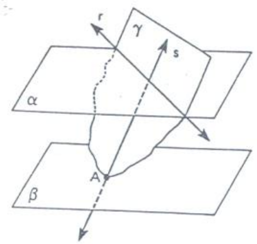
$$\left.\begin{array}{l} r' \parallel r \\ r' \parallel \alpha \\ A \in \alpha \\ A \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \subset \alpha$$

o que é absurdo, pois **r** fura α.

3.26) São dados dois planos, α e β, paralelos entre si e um terceiro plano γ que corta α segundo a reta $r = \alpha \cap \gamma$. Prove que γ corta β segundo uma reta $s = \beta \cap \gamma$.



Solução



Se devemos provar que β e γ são secantes, basta provar que esses dois planos *são distintos* e *têm um ponto em comum*.

a) $\beta \neq \gamma$ – De fato, se fosse $\beta = \gamma$, o plano γ deveria ser paralelo a α, o que não é verdade.

b) β e γ *têm um ponto em comum*. Para prová-lo, vamos construir tal ponto.

Tomemos em γ a reta **s**, concorrente com **r**. Então, **s** é também concorrente com o plano α, pois se ela estivesse *contida* em α, teríamos $\alpha = \gamma$. Aplicando, então, o teorema do exercício 3.25, concluímos que **s** fura β em um ponto A. O ponto A é, portanto, comum a β e γ.

Outro modo

Para provar que β e γ são secantes, podemos provar que são *distintos* e que *não são paralelos*. Como no item *a* já provamos que $\beta \neq \gamma$, resta provar que:

c) β e γ *não são paralelos*. De fato, se $\beta \parallel \gamma$, teríamos dois planos α e γ passando por um mesmo ponto (qualquer ponto da reta r) e paralelos a um mesmo plano β. Isto contraria o teorema T11.

3.6 — NOVO RESUMO

Continuemos o resumo anterior, com as principais definições e propriedades vistas até agora.

Definição

D9 – Dois planos são **paralelos** entre si se a sua interseção é vazia.

Teoremas

T9 – Se dois planos α e β são paralelos entre si e o plano γ intercepta α segundo a reta **r** e β segundo a reta **s**, então $r \parallel s$.

T10 – Uma condição necessária e suficiente para que um plano β seja paralelo ao plano α é que β contenha duas retas concorrentes, paralelas ao plano α.

T11 – Por um ponto fora de um plano passa um único plano paralelo ao plano dado.

T12 – Sejam α, β e γ três planos distintos. Se $\alpha \parallel \beta$ e $\beta \parallel \gamma$, então $\alpha \parallel \gamma$.

Exercícios Propostos

3.27) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Se dois planos são paralelos, então um deles contém uma reta paralela ao outro.
b) Se um plano contém uma reta paralela a outro, os dois planos são paralelos entre si.
c) Se dois planos são paralelos entre si, uma reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.
d) Num plano toma-se uma reta e em outro plano, paralelo ao primeiro, toma-se uma segunda reta. Essas duas retas são reversas ou paralelas.
e) Duas retas paralelas a um mesmo plano são paralelas entre si.
f) Dois planos paralelos a uma mesma reta são paralelos entre si.
g) Um plano que contém duas retas distintas, paralelas a outro plano, é paralelo a este.
h) Duas retas concorrentes, paralelas a um plano α, determinam um plano β paralelo a α.
i) Se dois planos são paralelos, então toda reta que é paralela a um é paralela ou está contida no outro.

j) Se dois planos são paralelos, toda reta que tem um ponto em comum com um deles fura o outro.

k) Se dois planos são paralelos, toda reta que fura um deles fura também o outro.

l) Se dois planos, α e β, são paralelos e um terceiro plano γ intercepta α segundo a reta r e β segundo a reta s, então $r /\!/ s$.

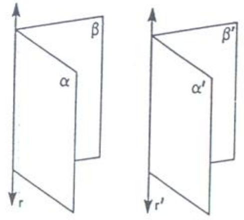
m) Se $\alpha /\!/ \beta$ e $\beta /\!/ \gamma$, então, $\alpha = \gamma$ ou $\alpha /\!/ \gamma$.

n) Se dois planos são secantes, toda reta de um deles, que é paralela ao outro, é paralela à interseção dos dois planos.

o) Se dois planos distintos são paralelos a uma mesma reta r, eles são paralelos entre si ou sua interseção é uma reta paralela a r.

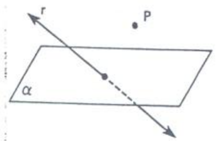
3.28) Demonstre que se $\alpha /\!/ \beta$ e $r /\!/ \alpha$, então $r \subset \beta$ ou $r /\!/ \beta$.

3.29) Sejam $r = \alpha \cap \beta$ e $r' = \alpha' \cap \beta'$. Se $\alpha /\!/ \alpha'$ e $\beta /\!/ \beta'$, prove que $r /\!/ r'$.

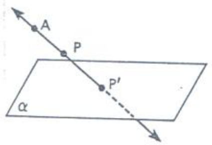


3.30) São dadas duas retas reversas. Prove que existem dois planos, e somente dois, contendo cada uma das duas retas e sendo paralelos entre si.

3.31) A reta r fura o plano α. Sendo dado o ponto P fora de α e de r, construa por P uma reta paralela a α e concorrente com r.



3.32) Dados um plano α, um ponto $A \notin \alpha$ e um ponto P qualquer, chama-se **perspectiva** de P sobre α a interseção P' da reta $\overleftrightarrow{AP}$ com o plano α: $\overleftrightarrow{AP} \cap \alpha = \{P'\}$.
Onde se situam os pontos que *não possuem* perspectiva?



3.33) São dados dois pontos A e B e duas retas reversas a e b que não passam pelos pontos dados. Construa duas retas paralelas entre si, uma por A, concorrente com a e a outra por B, concorrente com b.

Exercícios Suplementares

I.1) Prove que uma reta que é concorrente com duas retas paralelas está contida no plano destas duas.

I.2) Duas retas (r e s) distintas se interceptam no ponto P. Prove que toda reta que é concorrente com ambas, e não passa por P, está contida no plano pl (r, s).

I.3) Determine quantos planos podem ser tomados por:

a) um ponto;
b) dois pontos;
c) três pontos não alinhados;
d) quatro pontos, dos quais três quaisquer não estão alinhados.

I.4) Quatro retas são conduzidas por um ponto do espaço. Quantos planos ficam determinados por essas retas? (Considere os casos possíveis.)

I.5) São dados dois planos secantes, α e β, que se interceptam segundo a reta r. Sobre α tomam-se os pontos A e B e sobre β toma-se o ponto C, todos fora da reta r. Construa a interseção de β com o pl (A, B, C).

I.6) Dados um plano α e uma reta r não contida nele, construa a interseção de r com α.

I.7) Dados um plano α e três pontos (A, B e C) não alinhados, fora de α, construa a interseção de α com o pl (A, B, C).

I.8) Dados, em um plano α, os pontos A e B e, fora de α, o ponto C, considere os pontos $D \in \overleftrightarrow{AC}$ e $E \in \overleftrightarrow{BC}$, distintos de A, B e C. Construa a interseção de $\overleftrightarrow{DE}$ com o plano α.

I.9) As retas r e s são paralelas entre si e furam o plano α nos pontos A e B, respectivamente. Determine $\alpha \cap$ pl (r, s).

I.10) Sejam um plano α e uma reta r que fura α. Construa uma reta contida em α e concorrente com r.

I.11) Sobre um plano α, sejam três pontos (A, B e C) não alinhados e, fora de α, seja o ponto D. Considere os pontos $E \in \overleftrightarrow{AD}$ e $F \in$ pl (B, C, D), distintos de A, B, C e D. Construa a interseção da reta $\overleftrightarrow{EF}$ com o plano α.

I.12) Duas retas, r e s, distintas são interceptadas por uma terceira, t. Quantos planos ficam determinados por essas retas?

I.13) Dadas duas retas, r e s, concorrentes, que posição pode ter a reta r com relação a uma reta t paralela a s?

I.14) Dadas duas retas, r e s, concorrentes, que posição pode ter a reta r com relação a uma reta t concorrente com s?

I.15) Dadas duas retas concorrentes, r e s, que posição pode ter a reta r com relação a uma reta t reversa à reta s?

I.16) Dadas duas retas r e s paralelas, que posição pode ter a reta r com relação a uma reta t paralela a s?

1.17) Dadas duas retas **r** e **s** paralelas, que posição pode ter a reta **r** com relação a uma reta **t** concorrente com **s**?

1.18) Dadas duas retas **r** e **s** paralelas, que posição pode ter a reta **r** com relação a uma reta **t** reversa à reta **s**?

1.19) Dadas duas retas **r** e **s** reversas, que posição pode ter a reta **r** com relação a uma reta **t** paralela a **s**?

1.20) Dadas duas retas **r** e **s** reversas, que posição pode ter a reta **r** com relação a uma reta **t** concorrente com **s**?

1.21) Dadas duas retas **r** e **s** reversas, que posição pode ter a reta **r** com relação a uma reta **t** reversa à reta **s**?

1.22) Dadas dez retas, duas a duas concorrentes, demonstre que todas passam por um mesmo ponto ou são todas coplanares.

1.23) Mostre que se uma figura é tal que qualquer conjunto de quatro pontos é coplanar, então essa figura é plana.

1.24) Mostre que todas as retas que passam por um mesmo ponto e são paralelas a um mesmo plano estão contidas em um plano.

1.25) Uma reta **r** e um plano α são paralelos. Qual é a posição da reta **r** com relação a uma reta contida em α?

1.26) Uma reta **r** e um plano α são paralelos. Qual é a posição da reta **r** com relação a uma reta que fura α?

1.27) Uma reta **r** e um plano α são paralelos. Qual é a posição da reta **r** com relação a uma reta paralela a α?

1.28) Uma reta **r** fura um plano α. Qual é a posição da reta **r** com relação a uma reta contida em α?

1.29) Uma reta **r** e um plano α são paralelos. Qual é a posição do plano α com relação a uma reta concorrente com **r**?

1.30) Uma reta **r** e um plano α são paralelos. Qual é a posição do plano α com relação a uma reta reversa à reta **r**?

1.31) Uma reta **r** e um plano α são paralelos. Qual é a posição do plano α com relação a uma reta paralela a **r**?

1.32) Sejam α e β planos secantes. Prove que, se $r \subset \alpha$, $s \subset \beta$ e $r /\!/ s$, então uma das duas retas é paralela à interseção de α e β.

1.33) Dados o ponto A no plano α e o ponto B no plano β, sendo α e β secantes, construa por esses pontos retas contidas em um plano dado e paralelo ao outro.

1.34) Dados um plano α e uma reta **r** paralelos, construa por $A \in \alpha$ uma reta paralela a **r**.

1.35) Uma reta **r** fura um plano α. Construa, por um ponto A fora de α, uma reta paralela a α e concorrente com **r**.

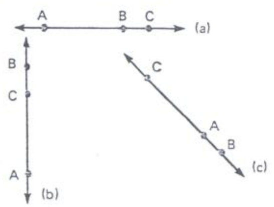
PARTE II

Capítulo

4

Postulados da separação. Segmento, ângulo e triângulo

4.1 — O CONCEITO PRIMITIVO DE "ESTAR ENTRE"



Na figura (a) temos uma situação na qual o ponto B *está entre* A e C. No caso (b), C *está entre* A e B, e, no caso (c), A *está entre* B e C.

Quando dizemos que um dado ponto *está entre* dois outros, esperamos que as pessoas entendam que falamos de uma situação parecida com essas representadas acima. Em outras palavras, quando dizemos que o ponto C *está entre* A e B, deixamos subentendido que A, B e C são três pontos **distintos**, todos situados **sobre uma mesma reta** e ainda que eles se sucedem numa "ordem" tal que o ponto C é mencionado "depois de A" e "antes de B" (ou, também, "depois de B" e "antes de A").

Estar entre é um conceito primitivo.

4.2 — SEGMENTO

Definição D10

Dados dois pontos A e B, chama-se **segmento** a figura constituída pelos pontos A e B e também por todos os pontos que **estão entre** A e B.
Os pontos A e B são chamados **extremidades** do segmento.

Indicamos o segmento pela notação $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$).

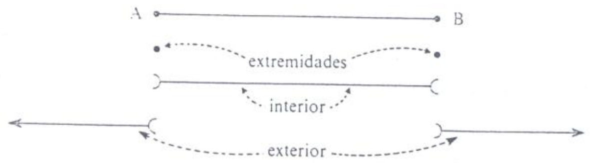
Representação gráfica do segmento $\overline{AB}$

A definição de segmento $\overline{AB}$, em símbolos, fica assim:

$$\boxed{\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{P \mid P \text{ está entre } A \text{ e } B\}}$$

É claro que o segmento $\overline{AB}$ é um subconjunto da reta $\overleftrightarrow{AB}$, isto é, $\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$. Excluídas as extremidades, os demais pontos do segmento formam o seu interior. Os pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$ que não pertencem ao segmento formam o seu exterior (em relação à reta).

$$\boxed{\text{segmento } \overline{AB}}$$



Relação de paralelismo

Se a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a alguma outra figura (uma reta, um plano), podemos estender esta relação ao segmento $\overline{AB}$. Temos então as noções de *segmento paralelo a uma reta*, *segmento paralelo a um plano* e mesmo *segmentos paralelos entre si*. Nessas situações estaremos sempre pensando nas retas que contêm cada segmento.

Segmento nulo

Note que a definição D10 não exige que os pontos A e B sejam *distintos*. No caso em que A = B, é claro que não existe ponto algum *entre A e B*, isto é,

$$\{P \mid P \text{ está entre } A \text{ e } B\} = \varnothing$$

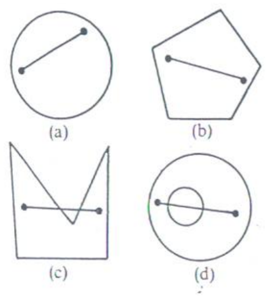
e, assim,

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \varnothing = \{A, B\} = \{A\}$$

Em outras palavras, a figura constituída por um único ponto A é considerada também como um segmento, de extremidades coincidentes: $\overline{AA}$. Um segmento assim é chamado segmento nulo.

4.3 – CONJUNTOS CONVEXOS

Em linguagem comum, um objeto é considerado "convexo" se a sua superfície ou contorno não tem qualquer parte "afundada para dentro" e também se ele não é "oco". As figuras (a) e (b) são convexas. Note que é indicado um segmento contido em cada figura. A característica da figura convexa é que todo segmento cujas extremidades pertençam à figura **está contido nela**. As figuras (c) e (d) não são convexas. Note que em cada uma delas é possível encontrar um segmento cujas extremidades pertencem à figura, mas sem que ele esteja inteiramente contido nela.



Definição D11

> Uma figura $\mathbb{F}$ qualquer é um **conjunto convexo** se todo segmento $\overline{AB}$ cujas extremidades A e B pertencem a $\mathbb{F}$ está contido em $\mathbb{F}$.

Em símbolos, $\mathbb{F}$ é um conjunto convexo se

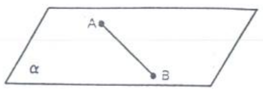
$$\boxed{A \in \mathbb{F} \text{ e } B \in \mathbb{F} \Rightarrow \overline{AB} \subset \mathbb{F}}$$

Nota: Por convenção, dizemos também que o *conjunto vazio* é convexo.

Exemplos

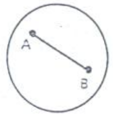
1.º) Toda **reta r** é um conjunto convexo.

2.º) Todo **plano** α é um conjunto convexo.

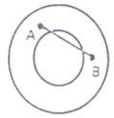


3.º) Todo **segmento** $\overline{PQ}$ é um conjunto convexo.

4.º) Um **círculo** é um conjunto convexo.



5.º) Uma **coroa circular** *não é* um conjunto convexo.



6.º) A figura constituída por um único ponto é um conjunto convexo. Neste caso, as extremidades do segmento $\overline{AB}$ coincidem com o único ponto da figura. Trata-se de um *segmento nulo*.

7.º) O **espaço** é um conjunto convexo.

4.4 — POSTULADOS DA SEPARAÇÃO

Veremos agora três novos postulados, que estabelecem a forma pela qual uma reta pode ser separada em *semi-retas*, o plano em *semiplanos* e o espaço em *semi-espaços*.

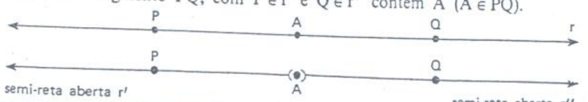
Postulado P9

Se $A \in r$, então o ponto A separa essa **reta r** em três subconjuntos, um dos quais é $\{A\}$; os outros dois, **r'** e **r''**, são chamados **semi-retas abertas** e apresentam as seguintes características:

1.ª) $A \notin r'$, $A \notin r''$ e $r' \cap r'' = \varnothing$

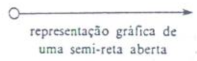
2.ª) r' e r'' são conjuntos convexos.

3.ª) Todo segmento $\overline{PQ}$, com $P \in r'$ e $Q \in r''$ contém A ($A \in \overline{PQ}$).



O ponto A chama-se **origem** de cada uma das duas semi-retas abertas (e não pertence a elas).

A **semi-reta aberta** de origem A, que contém P, pode ser indicada por $\overset{\circ\rightarrow}{AP}$ e aquela que contém Q, por $\overset{\circ\rightarrow}{AQ}$. As semi-retas $\overset{\circ\rightarrow}{AP}$ e $\overset{\circ\rightarrow}{AQ}$ são chamadas opostas



Se o ponto A (origem) for acrescentado a cada uma das semi-retas abertas, obteremos duas semi-retas fechadas. Fica convencionado que se dissermos simplesmente **semi-reta**, ela é **aberta**.

Assim, é fácil entender que

$$\overrightarrow{AP} = \overset{\circ\rightarrow}{AP} \cup \{X \mid P \text{ está entre A e X}\}$$

e

$$\text{semi-reta } \overset{\circ\rightarrow}{AP} = \text{semi-reta fechada } \overrightarrow{AP} - \{A\}$$

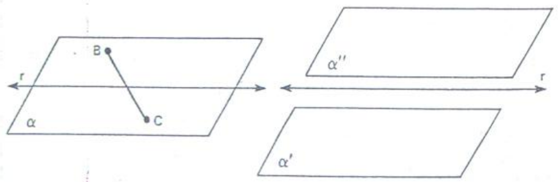
Postulado P12 . P10

Se $r \subset \alpha$, então a reta **r** separa o plano α em três subconjuntos, um dos quais é a própria reta **r**; os outros, α' e α'', são chamados **semiplanos abertos** e apresentam as seguintes características:

1.ª) $r \cap \alpha' = r \cap \alpha'' = \alpha' \cap \alpha'' = \varnothing$

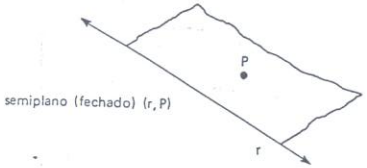
2.ª) α' e α'' são conjuntos convexos.

3.ª) Todo segmento $\overline{BC}$ com $B \in \alpha'$ e $C \in \alpha''$ corta **r**, isto é, tem um único ponto em comum com **r**.



A reta **r** chama-se origem de cada um dos dois semiplanos abertos (e não está contida neles).

Se a reta **r** (origem) for unida a cada um dos semiplanos abertos, obteremos dois semiplanos fechados. Chamaremos simplesmente de **semiplanos** aqueles que são abertos.



O semiplano de origem **r**, que contém B, pode ser indicado por **semipl (r, B)** e aquele que contém C, por **semipl (r, C)**. Os semiplanos (r, B) e (r, C) são **opostos**.

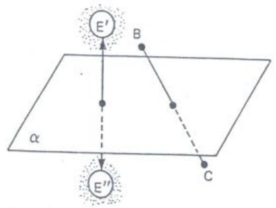
Postulado P13 P11

Um plano α determina no espaço dois subconjuntos E′ e E″, chamados **semi-espaços abertos**, com as seguintes características:

1.ª) $\alpha \cap E' = \alpha \cap E'' = E' \cap E'' = \varnothing$

2.ª) E′ e E″ são conjuntos convexos.

3.ª) Todo segmento $\overline{BC}$, com $B \in E'$ e $C \in E''$, fura α, isto é, tem um único ponto em comum com α.



O plano α chama-se origem de cada um dos dois semi-espaços abertos (e não está contido neles).

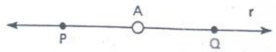
O semi-espaço aberto de origem α, que contém B, pode ser indicado por **semi-espaço aberto (α, B)** e aquele que contém C, por **semi-espaço aberto (α, C)**. Os semi-espaços (α, B) e (α, C) são **opostos**.

Se o plano α (origem) for unido a cada um dos semi-espaços abertos, obteremos dois semi-espaços fechados. Chamaremos simplesmente de **semi-espaços** aqueles que são abertos.

Exercícios Resolvidos

4.1) Mostre que a união de duas semi-retas abertas opostas *não é* um conjunto convexo.

Solução



Sejam $\overset{\circ\!\!\rightarrow}{AP}$ e $\overset{\circ\!\!\rightarrow}{AQ}$ duas semi-retas abertas de origem A, ambas contidas na mesma reta **r** e **opostas** uma da outra. A figura **F**, formada pela *união* dessas duas semi-retas abertas, não é um conjunto convexo. Basta notar que o segmento $\overline{PQ}$, cujas extremidades pertencem a **F**, não está contido em **F**, pois o ponto A não pertence a qualquer das duas semi-retas abertas.

Nota: O exercício 4.1 mostrou que nem sempre a *união* de conjuntos convexos é convexa.

4.2) Mostre que a interseção de dois conjuntos convexos é também um conjunto convexo.

Solução

Sejam F_1 e F_2 conjuntos convexos e $F = F_1 \cap F_2$.
Se $F = \varnothing$, então F é um conjunto convexo, por convenção.
Se $F \neq \varnothing$, tomemos $A \in F$ e $B \in F$ e provemos que $\overline{AB} \subset F$. Temos

$$A \in F \Rightarrow A \in F_1 \text{ e } A \in F_2 \qquad \text{e} \qquad B \in F \Rightarrow B \in F_1 \text{ e } B \in F_2$$

Mas, sendo F_1 e F_2 conjuntos convexos, tem-se $\overline{AB} \subset F_1$ e $\overline{AB} \subset F_2$, logo

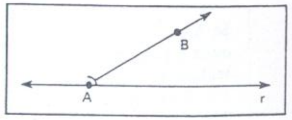
$$\overline{AB} \subset F = F_1 \cap F_2$$

4.3) Mostre que a figura formada por dois pontos distintos não é um conjunto convexo.

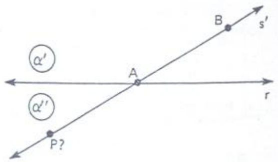
Solução

Sejam $A \neq B$ e $F = \{A, B\}$. Tomando-se o ponto P no **interior** do segmento $\overline{AB}$, tem-se que $P \neq A$ e $P \neq B$, logo $P \notin F$. Assim, $\overline{AB} \not\subset F$.

4.4) Se $A \in r$ e $B \notin r$, prove que a semi-reta aberta $\overset{\circ\!\!\rightarrow}{AB}$ está contida no semiplano aberto (r, B).



Solução



Tomemos um ponto P pertencente à semi-reta aberta $\overset{\circ\!\!\rightarrow}{AB}$ e provemos que esse ponto pertence ao semiplano aberto (r, B). Para isto, devemos provar que $P \notin r$ e que P também não pertence ao semiplano aberto oposto a (r, B).

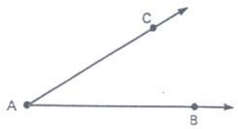
Para facilitar, indiquemos por s′ a semi-reta aberta $\overset{\circ\!\!\rightarrow}{AB}$, por α' o semiplano aberto (r, B) e por α'' o semiplano aberto oposto a (r, B).

Note que as retas r e $\overleftrightarrow{AB}$ estão contidas no pl (r, B) e são concorrentes em A. É claro que $P \in \overleftrightarrow{AB}$ e $P \neq A$. Logo, $P \notin r$.

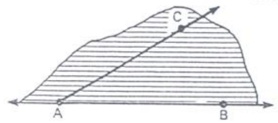
Só resta provar que $P \notin \alpha''$. Note que, sendo s' um conjunto convexo, tem-se $\overline{PB} \subset s'$. Se pertencesse a α'', então $\overline{PB}$ cortaria r em A: $A \in \overline{PB}$. Mas isto acarretaria que $A \in s'$, o que é absurdo.

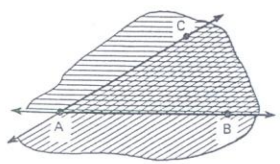
Portanto, $P \in \alpha'$, isto é, $s' \subset \alpha'$.

4.5 — ÂNGULO



Consideremos a figura formada pela união de duas semi-retas fechadas distintas e de mesma origem: as semi-retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$. Tal figura separa o plano que a contém em três subconjuntos, um dos quais é a própria união das duas semi-retas; dos outros dois, um é um conjunto convexo e o outro não é convexo. A partir desta situação nasce a idéia de ângulo, que passaremos a definir com alguma precisão.





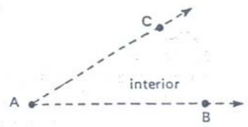
Com relação às semiretas dadas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, vamos indicar por $(\overleftrightarrow{AB}, C)$ o semiplano **fechado** que contém C e tem origem na reta $\overleftrightarrow{AB}$. Da mesma forma, indicaremos por $(\overleftrightarrow{AC}, B)$ o semiplano **fechado** que contém B e tem origem na reta $\overleftrightarrow{AC}$.

A interseção desses dois semiplanos fechados recebe o nome de ângulo. Indicamos o ângulo pela notação $B\hat{A}C$ (ou $C\hat{A}B$, indiferentemente). Podemos também indicá-lo simplesmente por $\hat{A}$, sempre que não houver dúvida sobre quais sejam as semi-retas consideradas. Podemos escrever

$$B\hat{A}C = (\overleftrightarrow{AB}, C) \cap (\overleftrightarrow{AC}, B)$$
(semiplanos fechados)

É claro que **todo ângulo é uma figura plana**. O ponto A chama-se vértice e as semiretas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são os lados do ângulo.

Se do ângulo $B\hat{A}C$ forem excluídos os pontos pertencentes às semi-retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, o conjunto obtido recebe o nome de interior do ângulo $B\hat{A}C$. É fácil ver que o interior do ângulo $B\hat{A}C$ é a interseção dos semiplanos **abertos** $(\overleftrightarrow{AB}, C)$ e $(\overleftrightarrow{AC}, B)$.

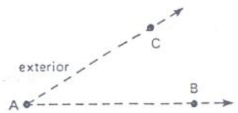


Interior do ângulo $B\hat{A}C$ $= (\overleftrightarrow{AB}, C) \cap (\overleftrightarrow{AC}, B)$
(semiplanos abertos)

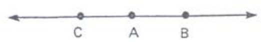
Podemos ainda definir:

Exterior do ângulo $B\hat{A}C$

(em relação ao plano do ângulo) é o conjunto de todos os pontos desse plano, que não pertencem ao ângulo.



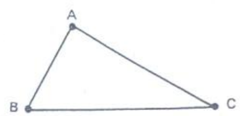
Caso do ângulo raso



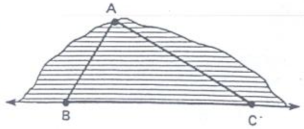
Se as semi-retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são **opostas**, então o ângulo $B\hat{A}C$ é definido como sendo um dos semiplanos (fechados) determinados pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ no plano considerado. É claro que a notação $B\hat{A}C$ é insuficiente, neste caso, para especificar qual dos dois semiplanos está sendo mencionado. Na prática é sempre necessário dar um elemento qualquer que identifique o semiplano a que desejamos nos referir.

4.6 — TRIÂNGULO

Consideremos a figura formada pela união de três segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, cujas extremidades A, B e C sejam pontos não colineares.

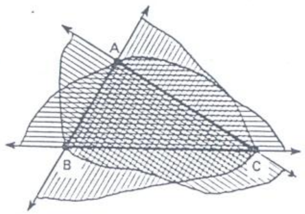


Esta figura, que pode ser chamada de **poligonal triangular**, separa o plano que a contém em três subconjuntos, um dos quais é a própria poligonal; dos outros dois, um é um conjunto convexo, e o outro não é convexo. A partir desta situação surge a idéia de triângulo, que passaremos a definir.



Vamos indicar por $(\overleftrightarrow{BC}, A)$ o semiplano **fechado** que contém A e tem origem na reta $\overleftrightarrow{BC}$. Da mesma forma, podemos considerar os semiplanos fechados $(\overleftrightarrow{AC}, B)$ e $(\overleftrightarrow{AB}, C)$.

A interseção desses três semiplanos fechados recebe o nome de triângulo. Indicamos o triângulo pela notação $\triangle ABC$ (ou $\triangle BAC$, ou $\triangle CAB$, etc., indiferentemente). Assim, para A, B e C não colineares, tem-se

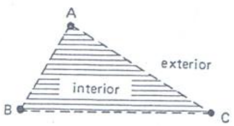


$$\triangle ABC = (\overleftrightarrow{BC}, A) \cap (\overleftrightarrow{AC}, B) \cap (\overleftrightarrow{AB}, C)$$
(semiplanos fechados)

É claro que **todo triângulo é uma figura plana**. Os pontos A, B e C são os vértices e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os lados do $\triangle ABC$.

Interior e exterior do triângulo

Se do triângulo forem excluídos os pontos pertencentes aos lados, o conjunto obtido recebe o nome de interior do triângulo. É fácil ver que o interior do triângulo $\triangle ABC$ é a interseção dos semiplanos *abertos* $(\overleftrightarrow{BC}, A)$, $(\overleftrightarrow{AC}, B)$ e $(\overleftrightarrow{AB}, C)$.

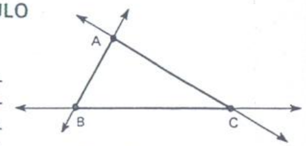


Interior do $\triangle ABC$ $= (\overleftrightarrow{BC}, A) \cap (\overleftrightarrow{AC}, B) \cap (\overleftrightarrow{AB}, C)$
(semiplanos abertos)

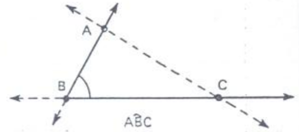
Definimos também:

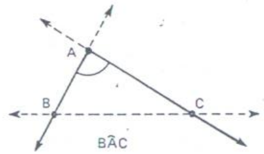
Exterior do triângulo $\triangle ABC$ (em relação ao plano do triângulo) é o conjunto de todos os pontos desse plano, que não pertencem ao triângulo.

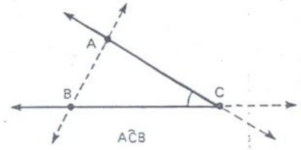
4.7 – ÂNGULOS DO TRIÂNGULO



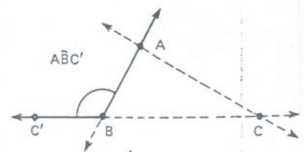
Dado o $\triangle ABC$, ficam determinados vários ângulos, através de seus vértices e das retas suportes de seus lados. Com as semi-retas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, por exemplo, obtemos o ângulo $A\hat{B}C$, que é chamado ângulo interno relativo ao vértice B. Do mesmo modo, obtemos os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$, que são os ângulos internos relativos aos vértices A e C.





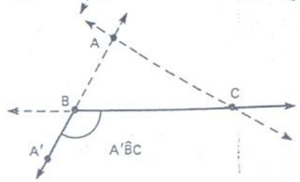


Se considerarmos na reta $\overleftrightarrow{BC}$ a semi-reta oposta a $\overrightarrow{BC}$, juntamente com a semi-reta $\overrightarrow{BA}$, obteremos também um ângulo $A\hat{B}C'$, que é um ângulo externo relativo ao vértice B.



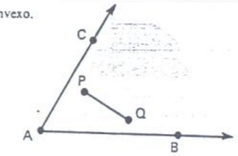
Há outro ângulo externo relativo a esse mesmo vértice: aquele formado com a semi-reta oposta a $\overrightarrow{BA}$, juntamente com a semi-reta $\overrightarrow{BC}$. É o ângulo $A'\hat{B}C$.

Do mesmo modo, obtemos dois ângulos externos relativos ao vértice A e outros dois relativos ao vértice C.



Exercícios Resolvidos

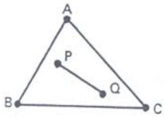
4.5) Demonstre que um ângulo é um conjunto convexo.



Solução

O ângulo $B\hat{A}C$ é a interseção dos semiplanos $(\overleftrightarrow{AB}, C)$ e $(\overleftrightarrow{AC}, B)$. Cada semiplano é um conjunto convexo. Por outro lado, sabemos que a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo. Sendo assim, o ângulo também é um conjunto convexo.

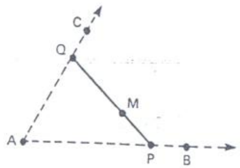
4.6) Demonstre que um triângulo é um conjunto convexo.



Solução

Mesmo argumento do exercício anterior: o triângulo ABC é a interseção de três semiplanos, os quais são conjuntos convexos.

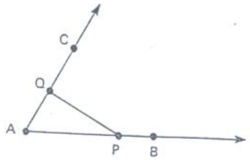
4.7) Dado o ângulo (não raso) $B\hat{A}C$, sejam P um ponto da semi-reta aberta $\overrightarrow{AB}$ e Q um ponto da semi-reta aberta $\overrightarrow{AC}$. Demonstre que o interior do segmento $\overline{PQ}$ está contido no interior do ângulo $B\hat{A}C$.



Solução

Sabemos que $\overline{PQ}$ está contido no ângulo $B\hat{A}C$. Se M é um ponto do *interior* de $\overline{PQ}$, devemos provar que M não pertence às semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. De fato, se $M \in$ semi-reta $\overrightarrow{AB}$, tem-se A, M, P alinhados, o que é absurdo, pois Q deveria pertencer também à semi-reta $\overrightarrow{AB}$. Do mesmo modo, M não pode pertencer à semi-reta $\overrightarrow{AC}$. Assim, M pertence ao interior do ângulo $B\hat{A}C$.

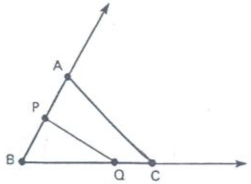
4.8) Demonstre que a união dos dois lados de um ângulo (não raso) não é um conjunto convexo.



Solução

No ângulo $B\hat{A}C$, tomemos o ponto P na semi-reta aberta $\overrightarrow{AB}$ e Q na semi-reta aberta $\overrightarrow{AC}$. Como o exercício anterior mostra, o interior de $\overline{PQ}$ está contido no interior do ângulo $B\hat{A}C$, logo o segmento $\overline{PQ}$ tem pontos que não pertencem às semi-retas $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AC}$, isto é, $\overline{PQ}$ não está contido na união dos lados de $B\hat{A}C$.

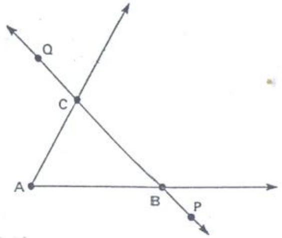
4.9) Prove que a poligonal triangular não é um conjunto convexo.



Solução

Basta tomar sobre o lado $\overline{AB}$ o ponto P distinto de A e de B e, sobre o lado $\overline{BC}$, o ponto Q distinto de B e de C. Como mostrou o exercício anterior, o segmento $\overline{PQ}$ tem pontos que não pertencem a $\overleftrightarrow{AB}$ nem a $\overleftrightarrow{BC}$ (e também não pertencem a $\overleftrightarrow{AC}$, pois $P \neq A$ e $Q \neq C$). Assim, $\overline{PQ}$ não está contido na poligonal.

4.10) Demonstre que o exterior de um ângulo não é um conjunto convexo.



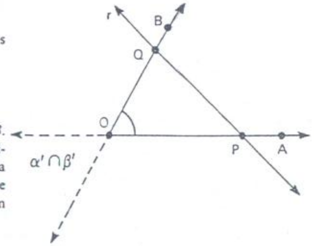
Solução

Dado o ângulo $B\hat{A}C$, se tomarmos P e Q de tal modo que B esteja entre C e P, e C esteja entre B e Q, então o segmento $\overline{PQ}$, cujas extremidades pertencem ao exterior do ângulo $B\hat{A}C$, não está contido nesse exterior, pois $\overline{BC}$ tem pontos que pertencem aos lados e também pontos que pertencem ao interior do ângulo.

4.11) Seja $A\hat{O}B$ um ângulo (não raso). Indiquemos por:

$$\alpha = \text{semipl}\,(\overleftrightarrow{OA}, B)$$
$$\beta = \text{semipl}\,(\overleftrightarrow{OB}, A)$$

e por α' e β' os semiplanos opostos a α e a β. A interseção $\alpha' \cap \beta'$ corresponde à figura assinalada na ilustração ao lado. Seja r uma reta que encontra $\overrightarrow{OA}$ em P e $\overrightarrow{OB}$ em Q. Mostre que essa reta não tem ponto em comum com $\alpha' \cap \beta'$, isto é, $r \cap (\alpha' \cap \beta') = \varnothing$.



Solução

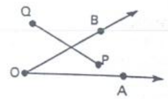
Se existisse um ponto $M \in r \cap (\alpha' \cap \beta')$, as duas coisas abaixo ocorreriam simultaneamente:

a) $\begin{cases} Q \in \alpha \\ M \in \alpha' \end{cases} \Rightarrow \overleftrightarrow{QM}$ cortaria a reta $\overleftrightarrow{OA}$ no ponto P, de tal modo que *P estaria entre Q e M*.

b) $\begin{cases} P \in \beta \\ M \in \beta' \end{cases} \Rightarrow \overleftrightarrow{PM}$ cortaria a reta $\overleftrightarrow{OB}$ no ponto Q, de tal modo que *Q estaria entre P e M*.

A ocorrência simultânea das duas situações é um absurdo.

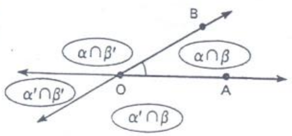
4.12) Se P pertence ao interior do ângulo $A\hat{O}B$ e Q pertence ao exterior desse ângulo, mostre que o segmento $\overline{PQ}$ corta um dos lados do ângulo.



Solução

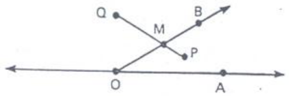
Sejam α = semipl $(\overleftrightarrow{OA}, B)$, β = semipl $(\overleftrightarrow{OB}, A)$ e α' e β' os semiplanos opostos a α e a β. Temos $P \in \alpha \cap \beta$. Quanto ao ponto Q, vamos considerar três casos:

1.º) $Q \in \alpha \cap \beta'$
2.º) $Q \in \alpha' \cap \beta$
3.º) $Q \in \alpha' \cap \beta'$



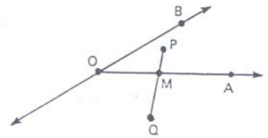
1.º) Se $Q \in \alpha \cap \beta'$ então $\overline{PQ}$ corta $\overrightarrow{OB}$ num ponto M, e, como $\overline{PQ} \subset \alpha$, resulta que

$$M \in \overrightarrow{OB}$$



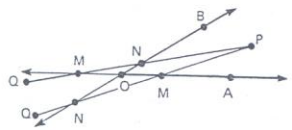
2.º) Se $Q \in \alpha' \cap \beta$ então $\overline{PQ}$ corta $\overrightarrow{OA}$ num ponto M, e, como $\overline{PQ} \subset \beta$, resulta que

$$M \in \overrightarrow{OA}$$

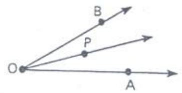


3.º) Se $Q \in \alpha' \cap \beta'$ então $\overline{PQ}$ corta a reta $\overleftrightarrow{OA}$ num ponto M e a reta $\overleftrightarrow{OB}$ num ponto N. Devemos provar que um destes dois pontos, ao menos, pertence a um lado do ângulo.

Se $M \in \beta'$ e $N \in \alpha'$, então a reta $\overleftrightarrow{MN}$ não poderia ter ponto em comum com $\alpha \cap \beta$ (veja o exercício 4.11), o que é absurdo, pois $P \in \overleftrightarrow{MN}$ e $P \in \alpha \cap \beta$. Logo, ou $M \in \beta$ (isto é, $M \in \overrightarrow{OA}$) ou $N \in \alpha$ (isto é, $N \in \overrightarrow{OB}$).



4.13) Seja o ângulo $A\hat{O}B$ (não raso) e tomemos o ponto P no seu interior. Prove que a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ está contida no interior do ângulo $A\hat{O}B$.



Solução

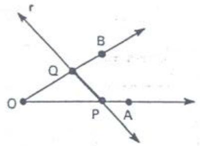
Sendo α = semipl $(\overleftrightarrow{OA}, B)$ e β = semipl $(\overleftrightarrow{OB}, A)$, temos $P \in \alpha \cap \beta$. Vamos aplicar aqui o resultado do exercício 4.4:

$$\left.\begin{array}{l} P \in \alpha \Rightarrow \overset{\circ}{\overrightarrow{OP}} \subset \alpha \\ P \in \beta \Rightarrow \overset{\circ}{\overrightarrow{OP}} \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\circ}{\overrightarrow{OP}} \subset \alpha \cap \beta$$

Nota: Se a semi-reta $\overset{\circ}{\overrightarrow{OP}}$ está contida no interior do ângulo $A\hat{O}B$, dizemos que **a semi-reta $\overset{\circ}{\overrightarrow{OP}}$ está entre as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$**. Podemos também dizer que o interior do ângulo $A\hat{O}B$ é igual à união de todas as semi-retas abertas que estão entre os lados do ângulo.

4.14) Admitamos que a reta r corta o lado $\overrightarrow{OA}$ do ângulo $A\hat{O}B$ no ponto P e o lado $\overrightarrow{OB}$ no ponto Q. Mostre que

$$r \cap A\hat{O}B = \overline{PQ}$$

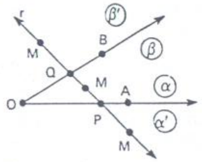


Solução

a) É imediato que $\overline{PQ} \subset r \cap A\hat{O}B$, pois $r \cap A\hat{O}B$ é um conjunto convexo, e, sendo assim, contém todo segmento cujas extremidades pertencem a ele.

b) Mostremos agora que $r \cap A\hat{O}B \subset \overline{PQ}$. Para isso, seja $M \in r \cap A\hat{O}B$ e provemos que $M \in \overline{PQ}$. Se $M \neq P$ e $M \neq Q$, só há três casos possíveis:

1.º) P está entre Q e M.
2.º) Q está entre M e P.
3.º) M está entre P e Q.



Mas no 1.º caso o segmento $\overline{QM}$ cortaria a reta $\overleftrightarrow{OA}$, o que significa que M pertenceria ao semiplano α' oposto ao semiplano α = semipl $(\overleftrightarrow{OA}, B)$. Então M não pertenceria a $A\hat{O}B$, o que é absurdo.

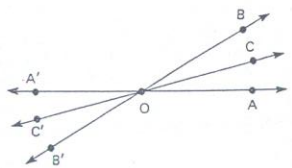
No 2.º caso o segmento $\overline{PM}$ cortaria a reta $\overleftrightarrow{OB}$ e M pertenceria a β', não podendo portanto pertencer a $A\hat{O}B$.

Assim, por exclusão, resta o 3.º caso, que significa que M está no interior de $\overline{PQ}$:

$$M \in \overline{PQ}$$

Observe que se $M = P$ ou $M = Q$ a tese é imediata.

4.15) São opostas as semi-retas $\overset{\circ}{\overrightarrow{OA}}$ e $\overset{\circ}{\overrightarrow{OA'}}$, $\overset{\circ}{\overrightarrow{OB}}$ e $\overset{\circ}{\overrightarrow{OB'}}$, $\overset{\circ}{\overrightarrow{OC}}$ e $\overset{\circ}{\overrightarrow{OC'}}$. Mostre que, se $\overset{\circ}{\overrightarrow{OC}}$ está entre $\overset{\circ}{\overrightarrow{OA}}$ e $\overset{\circ}{\overrightarrow{OB}}$, então $\overset{\circ}{\overrightarrow{OC'}}$ está entre $\overset{\circ}{\overrightarrow{OA'}}$ e $\overset{\circ}{\overrightarrow{OB'}}$.



Solução

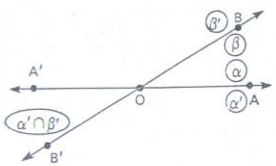
Indiquemos por:

$$\alpha = \text{semipl}\ (\overleftrightarrow{OA}, B)$$
$$\beta = \text{semipl}\ (\overleftrightarrow{OB}, A)$$

e por α' e β' os semiplanos opostos correspondentes.

Devemos provar que $\overset{\circ}{\overrightarrow{OC'}} \subset \alpha' \cap \beta'$. Seja $M \in \overset{\circ}{\overrightarrow{OC'}}$. É claro que $M \notin \alpha \cap \beta$ (pois se $M \in \alpha \cap \beta$ então M pertenceria à semi-reta $\overset{\circ}{\overrightarrow{OC}}$).

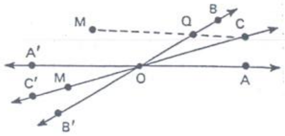
Se $M \in \alpha \cap \beta'$, então o segmento $\overline{MC}$ estaria contido em α e cortaria a reta $\overleftrightarrow{OB}$ em um ponto $Q \neq O$, o que é absurdo. Da mesma forma, $M \notin \alpha' \cap \beta$. Assim, por exclusão, conclui-se que $M \in \alpha' \cap \beta'$.



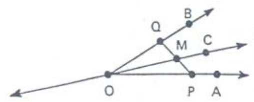
Sendo assim:

$$\overrightarrow{OC'} \subset \alpha' \cap \beta'$$

isto é, $\overrightarrow{OC'}$ está entre $\overrightarrow{OA'}$ e $\overrightarrow{OB'}$.



4.16) Seja $\overrightarrow{OC}$ uma semi-reta situada entre as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, como na figura ao lado. Mostre que todo segmento $\overline{PQ}$, com $P \in \overrightarrow{OA}$ e $Q \in \overrightarrow{OB}$ corta a semi-reta $\overrightarrow{OC}$.

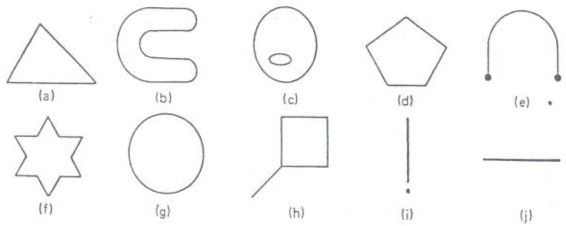


Solução

Seja $\{M\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{OC}$. Como a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ não tem ponto em $\alpha' \cap \beta'$ (veja exercício 4.11), é claro que $M \in \overrightarrow{OC}$. Logo, M pertence ao interior do ângulo $A\hat{O}B$. Sendo assim, $M \in \overline{PQ}$. Portanto, $\{M\} = \overline{PQ} \cap \overrightarrow{OC}$.

Exercícios Propostos

4.17) Indique quais das figuras representadas abaixo são conjuntos convexos.



4.18) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Uma reta é um conjunto convexo.
b) Uma figura formada por três pontos distintos é um conjunto convexo.
c) Se retirarmos de um plano todos os pontos de uma reta, os pontos remanescentes formarão um conjunto convexo.
d) Se uma figura contém todos os pontos de um dado segmento $\overline{AB}$, então essa figura é um conjunto convexo.
e) A interseção de conjuntos convexos é sempre um conjunto convexo.
f) A união de conjuntos convexos é sempre um conjunto convexo.
g) O exterior de um triângulo não é um conjunto convexo.
h) Uma semi-reta separa um plano que a contém em dois semiplanos.
i) Uma reta separa todo plano que a contém em dois semiplanos.
j) Um segmento separa um plano que o contém em dois semiplanos.
k) Todo semiplano fechado contém sua origem.

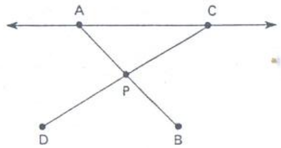
l) Dois semiplanos são sempre coplanares.
m) A figura representada ao lado é um ângulo.
n) O vértice de um ângulo pertence a esse ângulo.

o) O vértice de um ângulo pertence ao interior desse ângulo.
p) Para A, B e C não colineares, tem-se

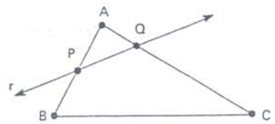
$$\triangle ABC = C\hat{A}B \cup C\hat{B}A$$

q) O interior de um triângulo é a interseção dos interiores dos ângulos internos desse triângulo.

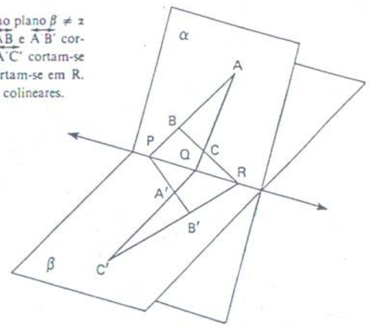
4.19) Dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ cortam-se num ponto P interno a ambos os segmentos. Prove que B e D estão em um mesmo semiplano, com relação à reta $\overleftrightarrow{AC}$.



4.20) Uma reta r, contida no plano do $\triangle ABC$, não passa por um vértice mas intercepta o lado $\overline{AB}$ em P. Prove que essa reta também intercepta um dos outros dois lados (e somente um).



4.21) No plano α tem-se o $\triangle ABC$ e no plano $\beta \neq \alpha$ tem-se o $\triangle A'B'C'$. As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$ cortam-se em P, as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{A'C'}$ cortam-se em Q e as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{B'C'}$ cortam-se em R. Demonstre que P, Q e R são colineares.

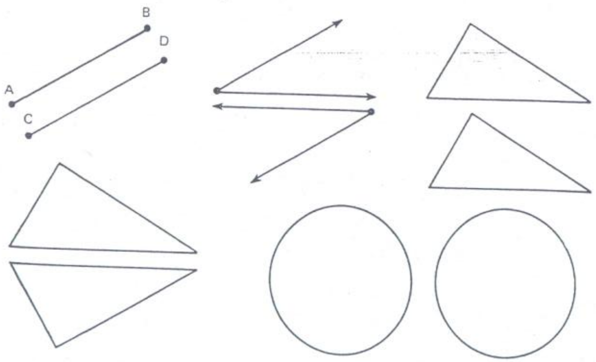


Capítulo

5 Congruência e medida de segmentos e ângulos

5.1 — FIGURAS CONGRUENTES

Num modo impreciso de falar, duas figuras são *congruentes* se é possível mostrar que elas "cabem exatamente uma na outra", ou ainda que elas podem ser levadas a "coincidir"; dizemos também que elas são "superponíveis", ou que elas têm o "mesmo tamanho e a mesma forma". A ilustração abaixo mostra alguns pares de figuras congruentes.



Expressões como "cabem exatamente", "coincidem", "superponíveis", "mesmo tamanho" e "mesma forma", embora transmitam a nossa idéia intuitiva de congruência, não são satisfatórias quando desejamos uma *definição* rigorosa. Intuitivamente, sabemos que, para dois segmentos serem congruentes, eles devem ter o mesmo "comprimento", para que dois ângulos sejam congruentes, as semi-retas que constituem os seus lados devem apresentar a mesma "abertura". Entretanto, estamos usando novamente palavras imprecisas.

A abordagem que adotaremos possibilita superar essa dificuldade considerando como *primitivos* os conceitos de congruência de segmentos e de congruência de ângulos.

> A congruência de segmentos é um conceito primitivo.
> A congruência de ângulos é um conceito primitivo.

5.2 — CONGRUÊNCIA DE SEGMENTOS

Para caracterizar devidamente a idéia de *congruência entre segmentos*, adotamos alguns postulados. O símbolo ≡ vai significar *é congruente a*, de modo que escrevendo $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ estaremos dizendo que *o segmento $\overline{AB}$ é congruente ao segmento $\overline{CD}$*.

Postulado P14

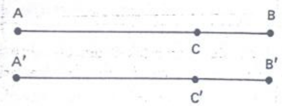
> Sejam $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ segmentos quaisquer.
>
> a) **Propriedade reflexiva**
> $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ (ou seja, *todo segmento é congruente a si mesmo*)
>
> b) **Propriedade simétrica**
> Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$ (isto permite dizer que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *congruentes entre si*).
>
> c) **Propriedade transitiva**
> Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ (isto é, *dois segmentos congruentes a um terceiro são congruentes entre si*).

Postulado P15

> Dados um segmento $\overline{AB}$ e uma semi-reta $\overrightarrow{CD}$, existe um único ponto $E \in \overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CE}$.

Conseqüentemente, é sempre possível "marcar" sobre uma **reta dada** um segmento que seja congruente a um segmento dado.

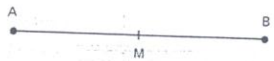
Postulado P16: Adição e subtração de segmentos



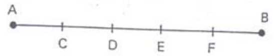
Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ e dados os pontos $C \in \overline{AB}$ e $C' \in \overline{A'B'}$, valem as duas propriedades seguintes:

1.ª) Se $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\overline{CB} \equiv \overline{C'B'}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.
2.ª) Se $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, então $\overline{CB} \equiv \overline{C'B'}$.

5.3 — PONTO MÉDIO. DIVISÃO EM PARTES CONGRUENTES



Seja M um ponto pertencente ao segmento $\overline{AB}$, tal que $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$. Nestas condições, o ponto M recebe o nome de *ponto médio do segmento* $\overline{AB}$.



Suponhamos que, sobre $\overline{AB}$, são tomados quatro pontos C, D, E e F, de modo que se tenha

$$\overline{AC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{FB}$$

Dizemos, neste caso, que o segmento $\overline{AB}$ **está dividido, pelos pontos dados, em cinco partes congruentes entre si.** Esta idéia, bastante intuitiva, generaliza-se imediatamente para a divisão de um segmento dado em um número inteiro qualquer de partes congruentes. Em particular, o *ponto médio* divide o segmento em *duas partes* congruentes entre si.

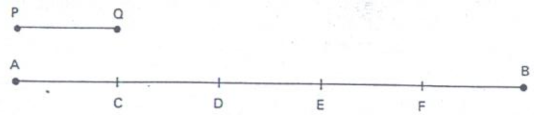
5.4 — MEDIDA DE SEGMENTOS

Uma das aplicações teóricas mais importantes da noção de congruência de segmentos é o conceito de *medida*. Vamos examinar aqui como se pode dizer "quanto mede um segmento" ou "qual é o comprimento do segmento". Medir um segmento é, basicamente, *compará-lo* com outro segmento que tenha sido fixado como referência. Devemos escolher, primeiramente, algum segmento $\overline{PQ}$ (não nulo), como base de comparação. Este segmento recebe o nome de unidade e dizemos que a sua medida (ou comprimento) é 1. Indicamos med $(\overline{PQ}) = 1$,

ou, simplesmente, PQ = 1, onde o símbolo PQ representa, de maneira simples, o mesmo que med $(\overline{PQ})$, ou seja, a **medida** (ou **comprimento**) do segmento $\overline{PQ}$.

Consideremos agora o exemplo ilustrado abaixo. Sobre o segmento $\overline{AB}$ foram tomados os pontos C, D, E e F, de tal modo que

$$\overline{AC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{FB} \equiv \overline{PQ}$$



Vemos, então, que $\overline{AB}$ compõe-se da união de cinco segmentos congruentes à unidade (ou, em linguagem mais livre, a unidade *cabe* cinco vezes no segmento $\overline{AB}$). Dizemos, por isso, que a **medida** de $\overline{AB}$ é 5, indicando med $(\overline{AB}) = 5$ ou, simplesmente, AB = 5.

No exemplo acima, foi possível dividir $\overline{AB}$ em um número inteiro de partes congruentes a $\overline{PQ}$. Na maioria das vezes, a situação não será assim tão cômoda. Na ilustração abaixo, temos um segmento $\overline{AB}$ para ser medido com a unidade $\overline{PQ}$. Começamos, então, a partir de A, a marcar os pontos C, D, etc., de modo que os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, etc., sejam congruentes a $\overline{PQ}$. Entretanto, no final,

o ponto F resultou ficar além da extremidade B, de tal modo que B é o ponto médio de $\overline{EF}$. Neste caso, devemos usar segmentos menores que a unidade, chamados subunidades. Se M é o ponto médio de $\overline{PQ}$, então a unidade fica dividida em dois segmentos de medida $\frac{1}{2}$: $PM = MQ = \frac{1}{2}$. Como $\overline{EB} \equiv \overline{PM}$, podemos escrever

$$AB = AC + CD + DE + EB = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

Mediante tal expediente, cada segmento poderá ser sempre medido com a unidade $\overline{PQ}$, com o auxílio de subunidades convenientes. É importante notar que, a partir de agora, dispomos de um método para atribuir a cada segmento dado uma medida (ou comprimento), que será sempre um número real não negativo.

Para resumir, vamos relacionar as seguintes propriedades da medida de segmentos.

1.ª) A todo segmento é possível atribuir uma medida (ou comprimento), que é igual a zero para o segmento nulo e é um número real positivo para qualquer outro segmento.

2.ª) Dois segmentos congruentes entre si têm mesma medida. Reciprocamente, se dois segmentos têm mesma medida, eles são congruentes entre si.

3.ª) Se o ponto C pertence ao segmento $\overline{AB}$, então

$$\text{med}(\overline{AB}) = \text{med}(\overline{AC}) + \text{med}(\overline{CB})$$

ou, em notação simplificada:

$$AB = AC + CB$$

Nos próximos itens vamos estabelecer noções semelhantes, com relação a ângulos.

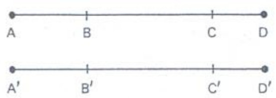
Distância entre dois pontos

Dados os pontos A e B, a medida do segmento $\overline{AB}$ é também chamada distância entre os pontos A e B e, às vezes, é indicada por δ_{AB}. Temos então:

$$\delta_{AB} = AB$$

Exercícios Resolvidos

5.1) Consideremos dois segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{A'D'}$. Os pontos B e C são internos a $\overline{AD}$, estando B entre A e C. Os pontos B' e C' são internos a $\overline{A'D'}$, estando B' entre A' e C'. Prove que, se $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$, então $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$.



Solução

Apliquemos duas vezes o postulado P16.

a) Temos os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$ e os pontos $B \in \overline{AC}$ e $B' \in \overline{A'C'}$. Como $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, pelo P16 concluímos que $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

b) Temos os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{A'D'}$ e os pontos $C \in \overline{AD}$ e $C' \in \overline{A'D'}$. Como $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$, pelo P16 concluímos que $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$.

Outro modo

Podemos utilizar também a idéia de medida (e, em especial, as propriedades 2.ª e 3.ª vistas no item 5.4). Assim:

$C \in \overline{AD}$, então, pela 3.ª prop., $AD = AC + CD$
$B \in \overline{AC}$, então, pela 3.ª prop., $AC = AB + BC$

Assim,

$$AD = AB + BC + CD \quad (\text{e } A'D' = A'B' + B'C' + C'D')$$

Mas, pela 2.ª propriedade, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ e $CD = C'D'$, logo

$$AD = A'B' + B'C' + C'D' = A'D'$$

Portanto, $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$.

5.2) Na figura, M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Mostre que

$$OM = \frac{OA + OB}{2}$$

Solução

Pela 3.ª propriedade, $OM = OA + AM$ e, como M é ponto médio de $\overline{AB}$, tem-se $AM = \frac{AB}{2}$; logo

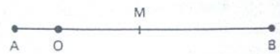
$$OM = OA + \frac{AB}{2}$$

Mas, novamente pela 3.ª propriedade, $OB = OA + AB$, donde $AB = OB - OA$. Assim,

$$OM = OA + \frac{OB - OA}{2} = \frac{OA + OB}{2}$$

5.3) Na figura, M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Mostre que

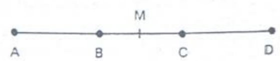
$$OM = \frac{OB - OA}{2}$$



Solução

$$OM = AM - OA = \frac{AB}{2} - OA = \frac{OA + OB}{2} - OA = \frac{OB - OA}{2}$$

5.4) Na figura, M é o ponto médio do segmento $\overline{AD}$ e tem-se ainda $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Mostre que M é também o ponto médio do segmento $\overline{BC}$.



Solução

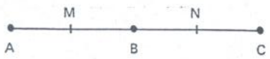
$$BM = AM - AB = MD - CD = MC$$

Exercícios Propostos

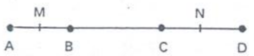
5.5) Na figura, tem-se $\overleftrightarrow{AB} \equiv \overleftrightarrow{CD}$. Mostre que $\overleftrightarrow{AC} \equiv \overleftrightarrow{BD}$

5.6) Na mesma figura do exercício anterior, tem-se $\overleftrightarrow{AC} \equiv \overleftrightarrow{BD}$. Mostre que $\overleftrightarrow{AB} \equiv \overleftrightarrow{CD}$.

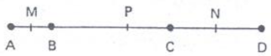
5.7) Na figura, tem-se $\overleftrightarrow{AB} \equiv \overleftrightarrow{BC}$. Sendo M o ponto médio de $\overleftrightarrow{AB}$ e N o ponto médio de $\overleftrightarrow{BC}$, mostre que $\overleftrightarrow{MN} \equiv \overleftrightarrow{AB}$.



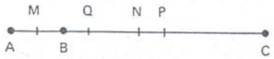
5.8) Na figura, M é o ponto médio de $\overleftrightarrow{AB}$ e N o de $\overleftrightarrow{CD}$. Sendo AD = 92 e BC = 36, calcule MN.



5.9) Na figura abaixo, M é o ponto médio de $\overleftrightarrow{AB}$, N é o ponto médio de $\overleftrightarrow{CD}$ e P é o ponto médio de $\overleftrightarrow{MN}$. Se AB = 16, AC = 63 e AD = 101, calcule AP.



5.10) Na figura abaixo, M é ponto médio de $\overleftrightarrow{AB}$, N é ponto médio de $\overleftrightarrow{AC}$, P é ponto médio de $\overleftrightarrow{BC}$ e Q é ponto médio de $\overleftrightarrow{AP}$. Mostre que Q é também ponto médio de $\overleftrightarrow{MN}$.



5.5 — CONGRUÊNCIA DE ÂNGULOS

A idéia de *congruência entre ângulos* fica devidamente caracterizada por meio de alguns postulados.

Postulado P17

Sejam $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ ângulos quaisquer.

a) **Propriedade reflexiva**
$\hat{A} \equiv \hat{A}$ (ou seja, *todo ângulo é congruente a si mesmo*)

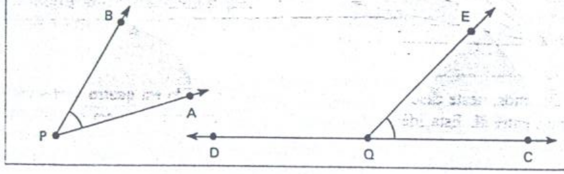
b) **Propriedade simétrica**
Se $\hat{A} \equiv \hat{B}$, então $\hat{B} \equiv \hat{A}$ (isto permite dizer que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são *congruentes entre si*)

c) **Propriedade transitiva**
Se $\hat{A} \equiv \hat{B}$ e $\hat{B} \equiv \hat{C}$, então $\hat{A} \equiv \hat{C}$ (isto é, *dois ângulos congruentes a um terceiro são congruentes entre si*)

Este postulado P17 é análogo ao P14, referente a segmentos.

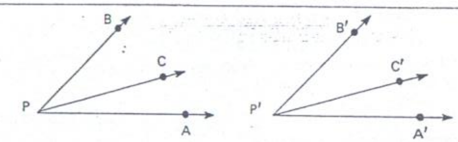
Postulado P18

Dados um ângulo não raso qualquer $A\hat{P}B$ e um ângulo raso $C\hat{Q}D$, existe uma única semi-reta $\overrightarrow{QE} \subset C\hat{Q}D$ tal que $A\hat{P}B \equiv C\hat{Q}E$.



Analogamente ao caso já visto no P15, este postulado garante que é sempre possível "marcar", a partir de uma semi-reta fixada, um ângulo que seja congruente a um ângulo dado.

Postulado P19: Adição e subtração de ângulos



Dados dois ângulos $A\hat{P}B$ e $A'\hat{P}'B'$ e dadas as semi-retas $\overrightarrow{PC} \subset A\hat{P}B$ e $\overrightarrow{P'C'} \subset A'\hat{P}'B'$, valem as duas propriedades seguintes:

1.ª) Se $A\hat{P}C \equiv A'\hat{P}'C'$ e $C\hat{P}B \equiv C'\hat{P}'B'$, então

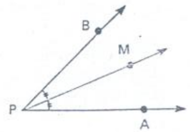
$$A\hat{P}B \equiv A'\hat{P}'B'$$

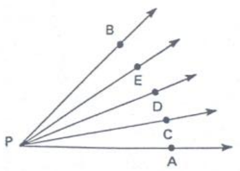
2.ª) Se $A\hat{P}B \equiv A'\hat{P}'B'$ e $A\hat{P}C \equiv A'\hat{P}'C'$, então

$$C\hat{P}B \equiv C'\hat{P}'B'$$

5.6 — BISSETRIZ. DIVISÃO DE UM ÂNGULO EM PARTES CONGRUENTES

Seja $\overrightarrow{PM}$ uma semi-reta contida no ângulo $A\hat{P}B$, tal que $A\hat{P}M \equiv M\hat{P}B$. Nestas condições, a semi-reta $\overrightarrow{PM}$ recebe o nome de bissetriz do ângulo $A\hat{P}B$





Suponhamos que, no interior do ângulo $A\hat{P}B$, são tomadas três semi-retas $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PD}$ e $\overrightarrow{PE}$, de modo que se tenha

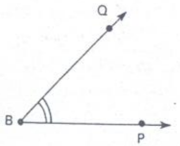
$$A\hat{P}C \equiv C\hat{P}D \equiv D\hat{P}E \equiv E\hat{P}B$$

Dizemos, neste caso, que o ângulo $A\hat{P}B$ **está dividido em quatro partes congruentes entre si**. Esta idéia, análoga à divisão de um segmento em partes congruentes, generaliza-se imediatamente para a divisão de um ângulo dado em um número inteiro qualquer de partes congruentes. Em particular, a *bissetriz* divide o ângulo em *duas partes* congruentes entre si.

5.7 — ÂNGULOS SUPLEMENTARES. ÂNGULO RETO

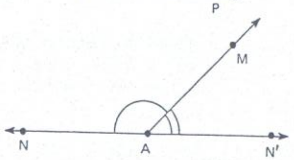
Ângulos suplementares

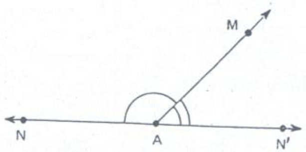
Sejam $P\hat{B}Q$ e $M\hat{A}N$ dois ângulos e seja $\overrightarrow{AN'}$ a semi-reta *oposta* a $\overrightarrow{AN}$. Esta nova semi-reta define um novo ângulo, $N'\hat{A}M$.



Dizemos que o ângulo $P\hat{B}Q$ é suplementar ao ângulo $M\hat{A}N$ se

$$P\hat{B}Q \equiv N'\hat{A}M$$

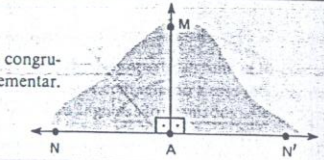




Note que, em particular, o ângulo $N'\hat{A}M$ é suplementar ao ângulo $M\hat{A}N$ e ainda que a união destes dois ângulos é um *ângulo raso*. Sendo assim, dada uma reta $\overleftrightarrow{NN'}$, se tomarmos um ponto M fora dessa reta e o ponto A no interior do segmento $\overline{NN'}$, a semi-reta $\overrightarrow{AM}$ vai determinar dois ângulos $M\hat{A}N$ e $N'\hat{A}M$, que são suplementares um ao outro. Em linguagem livre, poderíamos dizer que o ângulo raso foi dividido em dois ângulos, suplementares um ao outro.

Ângulo reto

Ângulo reto é um ângulo que é congruente a todo ângulo que lhe é suplementar.



Podemos construir dois ângulos retos tomando uma reta $\overleftrightarrow{NN'}$, um ponto A no interior do segmento $\overline{NN'}$ e o ponto M fora de $\overleftrightarrow{NN'}$, de tal modo que $M\hat{A}N \equiv N'\hat{A}M$. Deste modo, o ângulo raso fica dividido em dois **ângulos retos**.

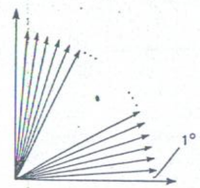
Vamos admitir a seguinte propriedade:

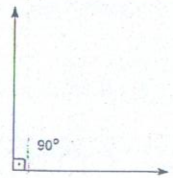
Todos os ângulos retos são congruentes entre si.

5.8 — MEDIDA DE ÂNGULOS

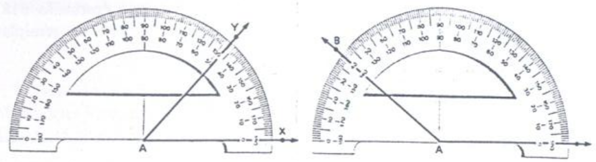
À semelhança do que dissemos sobre segmentos, medir um ângulo é, basicamente, *compará-lo* com outro ângulo previamente fixado como unidade. A rigor, qualquer ângulo (não nulo) pode ser usado como unidade. Poderíamos tomar como unidade o próprio ângulo reto, que é fácil de se reproduzir num desenho. Mas o que se faz mais costumeiramente é adotar para unidade uma *subdivisão* do ângulo reto.

Vamos imaginar que o ângulo reto é dividido, por meio de semi-retas, em **90 partes congruentes entre si**. Podemos adotar uma destas subdivisões como unidade. A essa unidade atribuiremos a medida 1° (um grau), o que significa que o **ângulo reto** passa a ter medida igual 90° (90 graus) e o **ângulo raso** tem medida 180° (180 graus).





O ângulo $X\hat{A}Y$, da ilustração abaixo, mede 48°, enquanto que o ângulo $C\hat{A}B$ indicado mede 140°.



Utilizando a unidade (grau) estabelecida com este critério, a cada ângulo será atribuida uma medida (em graus), que será sempre expressa através de um número real não negativo. A medida de um ângulo $A\hat{O}B$ é indicada pelo símbolo med $(A\hat{O}B)$.

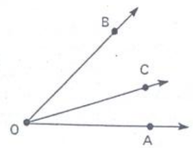
A medida de ângulos tem propriedades semelhantes àquelas já vistas para segmentos.

1.ª) A todo ângulo é possivel atribuir uma medida (em graus) que é igual a zero para o ângulo nulo e é um número real positivo para qualquer outro ângulo.

2.ª) Dois ângulos congruentes entre si têm mesma medida. Reciprocamente, se dois ângulos têm mesma medida, eles são congruentes entre si.

3.ª) Se a semi-reta $\overrightarrow{OC}$ está contida no ângulo $A\hat{O}B$, então

$$\text{med}(AOB) = \text{med}(A\hat{O}C) + \text{med}(C\hat{O}B)$$



Nota: Subdivisões do grau

Um grau (1°) se subdivide em 60 minutos (60′):

$$1° = 60'$$
$$1 \text{ grau} = 60 \text{ minutos}$$

Um minuto (1′) se subdivide em 60 segundos (60″):

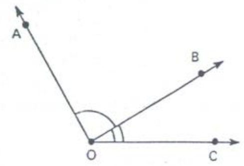
$$1' = 60''$$
$$1 \text{ minuto} = 60 \text{ segundos}$$

Assim sendo, $1° = 3\,600''$

5.9 — ÂNGULOS ADJACENTES. ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE (OPV)

Ângulos adjacentes

Em muitas situações, dois ângulos podem compartilhar um lado comum, tendo os outros dois lados em semiplanos opostos com relação a esse lado comum.



Tais ângulos são chamados adjacentes um ao outro. Na ilustração ao lado, os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes, pois têm em comum o lado $\overleftrightarrow{OB}$ e as semi-retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OC}$ encontram-se em semiplanos opostos com relação ao lado $\overleftrightarrow{OB}$. Note que

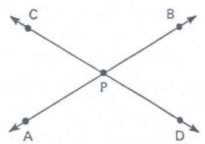
$$A\hat{O}B \cap B\hat{O}C = \overleftrightarrow{OB}$$

Observe também, na mesma ilustração, que os ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ *não são considerados adjacentes*, pois, apesar de terem em comum o lado $\overleftrightarrow{OA}$, os dois outros lados encontram-se no mesmo semiplano com relação a $\overleftrightarrow{OA}$. A interseção desses dois ângulos é o próprio ângulo $A\hat{O}B$:

$$A\hat{O}B \cap A\hat{O}C = A\hat{O}B$$

Ângulos opostos pelo vértice (opv)

Quando duas retas se interceptam, elas determinam quatro ângulos (não rasos). Por exemplo, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, da figura ao lado, determinam os ângulos $A\hat{P}C$, $C\hat{P}B$, $B\hat{P}D$ e $D\hat{P}A$. Os ângulos $A\hat{P}C$ e $B\hat{P}D$ são **opostos pelo vértice (opv)**. Os ângulos $C\hat{P}B$ e $D\hat{P}A$ também são opv. Para dar a este conceito uma definição precisa, escrevemos:

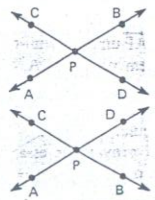


Dois ângulos $A\hat{P}C$ e $B\hat{P}D$ são opostos pelo vértice (opv) se:

$$\begin{cases} P \text{ está entre } A \text{ e } B \\ P \text{ está entre } C \text{ e } D \end{cases}$$

ou então se:

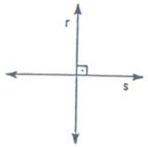
$$\begin{cases} P \text{ está entre } A \text{ e } D \text{ e} \\ P \text{ está entre } B \text{ e } C \end{cases}$$



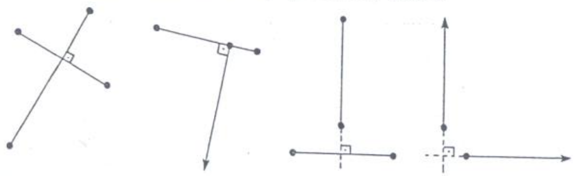
Poderíamos dizer também que $A\hat{P}C$ e $B\hat{P}D$ são **opv** se cada lado de um deles é uma **semi-reta oposta** a um lado do outro.

5.10 — RETAS PERPENDICULARES

Consideremos duas retas **r** e **s** *concorrentes* e observemos os quatro ângulos (não rasos) que elas determinam. Se um desses ângulos for **reto**, diremos que elas são retas perpendiculares entre si e indicaremos (indiferentemente) $r \perp s$ ou $s \perp r$, para significar que **r** é perpendicular a **s** ou **s** é perpendicular a **r**.



É desejável estender esta noção de "perpendicularidade" a segmentos e semi-retas. De um modo geral, quando utilizarmos expressões como "segmentos perpendiculares entre si", "segmento perpendicular a uma semi-reta", "semi-retas perpendiculares entre si", etc., estaremos querendo dizer que as retas que contêm as figuras mencionadas são perpendiculares entre si.



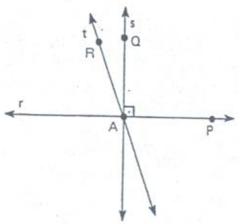
Teorema

Seja **r** uma reta contida num plano α. Por um ponto $A \in r$ pode-se conduzir uma única reta contida em α, perpendicular à reta **r**.

Demonstração

Seja $\overrightarrow{AP}$ uma das semi-retas da reta **r**, com origem no ponto A. Vamos construir a semi-reta $\overrightarrow{AQ}$ de tal modo que $P\hat{A}Q$ seja reto. Assim, a reta $s = \overleftrightarrow{AQ}$ é perpendicular à reta **r**.

Para provar que essa reta é *única*, imaginemos que a reta $t \neq s$ passa também por A e é perpendicular a **r**. Seja



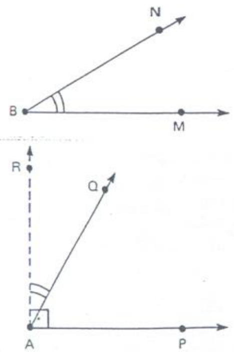
$\overrightarrow{AR}$ a semi-reta da reta **t** contida no mesmo semiplano de origem **r** que contém $\overrightarrow{AQ}$. Temos então dois ângulos $P\hat{A}Q$ e $P\hat{A}R$, ambos retos e construídos no mesmo semiplano a partir da semi-reta $\overrightarrow{AP}$. Mas, pelo postulado P18, a partir da semi-reta $\overrightarrow{AP}$ pode-se construir um único ângulo reto no semiplano dado. Por isso, a existência dessa reta **t** é um absurdo.

5.11 — ÂNGULOS COMPLEMENTARES

> Dois ângulos são **complementares** um ao outro se a soma de suas medidas é igual a 90°.

Observemos a ilustração ao lado, onde temos dois ângulos, $M\hat{B}N$ e $P\hat{A}Q$, complementares um ao outro. Temos, então:

$$\text{med}\,(M\hat{B}N) + \text{med}\,(P\hat{A}Q) = 90°$$

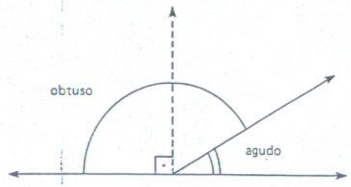


Se construímos o ângulo reto $P\hat{A}R$ (de modo que $\overrightarrow{AR}$ e $\overrightarrow{AQ}$ estejam no mesmo semiplano com relação a $\overleftrightarrow{AP}$), é fácil perceber que $Q\hat{A}R \equiv M\hat{B}N$.

Note também que os ângulos $P\hat{A}Q$ e $Q\hat{A}R$ são complementares um ao outro, ou seja, a semi-reta $\overrightarrow{AQ}$ divide o ângulo reto em duas partes complementares.

5.12 — ÂNGULO AGUDO E ÂNGULO OBTUSO

Um ângulo não nulo é agudo se a sua medida é menor do que 90°.



Um ângulo é obtuso se a sua medida é maior do que 90°, mas menor do que 180°.

Assim, se $\hat{A}$ é agudo e $\hat{B}$ é obtuso, temos

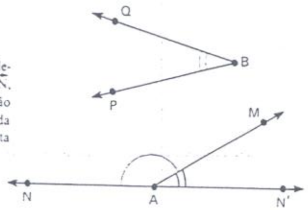
$$0° < \text{med}(\hat{A}) < 90°$$
$$90° < \text{med}(\hat{B}) < 180°$$

É fácil notar que se dois ângulos são suplementares um ao outro, sendo nenhum deles nulo, reto ou raso, então um é agudo e o outro é obtuso. (Em outras palavras, se um ângulo é agudo, seu suplementar é obtuso.)

Exercícios Resolvidos

5.11) Prove que se dois ângulos são suplementares, as suas medidas têm soma igual a 180°.

Solução



Sejam $P\hat{B}Q$ e $M\hat{A}N$ dois ângulos suplementares. Se $\overleftrightarrow{AN'}$ é a semi-reta oposta a $\overleftrightarrow{AN}$, então tem-se $P\hat{B}Q \equiv N'\hat{A}M$ (pela definição de ângulos suplementares). Sendo assim, da 2.ª propriedade da medida de ângulos resulta que

$$\text{med}(P\hat{B}Q) = \text{med}(N'\hat{A}M)$$

Por outro lado, pela 3.ª propriedade, temos

$$\text{med}(M\hat{A}N) + \text{med}(N'\hat{A}M) = \text{med}(N'\hat{A}N)$$

e como $\text{med}(N'\hat{A}N) = 180°$ (ângulo raso), vem

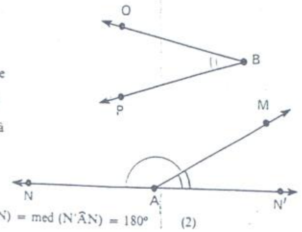
$$\text{med}(M\hat{A}N) + \text{med}(N'\hat{A}M) = 180°$$

e, finalmente,

$$\text{med}(M\hat{A}N) + \text{med}(P\hat{B}Q) = 180°$$

5.12) Prove que se dois ângulos têm soma de medidas igual a 180°, eles são suplementares.

Solução



Sejam $P\hat{B}Q$ e $M\hat{A}N$ ângulos tais que

$$\text{med}(P\hat{B}Q) + \text{med}(M\hat{A}N) = 180° \qquad (1)$$

Tomemos a semi-reta $\overleftrightarrow{AN'}$, oposta à $\overleftrightarrow{AN}$. Tem-se

$$\text{med}(N'\hat{A}M) + \text{med}(M\hat{A}N) = \text{med}(N'\hat{A}N) = 180° \qquad (2)$$

De (1) e (2) concluímos que

$$\text{med}(P\hat{B}Q) = \text{med}(N'\hat{A}M)$$

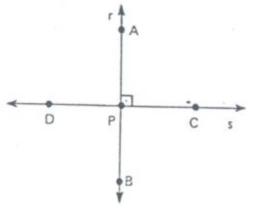
e então, pela 2.ª propriedade da medida de ângulos,

$$P\hat{B}Q \equiv N'\hat{A}M$$

Assim, $P\hat{B}Q$ e $M\hat{A}N$ são suplementares.

5.13) Prove que, se duas retas são perpendiculares, então os quatro ângulos (não rasos) que elas determinam são retos.

Solução



Observemos (para guiar o raciocínio) a figura ao lado, onde temos duas retas **r** e **s** perpendiculares. Da definição de retas perpendiculares, sabemos que **um dos ângulos** formados por **r** e **s** é **reto**. Suponhamos que $A\hat{P}C$ seja reto: $\text{med}(A\hat{P}C) = 90°$. Mas $A\hat{P}C$ e $D\hat{P}A$ são suplementares, logo

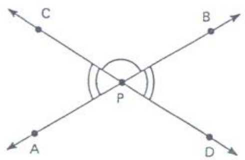
$$\text{med}(D\hat{P}A) = 180° - \text{med}(A\hat{P}C) = 180° - 90° = 90°$$

e, assim, $D\hat{P}A$ é reto.

Pelo mesmo raciocínio, como $B\hat{P}D$ e $D\hat{P}A$ são suplementares, concluímos que $B\hat{P}D$ é reto e, analogamente, $C\hat{P}B$ também é reto.

5.14) Prove que dois ângulos opv são congruentes.

Solução



Consideremos os ângulos opv e $A\hat{P}C$ e $B\hat{P}D$ indicados na figura. Como $A\hat{P}C$ e $C\hat{P}B$ são suplementares, temos

$$\text{med}(A\hat{P}C) = 180° - \text{med}(C\hat{P}B)$$

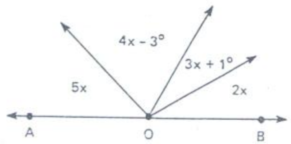
Como $B\hat{P}D$ e $C\hat{P}B$ são suplementares, temos

$$\text{med}(B\hat{P}D) = 180° - \text{med}(C\hat{P}B)$$

Assim, $\quad \text{med}(A\hat{P}C) = \text{med}(B\hat{P}D)$

e portanto $\quad A\hat{P}C \equiv B\hat{P}D$

5.15) Na figura, A, O e B são pontos alinhados e estão indicadas as medidas dos quatro ângulos representados. Calcule **x**.



Solução

Basta escrever

$$(2x) + (3x + 1°) + (4x - 3°) + (5x) = 180°$$

donde $14x - 2° = 180°$ e assim $x = 13°$.

5.16) **As medidas de dois ângulos opostos pelo vértice são expressas por $3x + 10°$ e $15x - 6°$. Determine x.**

Solução

Deve-se ter $3x + 10° = 15x - 6°$, donde tiramos $12x = 16°$ e, assim

$$x = \frac{16°}{12} = 1°20'$$

5.17) Determine as medidas de dois ângulos complementares, cuja diferença de medidas é 18°.

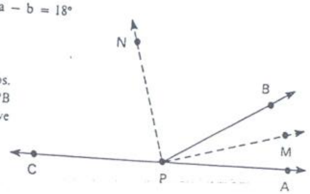
Solução

Se **a** e **b** são as medidas procuradas, devemos ter:

$$\begin{cases} a + b = 90° \\ a - b = 18° \end{cases}$$

donde tiramos $a = 54°$ e $b = 36°$.

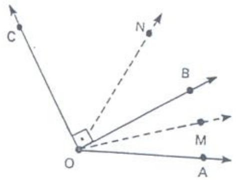
5.18) Os pontos A, P e C da figura estão alinhados. A semi-reta $\overrightarrow{PM}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{P}B$ e a semi-reta $\overrightarrow{PN}$ é a bissetriz de $B\hat{P}C$. Prove que $M\hat{P}N$ é reto.



Solução

$$\text{med}(M\hat{P}N) = \text{med}(M\hat{P}B) + \text{med}(B\hat{P}N) =$$
$$= \frac{1}{2}\text{med}(A\hat{P}B) + \frac{1}{2}\text{med}(B\hat{P}C) =$$
$$= \frac{1}{2}[\text{med}(A\hat{P}B) + \text{med}(B\hat{P}C)] =$$
$$= \frac{1}{2}[180°] = 90°$$

5.19) Pelo vértice O do ângulo $A\hat{O}B$ conduz-se a semi-reta $\overrightarrow{OC}$ perpendicular a $\overrightarrow{OB}$ e situada no semiplano de origem $\overleftrightarrow{OB}$ que não contém $\overrightarrow{OA}$. Sejam $\overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{ON}$ as bissetrizes dos ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$, respectivamente. Calcule a medida do ângulo $M\hat{O}N$.

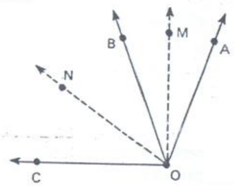


Solução

$$\text{med}(M\hat{O}N) = \text{med}(A\hat{O}N) - \text{med}(A\hat{O}M) =$$
$$= \frac{1}{2}\text{med}(A\hat{O}C) - \frac{1}{2}\text{med}(A\hat{O}B) =$$
$$= \frac{1}{2}[\text{med}(A\hat{O}C) - \text{med}(A\hat{O}B)] =$$
$$= \frac{1}{2}\text{med}(B\hat{O}C) = \frac{1}{2}\cdot 90° = 45°$$

5.20) Os ângulos adjacentes $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ têm por bissetrizes as semi-retas $\overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{ON}$, respectivamente. Mostre que

$$\text{med}(M\hat{O}N) = \frac{1}{2}[\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C)]$$



Solução

$$\text{med}(M\hat{O}N) = \text{med}(M\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}N) = \frac{1}{2}\text{med}(A\hat{O}B) + \frac{1}{2}\text{med}(B\hat{O}C) =$$
$$= \frac{1}{2}[\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C)]$$

5.21) Prove que se as bissetrizes de dois ângulos adjacentes formam ângulo reto, então os dois ângulos são suplementares.

Solução

Pelo exercício anterior, o ângulo das duas bissetrizes tem medida igual a

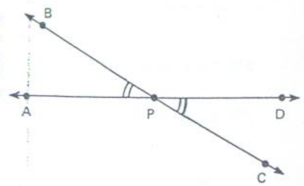
$$\text{med}(M\hat{O}N) = \frac{1}{2}[\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C)]$$

Mas $\text{med}(M\hat{O}N) = 90°$, logo

$$\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C) = 180°$$

isto é, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são suplementares.

5.22) Dado o ponto P no interior do segmento $\overline{AD}$, tomam-se, fora da reta $\overleftrightarrow{AD}$, os pontos B e C, situados em semiplanos opostos. Prove que, se $A\hat{P}B \equiv C\hat{P}D$, então os pontos B, P e C estão alinhados (isto é, $A\hat{P}B$ e $C\hat{P}D$ são opv).



Solução

Como $\text{med}(A\hat{P}B) = \text{med}(C\hat{P}D)$, temos

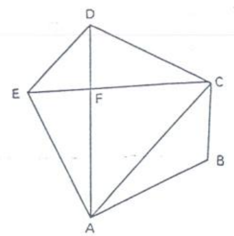
$$\text{med}(C\hat{P}D) + \text{med}(D\hat{P}B) = \text{med}(A\hat{P}B) + \text{med}(D\hat{P}B) = \text{med}(A\hat{P}D) = 180°$$

Logo, $B\hat{P}C$ é um ângulo raso, donde B, P e C estão alinhados.

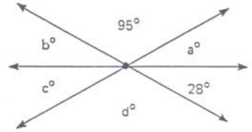
Exercícios Propostos

5.23) Complete:

a) med ($B\hat{A}C$) + med ($C\hat{A}D$) = med (......)
b) med ($C\hat{A}D$) + med ($D\hat{A}E$) = med (......)
c) med ($B\hat{A}C$) + med ($C\hat{A}E$) = med (......)
d) med ($C\hat{D}E$) − med ($C\hat{D}A$) = med (......)
e) med ($E\hat{F}D$) = 180° − med (......)
f) 180° − med ($A\hat{F}E$) = med (......)



5.24) Na figura são indicadas as medidas de seis ângulos formados por três retas concorrentes. Determine *a*, *b*, *c* e *d*.



5.25) Dê as medidas dos suplementos dos ângulos cujas medidas são:

a) 35°; b) 152°; c) 42°27'35''.

5.26) Dê as medidas dos complementos dos ângulos cujas medidas são:

a) 53°; b) 29°12'; c) 38°42'15''.

5.27) Prove que se dois ângulos são congruentes, então os seus suplementares são também congruentes.

5.28) Prove que todo ângulo reto é suplementar a si mesmo.

5.29) Prove que se dois ângulos não nulos são complementares, então eles são agudos.

5.30) A soma das medidas de dois ângulos é 56° e uma delas é igual a 3,5 da outra. Calcule essas medidas.

5.31) A medida de um ângulo é o triplo da medida do seu complemento. Quanto mede esse ângulo?

5.32) Um ângulo mede 36° menos que o seu suplemento. Calcule a medida do complemento desse ângulo.

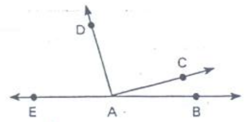
5.33) As medidas do suplemento e do complemento de um ângulo são uma o triplo da outra. Qual é a medida desse ângulo?

5.34) As bissetrizes de dois ângulos adjacentes formam um ângulo de 60°. Um dos ângulos mede 37°. Calcule a medida do outro.

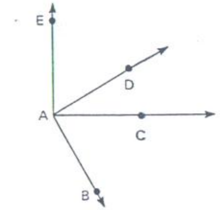
5.35) A semi-reta $\overrightarrow{OM}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ e a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ está contida no interior de $A\hat{O}M$. Mostre que

$$\text{med}(P\hat{O}M) = \frac{1}{2}[\text{med}(P\hat{O}B) - \text{med}(P\hat{O}A)]$$

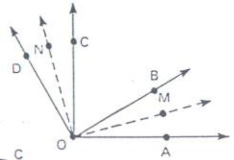
5.36) Na figura, $\overleftrightarrow{EB}$ é uma reta e as semi-retas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ são perpendiculares entre si. Prove que $B\hat{A}C$ e $D\hat{A}E$ são complementares.



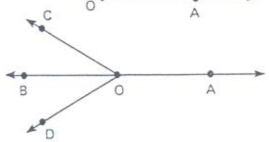
5.37) Na figura, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$. Mostre que os ângulos $B\hat{A}E$ e $C\hat{A}D$ são suplementares.



5.38) Na figura, $\overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{ON}$ são as bissetrizes dos ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, respectivamente. Sendo $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ ângulos retos, mostre que $M\hat{O}N$ é reto.



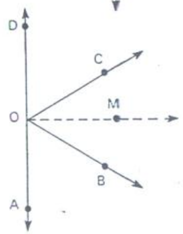
5.39) Com origem no ponto O ∈ $\overleftrightarrow{AB}$ conduzem-se as semi-retas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$, em semiplanos opostos, de tal modo que $A\hat{O}C \equiv A\hat{O}D$. Mostre que $\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz do ângulo $C\hat{O}D$.



5.40) Mostre que as bissetrizes de dois ângulos opv são semi-retas opostas.

5.41) As semi-retas da figura formam três ângulos congruentes. Quanto mede cada um?

5.42) A semi-reta $\overrightarrow{OM}$ é a bissetriz do ângulo $B\hat{O}C$ e é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AD}$. Mostre que os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são congruentes.



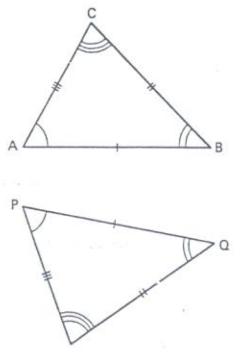
Capítulo

6 Congruência de triângulos. Polígonos convexos

6.1 — TRIÂNGULOS CONGRUENTES

Dois triângulos ABC e PQR são congruentes entre si se é possível estabelecer uma correspondência entre os seus vértices de tal modo que os seus lados sejam dois a dois congruentes:

$$\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$$
$$\overline{AC} \equiv \overline{PR}$$
$$\overline{BC} \equiv \overline{QR}$$



e também os seus ângulos internos sejam dois a dois congruentes:

$$\hat{A} \equiv \hat{P}$$
$$\hat{B} \equiv \hat{Q}$$
$$\hat{C} \equiv \hat{R}$$

Indicamos $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$.

Esta definição de congruência de triângulos reflete a noção intuitiva de que dois triângulos são congruentes se são "superponíveis". É interessante notar, entretanto, que a definição acima pressupõe a fixação prévia de uma *correspondência* entre os dois triângulos:

— ao vértice A corresponde o vértice P
— ao vértice B corresponde o vértice Q
— ao vértice C corresponde o vértice R

Se relacionássemos os mesmos dois triângulos através de *outra* correspondência, por exemplo:

$$A \leftrightarrow R$$
$$B \leftrightarrow P$$
$$C \leftrightarrow Q$$

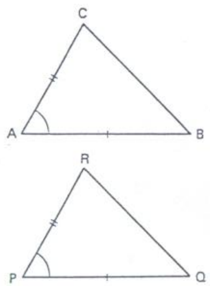
teríamos que $\hat{A}$ e $\hat{R}$ não são ângulos congruentes, nem $\hat{B}$ e $\hat{P}$, nem $\hat{C}$ e $\hat{Q}$, mas nem por isso os dois triângulos deixariam de ser congruentes. Apenas, não o seriam para *esta* correspondência.

6.2 — CRITÉRIOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

As propriedades relacionadas a seguir permitem concluir que dois triângulos dados são congruentes, de modo menos trabalhoso do que aplicando-se diretamente a definição. De um modo geral, vamos observar que para se concluir a congruência de dois triângulos basta verificar a congruência de *três figuras* (lados ou ângulos internos), entre as quais deve haver ao menos uma que seja lado.

1.º critério $\boxed{\text{L A L}}$ (lado-ângulo-lado)

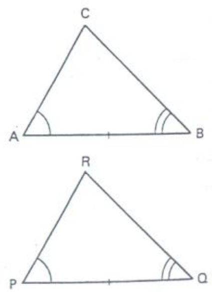
Se $\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{PQ} \\ \hat{A} \equiv \hat{P} \\ \overline{AC} \equiv \overline{PR} \end{cases}$ então $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$



Se dois triângulos têm congruentes **dois lados e o ângulo compreendido entre eles**, então esses dois triângulos são congruentes.

2.º critério $\boxed{\text{A L A}}$ (ângulo-lado-ângulo)

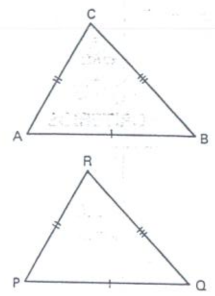
Se $\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{P} \\ \overline{AB} \equiv \overline{PQ} \\ \hat{B} \equiv \hat{Q} \end{cases}$ então $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$



Se dois triângulos têm congruentes **dois ângulos internos e o lado compreendido entre eles**, então esses dois triângulos são congruentes.

3.° critério $\boxed{\text{L L L}}$ (lado-lado-lado)

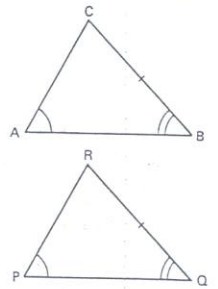
$$\text{Se}\begin{cases}\overline{AB} \equiv \overline{PQ}\\ \overline{AC} \equiv \overline{PR}\\ \overline{BC} \equiv \overline{QR}\end{cases} \quad \text{então } \triangle ABC \equiv \triangle PQR$$



Se dois triângulos têm dois a dois congruentes **os três lados**, então esses dois triângulos são congruentes.

4.° critério $\boxed{\text{A A L}}$ (ângulo-ângulo-lado)

$$\text{Se}\begin{cases}\hat{A} \equiv \hat{P}\\ \hat{B} \equiv \hat{Q}\\ \overline{BC} \equiv \overline{QR}\end{cases} \quad \text{então } \triangle ABC \equiv \triangle PQR$$



Se dois triângulos têm congruentes **dois ângulos internos e um lado oposto a um desses ângulos**, então esses dois triângulos são congruentes.

Dos quatro critérios acima, o único que deve ser aceito como **postulado** é o primeiro, L A L. Os demais podem ser demonstrados, e o serão, adiante, no decorrer deste capítulo (veja os próximos exercícios resolvidos).

Exercícios Resolvidos

6.1) Demonstre o critério A L A.

Solução

A respeito dos triângulos ABC e PQR é dado que:

$$\hat{A} \equiv \hat{P}$$
$$\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$$
$$\hat{B} \equiv \hat{Q}$$

e devemos provar que $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$ (podendo utilizar para isso o critério L A L, que foi admitido como postulado).

Consideremos sobre a semi-reta $\overrightarrow{AC}$ o ponto C' tal que $\overline{AC'} \equiv \overline{PR}$ (terminaremos por concluir que C' = C). Temos agora os dois triângulos ABC' e PQR, para os quais temos:

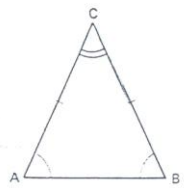
$$\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$$
$$\hat{A} \equiv \hat{P}$$
$$\overline{AC'} \equiv \overline{PR}$$

e então, pelo critério L A L, $\triangle ABC' \equiv \triangle PQR$. Logo, os ângulos $A\hat{B}C'$ e $P\hat{Q}R$ são congruentes. Mas, por hipótese, $A\hat{B}C$ e $P\hat{Q}R$ são congruentes, portanto $A\hat{B}C' \equiv A\hat{B}C$.

Ora, isto só é possível se as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ coincidem, o que significa que C' = C. Mas então ABC e ABC' são um só triângulo, logo $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$.

6.2) **Triângulo isósceles** – Um triângulo que tem dois lados congruentes é chamado *isósceles*. A figura ao lado representa um triângulo ABC, isósceles porque $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$. O outro lado, $\overline{AB}$, é chamado *base*, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são os *ângulos da base* e o ângulo $\hat{C}$ é o *ângulo do vértice*.

Prove que **os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes**.



Solução

Vamos estabelecer uma correspondência entre o triângulo ABC e ele mesmo, assim:

$$A \leftrightarrow B$$
$$B \leftrightarrow A$$
$$C \leftrightarrow C$$

como se na verdade tivéssemos *dois triângulos*: $\triangle ABC$ e $\triangle BAC$. De acordo com essa correspondência, temos que

$$\text{no } \triangle ABC\begin{cases}\overline{AC} \text{ corresponde a } \overline{BC}\\ \hat{C} \text{ corresponde a } \hat{C}\\ \overline{BC} \text{ corresponde a } \overline{AC}\end{cases} \text{no } \triangle BAC$$

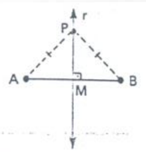
e como:

$$\overline{AC} \equiv \overline{BC}$$
$$\hat{C} \equiv \hat{C}$$
$$\overline{BC} \equiv \overline{AC}$$

então, pelo critério L A L, temos $\triangle ABC \equiv \triangle BAC$, logo os ângulos que se correspondem, $\hat{A}$ e $\hat{B}$, são congruentes entre si: $\hat{A} \equiv \hat{B}$.

6.3) **Mediatriz de um segmento** – Dado um segmento $\overline{AB}$ contido num plano, então a reta contida nesse plano que passa pelo ponto médio do segmento e é perpendicular a ele chama-se *mediatriz* do segmento.

Prove que todo ponto da mediatriz é eqüidistante dos extremos do segmento.



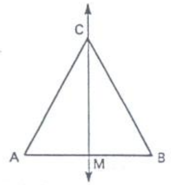
Solução

Indiquemos por P um ponto qualquer da mediatriz e por M o ponto médio de $\overline{AB}$.
Se P = M, é claro que PA = PB, nada restando a provar. Se P ≠ M, consideremos os triângulos △ AMP e △ BMP, para os quais temos:

$$\overline{AM} \equiv \overline{MB} \quad \text{(pois M é ponto médio de } \overline{AB}\text{)}$$
$$A\hat{M}B \equiv B\hat{M}P \quad \text{(pois ambos são retos)}$$
$$\overline{MP} \equiv \overline{MP}$$

Pelo critério L A L, temos △ AMP ≡ △ BMP, logo $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$ e assim P é eqüidistante de A e de B.

6.4) Na figura ao lado, a reta $\overleftrightarrow{CM}$ é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$. Prove que o triângulo ABC é isósceles.



Solução

Como C ∈ $\overleftrightarrow{CM}$, pelo exercício anterior temos $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$, logo △ ABC é isósceles.

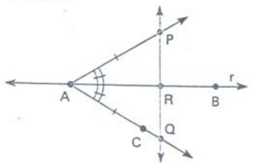
6.5) Sejam dados uma reta r e um ponto P *fora dela*. Prove que por P pode-se conduzir uma única reta perpendicular à reta r.

Solução

Lembremos inicialmente que a demonstração para o caso em que P ∈ r já foi feita anteriormente (veja o teorema demonstrado no item 5.10).

A demonstração do presente caso deve ser feita em duas partes: **existência e unicidade**.

Existência



Sejam A e B dois pontos distintos da reta r. Vamos construir a semi-reta $\overrightarrow{AC}$, no semiplano oposto ao do ponto P, de tal modo que $B\hat{A}C \equiv B\hat{A}P$. Em seguida, tomemos sobre $\overrightarrow{AC}$ o ponto Q tal que $\overline{AP} \equiv \overline{AQ}$. Seja R o ponto em que o segmento $\overline{PQ}$ corta a reta r.

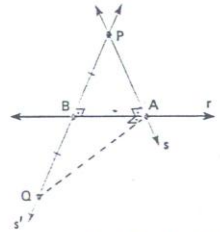
Dessa maneira, obtemos dois triângulos, △ ARQ e △ ARP, para os quais:

$$\overline{AQ} \equiv \overline{AP}$$
$$R\hat{A}Q \equiv R\hat{A}P$$
$$\overline{AR} \equiv \overline{AR}$$

Logo, pelo critério L A L, △ ARQ ≡ △ ARP. Daí resulta que $A\hat{R}Q \equiv A\hat{R}P$ e como eles são suplementares um ao outro, ambos são retos. Concluímos então que $\overleftrightarrow{PQ} \perp r$.

Nota: Se fosse R = A, não teríamos os triângulos △ ARQ e △ ARP, mas, em compensação, P, A, Q seriam alinhados e a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ seria perpendicular a r, pois como $B\hat{A}Q \equiv B\hat{A}P$, estes dois ângulos seriam retos.

Unicidade



Admitamos que as retas s e s' são perpendiculares à reta r, por P, sendo A o ponto onde r encontra s e B o ponto onde r encontra s'. Sobre s' tomemos o ponto Q de tal modo que B seja o ponto médio de $\overline{PQ}$, isto é, tal que $\overline{BP} \equiv \overline{BQ}$. Para os triângulos △ PAB e △ QAB, temos:

$$\overline{PB} \equiv \overline{QB}$$
$$A\hat{B}P \equiv A\hat{B}Q \quad \text{(ambos retos)}$$
$$\overline{AB} \equiv \overline{AB}$$

Assim, pelo critério L A L, △ PAB ≡ △ QAB. Mas isto significa que $Q\hat{A}B \equiv P\hat{A}B$, ou seja, $Q\hat{A}B$ é um ângulo reto. Nesse caso, $\overleftrightarrow{AQ} \perp r$. Mas pelo ponto A só é possível conduzir, no mesmo plano, uma única reta perpendicular à reta r (veja o teorema do item 5.10). Então, é falsa a suposição de que existem duas retas, s e s'.

Observação: Uma conseqüência imediata do teorema demonstrado acima é que "nenhum triângulo pode ter mais do que um ângulo interno reto". De fato, se o △ ABC tivesse os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ retos, pelo ponto C estariam passando duas retas distintas, perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{AB}$, o que é impossível.

Triângulo retângulo

Um triângulo que tem um ângulo interno reto chama-se *triângulo retângulo*. O lado oposto ao ângulo reto chama-se *hipotenusa* e os dois outros lados chamam-se *catetos*.

Distância de um ponto a uma reta

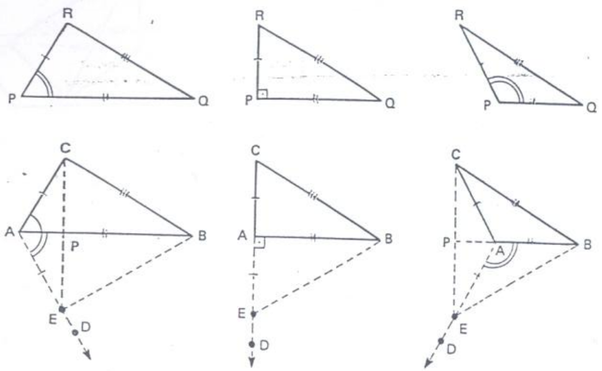
Dados o ponto P e a reta r, seja Q o ponto onde r encontra a reta perpendicular conduzida por P. A distância entre o ponto P e a reta r é definida como sendo a distância entre P e Q:

$$\delta_{Pr} = \delta_{PQ} = PQ$$

O ponto Q é chamado projeção ortogonal de P sobre a reta r (ou, simplesmente, *projeção de P sobre r*).

6.6) **Demonstre o critério L L L.**

Solução



caso 1 caso 2 caso 3

A demonstração deve levar em conta os três casos ilustrados acima. Sejam os triângulos ABC e PQR, para os quais se tem:

$$\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$$
$$\overline{AC} \equiv \overline{PR}$$
$$\overline{BC} \equiv \overline{QR}$$

Devemos provar que $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$, podendo usar para isso o critério L A L (admitido como postulado) ou o critério A L A (já demonstrado no exercício 6.1).

Vamos construir a semi-reta $\overrightarrow{AD}$, no semiplano oposto ao do ponto C, de modo que

$$B\hat{A}D \equiv Q\hat{P}R$$

e tomemos sobre essa semi-reta o ponto E tal que $\overline{AE} \equiv \overline{PR}$. Essa construção nos leva a um triângulo ABE, o qual é congruente ao $\triangle PQR$, pois:

$$\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$$
$$B\hat{A}E \equiv Q\hat{P}R$$
$$\overline{AE} \equiv \overline{PR} \qquad \text{(caso L A L)}$$

Seja P o ponto de interseção de $\overleftrightarrow{CE}$ com a reta $\overleftrightarrow{AB}$. No caso 1, P está entre A e B, no caso 2, P = A e, no caso 3, A está entre P e B. Temos:

a) $A\hat{C}E \equiv A\hat{E}C$, porque o $\triangle ACE$ é isósceles nos casos 1 e 3; no caso 2 estes dois ângulos são nulos.

b) $E\hat{C}B \equiv C\hat{E}B$, pois o $\triangle ECB$ é isósceles.

c) $A\hat{C}B \equiv A\hat{E}B$: no caso 1 temos:

$$\text{med}\,(A\hat{C}B) = \text{med}\,(A\hat{C}E) + \text{med}\,(E\hat{C}B)$$
e
$$\text{med}\,(A\hat{E}B) = \text{med}\,(A\hat{E}C) + \text{med}\,(C\hat{E}B)$$

no caso 2 temos:

$$\text{med}\,(A\hat{C}B) = \text{med}\,(E\hat{C}B)$$
e
$$\text{med}\,(A\hat{E}B) = \text{med}\,(C\hat{E}B)$$

no caso 3 temos:

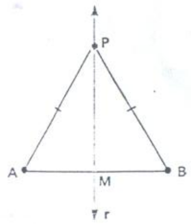
$$\text{med}\,(A\hat{C}B) = \text{med}\,(E\hat{C}B) - \text{med}\,(A\hat{C}E)$$
e
$$\text{med}\,(A\hat{E}B) = \text{med}\,(C\hat{E}B) - \text{med}\,(A\hat{E}C)$$

d) Sendo assim, $\triangle ABC \equiv \triangle ABE$, pois:

$$\overline{AC} \equiv \overline{AE}$$
$$A\hat{C}B \equiv A\hat{E}B$$
$$\overline{BC} \equiv \overline{BE} \qquad \text{(caso L A L)}$$

Portanto, $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$.

6.7) Sejam, num plano, um segmento $\overline{AB}$ e um ponto P *eqüidistante* de A e de B. Prove que o ponto P pertence à mediatriz do segmento $\overline{AB}$, contida no plano dado.



Solução

Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$. Se $P \in \overleftrightarrow{AB}$, então P = M e nesse caso é imediato que P pertence à mediatriz. Suponha-se que $P \notin \overleftrightarrow{AB}$. Nesse caso, seja $r = \overleftrightarrow{PM}$ e provemos que **r** é a mediatriz, isto é, que $r \perp \overleftrightarrow{AB}$. Para isso, basta notar que para os triângulos $\triangle AMP$ e $\triangle BMP$, tem-se:

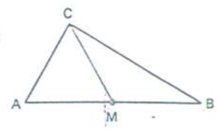
$$\overline{AP} \equiv \overline{BP}$$
$$\overline{AM} \equiv \overline{BM}$$
$$\overline{MP} \equiv \overline{MP}$$

logo, pelo critério L L L, $\triangle AMP \equiv \triangle BMP$. Sendo assim, $A\hat{M}P \equiv B\hat{M}P$ e, como são suplementares um ao outro, ambos são retos: $r \perp \overleftrightarrow{AB}$.

Observação: Unindo-se as conclusões dos exercícios 6.3 e 6.7, podemos escrever que "dado um segmento num plano, então a mediatriz do segmento, contida nesse plano, é o conjunto (lugar geométrico) dos pontos do plano que são *eqüidistantes* dos pontos A e B".

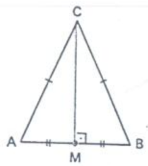
6.8) Medianas de um triângulo — Um segmento que tem uma extremidade num vértice e a outra no ponto médio do lado oposto tem o nome de *mediana do triângulo*. Um triângulo ABC tem três medianas, relativas aos vértices **A**, **B** e **C**.

Prove que, num triângulo isósceles, a mediana relativa à base é perpendicular à base.



Solução

Seja M o ponto médio da base $\overleftrightarrow{AB}$ do triângulo isósceles ABC. Com relação aos triângulos AMC e BMC, temos:



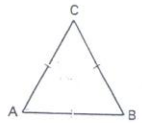
$$\overleftrightarrow{AC} \equiv \overleftrightarrow{BC}$$
$$\overleftrightarrow{AM} \equiv \overleftrightarrow{BM}$$
$$\overleftrightarrow{CM} \equiv \overleftrightarrow{CM}$$

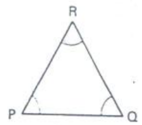
logo, pelo critério L L L, $\triangle AMC \equiv \triangle BMC$. Assim, os ângulos $A\hat{M}C$ e $B\hat{M}C$ são congruentes e, como são suplementares um ao outro, ambos são retos, donde $\overleftrightarrow{CM} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

Outro modo

Como C é eqüidistante de A e de B, então C pertence à *mediatriz* do segmento $\overleftrightarrow{AB}$, logo a reta $\overleftrightarrow{CM}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

6.9) Triângulo eqüilátero – Um triângulo é chamado *eqüilátero* se os seus três lados são congruentes. Triângulo eqüiângulo – Um triângulo é chamado *eqüiângulo* se os seus três ângulos internos são congruentes.





Prove que:

a) Todo triângulo eqüilátero é eqüiângulo.
b) Todo triângulo eqüiângulo é eqüilátero.

Solução

a) O triângulo ABC é eqüilátero, logo ele é ao mesmo tempo isósceles de base $\overleftrightarrow{AB}$, de base $\overleftrightarrow{AC}$ e de base $\overleftrightarrow{BC}$. Como num triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes (veja o exercício 6.2), conclui-se que $\hat{A} \equiv \hat{B}$, $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{C}$, logo o triângulo é eqüiângulo.

b) O triângulo PQR é eqüiângulo. Vamos estabelecer uma correspondência entre esse triângulo e ele mesmo, assim:

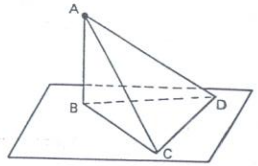
$$P \leftrightarrow Q$$
$$Q \leftrightarrow P$$
$$R \leftrightarrow R$$

como se tivéssemos *dois triângulos*: $\triangle PQR$ e $\triangle QPR$. Temos que

$$\text{no } \triangle PQR \left\{ \begin{array}{l} \hat{P} \text{ corresponde a } \hat{Q} \\ \overleftrightarrow{PQ} \text{ corresponde a } \overleftrightarrow{QP} \\ \hat{Q} \text{ corresponde a } \hat{P} \end{array} \right\} \text{ no } \triangle QPR$$

e como essas figuras que se correspondem são congruentes, pelo critério A L A temos $\triangle PQR \equiv \triangle QPR$, logo os lados que se correspondem são congruentes entre si: $\overleftrightarrow{PR} \equiv \overleftrightarrow{QR}$. Por raciocínio idêntico obteremos também $\overleftrightarrow{PR} \equiv \overleftrightarrow{PQ}$, o que mostra que o triângulo PQR é eqüilátero.

6.10) Na figura, tem-se $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{BC} \equiv \overleftrightarrow{BD}$. Prove que o triângulo ACD é isósceles.



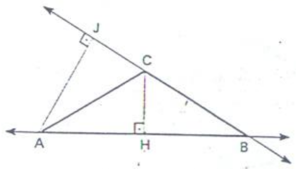
Solução

Para os triângulos ABC e ABD, temos:

$$\overleftrightarrow{AB} \equiv \overleftrightarrow{AB}$$
$$A\hat{B}C \equiv A\hat{B}D \quad \text{(ambos retos)}$$
$$\overleftrightarrow{BC} \equiv \overleftrightarrow{BD}$$

logo, pelo critério L A L, $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$. Assim, $\overleftrightarrow{AC} \equiv \overleftrightarrow{AD}$, o que significa que $\triangle ACD$ é isósceles.

6.11) Alturas de um triângulo – Se, por um vértice de um triângulo, conduz-se a reta perpendicular à reta suporte do lado oposto, à interseção dessas duas retas dá-se o nome de *pé da perpendicular*. O segmento cujas extremidades são um vértice e o pé da perpendicular desse vértice ao lado oposto chama-se *altura do triângulo*. Também se denomina altura a medida desse segmento. Todo triângulo tem três alturas, relativas a cada lado. Na figura, são alturas do triângulo ABC os segmentos $\overleftrightarrow{CH}$ e $\overleftrightarrow{AJ}$, havendo ainda uma terceira altura não representada ali.

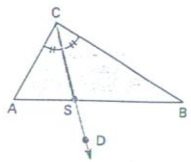


Prove que, num triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também altura.

Solução

Como já ficou provado no exercício 6.8, num triângulo isósceles, a mediana relativa à base é perpendicular à base, logo é altura.

6.12) Bissetrizes internas de um triângulo – Seja $\overrightarrow{CD}$ a semi-reta bissetriz do ângulo interno $\hat{C}$ do triângulo ABC e seja S o ponto de interseção dessa semi-reta com o lado $\overleftrightarrow{AB}$. O segmento $\overleftrightarrow{CS}$ chama-se *bissetriz interna do triângulo*, relativa ao vértice C. Há outras duas, relativas a A e a B. Também se dá o nome de bissetriz interna à medida desses segmentos.



Prove que, num triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também bissetriz interna.

Solução

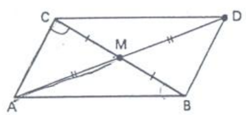
Veja a figura do exercício anterior. Os triângulos $\triangle AMC$ e $\triangle BMC$ são congruentes (L L L), logo $A\hat{C}M \equiv B\hat{C}M$ e assim $\overleftrightarrow{CM}$ é bissetriz interna.

6.13) Prove que a soma das medidas de dois ângulos internos quaisquer de um triângulo é menor do que 180°.

Solução

Dado o $\triangle ABC$, provemos que

$$med(\hat{B}) + med(\hat{C}) < 180°$$



Para isso, sendo M o ponto médio de $\overline{BC}$, tomemos sobre a semi-reta $\overrightarrow{AM}$ o ponto D tal que M seja também ponto médio de $\overline{AD}$. Os triângulo ACM e DBM são congruentes, pois (LAL):

$$\overline{CM} \equiv \overline{BM} \quad \text{(M é ponto médio)}$$
$$A\hat{M}C \equiv D\hat{M}B \quad \text{(opostos pelo vértice)}$$
$$\overline{AM} \equiv \overline{DM} \quad \text{(M é ponto médio)}$$

Logo, $A\hat{C}M \equiv D\hat{B}M$. Assim,

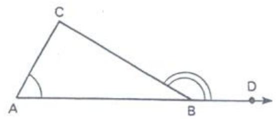
$$\begin{aligned} & med(\hat{B}) + med(\hat{C}) = \\ & = med(A\hat{B}C) + med(A\hat{C}M) = \\ & = med(A\hat{B}C) + med(C\hat{B}D) = \\ & = med(A\hat{B}D) \end{aligned}$$

Ora, $med(A\hat{B}D) < 180°$, pois o ponto D não pertence à reta $\overleftrightarrow{AB}$, isto é, $A\hat{B}D$ não é raso. Portanto,

$$med(\hat{B}) + med(\hat{C}) < 180°$$

6.14) Prove que, em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é maior do que a medida de qualquer ângulo interno não adjacente a ele.

Solução



Se D pertence à semi-reta $\overrightarrow{AB}$ e é exterior ao lado $\overline{AB}$, então $C\hat{B}D$ é um ângulo externo do triângulo ABC. Provemos, por exemplo, que $med(C\hat{B}D) > med(\hat{A})$. Para isso, usaremos o resultado do exercício anterior. Temos que

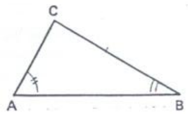
$$med(\hat{A}) + med(\hat{B}) < 180$$

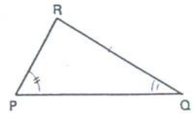
logo

$$med(\hat{A}) < 180° - med(\hat{B})$$

Mas os ângulos $\hat{B}$ e $C\hat{B}D$ são suplementares um ao outro, logo $med(C\hat{B}D) = 180° - med(\hat{B})$. Portanto, $med(C\hat{B}D) > med(\hat{A})$.

6.15) Demonstre o critério A A L.





Solução

Para os triângulos ABC e PQR, temos:

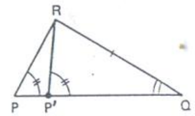
$$\hat{A} \equiv \hat{P}$$
$$\hat{B} \equiv \hat{Q}$$
$$\overline{BC} \equiv \overline{QR}$$

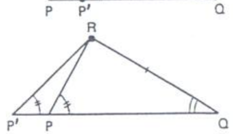
e devemos provar que

$$\triangle ABC \equiv \triangle PQR$$

Com essa finalidade, tomemos sobre a semi-reta $\overrightarrow{QP}$ o ponto P' tal que $\overline{P'Q} \equiv \overline{AB}$, construindo assim o $\triangle P'QR$, que é congruente ao $\triangle ABC$, pois (L A L):

$$\overline{P'Q} \equiv \overline{AB}$$
$$\hat{Q} \equiv \hat{B}$$
$$\overline{QR} \equiv \overline{BC}$$



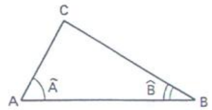


Se P' = P, nada resta a demonstrar. Suponhamos que P' ≠ P, podendo P' ser interno ou externo ao segmento $\overline{PQ}$. Mas, em qualquer destes dois casos, o $\triangle PP'R$ apresenta um ângulo externo *congruente* a um ângulo interno não adjacente a ele. Isto é impossível, pois contraria o resultado do exercício anterior. Sendo assim, a única hipótese possível é P' = P e portanto

$$\triangle ABC \equiv \triangle PQR$$

6.16) No $\triangle ABC$, se BC > AC, então

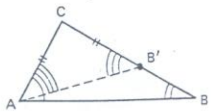
$$med(\hat{A}) > med(\hat{B})$$



Reciprocamente, se $med(\hat{A}) > med(\hat{B})$ então BC > AC. Em outras palavras, num triângulo, ao maior lado se opõe o maior ângulo. Prove essas afirmações.

Solução

a) Se BC > AC, então no interior do lado $\overline{BC}$ podemos tomar o ponto B' tal que B'C = AC. Assim, o $\triangle AB'C$ é isósceles, logo $A\hat{B'}C \equiv B'\hat{A}C$. Como $A\hat{B'}C$ é um ângulo externo do $\triangle ABB'$, tem-se $med(A\hat{B'}C) > med(\hat{B})$.



Por outro lado, tem-se $med(\hat{A}) > med(B'\hat{A}C)$. Assim,

$$med(\hat{A}) > med(B'\hat{A}C) = med(A\hat{B}'C) > med(\hat{B})$$

isto é

$$med(\hat{A}) > med(\hat{B})$$

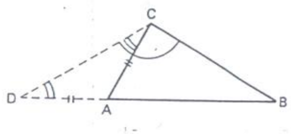
b) Suponhamos agora que $med(\hat{A}) > med(\hat{B})$ e provemos que $BC > AC$. Ora, se fosse $BC = AC$, teríamos $\hat{A} \equiv \hat{B}$, pois $\triangle ABC$ seria isósceles. Se fosse $BC < AC$, pela parte *a* teríamos $med(\hat{A}) < med(\hat{B})$. Em ambos os casos temos absurdo. Logo, $BC > AC$.

6.17) Demonstre que, em todo triângulo, a medida de qualquer lado é menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.

Solução

Seja D um ponto da semi-reta $\overleftrightarrow{BA}$ tal que

$$BD = AB + AC$$



Assim, A está no interior de $\overleftrightarrow{BD}$ e $AD = AC$. No $\triangle ACD$, isósceles, temos

$$med(A\hat{D}C) = med(A\hat{C}D)$$

e como $med(B\hat{C}D) > med(A\hat{C}D)$, resulta que

$$med(B\hat{C}D) > med(A\hat{D}C)$$

Pelo exercício anterior, no $\triangle BCD$ temos, portanto,

$$BC < BD$$

isto é,

$$BC < AB + AC$$

6.18) Demonstre que, se $BC = AB + AC$, então os pontos A, B e C estão alinhados.

Solução

Se eles não estivessem alinhados, seriam vértices de um triângulo, logo, pelo exercício anterior, teríamos $BC < AB + AC$, contrariando a hipótese.

6.19) Existe triângulo cujos lados medem 7 cm, 10 cm e 18 cm?

Solução

Não existe, pois, como $18 > 10 + 7$, deveríamos ter um lado cuja medida fosse maior do que a soma das medidas dos outros dois, o que é impossível.

6.20) Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$, com $\overleftrightarrow{AB} \equiv \overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{AC} \equiv \overleftrightarrow{PR}$. Prove que, se

$$med(\hat{A}) < med(\hat{P})$$

então $BC < QR$.

Tomemos a semi-reta $\overleftrightarrow{PT}$, com R e T do mesmo lado de PQ no plano do $\triangle PQR$, de modo que

$$T\hat{P}Q \equiv C\hat{A}B$$

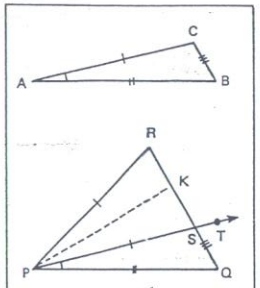
e marquemos o ponto S sobre essa semi-reta, com $\overleftrightarrow{PS} \equiv \overleftrightarrow{AC}$. Assim, $\triangle PQS \equiv \triangle ABC$ (L A L). Se o ponto S pertence à reta $\overleftrightarrow{QR}$ (caso 1), como

$$med(R\hat{P}Q) > med(S\hat{P}Q),$$

S está entre R e Q, logo

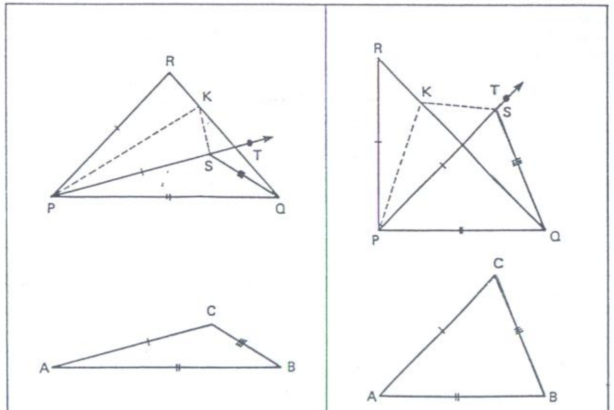
$$QS < QR$$

donde $BC < QR$.



caso 1

Se o ponto S está fora da reta $\overleftrightarrow{QR}$ (casos 2 e 3), tracemos a bissetriz $\overleftrightarrow{PK}$ do ângulo $R\hat{P}S$.



sendo $K \in \overleftrightarrow{QR}$. Como $med(R\hat{P}Q) > med(S\hat{P}Q)$, K está entre R e Q, logo $QR = QK + KR$. Além disso, como $\triangle PRK \equiv \triangle PSK$ (L A L), temos $KR = KS$.

No $\triangle SQK$, temos $QS < QK + KS$ (veja o exercício 6.17). Então, $QS < QK + KR$, isto é,

$$QS < QR \quad \text{donde} \quad BC < QR$$

6.21) Demonstre o recíproco do teorema do exercício anterior, isto é, que se BC < QR, então

$$\text{med}(\hat{A}) < \text{med}(\hat{P})$$

Solução

Se med $(\hat{A})$ = med $(\hat{P})$, teríamos $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$ (L A L), donde BC = QR, o que contraria a hipótese.

Se med $(\hat{A})$ > med $(\hat{P})$, pelo teorema do exercício anterior teríamos BC > QR, contra a hipótese.

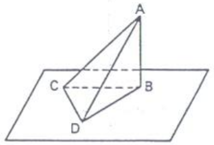
Assim, só pode ser med $(\hat{A})$ < med $(\hat{P})$.

Exercícios Propostos

6.22) Num triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa é perpendicular à hipótenusa. Mostre que esse triângulo é isósceles.

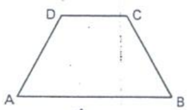
6.23) Prove que um triângulo que tem dois ângulos internos congruentes é isósceles.

6.24) Na figura, tem-se $A\hat{C}D \equiv A\hat{D}C$ e $C\hat{A}B \equiv D\hat{A}B$. Mostre que $A\hat{C}B \equiv A\hat{D}B$.

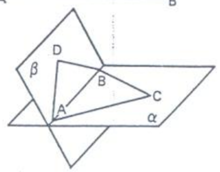


6.25) Se os segmentos $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ interceptam-se no seu ponto médio, prove que $\overleftrightarrow{AC} \equiv \overleftrightarrow{BD}$.

6.26) Na figura, tem-se $\overleftrightarrow{AD} \equiv \overleftrightarrow{BC}$ e $\hat{A} \equiv \hat{B}$, sendo os quatro pontos coplanares. Prove que $\hat{C} \equiv \hat{D}$.



6.27) Os planos α e β interceptam-se segundo a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Tomam-se os pontos $C \in \alpha$ e $D \in \beta$, de modo que $\overleftrightarrow{CA} \equiv \overleftrightarrow{CB}$ e $\overleftrightarrow{DA} \equiv \overleftrightarrow{DB}$. Demonstre que $D\hat{A}C \equiv D\hat{B}C$.

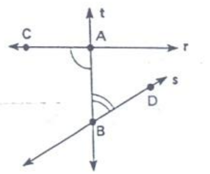


6.28) Prove que, se um triângulo tem um ângulo interno reto, então os dois outros ângulos internos são agudos.

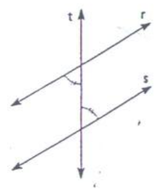
6.29) Prove que os ângulos da base de um triângulo isósceles são agudos.

6.3 — ÂNGULOS ALTERNOS INTERNOS

São dadas as retas **r**, **s** e **t**, contidas em um mesmo plano, tais que **t** intercepta as outras duas nos pontos distintos $A \in r$ e $B \in s$. A reta **t** é chamada *transversal* com relação a **r** e **s**. Tomemos sobre **r** o ponto C e sobre **s** o ponto D, situados em semiplanos opostos com relação à transversal.



Os ângulos $C\hat{A}B$ e $D\hat{B}A$ são chamados **alternos internos.**

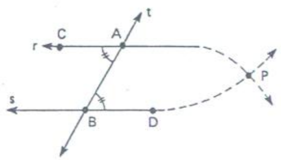


No caso particular em que **r** e **s** são duas retas *paralelas*, dois ângulos alternos internos são congruentes. Inversamente, se soubermos que dois ângulos alternos internos são congruentes, poderemos concluir que **r** e **s** são paralelas. É o que veremos demonstrado nos próximos exercícios.

Exercícios Resolvidos

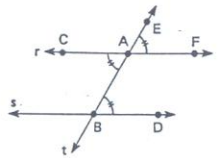
6.30) Demonstre que, se duas retas coplanares, cortadas por uma transversal, formam ângulos alternos internos congruentes, então essas duas retas são paralelas.

Solução



Sejam as retas distintas **r** e **s**, coplanares, cortadas pela transversal **t** em A e B, respectivamente. Sejam $C \in r$ e $D \in s$, em semiplanos opostos com relação à reta **t** e admitamos que os ângulos alternos internos $C\hat{A}B$ e $D\hat{B}A$ sejam congruentes. Suponhamos que **r** e **s** se interceptam num ponto P, situado no mesmo semiplano de D. Se isso acontecesse, teríamos um triângulo ABP no qual o ângulo *externo* $C\hat{A}B$ é congruente ao ângulo *interno* $P\hat{B}A$, contrariando o resultado do exercício 6.14. Assim, é impossível a existência de P; logo $r \parallel s$.

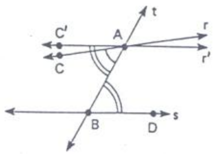
Nota: Na mesma situação examinada antes, se considerarmos na reta t o ponto E e na reta r o ponto F, de tal modo que $F\hat{A}E$ e $C\hat{A}B$ sejam *opostos pelo vértice*, então os ângulos $F\hat{A}E$ e $D\hat{B}A$ são chamados ângulos correspondentes. É imediato que a propriedade acima poderia ser enunciada assim: "*Se duas retas coplanares, cortadas por uma transversal, formam ângulos correspondentes congruentes, então essas duas retas são paralelas.*"



6.31) Demonstre que, se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.

Solução

Suponha-se que as retas r e s, paralelas, cortadas pela transversal t, formam ângulos alternos internos $C\hat{A}B$ e $D\hat{B}A$.

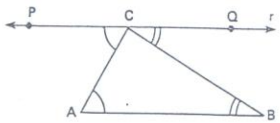


Tomemos, no mesmo semiplano de origem t em que está situado C, o ponto C' tal que $C'\hat{A}B \equiv D\hat{B}A$. Assim, as retas $r' = \overleftrightarrow{C'A}$ e s, cortadas pela transversal t, formam ângulos alternos internos congruentes. Pelo exercício anterior, tem-se então $r' \parallel s$. Mas $r \parallel s$, logo, pelo postulado de Euclides (P7), tem-se $r' = r$ e assim:

$$C\hat{A}B \equiv D\hat{B}A$$

6.32) Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo — Demonstre que, num triângulo qualquer, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180°.

Solução



Consideremos o $\triangle ABC$. Seja r a reta que passa por C e é paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Tomemos sobre r os pontos P e Q, sendo P situado no mesmo semiplano de origem $\overleftrightarrow{BC}$ em que está o ponto A, e Q situado no semiplano oposto (veja a figura). Os ângulos $P\hat{C}A$ e $\hat{A}$ são alternos internos, logo

$$\text{med}(P\hat{C}A) = \text{med}(\hat{A})$$

e os ângulos $B\hat{C}Q$ e $\hat{B}$ são alternos internos, logo

$$\text{med}(B\hat{C}Q) = \text{med}(\hat{B})$$

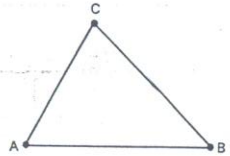
Mas

$$\text{med}(P\hat{C}A) + \text{med}(\hat{C}) + \text{med}(B\hat{C}Q) = 180°$$

portanto

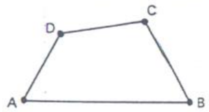
$$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) = 180°$$

6.4 — POLÍGONOS CONVEXOS



Pelo modo como definimos, pode-se dizer que um **triângulo** é uma região convexa do plano, delimitada pela união de três segmentos (seus lados), os quais formam o que chamamos uma *poligonal triangular*. De uma forma intuitiva, podemos estender esta noção a figuras dotadas de um número maior de lados.

Tais figuras são os polígonos convexos (ou, simplesmente, polígonos). Embora seja possível uma definição formal e rigorosa deste conceito, vamos preferir aqui a idéia intuitiva, que neste caso mais se aproxima das finalidades do nosso livro.



Um quadrilátero convexo é uma região convexa do plano, delimitada por uma *poligonal de quatro lados*.

Em geral, um polígono convexo de **n** lados é uma região convexa do plano, delimitada por uma *poligonal*, a qual se constitui da união de **n** segmentos. Um polígono de **n** lados tem, então, **n** vértices e **n** ângulos internos.

Os triângulos e os quadriláteros são exemplos de polígonos convexos.

Segundo o número de lados, os polígonos recebem nomes especiais:

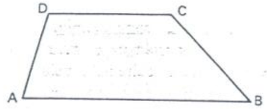
nome	n.º de lados
triângulo	3
quadrilátero	4
pentágono	5
hexágono	6
heptágono	7
octógono	8
eneágono	9
decágono	10
dodecágono	12

Diagonal do polígono é todo segmento com extremidades nos seus vértices, mas que não é um lado. Os quadriláteros têm duas diagonais. Os triângulos não têm diagonal.

6.5 — QUADRILÁTEROS ESPECIAIS

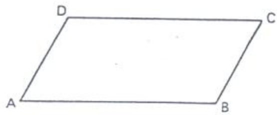
Trapézio — Um quadrilátero que tem *ao menos um par* de lados paralelos chama-se **trapézio**.

Na ilustração, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.



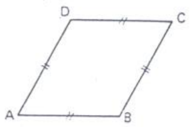
Paralelogramo — Um quadrilátero que tem *dois pares* de lados paralelos chama-se **paralelogramo**.

Na ilustração, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

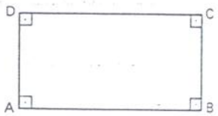


É claro que todo paralelogramo é também um trapézio.

Losango — Um quadrilátero cujos quatro lados são congruentes chama-se losango

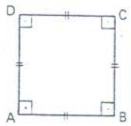


Retângulo — Um quadrilátero cujos quatro ângulos internos são *retos* chama-se retângulo



Quadrado — Um *retângulo* que tem os quatro lados congruentes chama-se quadrado.

É claro, então, que um quadrado, além de ser um retângulo, é também um losango.



Exercícios Propostos

6.33) Prove que todo paralelogramo tem os lados paralelos congruentes entre si.

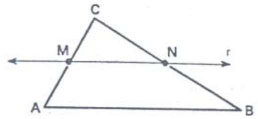
6.34) Prove que todo paralelogramo tem os ângulos internos opostos congruentes entre si.

6.35) Prove que as diagonais de um paralelogramo interceptam-se em seu ponto médio.

6.36) Prove que todo quadrilátero cujas diagonais se cortam ao meio é um paralelogramo.

6.37) Prove que todo losango é um paralelogramo.

6.38) Pelo ponto médio M do lado $\overleftrightarrow{AC}$ do triângulo ABC, conduz-se a reta r paralela ao lado $\overleftrightarrow{AB}$, a qual encontra o lado $\overleftrightarrow{BC}$ no ponto N. Prove que N é também ponto médio de $\overleftrightarrow{BC}$.



6.39) No exercício anterior, prove que $MN = \frac{1}{2} AB$.

6.40) Mostre que, num quadrilátero qualquer, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 360°.

6.41) Prove que todo quadrilátero que tem dois lados opostos paralelos e congruentes é um paralelogramo.

6.42) Mostre que a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é igual a $(n - 2) \cdot 180°$.

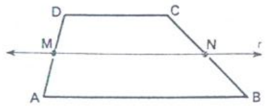
6.43) Prove que dois triângulos retângulos, que têm congruentes as hipotenusas e um dos catetos, são congruentes.

6.44) Seja um $\triangle$ ABC. Por A, conduz-se a reta $r \parallel \overleftrightarrow{BC}$, por B a reta $s \parallel \overleftrightarrow{AC}$ e por C a reta $t \parallel \overleftrightarrow{AB}$, as quais se interceptam duas a duas formando um triângulo. Mostre que A, B e C são os pontos médios dos lados desse triângulo.

6.45) Seja OAB um triângulo isósceles de base $\overleftrightarrow{AB}$ e tomemos P entre A e B e Q também na reta $\overleftrightarrow{AB}$, mas fora do segmento $\overline{AB}$. Prove que $PO < BO$ e $QO > BO$.

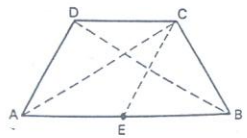
6.46) Prove que as três medianas de um triângulo cortam-se em um mesmo ponto (que é chamado baricentro do triângulo). Prove, ainda, que o baricentro divide cada mediana em dois segmentos dos quais aquele que contém o vértice tem a medida igual ao dobro da medida do outro.

6.47) Os lados paralelos do trapézio ABCD são $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Pelo ponto médio M do lado $\overleftrightarrow{AD}$, conduz-se a reta $r \parallel \overleftrightarrow{AB}$, a qual encontra o lado $\overleftrightarrow{BC}$ em N. Prove que N é ponto médio de $\overleftrightarrow{BC}$.



6.48) Trapézio isósceles — O trapézio ABCD ($\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$) é isósceles se os lados laterais são congruentes: $\overleftrightarrow{AD} \equiv \overleftrightarrow{BC}$.

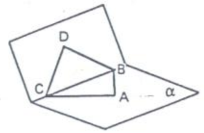
Prove que um trapézio isósceles tem os ângulos da mesma base congruentes.



Exercícios Suplementares

II.1) Quadrilátero reverso – Seja, sobre um plano α, um triângulo ABC. Consideremos o ponto D, *fora do plano* α. A união dos triângulos ABC e BCD é chamada **quadrilátero reverso**. Os segmentos $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são os *lados* e os segmentos $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são as *diagonais* do quadrilátero reverso.

Problema: Prove que dois lados opostos não podem ser paralelos.

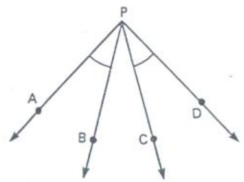


II.2) Prove que as diagonais de um quadrilátero reverso são contidas em retas reversas.

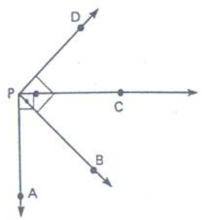
II.3) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Qualquer figura contida em uma região convexa do espaço é também um conjunto convexo.
b) Se dois planos têm um ponto em comum, sua interseção é um conjunto convexo.
c) Em qualquer caso, a interseção de dois planos é um conjunto convexo.
d) Se uma figura é convexa, qualquer segmento que tenha dois pontos distintos nessa figura está contido nela.
e) Um semi-espaço é um conjunto convexo.

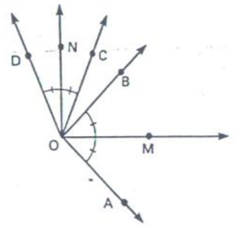
II.4) Na figura, tem-se que $A\hat{P}B \equiv C\hat{P}D$. Prove que $A\hat{P}C \equiv B\hat{P}D$.



II.5) Na figura, tem-se que $A\hat{P}C$ e $B\hat{P}D$ são ângulos retos. Prove que $A\hat{P}B \equiv C\hat{P}D$.



II.6) Na figura, $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$, $\overrightarrow{ON}$ é bissetriz de $C\hat{O}D$ e $M\hat{O}N$ é reto. Mostre que $B\hat{O}D$ e $A\hat{O}C$ são suplementares.



II.7) Prove que todo paralelogramo cujas diagonais são perpendiculares é um losango.

II.8) Prove que todo paralelogramo cujas diagonais são congruentes é um retângulo.

II.9) Prove que as diagonais de um losango são perpendiculares.

II.10) Prove que as diagonais de um losango são bissetrizes dos ângulos internos.

II.11) Prove que as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

II.12) Prove que a medida do segmento que tem extremidades nos pontos médios dos lados laterais de um trapézio é igual à metade da soma das medidas das bases do trapézio.

II.13) Se as medidas das bases de um trapézio são a e b, calcule a medida do segmento cujas extremidades são os pontos médios das diagonais do trapézio ($a < b$).

II.14) A base média de um trapézio isósceles (isto é, o segmento que tem extremidades nos pontos médios dos lados laterais) mede 7 cm e um lado lateral mede 5 cm. Calcule o perímetro do trapézio.

II.15) Seja $\overleftrightarrow{AM}$ uma mediana do $\triangle ABC$. Prove que $AM < \dfrac{AB + AC}{2}$.

II.16) Seja $\overleftrightarrow{AM}$ uma mediana do $\triangle ABC$. Prove que $AM > \dfrac{AB + AC - BC}{2}$.

II.17) Prove que a soma das medidas das três medianas de um triângulo é menor do que o perímetro do triângulo.

II.18) Prove que a soma das medidas das três medianas de um triângulo é maior do que o semiperímetro do triângulo.

II.19) Mostre que, num triângulo isósceles, as alturas correspondentes aos vértices da base são congruentes.

II.20) Seja o $\triangle ABC$, isósceles, de base $\overleftrightarrow{BC}$. Mostre que, sendo P um ponto pertencente ao lado $\overleftrightarrow{BC}$, a soma das distâncias de P aos outros dois lados é igual à altura relativa ao vértice B.

II.21) Seja P um ponto do interior de um triângulo eqüilátero ABC. Prove que a soma das distâncias de P aos lados do triângulo é igual à altura do triângulo.

II.22) Prove que os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso são vértices de um paralelogramo.

PARTE III

Capítulo 7 — **Retas e planos perpendiculares**

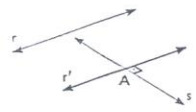
Capítulo 8 — **Ângulos, diedros, triedros e ângulos poliédricos**

Capítulo

7 Retas e planos perpendiculares

7.1 — RETAS ORTOGONAIS

Sejam **r** e **s** duas retas *reversas*. Tomemos sobre uma delas (a reta **s**, por exemplo) um ponto A qualquer e vamos conduzir por ele a reta $r' \parallel r$. Nestas condições, podemos definir:



> Se **r'** e **s** são perpendiculares, então **r** e **s** são **ortogonais**.

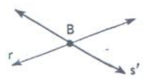
Abusando um pouco da linguagem, diremos que as retas **r e s** *formam ângulo reto*. Com esta idéia, as retas que "formam ângulo reto" podem ser:

- perpendiculares — se forem concorrentes;
- ortogonais — se forem reversas.

Se **r** e **s** são ortogonais, indicamos

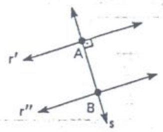
$$r \perp s \quad (\text{ou } s \perp r)$$

Observação: A definição acima somente adquire consistência lógica quando demonstramos que a relação de *ortogonalidade* independe da particular reta **r'** que tomamos, isto é, independe do particular ponto A considerado na reta s. Por outro lado, para podermos dizer indiferentemente $r \perp s$ ou $s \perp r$, é necessário mostrar que **r e s** são intercambiáveis na definição acima, ou seja, que se $r' \perp s$, então tomando-se um ponto B sobre **r** e por ele $s' \parallel s$, teremos também $s' \perp r$. Isto equivale a considerar os dois teoremas seguintes.



Teorema A

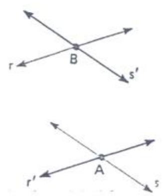
Sejam A e B pontos distintos, pertencentes à reta **s**, pelos quais conduzem-se as retas **r'** e **r''**, paralelas entre si. Nestas condições, se $r' \perp s$ então $r'' \perp s$.



Na verdade, este teorema já foi demonstrado para uma situação mais geral, no capítulo anterior (veja o exercício 6.31).

Teorema B

Sejam **r** e **r'** retas paralelas entre si e **s** e **s'** também paralelas entre si, sendo **r'** e **s** concorrentes em A e **r** e **s'** concorrentes em B. Nestas condições, se $r' \perp s$, então $s' \perp r$.

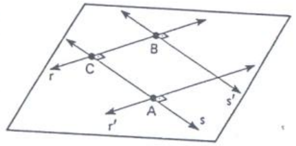


Demonstração

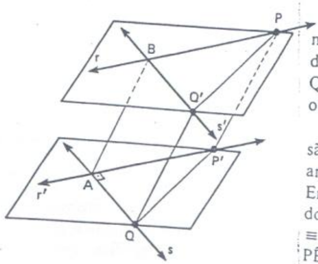
Se **r** e **s** são coplanares (então as quatro retas o são), sendo C a interseção de **r** e **s**, podemos usar duas vezes o teorema A, assim:

a) $(r' \perp s,\ r /\!/ r',\ r \cap s = \{C\}) \Rightarrow r \perp s$

b) $(s \perp r,\ s' /\!/ s,\ s' \cap r = \{B\}) \Rightarrow s' \perp r$



Consideremos o caso (que mais nos interessa agora) em que **r** e **s** são reversas.



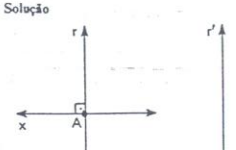
Tomemos $P \in r$ e $P' \in r'$, ambos num mesmo semiplano de origem $\overleftrightarrow{AB}$, de modo que $\overline{BP} \equiv \overline{AP'}$. Tomemos $Q \in s$ e $Q' \in s'$, ambos num mesmo semiplano de origem $\overleftrightarrow{AB}$, de modo que $\overline{AQ} \equiv \overline{BQ'}$.

Pelo exercício 6.41, AQQ'B e AP'PB são paralelogramos, logo $\overline{QQ'}$ e $\overline{PP'}$ são ambos paralelos e congruentes a $\overline{AB}$. Então, QP'PQ' é também paralelogramo, donde $\overline{QP'} \equiv \overline{Q'P}$. Assim, $\triangle AQP' \equiv \triangle BQ'P$ (L L L). Isto significa que $P\hat{B}Q'$ é reto, por ser congruente a $P'\hat{A}Q$: $s' \perp r$.

Exercícios Resolvidos

7.1) Prove que se $x \perp r$ e $r' /\!/ r$, então ou $x \perp r'$ ou $x \perp r'$.

Solução

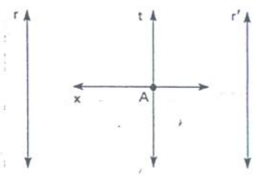


É claro que r' não pode ser *paralela* a **x**, pois se isso ocorresse teríamos duas retas concorrentes, **x** e **r**, paralelas à mesma reta **r'**. Então, r' só pode ser *concorrente* ou *reversa* à reta **x**.

Se for *concorrente*, o teorema A mencionado anteriormente garante que $x \perp r'$. Se for *reversa*, teremos $x \perp r'$, pela definição de retas ortogonais.

7.2) Prove que se $x \perp r$ e $r' /\!/ r$, então ou $x \perp r'$ ou $x \perp r'$.

Solução

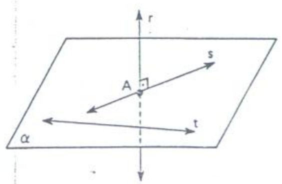


Tomemos por um ponto $A \in x$ a reta $t /\!/ r$. Pela definição de retas ortogonais, temos $x \perp t$. Como $r' /\!/ r$, então também $r' /\!/ t$, logo (pelo exercício 7.1) ou $r' \perp x$ ou $r' \perp x$.

7.2 — RETA E PLANO PERPENDICULARES ENTRE SI

Definição D12

A reta **r** é **perpendicular** ao plano α (ou o plano α é perpendicular à reta **r**) se **r** forma ângulo reto com todas as retas contidas no plano.



Indicamos

$r \perp \alpha$ ou $\alpha \perp r$.

Destaquemos duas conseqüências desta definição:

1.ª) *Se a reta* **r** *é perpendicular ao plano* α, *ela necessariamente fura* α *em um ponto A.*

De fato, se ela fosse contida em α ou paralela a α, seria sempre possível obter uma reta contida em α e **paralela** a **r**, não formando com ela ângulo reto.

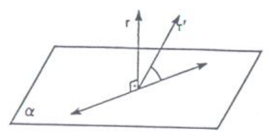
2.ª) Das retas contidas em α, *aquelas que passam pelo ponto A são perpendiculares a* **r** *e aquelas que não passam por A são ortogonais a* **r**.

Na figura anterior, portanto, temos

$$s \perp r \quad e \quad t \perp r$$

Reta e plano oblíquos

Se a reta **r** fura α, mas não é perpendicular a esse plano, dizemos que **r** e α são oblíquos.

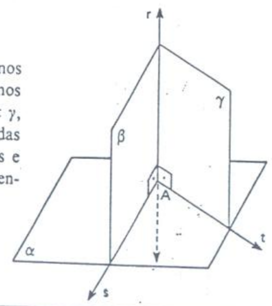


r e α são perpendiculares
r' e α são oblíquos

É necessário provar que reta e plano perpendiculares entre si **existem**. O teorema seguinte garante a consistência da definição.

Teorema T13

Dada a reta **r**, tomemos por **r** os planos distintos β e γ e o ponto $A \in$ **r**. Vamos conduzir por A as retas $s \subset \beta$ e $t \subset \gamma$, ambas perpendiculares a **r**. Construídas deste modo, **s** e **t** são retas distintas e determinam um plano $\alpha = pl\,(s, t)$. Sendo assim, tem-se $r \perp \alpha$.

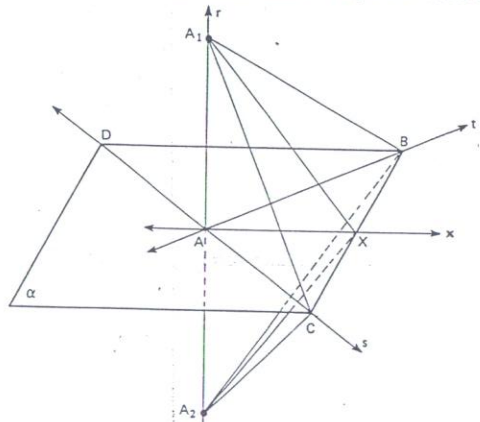


Devemos provar que:

a) Qualquer reta contida em α, que passa por A, é *perpendicular* a **r**.
b) Qualquer reta contida em α, que não passa por A, é *ortogonal* a **r**.

Demonstração

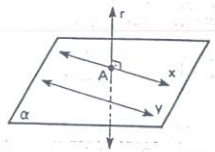
a) Seja **x** uma reta contida em α e que passa por A, distinta de **s** e de **t**. Tomemos sobre **s** os pontos C e D em lados opostos em relação a A e sobre **t** tomemos



o ponto $B \neq A$. Obtemos assim um triângulo BCD. A reta **x**, que corta o lado $\overline{CD}$ no ponto A, corta também o lado $\overline{BC}$ no ponto X (veja o exercício 4.20). Tomemos sobre **r** os pontos A_1 e A_2, de tal modo que A seja ponto médio de $\overline{A_1A_2}$. Com estes elementos, faremos uma seqüência de implicações que nos levarão a concluir que $r \perp x$.

1.ª) Temos $\triangle AA_1C \equiv \triangle AA_2C$ (L A L) e portanto $\overline{A_1C} \equiv \overline{A_2C}$.
2.ª) Do mesmo modo, temos $\overline{A_1B} \equiv \overline{A_2B}$.
3.ª) Por essa razão, $\triangle A_1BC \equiv \triangle A_2BC$ (L L L), donde resulta que $A_1\hat{B}X \equiv A_2\hat{B}X$.
4.ª) Então tem-se $\triangle A_1BX \equiv \triangle A_2BX$ (L A L) e portanto $\overline{A_1X} \equiv \overline{A_2X}$.
5.ª) Conseqüentemente, $\triangle AA_1X \equiv \triangle AA_2X$ (L L L), donde tiramos que os ângulos $A_1\hat{A}X$ e $A_2\hat{A}X$ são congruentes. Mas estes ângulos são suplementares um ao outro; logo ambos são retos. Isto significa precisamente que $r \perp x$.

b) Provemos agora que a reta r é **ortogonal** a qualquer reta y de α *que não passa por A*.
De fato, se tomarmos por A a reta x // y, como ficou provado na parte *a*) temos r ⊥ x, o que implica imediatamente que r ⊥ y.



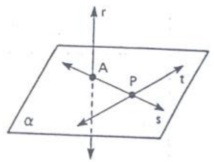
Ficou demonstrado, então, que a reta r forma ângulo reto com todas as retas contidas em α. Sendo assim, r e α são perpendiculares entre si.

Exercícios Resolvidos

7.3) Teorema T14 – Sejam no plano α as retas s e t, concorrentes em P. Seja, também, sobre a reta s, o ponto A ≠ P. Vamos conduzir por A a reta r tal que r ⊥ s e r ⊥ t. Nestas condições, tem-se

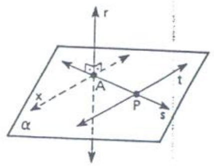
r ⊥ α

Demonstre o T14.



Solução

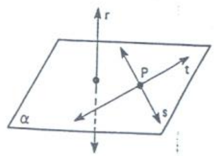
Tomando-se por A a reta x // t, temos r ⊥ x, devido ao fato de ser r ⊥ t. Com este recurso, recaímos no teorema T13 e, assim, r ⊥ α.



7.4) Teorema T15 – Sejam no plano α as retas s e t concorrentes em P. Seja r uma reta tal que r ⊥ s e r ⊥ t. Sendo assim, tem-se

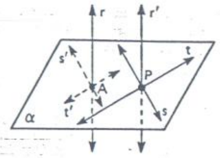
r ⊥ α

Demonstre o T15.

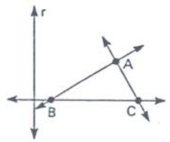


Solução

Consideremos por P a reta r' // r. É claro que r' ⊥ s e r' ⊥ t, pois s e t são ortogonais a r. Logo, r' ⊥ α. Como r' fura α em P, concluímos que r fura também α em um ponto A (veja o exercício 2.5). Podemos então conduzir por A as retas s' // s e t' // t, ambas perpendiculares a r. Com este recurso, recaímos no teorema T13 e, assim, r ⊥ α.



7.5) Teorema T16 (teorema das três perpendiculares) – Sejam três pontos A, B e C não alinhados. Se a reta r forma ângulo reto com as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, então ela também forma ângulo reto com a terceira reta, $\overleftrightarrow{BC}$.
Demonstre o T16.

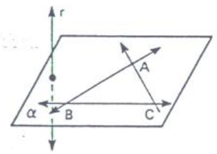


Solução

Se r forma ângulo reto com as duas retas concorrentes $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, então essa reta r é perpendicular ao plano

α = pl (A, B, C)

Logo, como a reta $\overleftrightarrow{BC}$ está contida em α, a reta r também forma ângulo reto com ela.



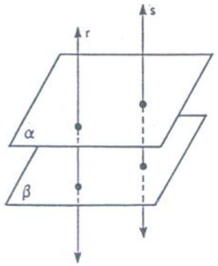
7.6) Teorema T17 – Sejam r uma reta e α um plano, perpendiculares entre si.

a) Se a reta s é paralela a r, então s ⊥ α.
b) Se o plano β é paralelo a α, então r ⊥ β.

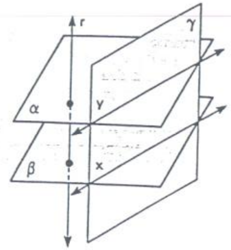
Demonstre o T17.

Solução

a) Como r ⊥ α, então r forma ângulo reto com qualquer reta de α. Mas s // r, logo s também forma ângulo reto com qualquer reta de α (como garantem os exercícios 7.1 e 7.2). Portanto, s ⊥ α.



b) Tomemos uma reta qualquer $x \subset \beta$. Um plano γ conduzido por x intercepta o plano α segundo uma reta y. Como $y \parallel x$ e as retas r e y formam ângulo reto, então r e x também formam ângulo reto (garantido pelos exercícios 7.1 e 7.2).

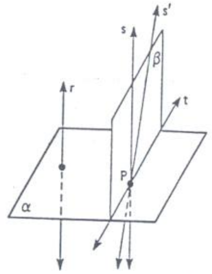


7.7) Teorema T18

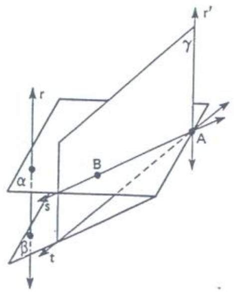
a) Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas entre si.
b) Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos entre si.
Demonstre o T18.

Solução

a) Sejam r e s retas perpendiculares ao plano α. Suponhamos que r e s não sejam paralelas. Pelo ponto P onde s fura α podemos então conduzir a reta $s' \parallel r$, distinta de s. O plano $\beta = \text{pl}(s, s')$ intercepta α segundo a reta t. Pelo teorema T17, como $r \perp \alpha$ e $s' \parallel r$, então $s' \perp \alpha$. Assim, no plano β temos duas retas s e s' distintas, perpendiculares à reta t no mesmo ponto P. Isto é impossível, como já se viu no teorema do item 5.10. Portanto, r e s são paralelas entre si.



b) Sejam α e β planos perpendiculares à reta r. Suponhamos que α e β não sejam paralelos, isto é, que eles tenham em comum um ponto A. Vamos conduzir por A a reta r', $r' \parallel r$. Como r é perpendicular a α e a β, o mesmo acontece com r'. Tomemos em α o ponto $B \neq A$ e seja $\gamma = \text{pl}(B, r')$. Este plano intercepta α segundo a reta s e β segundo a reta t, ambas concorrentes com r' em A. Temos então no plano β duas retas distintas, perpendiculares à reta r' no ponto A. Isto é impossível, logo $\alpha \parallel \beta$.

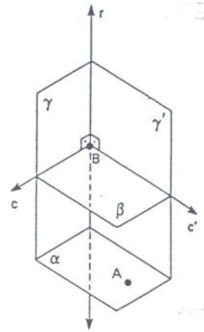


7.8) Teorema T19 – Dados uma reta r e um ponto A, pode-se conduzir um único plano que contém A e é perpendicular à reta r.
Demonstre o T19.

Solução

Tomemos por r os planos distintos γ e γ' e pelo ponto $B \in r$ tracemos a reta $c \subset \gamma$ e a reta $c' \subset \gamma'$, ambas perpendiculares à reta r. Sendo assim, o plano $\beta = \text{pl}(c, c')$ é perpendicular à reta r. Vamos então conduzir por A o plano $\alpha \parallel \beta$. Pelo teorema T17, tem-se $\alpha \perp r$. (Se $A \in \beta$, basta tomar $\alpha = \beta$.)

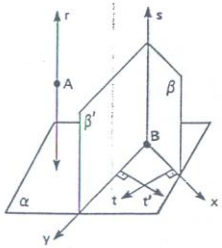
Resta provar que esse é o único plano possível. Suponhamos que por A passasse outro plano α' também perpendicular a r. Pelo teorema T18, os planos α e α' deveriam ser paralelos. Entretanto, isso é impossível, pois α e α' têm o ponto A em comum.



7.9) Teorema T20 – Dados um plano α e um ponto A, pode-se conduzir uma única reta que passa por A e é perpendicular ao plano α.
Demonstre o T20.

Solução

Tomemos em α as retas concorrentes t e t' e pelo ponto $B \in \alpha$ tracemos o plano $\beta \perp t$ e o plano $\beta' \perp t'$ (como garante o teorema T19). Mostremos que $\beta \neq \beta'$. Seja $x = \alpha \cap \beta$ e $y = \alpha \cap \beta'$. É claro que $t \perp x$ e $t' \perp y$. Se fosse $\beta = \beta'$, então seria $x = y$, o que é absurdo, pois teríamos duas retas concorrentes t e t', perpendiculares à mesma reta $x = y$, todas contidas num só plano (veja o exercício 6.5). Sendo assim, $\beta \neq \beta'$.



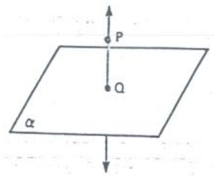
Logo, podemos indicar por s a interseção de β e β'. Como s forma ângulo reto com t e t', é claro que $s \perp \alpha$. Tomemos então por A a reta $r \parallel s$ (se $A \in s$, basta tomar $r = s$). Pelo teorema T17, tem-se $r \perp \alpha$.

Resta provar que essa é a única reta possível. Suponhamos que por A passasse outra reta r' também perpendicular a α. Pelo teorema T18, as retas r e r' deveriam ser paralelas. Entretanto, isso é impossível, pois r e r' têm o ponto A em comum.

Distância entre um ponto e um plano

Dados o ponto P e o plano α, seja Q o ponto onde o plano α encontra a reta perpendicular conduzida por P. A distância entre o ponto P e o plano α é definida como sendo a distância entre P e Q:

$$\delta_{P\alpha} = \delta_{PQ} = PQ$$

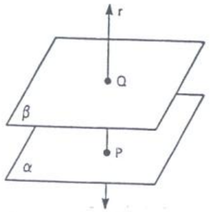


O ponto Q chama-se *projeção ortogonal* de P sobre o plano α (ou, simplesmente, *projeção de P sobre* α).

Distância entre planos paralelos

Dados dois planos α e β paralelos, por um ponto $P \in \alpha$ vamos conduzir a reta r, perpendicular a ambos os planos. Seja Q a interseção de r e β. A distância entre os planos α e β é definida como sendo a distância entre P e Q:

$$\delta_{\alpha\beta} = \delta_{PQ} = PQ$$



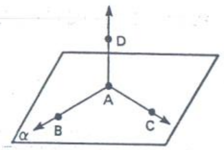
Exercícios Propostos

7.10) A reta r é paralela ao plano α e $A \in \alpha$. Construa por A a reta s, contida em α e ortogonal a r.

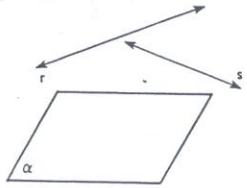
7.11) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F).

a) Se duas retas são ortogonais, elas são reversas.
b) Se duas retas são reversas, elas são ortogonais.
c) Se uma reta é perpendicular a um plano, ela é perpendicular a todas as retas do plano.
d) Se uma reta é perpendicular a um plano, ela forma ângulo reto com qualquer reta do plano.
e) Se duas retas são paralelas e um plano é perpendicular a uma delas, esse plano é também perpendicular à outra.
f) Dois planos distintos, perpendiculares a uma reta r, são paralelos entre si.
g) Se uma reta e um plano são perpendiculares, toda reta perpendicular à reta dada está contida nesse plano.
h) Se uma reta e um plano são perpendiculares, toda reta perpendicular à reta dada é paralela ao plano.
i) Se uma reta e um plano são perpendiculares, toda reta perpendicular à reta dada é paralela ao plano ou está contida nele.
j) Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, ela é perpendicular ao plano.
k) Se uma reta forma ângulo reto com duas retas paralelas de um plano, ela é perpendicular a esse plano.
l) Se uma reta forma ângulo reto com duas retas distintas de um plano, ela é perpendicular a esse plano.
m) A reta r é paralela ao plano α. Toda reta perpendicular a r é perpendicular a α.

7.12) No plano α tem-se o ângulo reto $B\hat{A}C$. Pelo vértice A conduz-se a reta $\overleftrightarrow{AD} \perp \alpha$. Mostre que $\overleftrightarrow{AB} \perp$ pl (A, C, D).

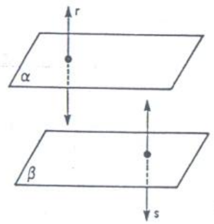


7.13) Sejam r e s retas reversas e α um plano paralelo a ambas. Prove que toda reta que forma ângulo reto com ambas as retas é perpendicular ao plano α.

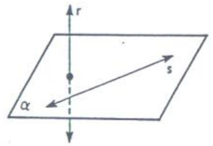


7.14) Sejam r e s retas reversas e α um plano paralelo a ambas. Prove que toda reta perpendicular a α forma ângulo reto com r e com s.

7.15) Dois planos α e β são paralelos. Tomam-se duas retas distintas r e s, tais que $r \perp \alpha$ e $s \perp \beta$. Prove que $r \parallel s$.



7.16) São dadas uma reta s contida num plano α e uma reta $r \perp \alpha$. Prove que existe um único plano que contém r e é perpendicular à reta s.



7.17) A reta r é perpendicular ao plano α. Por um ponto $A \in \alpha$ toma-se a reta s, que forma ângulo reto com r. Prove que $s \subset \alpha$.

7.18) A reta r é perpendicular ao plano α. Por um ponto $A \notin \alpha$ toma-se a reta s, que forma ângulo reto com r. Prove que $s \parallel \alpha$.

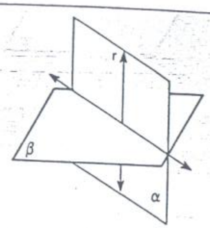
7.19) As retas r e s são ortogonais. Construa um plano que contenha r e seja perpendicular a s.

7.20) São dados a reta r e o plano α, oblíquos. Sobre α toma-se o ponto $A \notin r$. Construa por A uma reta contida em α e que seja ortogonal a r.

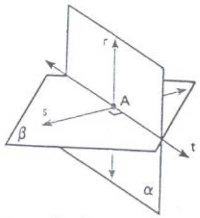
7.3 — PLANOS PERPENDICULARES ENTRE SI

Definição D13

O plano α é **perpendicular** ao plano β se existe uma reta $r \subset \alpha$ que seja perpendicular a β.



Indica-se $\alpha \perp \beta$



Seja $t = \alpha \cap \beta$. Temos $r \perp t$. Pelo ponto A, interseção de **r** e β, tomemos em β a reta $s \perp t$. Como $s \perp r$, é claro que $s \perp \alpha$, logo *o plano β tem também uma reta que é perpendicular a α.*

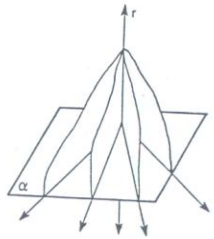
Isto mostra que é indiferente dizer que α é perpendicular a β ou que β é perpendicular a α. Podemos indicar, então, indiferentemente:

$$\alpha \perp \beta \quad \text{ou} \quad \beta \perp \alpha$$

e podemos dizer que os dois planos são perpendiculares entre si.

Uma conseqüência imediata da definição é a seguinte.

Se a reta **r** é perpendicular ao plano α, então todo plano que contém **r** é perpendicular a α.

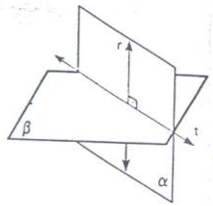


Teorema T21

Se $\alpha \perp \beta$ então toda reta contida em α, que é perpendicular à interseção, é perpendicular a β.

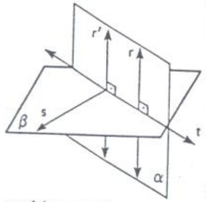
Em símbolos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ t = \alpha \cap \beta \\ r \subset \alpha \\ r \perp t \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp \beta$$



Demonstração

Se $\alpha \perp \beta$, existe uma reta $r' \subset \alpha$ que é perpendicular a β. Essa reta r' é necessariamente perpendicular à reta $t = \alpha \cap \beta$. Conseqüentemente, ou $r = r'$ ou $r /\!/ r'$.



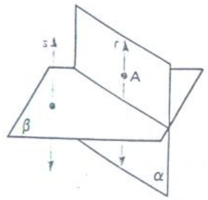
Se $r = r'$, é imediato que $r \perp \beta$.

Se $r /\!/ r'$, então pelo teorema T17 tem-se também $r \perp \beta$.

Teorema T22

Se $\alpha \perp \beta$, então toda reta que é perpendicular a β, ou está contida em α ou é paralela a α.

No caso da figura, tem-se $r \subset \alpha$, porque **r** tem o ponto A em comum com α. Já a reta **s** é paralela a α: não tem ponto em comum com esse plano.

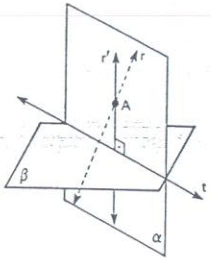


Demonstração

Seja $r \perp \beta$. Se **r** não tem ponto em comum com α, então é imediato que $r \parallel \alpha$.

Suponha-se que **r** e α têm um ponto A em comum e provemos que $r \subset \alpha$.

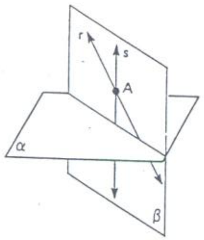
Seja $t = \alpha \cap \beta$. Vamos conduzir por A a reta **r'** tal que $r' \subset \alpha$ e $r' \perp t$. Pelo teorema T21, $r' \perp \beta$. Mas, sendo assim, pelo T20, $r' = r$. Logo, $r \subset \alpha$.

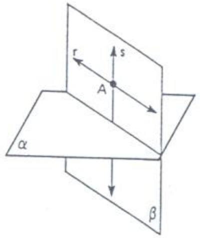


Teorema T23

> Se a reta **r** *não é perpendicular* ao plano α, então existe um único plano que contém **r** e é perpendicular a α.

Demonstração





A demonstração vale tanto para o caso em que **r** e α são *oblíquos*, como para os casos em que $r \subset \alpha$ ou $r \parallel \alpha$.

Seja $A \in r$. Tracemos por A a reta $s \perp \alpha$. É claro que $r \neq s$, logo existe $\beta = pl(r, s)$. Temos $\beta \perp \alpha$, pois β contém a reta s, que é perpendicular a α.

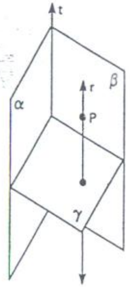
Provemos que β é o único plano possível. Se existisse outro plano $\beta' \perp \alpha$ e contendo **r**, esse plano conteria o ponto A. Então, pelo teorema T22, $s \subset \beta'$. Mas nesse caso, seria

$$\beta' = pl(r, s) = \beta$$

7.21) Sejam α e β dois planos secantes e seja γ um plano perpendicular a ambos. Prove que γ é perpendicular à interseção de α e β.

Solução

Indiquemos por **t** a interseção de α e β. Seja P um ponto situado fora de α e de β e tomemos por P a reta $r \perp \gamma$. Pelo teorema T22, tem-se $r \parallel \alpha$ e $r \parallel \beta$. Logo, pelo T8, $r \parallel t$. Assim, pelo T17, tem-se $t \perp \gamma$.

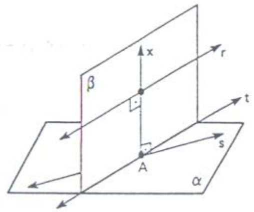


7.22) Dadas duas retas reversas, construa uma reta que seja perpendicular a ambas.

Solução

Sejam **r** e **s** duas retas reversas. Passemos por **s** o plano $\alpha \parallel r$ e por **r** o plano $\beta \perp \alpha$ (veja os exercícios 3.7 e 3.8 e o teorema T23).

É claro que a reta **s** *fura* o plano β num ponto A, pois se ela fosse paralela a ele, ela seria paralela à reta **r**. Então, pelo ponto A podemos conduzir a reta $x \perp r$. A reta **x** é a reta procurada.



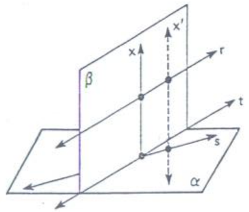
Basta provar que $x \perp s$. Para isto, é suficiente notar que, sendo $t = \alpha \cap \beta$, tem-se $r \parallel t$, logo $x \perp t$. Assim, $x \perp \alpha$ e então $x \perp s$.

Portanto, a reta **x** é perpendicular a **r** e a **s**.

7.23) Prove que a reta construída no exercício anterior é única.

Solução

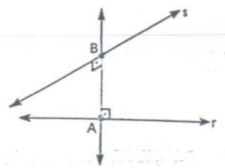
Suponhamos que exista outra reta **x'**, perpendicular a **r** e a **s**. Como $t \parallel r$, então **x'** forma ângulo reto com **s** e com **t**, logo $x' \perp \alpha$. Conclui-se, pelo teorema T18, que $x \parallel x'$ e que, além disso, **r** e **s** estão contidas no plano $pl(x, x')$. Isto é impossível, pois **r** e **s** são reversas.



Distância entre duas retas reversas

Sejam $A \in r$ e $B \in s$ os pontos onde a perpendicular comum corta as duas retas reversas r e s. A distância entre as duas retas reversas é definida como sendo a distância entre A e B:

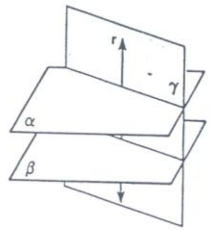
$$\delta_{rs} = \delta_{AB} = AB$$



7.24) Prove que, se dois planos são paralelos, então todo plano perpendicular a um deles é também perpendicular ao outro.

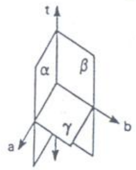
Solução

Sejam $\alpha \parallel \beta$ e $\gamma \perp \alpha$. Provemos que $\gamma \perp \beta$. Se $\gamma \perp \alpha$, existe uma reta $r \subset \gamma$ tal que $r \perp \alpha$. Mas pelo teorema T17, $r \perp \beta$. Logo, $\gamma \perp \beta$.



Exercícios Propostos

7.25) Sejam α e β dois planos perpendiculares entre si e seja γ um plano perpendicular à interseção t de α e β. Se $a = \alpha \cap \gamma$ e $b = \beta \cap \gamma$, prove que $a \perp b$.



7.26) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Dois planos perpendiculares entre si são secantes.
b) Se um plano α contém uma reta perpendicular a outro plano β, então $\alpha \perp \beta$.
c) Dados uma reta e um plano, existe um único plano que contém a reta e é perpendicular ao plano dado.
d) Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um deles, que é perpendicular ao outro, é perpendicular à interseção dos dois planos.
e) Dois planos distintos, perpendiculares a um plano dado, são paralelos entre si.
f) Dois planos distintos, perpendiculares a um plano dado, são perpendiculares entre si.
g) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, qualquer plano que contém r é perpendicular a α.
h) Se o plano α é perpendicular ao plano β, então toda reta contida em α é perpendicular a β.
i) Se a reta r é paralela ao plano α, então todo plano perpendicular a α é perpendicular a r.

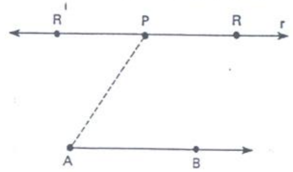
7.27) Sejam a reta r e o plano α paralelos entre si. Prove que todo plano perpendicular a r é perpendicular a α.

7.28) Dados dois planos α e β secantes e um ponto P qualquer, construa um plano que passa por P e é perpendicular a α e a β.

Capítulo 8

Ângulos, diedros, triedros e ângulos poliédricos

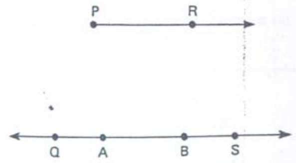
8.1 — ÂNGULOS DE LADOS CONCORDANTES



Dados uma semi-reta $\overleftrightarrow{AB}$ e um ponto P qualquer, fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$, tomemos por P a reta **r** paralela a $\overleftrightarrow{AB}$. Sobre **r** consideremos os pontos R e R', situados em semiplanos opostos com relação à reta $\overleftrightarrow{AP}$, de modo que B e R estejam no mesmo semiplano. Ficam determinadas, assim, as semi-retas $\overleftrightarrow{PR}$ e $\overleftrightarrow{PR'}$. Dizemos, então, que:

> $\overleftrightarrow{PR}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ têm **mesmo sentido** (ou **são concordantes**);
> $\overleftrightarrow{PR'}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ têm **sentidos opostos** (ou **são discordantes**).

Sejam agora duas semi-retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{QS}$ *contidas numa mesma reta*. Por um ponto P fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$ vamos conduzir a semi-reta $\overleftrightarrow{PR}$, paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, e com o mesmo sentido de $\overleftrightarrow{AB}$. Assim, se $\overleftrightarrow{QS}$ e $\overleftrightarrow{PR}$ também tiverem mesmo sentido, diremos que $\overleftrightarrow{QS}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ têm mesmo sentido. Com isto, estendemos a noção de sentidos concordantes a qualquer par de semi-retas paralelas.



Intuitivamente, duas semi-retas têm mesmo sentido se são paralelas e "apontam" para o mesmo lado.

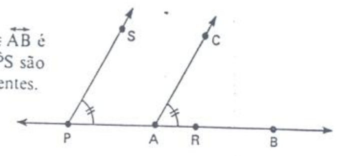
Vamos agora demonstrar o teorema seguinte, que é importante para dar consistência às definições que faremos depois.

> Se os ângulos $B\hat{A}C$ e $R\hat{P}S$ são tais que $\overleftrightarrow{AB}$ tem o mesmo sentido de $\overleftrightarrow{PR}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ tem o mesmo sentido de $\overleftrightarrow{PS}$, então $B\hat{A}C \equiv R\hat{P}S$.

Em outras palavras, dois ângulos que têm os lados respectivamente *concordantes* são congruentes.

Demonstração

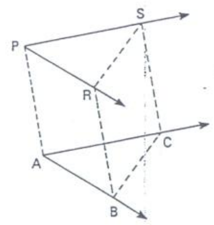
O caso particular em que $P \in \overleftrightarrow{AB}$ é trivial, pois os ângulos $B\hat{A}C$ e $R\hat{P}S$ são *correspondentes*, logo são congruentes.



Tomemos o caso em que P não pertence à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Não perdemos a generalidade da demonstração se supomos que

$$\overleftrightarrow{AB} \equiv \overleftrightarrow{PR} \text{ e } \overleftrightarrow{AC} \equiv \overleftrightarrow{PS}$$

Como ABRP é paralelogramo (pois tem dois lados opostos paralelos e congruentes), temos que $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BR}$ são paralelos e congruentes. Da mesma forma, $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{CS}$ são paralelos e congruentes. Assim, BCSR também é paralelogramo, donde $\overleftrightarrow{RS} \equiv \overleftrightarrow{BC}$. Portanto, pelo L L L, $\triangle ABC \equiv \triangle PRS$, donde

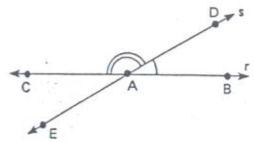


$$B\hat{A}C \equiv R\hat{P}S$$

Nota: É claro que as semi-retas $\overleftrightarrow{PR'}$ e $\overleftrightarrow{PS'}$ *opostas* a $\overleftrightarrow{PR}$ e $\overleftrightarrow{PS}$ definem um ângulo $R'\hat{P}S'$ congruente a $B\hat{A}C$, isto é, se dois ângulos têm os lados respectivamente *discordantes*, eles são congruentes. Não se pode dizer o mesmo se eles são concordantes em um dos lados e discordantes quanto ao outro (neste caso, eles seriam suplementares).

8.2 — ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS

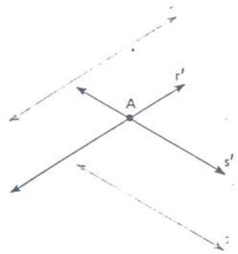
Consideremos inicialmente o caso de duas retas **concorrentes**, mas não perpendiculares entre si. Tomemos B e C sobre **r** e D e E sobre **s**, de modo que A esteja entre B e C e também entre D e E. Obtemos quatro ângulos, $B\hat{A}D$, $D\hat{A}C$, $C\hat{A}E$, $E\hat{A}B$, dois dos quais são agudos (congruentes entre si) e os outros dois são obtusos (congruentes entre si). Convencionaremos que o ângulo entre as retas **r** e **s** é qualquer um dos dois ângulos *agudos*. Adotemos, ainda, uma convenção mais livre: *qualquer ângulo agudo que seja congruente a esses dois ângulos* será considerado como sendo um ângulo entre as retas **r** e **s**. Fazemos isto porque estamos interessados fundamentalmente naquilo que todos esses ângulos têm em comum: **a sua medida**.



Se **r** e **s** são **perpendiculares**, então *qualquer ângulo reto* é um ângulo entre **r** e **s**.

Se **r** e **s** são **coincidentes**, então *qualquer ângulo nulo* é um ângulo entre **r** e **s**.

Consideremos agora o caso em que as retas são **reversas** ou **paralelas** (isto é, não têm ponto comum). Por um ponto A qualquer tomam-se as retas r' // r e s' // s. *O ângulo entre as retas r e s é o ângulo entre r' e s'*. Indicamos por $\widehat{rs}$ a medida desse ângulo.



Observações

1.ª) Por essa definição, o ângulo entre duas retas só pode ser **nulo**, ou **agudo**, ou **reto**. Trata-se, portanto, de um conceito diferente do ângulo geométrico formado por duas semi-retas de mesma origem, cuja medida varia de 0° a 180°.

2.ª) A definição de ângulo entre duas retas dada acima, para o caso de retas reversas, só adquire consistência se demonstramos que a medida desse ângulo independe do particular ponto A considerado. Essa independência está garantida pelo teorema T24, demonstrado no item anterior.

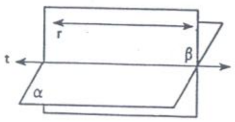
8.3 — ÂNGULO ENTRE RETA E PLANO

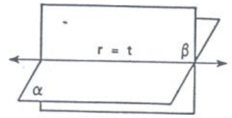
Vamos estabelecer o conceito de ângulo entre uma reta **r** e um plano α.

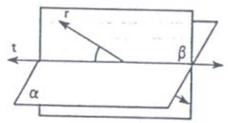
Caso em que r não é perpendicular a α

Se **r** é paralela a α, ou está contida nele, ou se **r** e α são oblíquos, existe um único plano $\beta \perp \alpha$, que contém **r** (teorema T23). Seja $t = \alpha \cap \beta$.

Nessas condições, *o ângulo entre* **r** *e* α *é o ângulo entre as retas* **r** *e* **t**.



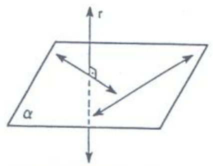




Então, se $r \parallel \alpha$ ou se $r \subset \alpha$, esse ângulo é **nulo**. Se **r** e α são oblíquos, esse ângulo é **agudo**.

A reta **t** chama-se *projeção ortogonal* (ou, simplesmente, *projeção*) de **r** sobre α. Assim, o ângulo entre **r** e α é o ângulo entre **r** e sua projeção sobre α.

Caso em que $r \perp \alpha$



Se $r \perp \alpha$, então *o ângulo entre* **r** *e* α *é qualquer ângulo reto.*

Esse é o ângulo que **r** forma com qualquer reta contida em α.

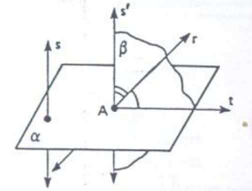
Neste caso, não podemos falar em ângulo entre **r** e sua projeção, porque a projeção de **r** sobre α é um ponto: exatamente aquele onde **r** fura α.

Notação: A medida do ângulo entre **r** e α é indicada por $\widehat{r\alpha}$.

Exercícios Resolvidos

8.1) São dados um plano α e duas retas, **r** e **s**, sendo $s \perp \alpha$. Prove que o ângulo entre **r** e α e o ângulo entre **r** e **s** são complementares.

Solução



O caso mais interessante é aquele em que **r** e α são oblíquos. Se **r** fura α em A, seja $s' \parallel s$ por A. O plano β determinado por **r** e **s'** é perpendicular a α. Nesse plano, com vértice em A, temos um ângulo reto formado pelas retas s' e $t = \alpha \cap \beta$. Este ângulo é dividido em dois ângulos complementares pela reta **r**. Esses dois ângulos complementares são exatamente o ângulo entre **r** e **s** e o ângulo entre **r** e α.

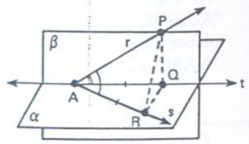
Passemos aos casos particulares em que $r \perp \alpha$, $r \parallel \alpha$ ou $r \subset \alpha$.

Se $r \perp \alpha$, então $r \parallel s$ (ou $r = s$). Assim, o ângulo entre **r** e **s** mede 0°, enquanto que o ângulo entre **r** e α mede 90°. São, portanto, complementares.

Se $r \parallel \alpha$ ou $r \subset \alpha$, então $r \perp s$ (ou $r \perp s$). Assim, o ângulo entre **r** e **s** mede 90°, enquanto que o ângulo entre **r** e α mede 0°. São também complementares.

8.2) A reta **r** e o plano α são oblíquos e $r \cap \alpha = \{A\}$. Seja **s** uma reta qualquer contida em α e passando por A, mas não coincidente com a projeção ortogonal **t** de **r** sobre α. Prove que a medida do ângulo entre **r** e **t** é menor do que a do ângulo entre **r** e **s**.

Solução



Seja $P \in r$, $P \neq A$. A reta perpendicular a α por P encontra esse plano no ponto $Q \in t$. Tomemos sobre **s** o ponto R tal que $P\hat{A}R$ não seja obtuso e $\overleftrightarrow{AR} \equiv \overleftrightarrow{AQ}$. Assim, o ângulo entre **r** e **s** é $P\hat{A}R$ e o ângulo entre **r** e **t** é $P\hat{A}Q$. Podemos então fazer a prova. O $\triangle PQR$ é retângulo em Q, logo $PR > PQ$ (veja o exercício 6.16). Para os triângulos $\triangle ARP$ e $\triangle AQP$, temos:

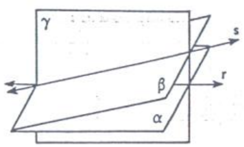
$$\overleftrightarrow{AR} \equiv \overleftrightarrow{AQ}$$
$$\overleftrightarrow{AP} \equiv \overleftrightarrow{AP}$$
$$PR > PQ$$

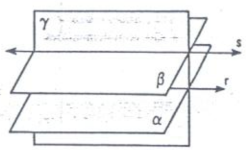
Então (veja o exercício 6.21),

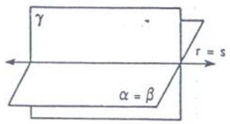
$$med\,(P\hat{A}Q) < med\,(P\hat{A}R)$$

Nota: Este exercício mostra que o ângulo entre a reta **r** e o plano α é o *menor* ângulo que a reta **r** forma com as retas de α.

8.4 — ÂNGULO ENTRE DOIS PLANOS







Dados dois planos, α e β, consideremos um plano γ qualquer, perpendicular a ambos. Sejam $r = \alpha \cap \gamma$ e $s = \beta \cap \gamma$. *O ângulo entre α e β é o ângulo entre r e s.*

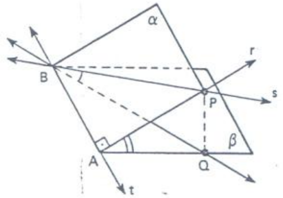
Assim, se $\alpha /\!/ \beta$ ou $\alpha = \beta$, o ângulo entre α e β é um ângulo **nulo**. Se α e β são secantes, então o ângulo entre α e β é **agudo** ou **reto** (este último caso ocorrendo se $\alpha \perp \beta$).

É claro que esta definição independe do particular plano γ considerado. De fato, se outro plano γ' cortasse α em r' e β em s', teríamos $r' /\!/ r$ e $s' /\!/ s$, logo o ângulo entre r' e s' e o ângulo entre r e s teriam a mesma medida.

A medida do ângulo entre α e β é indicada por $\widehat{\alpha\beta}$.

Exercícios Resolvidos

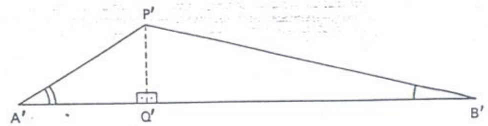
8.3) Sejam α e β dois planos secantes, não perpendiculares entre si. Sendo $t = \alpha \cap \beta$, tomemos $P \in \alpha$, fora de t e por esse ponto tracemos a reta $r \perp t$ e a reta s concorrente com t, mas não perpendicular a esta reta. Demonstre que o ângulo entre r e β é maior do que o ângulo entre s e β.



Solução

Sejam A e B as interseções, respectivamente, de r e s com t, e seja Q o ponto de interseção do plano β com a perpendicular a esse plano conduzida por P. Assim, o ângulo entre r e β é $P\hat{A}Q$ e o ângulo entre s e β é $P\hat{B}Q$.

O $\triangle ABP$ é retângulo em A, logo $BP > AP$. Vamos construir uma figura plana que seja



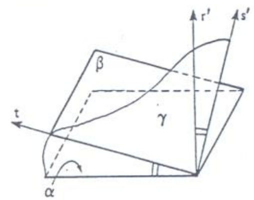
a união de dois triângulos: $\triangle A'P'Q'$ e $\triangle B'P'Q'$, respectivamente congruentes aos triângulos $\triangle APQ$ e $\triangle BPQ$, e de modo que os vértices A' e B' fiquem situados em semiplanos opostos em relação a $\overleftrightarrow{P'Q'}$. A figura obtida é um triângulo $\triangle A'B'P'$ (pois A', Q' e B' estão alinhados). Como $B'P' > A'P'$, temos med $(\hat{A}') >$ med $(\hat{B}')$, donde

$$\text{med}\,(P\hat{A}Q) > \text{med}\,(P\hat{B}Q)$$

Nota: Este exercício mostra que o ângulo entre o plano α e o plano β é o *maior* ângulo que o plano β forma com as retas de α.

8.4) Prove que a medida do ângulo entre dois planos α e β é igual à medida do ângulo entre as retas r e s, sendo $r \perp \alpha$ e $s \perp \beta$.

Solução



Seja γ um plano perpendicular a α e a β e seja $t = \beta \cap \gamma$. É claro que $\widehat{\alpha\beta} = \widehat{t\alpha}$. Consideremos em γ as retas $r' /\!/ r$ e $s' /\!/ s$. É claro que $\widehat{rs} = \widehat{r's'}$. Vamos aplicar o resultado do exercício 8.1.

Como $r' \perp \alpha$, temos

$$\widehat{t\alpha} + \widehat{tr'} = 90°$$

Como $s' \perp \beta$, temos

$$\widehat{r'\beta} + \widehat{r's'} = 90°$$

Então,

$$\widehat{t\alpha} + \widehat{tr'} = \widehat{r'\beta} + \widehat{r's'}$$

Mas $\widehat{tr'} = \widehat{r'\beta}$, logo

$$\widehat{t\alpha} = \widehat{r's'}$$

isto é,

$$\widehat{\alpha\beta} = \widehat{rs}$$

Note que a figura que fizemos mostra dois planos α e β secantes, mas a demonstração não levou em conta essa situação particular, valendo portanto para qualquer posição relativa de α e β.

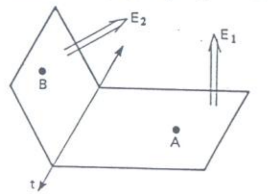
8.5) Se $\alpha \parallel \alpha'$ e $\beta \parallel \beta'$, prove que $\widehat{\alpha\beta} = \widehat{\alpha'\beta'}$.

Solução

Tomemos as retas $r \perp \alpha$ e $s \perp \beta$. É claro que $r \perp \alpha'$ e $s \perp \beta'$. Pelo exercício anterior, temos $\widehat{\alpha\beta} = \widehat{rs}$ e também $\widehat{\alpha'\beta'} = \widehat{rs}$, logo $\widehat{\alpha\beta} = \widehat{\alpha'\beta'}$.

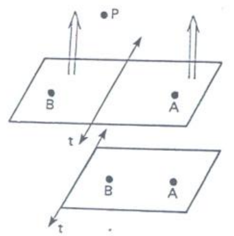
8.5 — DIEDROS

Uma reta **t** e dois pontos A e B fora dela determinam dois **semiplanos fechados**: (t, A) e (t, B). Suponha-se, primeiramente, que eles não estão contidos num mesmo plano. Seja E_1 o semi-espaço de origem (t, A) que contém B e seja E_2 o semi-espaço de origem (t, B) que contém A (estamos imaginando que estes semi-espaços são fechados).



> A interseção $E_1 \cap E_2$ é uma região do espaço que recebe o nome de **diedro**.

Tomemos agora o caso em que (t, A) e (t, B) são semiplanos do mesmo plano. Eles podem ser opostos ou coincidentes. Se (t, A) e (t, B) são semiplanos opostos, tomando-se um ponto P fora do plano deles obtemos um semi-espaço fechado, que será considerado como um diedro raso (por analogia com o ângulo raso).



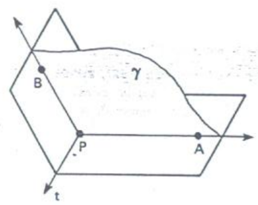
Se (t, A) = (t, B), então esse semiplano recebe o nome de diedro nulo.

Para indicar um diedro podemos usar várias notações, como di (t, A, B) ou $A\hat{t}B$ ou, ainda, se não houver possibilidade de dúvida, di (t).

Os semiplanos (t, A) e (t, B) são as faces do diedro e a reta **t** é a sua aresta. A união das duas faces é a superfície diédrica e os demais pontos do diedro formam seu interior.

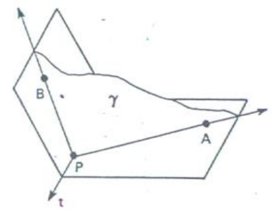
8.6 — MEDIDA DE UM DIEDRO

Dado um diedro de aresta **t**, seja γ um plano perpendicular à reta **t** num ponto P. As semi-retas $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são as interseções de γ com as faces do diedro.



> A medida do diedro é a medida do ângulo $A\hat{P}B$.
>
> med $(A\hat{t}B)$ = med $(A\hat{P}B)$

O ângulo $A\hat{P}B$ é chamado seção reta do diedro. É importante demonstrar que *todas as seções retas de um diedro são congruentes*, para que a medida definida acima tenha significado.



Se γ é um plano qualquer que intercepta a aresta do diedro, então a interseção de γ com o diedro é um ângulo que se denomina seção do diedro. A observação acima se baseia no teorema seguinte.

Teorema T25

> Seções paralelas de um diedro são congruentes.

Demonstração

A demonstração é imediata. Basta notar que as seções paralelas são *ângulos de lados concordantes*, donde concluímos que são congruentes (teorema T24).

Observação: Deve-se notar a distinção entre os conceitos de *medida de um diedro* e *medida do ângulo entre dois planos*. A primeira pode variar entre 0° e 180°, enquanto que a segunda varia de 0° a 90°, como ficou convencionado. Assim, por exemplo, se dois semiplanos formam um diedro de 135°, os planos que contêm esses semiplanos formam ângulo de 45°.

Por analogia com os **ângulos planos**, podemos atribuir aos diedros os termos *diedro reto*, *agudo*, *obtuso*, *diedros adjacentes*, *opostos pela aresta*, *congruentes*, *complementares*, *suplementares*.

Exercícios Resolvidos

8.6) Sejam um diedro $A\hat{i}B$ e um ângulo $P\hat{Q}R$ tais que o lado $\overleftrightarrow{QP}$ do ângulo é perpendicular à face (t, A) do diedro e o lado $\overleftrightarrow{QR}$ do ângulo é perpendicular à face (t, B) do diedro. Mostre que

$$\text{med}(A\hat{i}B) = \text{med}(P\hat{Q}R)$$
$$\text{ou } \text{med}(A\hat{i}B) + \text{med}(P\hat{Q}R) = 180°$$

Solução

As *retas* que contêm os lados do ângulo são perpendiculares aos *planos* que contêm as faces do diedro. Como vimos no exercício 8.4, o ângulo entre essas retas tem a mesma medida do ângulo entre esses planos. Seja θ essa medida. Então, a medida do ângulo $P\hat{Q}R$ ou é θ ou é $180° - \theta$, o mesmo ocorrendo com a medida do diedro $A\hat{i}B$. Fica claro, portanto, que se tem

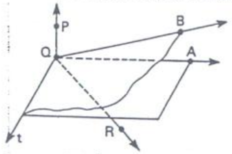
$$\text{med}(A\hat{i}B) = \text{med}(P\hat{Q}R)$$

(ambas iguais a θ ou ambas iguais a $180° - \theta$) ou então:

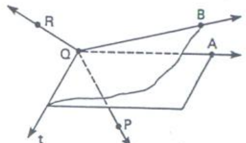
$$\text{med}(A\hat{i}B) + \text{med}(P\hat{Q}R) = 180°$$

(sendo uma igual a θ e a outra $180° - \theta$).

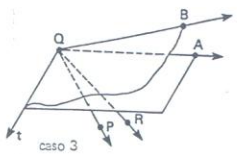
Observação: Suponha-se, para facilitar, que $Q \in t$ e que $A\hat{Q}B$ seja uma seção reta do diedro.



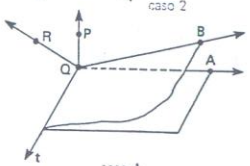
caso 1



caso 2



caso 3



caso 4

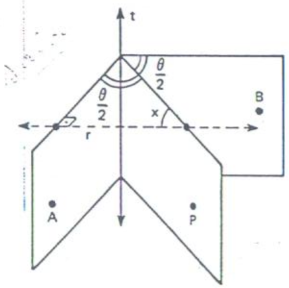
Temos $\overleftrightarrow{QP} \perp (t, A)$ e $\overleftrightarrow{QR} \perp (t, B)$. Os ângulos $A\hat{Q}B$ e $P\hat{Q}R$ serão *suplementares* nas duas situações seguintes:

Caso 1: $\overleftrightarrow{QP}$ e (t, B) estão no mesmo semi-espaço de origem (t, A) e, além disso, $\overleftrightarrow{QR}$ e (t, A) estão no mesmo semi-espaço de origem (t, B).

Caso 2: $\overleftrightarrow{QP}$ e (t, B) estão em semi-espaços opostos de origem (t, A) e, além disso, $\overleftrightarrow{QR}$ e (t, A) estao em semi-espaços opostos de origem (t, B).

Nos casos 3 e 4, os dois ângulos são *congruentes*.

8.7) Semiplano bissetor de um diedro — Dado um diedro não nulo $A\hat{i}B$, seja P um ponto do interior desse diedro, tal que os diedros $A\hat{i}P$ e $P\hat{i}A$ sejam congruentes (tenham mesma medida). *O semiplano (t, P) chama-se bissetor do diedro $A\hat{i}B$.* Seja θ a medida do diedro $A\hat{i}B$. Se uma reta r é perpendicular a uma face do diedro, quanto mede o ângulo entre essa reta e o semiplano bissetor?



Solução

É fácil perceber que, sendo x a medida do ângulo entre r e o semiplano bissetor, tem-se:

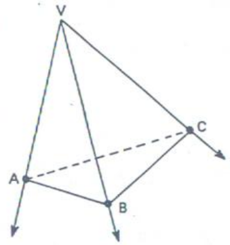
$$x + \text{med}(A\hat{i}P) = 90°$$

Mas

$$\text{med}(A\hat{i}P) = \frac{1}{2}\,\text{med}(A\hat{i}B) = \frac{\theta}{2}$$

logo, $x + \frac{\theta}{2} = 90°$, donde $x = 90° - \frac{\theta}{2}$.

3.7 — TRIEDROS



Sejam $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$, $\overrightarrow{VC}$ três semi-retas *não coplanares* e os semi-espaços fechados:

— E_1: com origem no pl (V, A, B) e contendo C
— E_2: com origem no pl (V, A, C) e contendo B
— E_3: com origem no pl (V, B, C) e contendo A

A interseção $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ é uma região do espaço que recebe o nome de **triedro**.

Indicamos tri (V, A, B, C). Examinemos alguns **nomes** relacionados ao triedro.

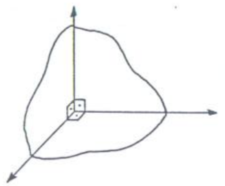
Vértice: é o ponto V.
Arestas: são as semi-retas $\overleftrightarrow{VA}$, $\overleftrightarrow{VB}$ e $\overleftrightarrow{VC}$.
Faces : são os ângulos $A\hat{V}B$, $A\hat{V}C$, $B\hat{V}C$.

Note que cada aresta define, com as duas faces que a contêm, um diedro. Temos então três diedros, cada um relativo a uma das arestas (ou, também, cada um oposto a uma das faces).

A união das três faces é a superfície triédrica. Os demais pontos do triedro formam o seu interior.

Triedro trirretângulo

Um triedro é chamado trirretângulo se as suas três faces são ângulos retos.



Exercícios Resolvidos

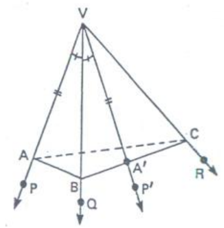
8.8) Demonstre que, em todo triedro, a medida de cada face é menor do que a soma das medidas das outras duas.

Solução

No triedro tri (V, P, Q, R), suponhamos que a face $Q\hat{V}R$ seja a maior das três e provemos que

$$\text{med}(Q\hat{V}R) < \text{med}(P\hat{V}Q) + \text{med}(P\hat{V}R)$$

Tomemos em $Q\hat{V}R$ a semi-reta $\overleftrightarrow{VP'}$ tal que $Q\hat{V}P' \equiv P\hat{V}Q$ e sobre essa semi-reta tomemos um ponto A'. Sobre $\overleftrightarrow{VP}$ tomemos outro ponto A, tal que $\overline{VA} \equiv \overline{VA'}$. Agora, se tomarmos em $\overleftrightarrow{VQ}$ um ponto B qualquer, obteremos a seção ABC do triedro (como a figura ilustra). Passemos à demonstração.



a) $\triangle ABV \equiv \triangle A'BV$ (L A L), logo $AB = A'B$.
b) No $\triangle ABC$ temos $BC < AB + AC$ (exercício 6.17).
c) Assim, $A'B + A'C < AB + AC$, isto é, $AB + A'C < AB + AC$, donde $A'C < AC$.

d) Comparando o $\triangle A'VC$ com o $\triangle AVC$ (veja exercício 6.21), concluímos que

$$\text{med}(A'\hat{V}C) < \text{med}(A\hat{V}C)$$

e) Concluindo, escrevemos:

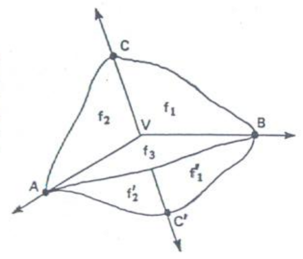
$$\text{med}(B\hat{V}C) = \text{med}(B\hat{V}A') + \text{med}(A'\hat{V}C) < \text{med}(A\hat{V}B) + \text{med}(A\hat{V}C)$$

que é a tese.

8.9) Em todo triedro, a soma das medidas das três faces é menor do que 360°.

Solução

Seja o triedro (V, A, B, C) cujas faces têm medidas f_1, f_2 e f_3 (como a figura indica). Seja $\overleftrightarrow{VC'}$ a semi-reta oposta a $\overleftrightarrow{VC}$ e consideremos o triedro (V, A, B, C'). Como $C'\hat{V}A$ e $C\hat{V}A$ são suplementares, temos $f'_2 = 180° - f_2$. Do mesmo modo, $f'_1 = 180° - f_1$. Pelo exercício anterior, temos



$$f_3 < f'_1 + f'_2$$

donde

$$f_3 < (180° - f_1) + (180° - f_2)$$

e assim

$$f_1 + f_2 + f_3 < 360°$$

8.10) Existe triedro cujas faces tenham medidas iguais a 40°, 50° e 100°?

Solução

Não existe, pois uma das faces teria medida maior do que a soma das outras duas:

$$100° > 40° + 50°$$

8.11) Sejam f_1, f_2 e f_3 as medidas das faces de um triedro. Mostre que

$$f_3 > |f_1 - f_2|$$

isto é, que qualquer delas é maior do que o módulo da diferença das outras duas.

Solução

Pelo exercício 8.8, escrevemos

$$f_1 < f_2 + f_3, \text{ donde } f_3 > f_1 - f_2$$

e

$$f_2 < f_1 + f_3, \text{ donde } f_3 > f_2 - f_1$$

Logo,

$$f_3 > |f_1 - f_2|$$

Observação: Para que três números dados, f_1, f_2 e f_3, possam ser as medidas em graus das faces de um triedro, é necessário e suficiente que tenhamos as seguintes condições:

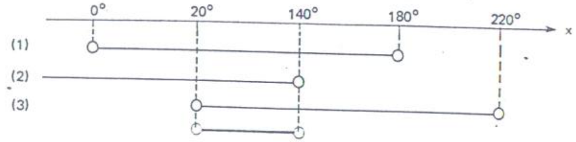
1.°) $0° < f_1 < 180°$, $0° < f_2 < 180°$, $0° < f_3 < 180°$
2.°) $f_1 + f_2 + f_3 < 360°$
3.°) $|f_1 - f_2| < f_3 < f_1 + f_2$

8.12) Determine o intervalo em que deve variar x para que 100°, 120° e x sejam as medidas das faces de um triedro.

Solução

Vamos impor as três condições acima:

1.ª) $0° < x < 180°$ (1)
2.ª) $100° + 120° + x < 360° \Rightarrow x < 140°$ (2)
3.ª) $|100° - 120°| < x < 100° + 120° \Rightarrow 20° < x < 220°$ (3)



A interseção das condições (1), (2) e (3) nos dá:

$$20° < x < 140°$$

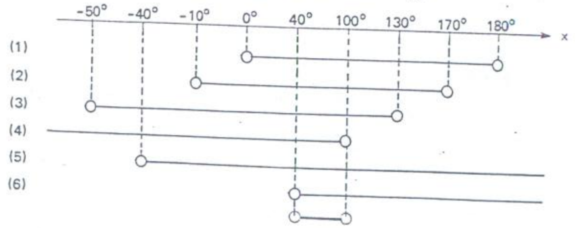
8.13) Determine o intervalo em que deve variar x para que x, x + 10° e x + 50° sejam as medidas das faces de um triedro.

Solução

Impondo as condições:

1.ª) $0° < x < 180°$ (1)
$0° < x + 10° < 180° \Rightarrow -10° < x < 170°$ (2)
$0° < x + 50° < 180° \Rightarrow -50° < x < 130°$ (3)
2.ª) $x + (x + 10°) + (x + 50°) < 360° \Rightarrow x < 100°$ (4)
3.ª) $|x - (x + 10°)| < x + 50° < x + (x + 10°)$

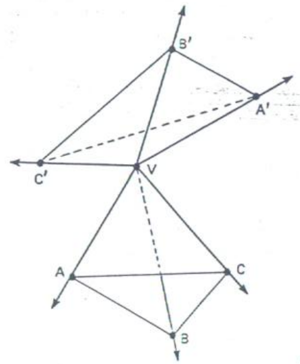
Na inequação da esquerda: $10° < x + 50° \Rightarrow x > -40°$ (5)
Na inequação da direita: $50° < x + 10° \Rightarrow x > 40°$ (6)



A interseção dessas condições dá-nos

$$40° < x < 100°$$

8.8 — TRIEDRO POLAR DE UM TRIEDRO



Seja dado um triedro tri(V, A, B, C). Considerando a face $A\hat{V}B$, vamos conduzir uma semi-reta $\overrightarrow{VC'}$ obedecendo às duas condições seguintes:

1.ª) $\overrightarrow{VC'}$ deve ser perpendicular ao plano da face $A\hat{V}B$.

2.ª) Os pontos C' e C devem estar em semi-espaços opostos com relação ao plano da face $A\hat{V}B$.

Tomemos também as semi-retas $\overrightarrow{VA'}$ e $\overrightarrow{VB'}$ com o mesmo processo, considerando as faces $B\hat{V}C$ e $A\hat{V}C$. As três novas semi-retas determinam um triedro tri (V, A', B', C'), que se denomina polar do triedro tri(V, A, V, C).

Exercícios Resolvidos

8.14) Mostre que, se tri (V, A', B', C') é polar de tri (V, A, B, C), então tri (V, A, B, C) é polar de tri (V, A', B', C').

Solução

Temos

$$\overrightarrow{VA'} \perp B\hat{V}C \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{VA'} \perp \overrightarrow{VB} & (1) \\ \overrightarrow{VA'} \perp \overrightarrow{VC} & (2) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{VB'} \perp A\hat{V}C \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{VB'} \perp \overrightarrow{VA} & (3) \\ \overrightarrow{VB'} \perp \overrightarrow{VC} & (4) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{VC'} \perp A\hat{V}B \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{VC'} \perp \overrightarrow{VA} & (5) \\ \overrightarrow{VC'} \perp \overrightarrow{VB} & (6) \end{cases}$$

De (3) e (5): $\overrightarrow{VA} \perp B'\hat{V}C'$
De (1) e (6): $\overrightarrow{VB} \perp A'\hat{V}C'$
De (2) e (4): $\overrightarrow{VC} \perp A'\hat{V}B'$

Logo, tri (V, A, B, C) é polar do tri (V, A', B', C').
Com este exercício, podemos dizer que os dois triedros são *polares entre si*.

8.15) A cada face de um triedro corresponde um diedro no seu polar. Por exemplo, à face $A\hat{V}B$ do triedro dado (oposta à aresta $\overrightarrow{VC}$) corresponde, no polar, o diedro cuja aresta é $\overrightarrow{VC'}$. Indiquemos por f_1, f_2, f_3 as medidas das faces do triedro e por d'_1, d'_2, d'_3 as medidas dos correspondentes diedros no polar. Mostre que

$$f_1 + d'_1 = f_2 + d'_2 = f_3 + d'_3 = 180°$$

Solução

Vamos rever a **observação** feita no exercício 8.6. A situação existente entre as semi-retas $\overleftrightarrow{VA}$ e $\overleftrightarrow{VB}$ e o diedro $(\overleftrightarrow{VC}, A', B')$ é exatamente aquela do **caso 1**, estudado na observação citada: os ângulos considerados são *suplementares*.

8.16) Mostre que a soma das medidas dos três diedros de um triedro está entre 180° e 540°:

$$180° < d_1 + d_2 + d_3 < 540°$$

Solução

Consideremos, no triedro polar, as medidas das faces correspondentes aos diedros do triedro dado. Temos, pelo exercício anterior:

$$d_1 = 180° - f'_1$$
$$d_2 = 180° - f'_2$$
$$d_3 = 180° - f'_3$$

donde

$$d_1 + d_2 + d_3 = 540° - (f'_1 + f'_2 + f'_3) < 540° \quad (1)$$

Além disso,

$$f'_1 + f'_2 + f'_3 = 540° - (d_1 + d_2 + d_3)$$

e como $f'_1 + f'_2 + f'_3 < 360°$ (veja exercício 8.9) resulta

$$540° - (d_1 + d_2 + d_3) < 360°$$
$$d_1 + d_2 + d_3 > 180° \quad (2)$$

Por (1) e (2), temos

$$180° < d_1 + d_2 + d_3 < 540°$$

8.17) Mostre que, num triedro, $d_1 + d_2 < d_3 + 180°$.

Solução

Temos
$$\begin{cases} f'_1 = 180° - d_1 \\ f'_2 = 180° - d_2 \\ f'_3 = 180° - d_3 \end{cases}$$

e como $f'_3 < f'_1 + f'_2$ (veja exercício 8.8) resulta

$$180° - d_3 < (180° - d_1) + (180° - d_2)$$

donde

$$d_1 + d_2 < d_3 + 180°$$

É claro que também valem as desigualdades:

$$d_1 + d_3 < d_2 + 180°$$
$$d_2 + d_3 < d_1 + 180°$$

8.18) Existe triedro cujos diedros tenham medidas iguais a 140°, 130° e 80°?

Solução

Não existe, pois se fosse $d_1 = 140°$, $d_2 = 130°$ e $d_3 = 80°$, teríamos:

$$d_1 + d_2 > d_3 + 180°$$

8.19) Existe triedro cujos diedros tenham medidas iguais a 70°, 30° e 10°?

Solução

Não existe, pois teríamos $d_1 + d_2 + d_3 < 180°$.

8.20) Determine o intervalo em que deve variar x para que 140°, 30° e x sejam as medidas dos diedros de um triedro.

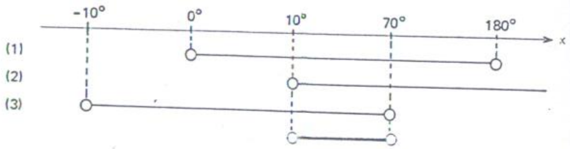
Solução

Para que 140°, 30° e x sejam as medidas dos diedros de um triedro, os seus *suplementares* 40°, 150° e 180° − x devem ser as medidas das faces do triedro polar. Vamos impor as três condições (como no exercício 8.12):

1.ª) $0 < x < 180°$ (1)

2.ª) $40° + 150° + (180° - x) < 360° \Rightarrow x > 10°$ (2)

3.ª) $|40° - 150°| < 180° - x < 40° + 150° \Rightarrow$
$\Rightarrow 110° < 180° - x < 190° \Rightarrow$
$\Rightarrow -70° < -x < 10° \Rightarrow$
$\Rightarrow -10° < x < 70°$ (3)



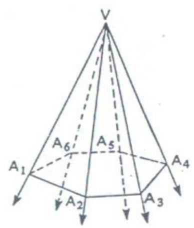
A interseção das condições (1), (2) e (3) dá-nos:

$$10° < x < 70°$$

8.9 — ÂNGULOS POLIÉDRICOS CONVEXOS

Sejam **n** ($n \geq 3$) semi-retas de mesma origem V: $\overleftrightarrow{VA_1}, \overleftrightarrow{VA_2}, \ldots, \overleftrightarrow{VA_n}$, sucedendo-se circularmente (*) de tal modo que três semi-retas consecutivas:

$$(\overleftrightarrow{VA_1}, \overleftrightarrow{VA_2}, \overleftrightarrow{VA_3})$$
$$(\overleftrightarrow{VA_2}, \overleftrightarrow{VA_3}, \overleftrightarrow{VA_4})$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(\overleftrightarrow{VA_n}, \overleftrightarrow{VA_1}, \overleftrightarrow{VA_2})$$



(*) Quando dizemos que as semi-retas se sucedem circularmente, queremos significar que após a última $(\overleftrightarrow{VA_n})$ devemos voltar à primeira $(\overleftrightarrow{VA_1})$ e continuar a enumeração.

não sejam coplanares. Admitamos ainda que cada par de semi-retas consecutivas: $(\overrightarrow{VA_1}, \overrightarrow{VA_2}), (\overrightarrow{VA_2}, \overrightarrow{VA_3}), \dots, (\overrightarrow{VA_n}, \overrightarrow{VA_1})$ define um plano que deixa todas as demais em um mesmo semi-espaço.

Indiquemos por $E_1, E_2, \dots, E_n$ os semi-espaços fechados, definidos pelos pares de semi-retas consecutivas e que contêm as demais semi-retas.

> A interseção $E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$ desses semi-espaços fechados é uma região convexa do espaço denominada **ângulo poliédrico.**

Podemos usar a notação $(V, A_1, A_2, \dots, A_n)$.

Vértice : é o ponto V.

Arestas: são as semi-retas $\overleftrightarrow{VA_1}, \dots, \overleftrightarrow{VA_n}$.

Faces : são os ângulos $A_1\hat{V}A_2, \dots, A_n\hat{V}A_1$.

Um ângulo poliédrico está relacionado, também, a **n** diedros, determinados cada um por uma das arestas e as duas faces que a contêm.

A união das faces é a superfície poliédrica e os demais pontos formam o interior.

Exercícios Resolvidos

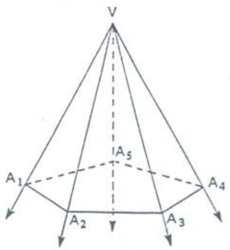
8.21) Prove que a soma das medidas das faces de um ângulo poliédrico convexo é menor do que 360°.

Solução

Se cortarmos o ângulo poliédrico por um plano secante a todas as arestas, obteremos um polígono convexo de vértices

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

Consideremos os triedros de vértices $A_1, A_2, \dots, A_n$. Em cada um deles, a face que contém o polígono tem sua medida menor do que as das duas faces restantes (estas últimas são ângulos internos dos triângulos $VA_1A_2, VA_2A_3, \dots, VA_nA_1$). Seja T a soma das medidas dos ângulos internos desses triângulos, excetuados aqueles ângulos com vértice V. Então, se P indicar a soma das medidas dos ângulos internos do polígono, teremos



$$P < T$$

Seja S a soma das medidas das faces do ângulo poliédrico. É claro, então, que S + T equivale à soma das medidas dos ângulos internos de todos os triângulos, logo

$$S + T = n \cdot 180°$$

donde

$$T = n \cdot 180° - S$$

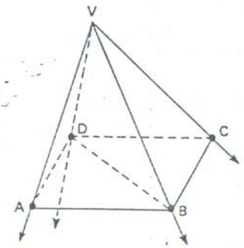
Por outro lado, $P = (n - 2) \cdot 180°$ (veja o exercício 6.42). Assim, a desigualdade $P < T$ fica

$$(n - 2)\,180° < n \cdot 180° - S$$

donde tiramos $S < 360°$.

8.22) Considere um ângulo poliédrico de quatro faces. Mostre que a medida de cada face é menor do que a soma das medidas das demais.

Solução



Indiquemos as medidas das faces $A\hat{V}B$, $B\hat{V}C$, $C\hat{V}D$ e $D\hat{V}A$, respectivamente, por f_1, f_2, f_3 e f_4. Seja também f_5 a medida do ângulo $B\hat{V}D$.

No triedro (V, A, B, D) temos

$$f_1 < f_4 + f_5 \qquad (1)$$

e no triedro (V, B, C, D) temos

$$f_5 < f_2 + f_3 \qquad (2)$$

Somando (1) e (2), vem

$$f_1 + f_5 < f_2 + f_3 + f_4 + f_5$$

donde

$$f_1 < f_2 + f_3 + f_4$$

Nota: Esta propriedade se generaliza facilmente para qualquer ângulo poliédrico convexo.

8.23) Existe ângulo poliédrico convexo de quatro faces, cujas faces medem 10°, 20°, 30° e 60°?

Solução

Não, pois uma das faces teria medida igual à soma das demais: 60° = 10° + 20° + 30°.

8.24) Existe ângulo poliédrico convexo de quatro faces, cujas faces medem 60°, 80°, 100° e 160°?

Solução

Não, pois a soma das medidas das quatro faces seria maior do que 360°.

Exercícios Propostos

8.25) Pelo ponto M situado numa face de um diedro, fora da aresta, conduz-se uma reta perpendicular à outra face. Por um ponto N dessa perpendicular conduz-se uma nova reta, perpendicular à aresta t do diedro em P. Prove que $\overline{MP} \perp t$.

8.26) Mostre que os bissetores de dois diedros adjacentes e suplementares formam um diedro reto.

8.27) Prove que se por um ponto A no interior de um diedro (não raso) conduzimos as retas r e s perpendiculares às faces do diedro, então o plano pl (r, s) é perpendicular à aresta desse diedro.

8.28) Seja um diedro reto e dois pontos, M e N, um em cada face, pelos quais traçam-se as perpendiculares à aresta, encontrando-a nos pontos A e B, respectivamente, $A \neq B$. Prove que, se $MA = NB$, então a reta $\overleftrightarrow{MN}$ forma com as faces do diedro ângulos congruentes.

8.29) Sendo $\overleftrightarrow{BC}$ a aresta de um diedro, tomam-se A e A', um em cada face, de modo que $\triangle ABC$ e $\triangle A'BC$ sejam eqüiláteros. A perpendicular de A' à outra face encontra esta no ponto M. Prove que, se $\triangle MBC$ é retângulo em M, então $A'M = BM$.

8.30) Tem-se um diedro $A\hat{i}B$, não raso. Por A conduz-se uma reta perpendicular à outra face, que a encontra em P. Toma-se o ponto A', de modo que P seja ponto médio de $\overline{AA'}$. Mostre que

$$\text{med}(A\hat{i}A') = 2\,\text{med}(A\hat{i}B)$$

8.31) Seja um diedro agudo, de aresta t. Pelo ponto $O \in t$ tomemos as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, uma em cada face, sendo $\overrightarrow{OA} \perp t$ e $\overrightarrow{OB}$ não perpendicular a t. Prove que a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é maior do que a medida do diedro.

8.32) Dado o ângulo $A\hat{B}C$, conduz-se a semi-reta $\overrightarrow{BD}$ oblíqua ao plano do ângulo e tal que os ângulos $A\hat{B}D$ e $C\hat{B}D$ sejam congruentes. Traçando-se por D uma reta perpendicular ao plano (A, B, C), esta vai furá-lo no ponto E situado no interior do ângulo $A\hat{B}C$. Prove que o semiplano $(\overleftrightarrow{BD}, E)$ é o bissetor do diedro $(A, \overleftrightarrow{BD}, C)$.

8.33) Quantos triedros ficam determinados por três retas não coplanares, que se interceptam em um ponto?

8.34) Responda **sim** ou **não**, caso seja ou não possível construir um triedro cujas faces tenham as medidas dadas:

a) 125°, 80°, 31°; c) 72°, 56°, 38°; e) 150°, 140°, 80°;
b) 110°, 80°, 50°; d) 92°, 56°, 36°; f) 140°, 130°, 90°.

8.35) Determine em que intervalo varia **x** se as medidas das faces de um triedro são:

a) 85°, 72° e x; b) 85°, 112° e x.

8.36) Dois diedros de um triedro medem 50° e 120°. Em que intervalo deve variar a medida **x** do terceiro diedro?

8.37) Num triedro, duas faces medem 45° e o diedro determinado por elas é reto. Mostre que a terceira face mede 60°.

8.38) Uma das faces de um triedro mede 90°. As duas outras são congruentes entre si. Um plano perpendicular ao plano da primeira face determina nas três arestas segmentos congruentes. Prove que as duas faces medem 60°.

8.39) Responda **sim** ou **não**, caso seja ou não possível construir um ângulo poliédrico convexo cujas faces tenham as medidas dadas:

a) 30°, 90°, 60°, 150°; c) 42°, 62°, 72°, 82°, 92°;
b) 50°, 60°, 110°, 140°; d) 23°, 38°, 85°, 92°, 98°, 100°.

8.40) Determine qual é o número máximo de faces que pode ter um ângulo poliédrico convexo no qual todas as faces têm medida igual a:

a) 90°; b) 60°; c) 45°; d) 30°.

Exercícios Suplementares

III.1) Demonstre que todas as retas que passam por um ponto dado e formam ângulo reto com uma reta dada estão contidas em um mesmo plano.

III.2) Dadas duas retas concorrentes e um ponto P, mostre que existe uma única reta que passa por P e forma ângulo reto com as duas retas dadas.

III.3) Dados uma reta r e um plano α oblíquos e um ponto A fora de r e de α, como se pode obter um plano paralelo à reta e perpendicular ao plano α, passando por A?

III.4) Uma reta r é perpendicular a duas retas s e t, paralelas entre si e contidas em um plano α. Que se pode concluir sobre a posição de r em relação a α?

III.5) Uma reta r é ortogonal a duas retas s e t, paralelas entre si e contidas em um plano α. Que se pode concluir sobre a posição de r em relação a α?

III.6) Pelo lado $\overleftrightarrow{BC}$ de um triângulo ABC conduz-se um plano $\alpha \perp \overleftrightarrow{AB}$. Toma-se em α o ponto D, de tal modo que o $\triangle BDC$ seja retângulo em B. Que se pode dizer da posição do lado $\overleftrightarrow{BD}$ em relação ao plano pl (A, B, C) e do lado $\overleftrightarrow{BC}$ em relação ao plano pl (A, B, D)?

III.7) Prove que se uma reta r está contida em um plano perpendicular a uma reta s, então a reta s também está contida em um plano perpendicular à reta r.

III.8) Seja α o plano de um triângulo ABC. Vamos conduzir por A as retas $r \perp \overleftrightarrow{BC}$ e $s \perp \overleftrightarrow{BC}$. Mostre que $\alpha \perp$ pl (r, s).

III.9) Num plano α tem-se um losango ABCD. Fora de α, toma-se o ponto P, eqüidistante das extremidades B e D da diagonal menor do losango. Mostre que $\overleftrightarrow{BD} \perp$ pl (A, C, P).

III.10) Sendo α o plano do quadrado ABCD, pelo lado $\overleftrightarrow{AB}$ toma-se o plano $\beta \perp \alpha$. Em β, constrói-se um quadrado ABEF. Prove que $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BE}$.

III.11) Pelo ponto de interseção M das diagonais de um quadrado ABCD, conduz-se a reta $\overleftrightarrow{PM}$ perpendicular ao plano do quadrado. Mostre que $\overleftrightarrow{PC} \perp \overleftrightarrow{BD}$.

III.12) Uma reta r e um plano α são oblíquos. Por um ponto $A \in \alpha$, construa uma reta $s \subset \alpha$, que forme ângulo reto com r.

III.13) Pelo vértice A do triângulo isósceles ABC (AB = AC) conduz-se a reta $\overleftrightarrow{AP}$ perpendicular ao plano do triângulo. A reta que passa por P e é perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ corta-a em M. Prove que M é o ponto médio de $\overline{BC}$.

III.14) Pelo lado $\overleftrightarrow{AB}$ de um triângulo eqüilátero ABC toma-se um plano α perpendicular ao plano β do triângulo. O ponto $D \in \alpha$ é vértice de um triângulo isósceles ABD (AD = BD). Mostre que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

III.15) Fora do plano de um triângulo ABC eqüilátero de lado **a**, toma-se um ponto D cujas distâncias aos vértices do triângulo são iguais a **a**. Mostre que $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

III.16) Uma reta perpendicular a uma das faces de um diedro forma ângulo de medida α com o semiplano bissetor. Determine a medida do diedro.

III.17) Uma reta perpendicular ao semiplano bissetor de um diedro forma ângulo de medida x com a face do diedro. Determine a medida do diedro.

III.18) Uma reta contida em uma seção reta de um diedro forma ângulos de medida x com uma face e com o semiplano bissetor. Calcule a medida do diedro ($45° < x < 90°$).

III.19) As medidas em graus das faces de um triedro são $7x$, $8x$ e $9x$. Determine os possíveis valores de x.

III.20) As medidas em graus das faces de um triedro são x, $2x$ e x, sendo $60° < x < 90°$. Determine os possíveis valores de x.

PARTE IV

Capítulo 9 — **Lugares geométricos. Círculo e esfera**

Capítulo 10 — **Áreas dos polígonos**

Capítulo 11 — **Semelhança de triângulos. Relações métricas**

Capítulo 12 — **Razões trigonométricas. Áreas do círculo e dos setores**

Capítulo

9

Lugares geométricos. Círculo e esfera

9.1 — LUGAR GEOMÉTRICO

A expressão **lugar geométrico** significa o mesmo que **conjunto de pontos**, ou **figura**. É comum utilizarmos o nome de lugar geométrico para indicar um conjunto de pontos conhecido através de uma determinada propriedade. Por exemplo, o *conjunto dos pontos que são eqüidistantes de dois pontos dados* é um lugar geométrico. Os livros modernos de Matemática começam a omitir essa expressão, já que ela não passa de um substituto para a palavra *figura*, mas a tradição é forte e o uso do nome *lugar geométrico* ainda se conserva, talvez por alguma razão didática.

Para comprovarmos que uma determinada figura é o lugar geométrico definido por uma dada propriedade, é necessário demonstrar que:

a) Todos os pontos que pertencem à figura considerada possuem a propriedade.
b) Todo ponto que possui a propriedade dada pertence à figura.

Os exemplos que examinaremos a seguir irão esclarecer estas idéias.

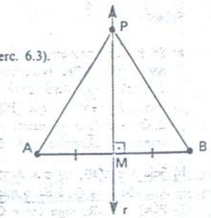
Exercícios Resolvidos

9.1) Sejam dados dois pontos, A e B, distintos, e um plano α que contém esses dois pontos. Prove que o lugar geométrico dos pontos de α, que são eqüidistantes de A e de B, é a reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$, contida em α.

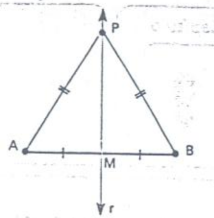
Solução

Seja r a mediatriz de $\overleftrightarrow{AB}$, contida em α (veja o exerc. 6.3).

a) Se $P \in r$, provemos que $PA = PB$. Se $P = M$ (ponto médio de $\overline{AB}$), é imediato que $PA = PB$.
Se $P \neq M$, como $\triangle APM \equiv \triangle BPM$ (L A L), tem-se $PA = PB$.



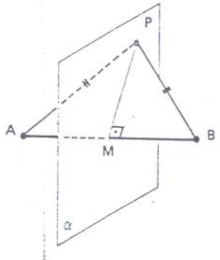
b) Se $P \in \alpha$ e $PA = PB$, provemos que $P \in r$.
Se $P \in \overleftrightarrow{AB}$, então $P = M$, logo $P \in r$. Se $P \notin \overleftrightarrow{AB}$, sejam os triângulos $\triangle APM$ e $\triangle BPM$. Pelo L L L, eles são congruentes, portanto $A\hat{M}P \equiv B\hat{M}P$, logo estes dois ângulos são retos: $\overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Assim, $\overleftrightarrow{PM} = r$, donde $P \in r$.



9.2) Sejam dados dois pontos, A e B, distintos. Prove que o lugar geométrico dos pontos (do espaço) que são eqüidistantes de A e de B é o plano mediador do segmento $\overline{AB}$, isto é, o plano que é perpendicular ao segmento e contém o seu ponto médio.

Solução

Seja α o plano mediador de $\overline{AB}$.

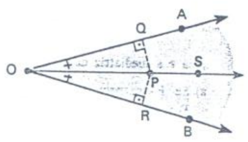


a) Se $P \in \alpha$, provemos que $PA = PB$.
Se $P = M$, é imediato que $PA = PB$.
Se $P \neq M$, então $\overleftrightarrow{PM} \perp \overline{AB}$, logo $\overleftrightarrow{PM}$ é a mediatriz de $\overline{AB}$ no pl (A, B, P) : $PA = PB$.

b) Se P é tal que $PA = PB$, provemos que $P \in \alpha$.
Se $P \in \overleftrightarrow{AB}$, então $P = M$, logo $P \in \alpha$.
Se $P \notin \overleftrightarrow{AB}$, fica determinado o plano pl $(P, \overleftrightarrow{AB})$, no qual P pertence à reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$. Assim, $\overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{AB}$, donde $\overleftrightarrow{PM} \subset \alpha$ e $P \in \alpha$.

9.3) Prove que o lugar geométrico dos pontos pertencentes a um ângulo $A\hat{O}B$, que são eqüidistantes das retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$, é a semi-reta $\overrightarrow{OS}$, bissetriz de $A\hat{O}B$.

Solução

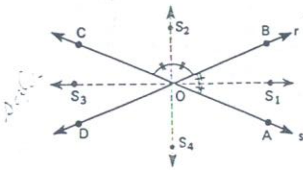


a) Se $P \in \overrightarrow{OS}$, provemos que $\delta_{P,\overleftrightarrow{OA}} = \delta_{P,\overleftrightarrow{OB}}$, isto é, $PQ = PR$ (veja, no exerc. 6.5, a definição de distância de um ponto a uma reta). É verdade que $PQ = PR$, pois $\triangle OPQ \equiv \triangle OPR$ (exerc. 6.43). A tese é imediata também quando $P = O$.

b) Seja $P \in A\hat{O}B$, tal que $\delta_{P,\overleftrightarrow{OA}} = \delta_{P,\overleftrightarrow{OB}}$ e provemos que $P \in \overrightarrow{OS}$.
Se $P = O$, é claro que $P \in \overrightarrow{OS}$. Se $P \neq O$, como $\triangle OPQ \equiv OPR$ (exerc. 6.43), temos $P\hat{O}Q \equiv P\hat{O}R$, logo $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS}$ e, assim, $P \in \overrightarrow{OS}$.

9.4) Sejam r e s retas concorrentes do plano α. Determine o lugar geométrico dos pontos desse plano, que eqüidistam de r e de s.

Solução



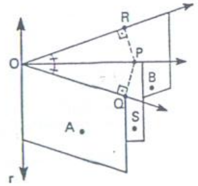
As retas r e s definem quatro ângulos: $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ e $D\hat{O}A$, cujas respectivas bissetrizes são $\overrightarrow{OS_1}$, $\overrightarrow{OS_2}$, $\overrightarrow{OS_3}$ e $\overrightarrow{OS_4}$. Provemos que o lugar geométrico procurado é a *união* das quatro bissetrizes, que indicaremos por u.

a) Seja $P \in u$. Então, P pertence a uma das bissetrizes, por exemplo, $P \in \overrightarrow{OS_1}$. Então, P é eqüidistante de r e de s.
b) Seja $P \in \alpha$, eqüidistante de r e de s. Ora, P deve pertencer obrigatoriamente a um dos quatro ângulos, por exemplo, $P \in A\hat{O}B$. Então, $P \in \overrightarrow{OS_1}$, logo $P \in u$.

Sendo assim, *o lugar geométrico dos pontos do plano (r, s) que são eqüidistantes das retas concorrentes r e s é a união das duas retas que contêm as bissetrizes dos ângulos definidos por r e s.*

9.5) Prove que o lugar geométrico dos pontos (do espaço) pertencentes ao diedro $A\hat{r}B$, que são eqüidistantes dos planos (A, r) e (B, r), é o semiplano (S, r), bissetor do diedro.

Solução

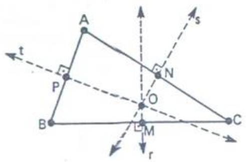


Dado um ponto $P \in A\hat{r}B$, consideremos por P a seção reta do diedro, a qual é um ângulo $\hat{O}$.

a) Se P pertence ao semiplano bissetor, então P pertence à bissetriz de $\hat{O}$, logo P eqüidista dos lados desse ângulo e portanto eqüidista dos planos (A, r) e (B, r).
b) Se P eqüidista dos planos (A, r) e (B, r), então P eqüidista dos lados do ângulo $\hat{O}$, logo P pertence à bissetriz de $\hat{O}$ e portanto P pertence ao semiplano bissetor do diedro.

9.6) Prove que existe um único ponto situado no plano do $\triangle ABC$, eqüidistante dos três vértices desse triângulo.

Solução

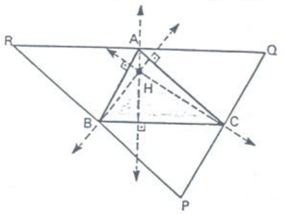


Sejam r, s e t as mediatrizes dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ do $\triangle ABC$, respectivamente, todas contidas no plano do triângulo. Seja O a interseção de r e s. Como $O \in r$, temos $OB = OC$. Como $O \in s$, temos $OA = OC$. Então, esse ponto eqüidista dos três vértices (e é o único nessas condições).

Nota: Como $OA = OB$, fica provado também que $O \in t$, isto é, que *as mediatrizes dos lados de um triângulo cortam-se em um mesmo ponto.* Esse ponto O tem o nome de circuncentro do triângulo.

9.7) Prove que as retas que contêm as três alturas de um triângulo cortam-se em um mesmo ponto.

Solução

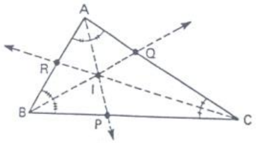


Consideremos o $\triangle PQR$, cujos lados contêm os vértices do $\triangle ABC$ e são paralelos aos lados opostos deste. Pelo exercício 6.44, os pontos A, B e C são os pontos médios dos lados do $\triangle PQR$, logo as retas que contêm as *alturas* do $\triangle ABC$ são as *mediatrizes* do $\triangle PQR$. Assim, essas retas cortam-se em um mesmo ponto H, que é o circuncentro do $\triangle PQR$.

Nota: O ponto H é denominado ortocentro do $\triangle ABC$.

9.8) Prove que existe um único ponto situado no plano do $\triangle ABC$, eqüidistante dos lados desse triângulo (isto é, eqüidistante das retas suportes desses lados).

Solução



Sejam $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BQ}$ e $\overleftrightarrow{CR}$ as bissetrizes internas do $\triangle ABC$. Seja I a interseção de $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BQ}$. É claro então que I eqüidista dos três lados do triângulo, pois:

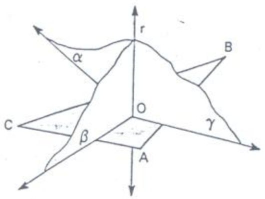
$$I \in \overleftrightarrow{AP} \Rightarrow \delta_{I,\overleftrightarrow{AB}} = \delta_{I,\overleftrightarrow{AC}}$$

$$I \in \overleftrightarrow{BQ} \Rightarrow \delta_{I,\overleftrightarrow{AB}} = \delta_{I,\overleftrightarrow{BC}}$$

Nota: Como $\delta_{I,\overleftrightarrow{AC}} = \delta_{I,\overleftrightarrow{BC}}$, fica provado também que $I \in \overleftrightarrow{CR}$, isto é, que *as bissetrizes internas de um triângulo cortam-se em um mesmo ponto.* O ponto I chama-se **incentro do triângulo.**

9.9) Determine o lugar geométrico dos pontos (do espaço) eqüidistantes dos vértices de um triângulo.

Solução



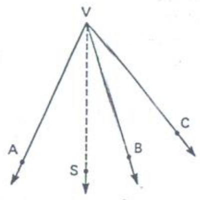
Sejam α, β e γ os planos mediadores dos lados do $\triangle ABC$. Se $r = \alpha \cap \beta$, então os pontos dessa reta eqüidistam dos três vértices, logo $r \subset \gamma$. Isso mostra que os três planos mediadores interceptam-se segundo uma mesma reta **r**, a qual é perpendicular ao plano do triângulo e passa pelo ponto O, circuncentro do $\triangle ABC$.

A reta **r** é o lugar geométrico procurado. Já vimos que todo ponto de **r** eqüidista dos vértices do $\triangle ABC$. Por outro lado, todo ponto que eqüidista dos três vértices pertence aos planos α, β e γ, logo pertence à reta **r**.

Sendo assim, *o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes dos vértices de um triângulo é a reta perpendicular ao plano do triângulo e que passa pelo seu circuncentro.*

9.10) Prove que em todo triedro os semiplanos bissetores dos três diedros passam por uma mesma reta.

Solução



Seja $\overrightarrow{VS}$ a interseção dos dois semiplanos bissetores dos diedros de arestas $\overrightarrow{VA}$ e $\overrightarrow{VB}$. Os pontos de $\overrightarrow{VS}$ são eqüidistantes das três faces do triedro, logo situam-se também no bissetor do diedro de aresta $\overrightarrow{VC}$.

Exercícios Propostos

9.11) Prove que o lugar geométrico dos pontos do espaço eqüidistantes de dois planos secantes α e β é a união dos dois planos que contêm os bissetores dos diedros definidos por α e β.

9.12) Pelas arestas de um triedro passam-se os planos perpendiculares às faces opostas. Demonstre que esses três planos passam por uma mesma reta.

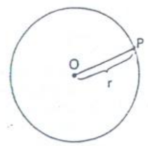
9.13) Pelas arestas de um triedro passam-se os planos que contêm as bissetrizes das faces opostas. Demonstre que esses três planos passam por uma mesma reta.

9.14) Pelo vértice de um triedro conduz-se uma reta contida no plano de uma face e perpendicular à aresta oposta. Faz-se o mesmo com as outras duas faces. Prove que as três retas obtidas são coplanares.

9.15) Prove que, dados quatro pontos não coplanares, existe um único ponto eqüidistante deles.

9.2 — CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

Circunferência

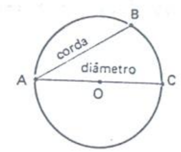


Sejam dados um número positivo **r** e, num plano α, um ponto O. O lugar geométrico dos pontos *desse plano*, cuja distância a O é igual a **r**, chama-se circunferência. O ponto O é o centro e o número **r** é o raio.

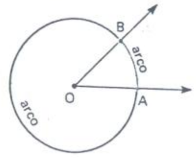
Então, para um ponto P qualquer pertencente à circunferência, tem-se $PO = r$.

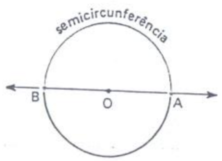
Damos também o nome de raio a qualquer segmento com uma extremidade no centro e a outra em um ponto da circunferência.

Dois pontos A e B pertencentes à circunferência definem um segmento $\overline{AB}$ que se denomina corda. Se a corda $\overline{AC}$ contém o centro, ela se chama diâmetro. Como AO = CO, o centro O é o ponto médio do diâmetro, logo a medida do diâmetro é o dobro do raio.



Uma corda $\overline{AB}$ determina um ângulo AÔB, chamado ângulo central, por ter seu vértice no centro. A interseção do ângulo central com a circunferência chama-se arco (é o arco *compreendido* pelo ângulo AÔB). Dá-se também o nome de arco à parte da circunferência situada fora do ângulo central considerado (este arco é chamado *replementar* do arco compreendido pelo ângulo AÔB). Se o ângulo central é raso (isto é, se $\overleftrightarrow{AB}$ é um diâmetro) os arcos determinados chamam-se semicircunferências.





Medida de um arco, em graus

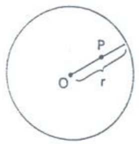
Se o ângulo central tem a medida em graus igual a α, dizemos também que o arco compreendido por ele tem medida em graus igual a α.

Assim, uma semicircunferência mede 180°, a circunferência toda mede 360°. O arco replementar de um arco de medida α tem sua medida em graus igual a $360° - \alpha$.

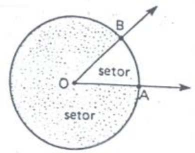
Círculo

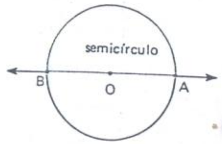
Chama-se círculo de centro O e raio r o lugar geométrico dos pontos P que pertencem ao plano α contendo O e tais que $PO \leqslant r$.

Os pontos P tais que $PO < r$ formam o interior do círculo e os pontos do plano α, que não pertencem ao círculo, formam o seu exterior.



Um ângulo central AÔB intercepta o círculo segundo uma região chamada setor circular (compreendido pelo ângulo). A parte do círculo que não pertence ao ângulo AÔB também se chama setor (replementar do primeiro). Se o ângulo central é raso (isto é, se $\overleftrightarrow{AB}$ é um diâmetro), então os setores determinados são chamados semicírculos.





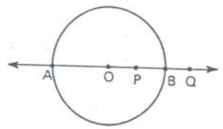
Exercícios Resolvidos

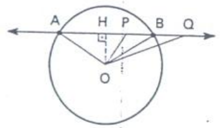
9.16) Demonstre que, dada uma corda $\overline{AB}$ de uma circunferência de centro O e raio r, então todo ponto da corda pertence ao círculo e todo ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$, que não pertence à corda, está no exterior do círculo.

Solução

Sejam P entre A e B e $Q \in \overleftrightarrow{AB}$, fora de $\overline{AB}$ (pode-se supor que Q fica do lado do ponto B).

Se $\overline{AB}$ é um diâmetro, é imediato que $PO < BO = r$ e $QO > BO = r$, logo P pertence ao círculo e Q está no seu exterior. Se $\overline{AB}$ não é um diâmetro, então temos o triângulo isósceles OAB. Pelo exercício 6.45, temos também $PO < BO = r$ e $QO > BO = r$.

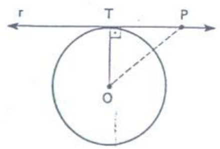




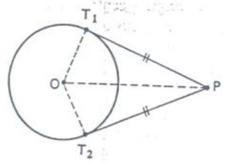
Notas

1.ª) Do exercício acima conclui-se que três pontos distintos, de uma circunferência, não podem estar alinhados, isto é, *uma reta e uma circunferência têm, no máximo, dois pontos em comum.*

2.ª) Reta tangente a uma circunferência – Seja T um ponto da circunferência. A reta r que passa por T e é *perpendicular ao raio* $\overline{OT}$, sendo contida no plano da circunferência, chama-se reta tangente. O ponto T é o ponto da tangência. A reta tangente tem em comum com a circunferência unicamente o ponto T. De fato, se $P \in r$, $P \neq T$, então o $\triangle$ OTP é retângulo, donde $PO > TO = r$. Assim, P não pertence à circunferência (está no exterior do círculo).



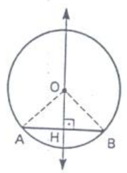
3.º) Por um ponto P do plano da circunferência, situado no exterior do círculo, podem ser conduzidas duas retas tangentes. Os segmentos $\overline{PT_1}$ e $\overline{PT_2}$, cujas extremidades são o ponto dado e os pontos de tangência, são congruentes.



9.17) Em uma circunferência, o diâmetro perpendicular a uma corda divide a corda ao meio. Reciprocamente, um diâmetro que divide uma corda ao meio é perpendicular a essa corda. Prove estas afirmações.

Solução

Seja $\overleftrightarrow{AB}$ uma corda (que não passa pelo centro). Como $\triangle$ OAB é isósceles, a reta $\overline{OH}$ perpendicular à base $\overleftrightarrow{AB}$ contém a altura e a mediana. Logo, H é o ponto médio de $\overline{AB}$. Inversamente, a reta $\overline{OH}$ que liga O com o ponto médio H de $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular a esta corda.



9.18) Prove que, no plano de uma circunferência, a reta mediatriz de qualquer corda passa pelo centro.

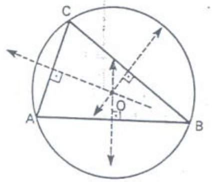
Solução

Basta lembrar que O é eqüidistante das extremidades da corda, logo pertence à sua mediatriz.

9.19) Prove que, pelos vértices de um triângulo, passa uma única circunferência.

Solução

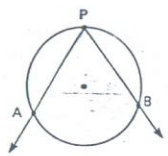
Uma circunferência que passe pelos vértices de um triângulo deve ter o seu centro num ponto O eqüidistante dos três pontos A, B e C. Pelo exercício 9.6 existe um único ponto assim, que é o *circuncentro* do triângulo (interseção das mediatrizes dos lados).



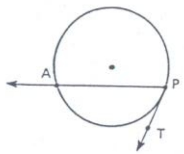
Nota: A circunferência que passa pelos vértices do $\triangle$ ABC chama-se circunferência circunscrita ao triângulo. Dizemos também que o $\triangle$ ABC é inscrito nessa circunferência.

9.3 — ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Dada uma circunferência, todo ângulo com vértice num ponto da circunferência e cujos lados passam por outros dois pontos dela, chama-se ângulo inscrito na circunferência. Na ilustração, $A\hat{P}B$ é um ângulo inscrito. Dos dois arcos de extremidades A e B, aquele que não contém o ponto P (e que, portanto, está contido no ângulo $A\hat{P}B$) é chamado arco *correspondente* ao ângulo $A\hat{P}B$ ou arco *compreendido* pelo ângulo $A\hat{P}B$.



A noção de *ângulo inscrito* pode ser estendida ao caso de um ângulo $A\hat{P}T$ com vértice P na circunferência, sendo que um dos lados $\overleftrightarrow{PA}$ contém outro ponto A da circunferência, enquanto que o outro lado $\overleftrightarrow{PT}$ é tangente a ela. O arco de extremidades A e P contido no ângulo é o arco *correspondente*, ou *compreendido* pelo ângulo $A\hat{P}T$.



Teorema

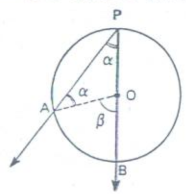
> A medida em graus de um ângulo inscrito é igual à **metade** da medida em graus do arco compreendido.

Demonstração

A demonstração deste teorema é feita separadamente para os vários casos possíveis. Consideremos em primeiro lugar os ângulos inscritos que não têm um lado tangente.

1.º caso: Um dos lados do ângulo inscrito passa pelo centro da circunferência

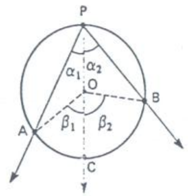
Se O $\in \overleftrightarrow{PB}$, então o ângulo central $A\hat{O}B$ é o ângulo externo ao $\triangle$ AOP, o qual é isósceles. Sejam α e β as medidas de $A\hat{P}B$ e $A\hat{O}B$. Temos então $\beta = 2\alpha$, ou seja, $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$, o que é a tese, pois a medida em graus do arco compreendido é igual à medida do ângulo central.



2.° caso: O centro da circunferência encontra-se no interior do ângulo inscrito

Neste caso, a semi-reta $\overrightarrow{PO}$ separa o ângulo $A\hat{P}B$ em dois outros que satisfazem a hipótese do 1.° caso. Temos (ver figura) $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{2}$. Então

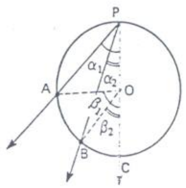
$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \text{ ou seja, } \alpha = \frac{\beta}{2}.$$



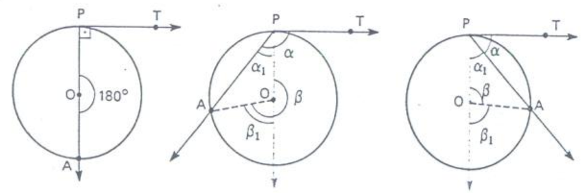
3.° caso: O centro da circunferência encontra-se no exterior do ângulo inscrito

Neste caso, a semi-reta $\overrightarrow{PB}$ (ver figura) separa o ângulo $A\hat{P}O$ em dois, um dos quais é o ângulo $A\hat{P}B$. Temos $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{2}$. Então

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}, \text{ ou seja, } \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

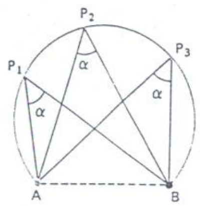


Consideremos agora os ângulos inscritos em que um dos lados é tangente (são os três casos indicados nas figuras). No primeiro caso, o ângulo $A\hat{P}T$ é reto e o arco compreendido é uma semicircunferência, isto é, $\alpha = 90°$ e $\beta = 180°$:

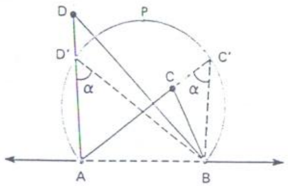


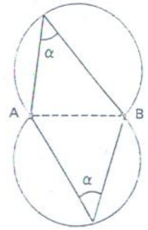
$\alpha = \frac{\beta}{2}$. No segundo caso, temos $\alpha = 90° + \alpha_1$, $\beta = 180° + \beta_1$ e $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$, donde resulta $\alpha = \frac{\beta}{2}$. No último caso, temos $\alpha = 90° - \alpha_1$, $\beta = 180° - \beta_1$ e $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$, donde $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

1.ª) Dado um ângulo $A\hat{P}_1B$ inscrito, consideremos todos os ângulos inscritos, cujos lados passam por A e B e cujos vértices pertencem ao mesmo arco $\widehat{AP_1B}$ de extremidades A e B que contém P_1 (isto é, pertencem ao arco que é replementar daquele que é compreendido pelo ângulo $A\hat{P}_1B$). Todos esses ângulos têm a mesma medida α, que é a metade da medida em graus do arco compreendido. Dizemos que *os pontos P_1, P_2, P_3, etc. vêem o segmento $\overleftrightarrow{AB}$ sob ângulo de medida α*. Em particular, os pontos A e B vêem o segmento $\overleftrightarrow{AB}$ sob qualquer ângulo. O arco $\widehat{AP_1B}$ é chamado arco capaz de um ângulo de medida α.

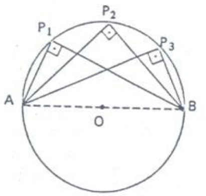


2.ª) Dado um segmento $\overleftrightarrow{AB}$, seja $\widehat{APB}$ um arco capaz de um ângulo de medida α. Se tomamos um ponto do semiplano $(P, \overleftrightarrow{AB})$ que *não pertence* ao arco $\widehat{APB}$, então esse ponto vê o segmento $\overleftrightarrow{AB}$ sob ângulo cuja medida é diferente de α. De fato, para o ponto C interno ao círculo (ver figura), o ângulo $A\hat{C}D$ é externo ao $\triangle BCC'$, logo med $(A\hat{C}B) > \alpha$. Para o ponto D externo ao círculo, o ângulo $A\hat{D}'B$ é externo ao $\triangle BD'D$, logo med $(A\hat{D}B) < \alpha$. Isso mostra que todo ponto do semiplano $(P, \overleftrightarrow{AB})$ que vê o segmento $\overleftrightarrow{AB}$ sob ângulo de medida α pertence ao arco capaz $\widehat{APB}$. Isto nos permite concluir que *o lugar geométrico dos pontos do plano, que vêem o segmento $\overleftrightarrow{AB}$ sob ângulo de medida α, é a união dos dois arcos capazes de α.*



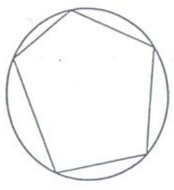


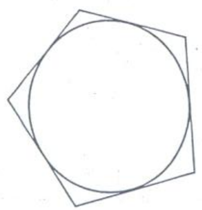
3.ª) Dado o ângulo inscrito $A\hat{P}B$, se $\overleftrightarrow{AB}$ é um diâmetro dizemos que esse ângulo é inscrito na semicircunferência. *Todo ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.* Além disso, podemos concluir também que *o lugar geométrico dos pontos (do plano) que vêem o segmento $\overline{AB}$ sob ângulo reto é a circunferência de diâmetro $\overline{AB}$* (a qual é a união dos dois arcos capazes de 90°).



9.4 — POLÍGONOS INSCRITOS E CIRCUNSCRITOS

Um polígono é inscrito em uma circunferência se todos os seus *vértices* pertencem à circunferência. Diz-se que o polígono é circunscrito à circunferência se todos os seus *lados* tangenciam a circunferência em pontos de tangência que são internos a esses lados. Se o polígono é inscrito, dizemos que *a circunferência é circunscrita ao polígono*. Se o polígono é circunscrito, então *a circunferência é inscrita no polígono*



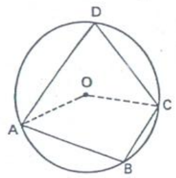


No exercício 9.19 ficou estabelecido que a todo triângulo pode-se circunscrever uma única circunferência, cujo centro é a interseção das três mediatrizes dos lados do triângulo (circuncentro). Pode-se provar também, facilmente, que em todo triângulo é possível inscrever uma circunferência, cujo centro é a interseção das bissetrizes internas do triângulo (incentro) (veja o exercício 9.8). Entretanto, outros polígonos com maior número de lados nem sempre são *inscritíveis* ou *circunscritíveis*. Os exercícios seguintes dão as condições para o caso dos **quadriláteros**.

Exercícios Resolvidos

9.20) Prove que todo quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência tem os ângulos opostos suplementares.

Solução



Indiquemos os arcos de extremidades A e C por $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ADC}$. Temos:

$$\text{med}(\hat{D}) = \frac{1}{2}\,\text{med}(\widehat{ABC})$$

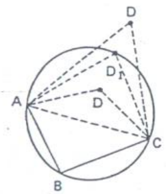
$$\text{med}(\hat{B}) = \frac{1}{2}\,\text{med}(\widehat{ADC})$$

donde $\text{med}(\hat{D}) + \text{med}(\hat{B}) = \frac{1}{2}(\text{med}(\widehat{ABC}) + \text{med}(\widehat{ADC})) = \frac{1}{2}(360°) = 180°$

Da mesma forma, provamos que $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são suplementares.

9.21) Demonstre que todo quadrilátero convexo que tem os ângulos opostos suplementares é inscritível em uma circunferência.

Solução

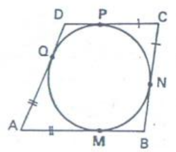


Seja ABCD um quadrilátero que tem os ângulos opostos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ suplementares e consideremos a circunferência circunscrita ao $\triangle$ ABC. Devemos provar que D também pertence a essa circunferência. É claro que D e B estão em semiplanos opostos com relação à diagonal $\overleftrightarrow{AC}$. Seja D_1 um ponto sobre a circunferência, no mesmo semiplano de D. O quadrilátero $ABCD_1$ é inscrito, logo $\hat{B}$ e $\hat{D}_1$ são suplementares. Assim, $\hat{D}_1 \equiv \hat{D}$. Mas então D deve pertencer ao arco $\widehat{AD_1C}$, que é o arco capaz do ângulo $\hat{D}_1$. Portanto, D pertence à circunferência.

Observação: Unindo os resultados dos exercícios 9.20 e 9.21 podemos dizer que *uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero convexo seja inscritível em uma circunferência é que tenha ângulos opostos suplementares.*

9.22) Prove que, se um quadrilátero é circunscrito a uma circunferência, a soma das medidas de dois lados opostos é igual à soma das medidas dos outros dois lados.

Solução



Basta notar que (veja a 3.ª nota do exercício 9.16):

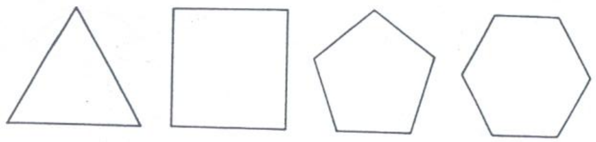
$$AM = AQ$$
$$MB = BN$$
$$CP = NC$$
$$PD = QD$$

Somando: $(AM + MB) + (CP + PD) = (AQ + QD) + (BN + NC)$

logo $AB + CD = AD + BC$

9.5 — POLÍGONOS REGULARES

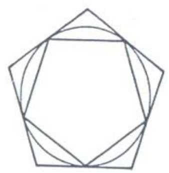
> Um polígono convexo é regular se tem todos os lados congruentes e também todos os ângulos internos congruentes.



O *triângulo eqüilátero* e o *quadrado* são exemplos de polígonos regulares. Vamos citar aqui duas propriedades dos polígonos regulares, dispensando entretanto a sua demonstração.

1.ª propriedade

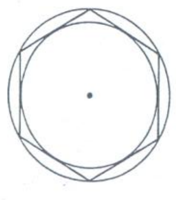
Se uma circunferência é dividida pelos pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ $(n \geq 3)$ em n arcos de mesma medida, então o polígono que tem por vértices esses pontos é regular. É também regular o polígono circunscrito à circunferência tendo esses pontos como pontos de tangência.



2.ª propriedade

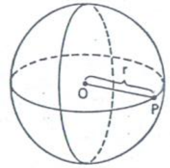
A todo polígono regular é possível circunscrever uma circunferência e inscrever outra, ambas com centro em um mesmo ponto.

O raio da circunferência circunscrita é chamado *raio do polígono* e o raio da circunferência inscrita é chamado *apótema do polígono*.



9.6 — ESFERA E SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Superfície esférica



Sejam dados um número positivo **r** e um ponto O. O lugar geométrico dos pontos (do espaço), cuja distância a O é igual a **r**, chama-se superfície esférica. O ponto O é o centro e o número **r** é o raio.

Então, para um ponto P qualquer pertencente à superfície esférica, tem-se PO = r.

Damos também o nome de raio a qualquer segmento $\overleftrightarrow{PO}$, sendo O o centro e P pertencente à superfície esférica.

Um segmento $\overleftrightarrow{AB}$, com A e B na superfície esférica, chama-se corda. Se a corda $\overleftrightarrow{AB}$ contém o centro O, ela se chama diâmetro. A medida do diâmetro é o dobro do raio.

Esfera

Chama-se esfera de centro O e raio **r** o lugar geométrico dos pontos P (do espaço) tais que $PO \leq r$.

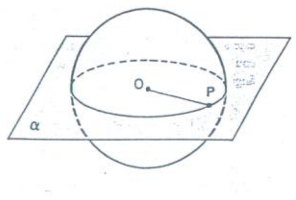
Os pontos P tais que $PO < r$ formam o interior da esfera e os pontos que não pertencem à esfera formam o seu exterior.

Exercícios Resolvidos

9.23) Prove que um plano contendo o centro intercepta a superfície esférica segundo uma circunferência, cujo raio é o mesmo da superfície esférica.

Solução

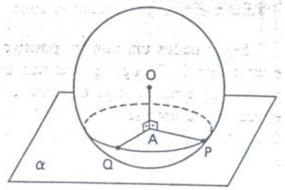
Basta relembrar as definições de superfície esférica e de circunferência. Se α é um plano que contém O e o ponto P está na interseção de α com a superfície esférica, então PO = r (raio da superfície esférica). Assim, P pertence a uma circunferência contida em α, com centro O e raio r. Inversamente, todo ponto P dessa circunferência é tal que PO = r, logo pertence à interseção de α com a superfície esférica.



9.24) Prove que um plano que não contém o centro, mas tem mais de um ponto em comum com a superfície esférica, corta-a segundo uma circunferência, cujo raio é menor do que o da superfície esférica.

Solução

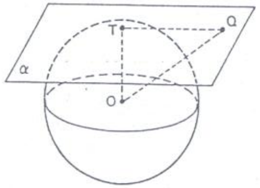
Na ilustração, O é o centro da superfície esférica, $A \in \alpha$ e $\overleftrightarrow{OA} \perp \alpha$. Se P e Q são dois pontos pertencentes à interseção de α com a superfície esférica, então temos $AP = AQ$, pois $\Delta\, OAQ \equiv \Delta\, OAP$. Assim, P e Q pertencem à circunferência contida em α, de centro A e raio AP (tem-se ainda $AP < OP$). Inversamente, todo ponto X dessa circunferência é tal que $OX = OP$.



9.25) **Plano tangente à superfície esférica** – Um plano que passa pelo ponto T de uma superfície esférica e é perpendicular ao raio $\overline{OT}$ chama-se **plano tangente**. O ponto T é o **ponto de tangência**. Demonstre que todo plano tangente tem um único ponto em comum com a esfera, que é o ponto de tangência.

Solução

Seja α o plano tangente. Tomemos em α o ponto $Q \neq T$. Como o $\Delta\, OTQ$ é retângulo em T, temos $OQ > OT = r$. Assim, Q é exterior à esfera de centro O e raio r. O único ponto que α pode ter em comum com a superfície esférica é o ponto de tangência T.

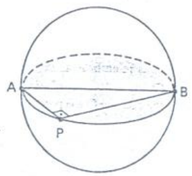


Nota: Uma reta qualquer contida em α e passando pelo ponto T é uma reta tangente à superfície esférica. Assim, pelo ponto T passam infinitas retas tangentes, todas contidas no plano tangente e perpendiculares ao raio $\overline{OT}$.

9.26) Mostre que todos os pontos de uma superfície esférica vêem um diâmetro sob ângulo reto.

Solução

Os extremos A e B do diâmetro $\overleftrightarrow{AB}$ vêem esse segmento sob *qualquer* ângulo (como ficou convencionado), portanto também sob ângulo reto.



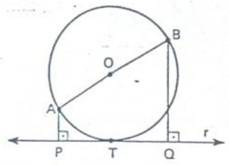
Seja P, distinto de A e B, um ponto pertencente à superfície esférica. O plano pl (A, B, P) intercepta a superfície esférica segundo uma circunferência, da qual $\overline{AB}$ é um diâmetro. Assim, $A\hat{P}B$ é reto, por ser inscrito em uma semicircunferência.

Exercícios Propostos

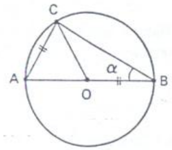
9.27) Prove que se $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são diâmetros de uma circunferência, então ABCD é um paralelogramo.

9.28) São dadas duas circunferências concêntricas (isto é, de mesmo centro). Uma corda da circunferência maior tangencia a menor. Mostre que o ponto de tangência divide essa corda ao meio.

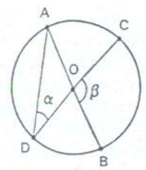
9.29) Na figura, a reta r tangencia a circunferência de centro O em T. Sendo $\overleftrightarrow{AB}$ um diâmetro, tem-se $\overleftrightarrow{AP} \perp r$ e $\overleftrightarrow{BQ} \perp r$. Mostre que $OP = OQ$.



9.30) Sendo O o centro da circunferência da figura e C um ponto tal que $\overline{AC} \equiv \overline{OB}$, calcule α.

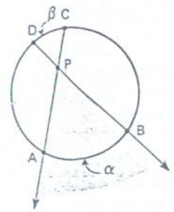


9.31) Na figura, O é o centro da circunferência. Sendo $\alpha = 35°$, calcule β.



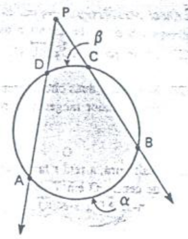
9.32) **Ângulo excêntrico interior** – Dada uma circunferência, chama-se *excêntrico interior* todo ângulo com vértice em um ponto do interior do círculo. Um ângulo excêntrico interior $A\hat{P}B$ corta a circunferência segundo um arco de medida α, sendo que o ângulo que lhe é oposto pelo vértice corta a circunferência segundo um arco de medida β. Mostre que

$$\text{med}\,(A\hat{P}B) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$



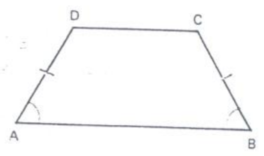
9.33) **Ângulo excêntrico exterior** – Dada uma circunferência, chama-se *excêntrico exterior* todo ângulo com vértice em um ponto do exterior do círculo, cujos lados interceptam a circunferência. Um ângulo excêntrico exterior $A\hat{P}B$ corta a circunferência segundo dois arcos, de medidas α e β, sendo $\alpha > \beta$. Mostre que

$$\text{med}\,(A\hat{P}B) = \frac{\alpha - \beta}{2}$$



9.34) Num plano α tem-se um ponto A e fora desse plano tem-se o ponto B. A cada reta de α passando por A conduz-se por B a reta perpendicular. Qual é o lugar geométrico dos pés dessas perpendiculares? (Os pés são os pontos em que duas retas perpendiculares se interceptam.) Supor que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ não é perpendicular a α.

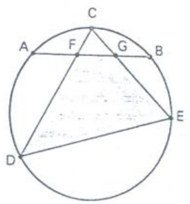
9.35) Trapézio isósceles – Um trapézio é *isósceles* se tem dois lados opostos não paralelos e congruentes entre si. Num trapézio qualquer, os dois lados paralelos são chamados *bases*. Na figura, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são as bases. $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são os *ângulos da base* $\overleftrightarrow{AB}$ e $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são os *ângulos da base* $\overleftrightarrow{CD}$. Um trapézio isósceles tem os ângulos de cada base congruentes: $\hat{A} \equiv \hat{B}$ e $\hat{C} \equiv \hat{D}$. Inversamente, um trapézio que tem os ângulos de uma base congruentes é isósceles (veja o exercício 6.48).



Problema: Mostre que um trapézio é inscritível em uma circunferência se e somente se ele é isósceles.

9.36) Prove que todo paralelogramo inscritível em uma circunferência é um retângulo.

9.37) Na figura, o ponto C divide o arco $\widehat{ACB}$ ao meio. Mostre que o quadrilátero DEGF é inscritível em uma circunferência.



9.38) Prove que se um quadrilátero é inscritível em uma circunferência, então as quatro mediatrizes dos lados desse quadrilátero têm um único ponto comum.

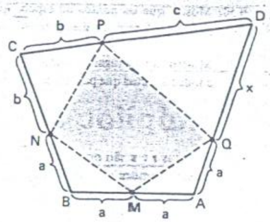
9.39) Prove que se as quatro bissetrizes dos ângulos internos de um quadrilátero convexo têm um ponto em comum, esse quadrilátero é circunscritível a uma circunferência.

9.40) Seja ABCD um quadrilátero convexo tal que

$$AB + CD = AD + BC$$

(isto é, no qual a soma das medidas de dois lados opostos é igual à dos outros dois). Podemos supor (sem perder a generalidade) que

$$AB \leqslant BC \leqslant AD \leqslant CD$$



Seja M o ponto médio de $\overleftrightarrow{AB}$, com $a = \frac{AB}{2}$. Tomemos N sobre $\overleftrightarrow{BC}$, tal que $BN = a$, sendo $b = BC - a$. Tomemos P sobre $\overleftrightarrow{CD}$, tal que $CP = b$, sendo $c = CD - b$. Finalmente, tomemos Q sobre $\overleftrightarrow{AD}$, tal que $AQ = a$.

Prove que:

a) $QD = c$;
b) o quadrilátero MNPQ é inscritível em uma circunferência;
c) o quadrilátero ABCD é circunscritível a uma circunferência, com mesmo centro daquela do item *b*.

Nota: Este exercício corresponde ao teorema recíproco daquele demonstrado no exercício 9.22.

9.41) Mostre que dados quatro pontos não coplanares, existe uma única superfície esférica que os contém.

9.42) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas que passam por dois pontos dados, A e B.

9.43) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas que passam pelos vértices de um triângulo dado.

9.44) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas que tangenciam uma reta r dada, num ponto dado $A \in r$.

9.45) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas que tangenciam um plano α dado, num ponto dado $A \in \alpha$.

9.46) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas tangentes a dois planos secantes, α e β, dados.

9.47) Uma reta corta uma superfície esférica nos pontos A e B. Mostre que o raio que é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ corta esta corda ao meio.

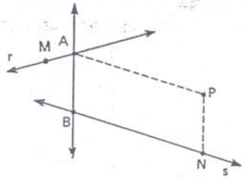
9.48) Dada uma circunferência e um ponto fora do seu plano, determine o centro de uma superfície esférica que contém a circunferência e passa pelo ponto dado.

9.49) Mostre que os planos tangentes a uma esfera nas extremidades de um diâmetro são paralelos.

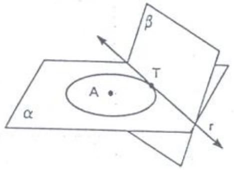
9.50) Mostre que os pontos do espaço que vêem um segmento $\overline{AB}$ sob ângulos reto pertencem à superfície esférica de diâmetro $\overline{AB}$ (o recíproco do teorema do exercício 9.26).

9.51) Mostre que o lugar geométrico dos pés das retas perpendiculares conduzidas por um ponto A a todas as retas que passam por um ponto B ≠ A é a superfície esférica que tem $\overline{AB}$ como diâmetro.

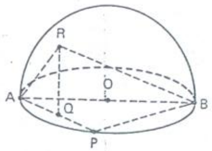
9.52) As retas r e s são ortogonais, $\overleftrightarrow{AB}$ é a perpendicular comum e o quadrilátero ABNP é paralelogramo (retângulo). Mostre que A, B, P e N pertencem à superfície esférica de diâmetro $\overline{MN}$.



9.53) Num plano α tem-se uma circunferência de centro A. Pelo ponto T dessa circunferência, conduz-se r tangente a ela e por r o plano β secante a α. Determine o centro de uma superfície esférica que contém a circunferência e tangencia β em T.



9.54) Seja uma circunferência de centro O, diâmetro $\overline{AB}$ e seja P um ponto dessa circunferência. Por um ponto Q ∈ $\overline{AP}$ traça-se uma perpendicular ao plano da circunferência, que corta a superfície esférica de diâmetro $\overline{AB}$ em R. Demonstre que $\overline{AR}$ é perpendicular ao plano pl (R, P, B).



Capítulo 10

Áreas dos polígonos

10.1 — ÁREAS DOS POLÍGONOS

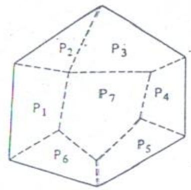
Intuitivamente, a área de um polígono é um número que mede a sua *extensão*, ou seja, a porção de plano ocupada por ele.

Desejamos, entretanto, estabelecer um significado mais preciso para esta idéia, fixando as **propriedades** que a área deve ter.

A cada polígono, então, será associado um *número real não negativo*, chamado área, que deverá satisfazer as propriedades seguintes.

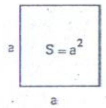
1.ª) Polígonos congruentes têm mesma área.

2.ª) Se um polígono P for decomposto como a união de um certo número de outros polígonos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de tal modo que dois quaisquer dentre eles tenham em comum pontos isolados ou segmentos, então a área de P é a soma das áreas desses polígonos.



3.ª) A área de um quadrado cujo lado tem medida **a** é igual a a^2:

$$\boxed{S = a^2}$$



A partir destas três suposições, poderemos deduzir a área de outros polígonos. Isto será feito a seguir, nos exercícios resolvidos.

Polígonos equivalentes

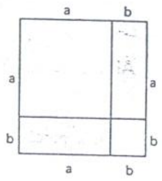
Dois polígonos se dizem equivalentes se têm mesma área.

Exercícios Resolvidos

10.1) Área do retângulo — Mostre que a área de um retângulo cujos lados têm medidas iguais a **a** e **b** é

$$\boxed{S = a \cdot b}$$

Solução



Veja a ilustração. O quadrado que tem lados medindo **a + b** compõe-se de quatro quadriláteros, dos quais dois são também quadrados (áreas iguais a a^2 e b^2) e os outros dois são retângulos congruentes ao retângulo dado. Sendo S a área desse retângulo, temos

$$2S + a^2 + b^2 = (a + b)^2.$$

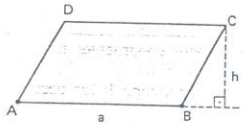
Então,

$$2S + a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

donde

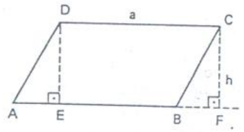
$$S = ab$$

10.2) Área do paralelogramo — Dado um paralelogramo ABCD, vamos escolher um dos lados, $\overleftrightarrow{AB}$, que chamaremos **base**. Sua medida **a** também se chama **base**. A **altura** relativa à base $\overleftrightarrow{AB}$ é a distância **h** entre as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Mostre que a área de um paralelogramo é igual ao produto de sua base pela sua altura:



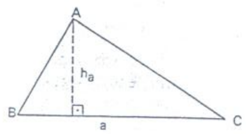
$$\boxed{S = a \cdot h}$$

Solução



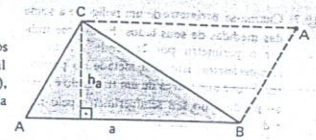
Observe a figura. Como $\triangle AED \equiv \triangle BFC$, suas áreas são iguais. Assim, a área do pralelogramo é igual à área do retângulo EFCD: $S = a \cdot h$.

10.3) Área do triângulo — Dado um $\triangle ABC$, se escolhermos um lado, $\overleftrightarrow{BC}$, como **base** (sua medida **a** também se chama **base**), então a altura relativa à base $\overleftrightarrow{BC}$ é indicada por h_a. Mostre que a área do triângulo é igual à *metade* do produto de sua base pela sua altura:



$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot h_a}$$

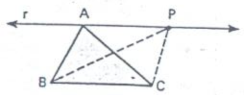
Solução



Com $\overleftrightarrow{CA'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BA'} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, obtemos o paralelogramo ABA'C, cuja área é igual a $a \cdot h_a$. Mas $\triangle ABC \equiv \triangle A'CB$ (A L A), logo a área do $\triangle ABC$ é igual à *metade* da área do paralelogramo:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$

10.4) Dado o $\triangle ABC$, seja **r** a reta por A, paralela a $\overleftrightarrow{BC}$. Mostre que todo triângulo $\triangle PBC$, com base $\overleftrightarrow{BC}$ e o vértice P sobre a reta **r**, é eqüivalente ao $\triangle ABC$.

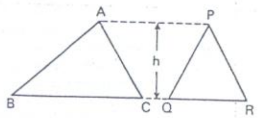


Solução

Basta notar que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PBC$ têm mesma base $BC = a$ e mesma altura h_a, logo ambos têm a mesma área $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$.

10.5) Sejam os triângulos ABC e PQR. Admitamos que ambos têm alturas iguais, relativas aos vértices A e P. Prove que a razão entre as áreas dos dois triângulos é igual à razão entre as suas bases BC e QR.

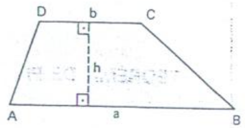
Solução



Sejam S_1 a área do $\triangle ABC$ e S_2 a área do $\triangle PQR$. Temos $S_1 = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h$ e

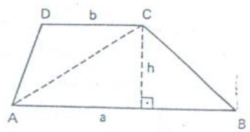
$S_2 = \frac{1}{2} \cdot QR \cdot h$. Então, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{BC}{QR}$.

10.6) Área do trapézio — A **altura h** de um trapézio é a distância entre as suas bases $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Sejam **a** e **b** as medidas das bases (que também se chamam bases). Mostre que a área do trapézio é dada por



$$\boxed{S = \frac{(a + b)}{2} \cdot h}$$

Solução



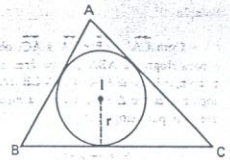
A área do trapézio é a soma das áreas dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h + \frac{1}{2} b \cdot h$$

donde

$$S = \frac{(a + b)}{2} \cdot h$$

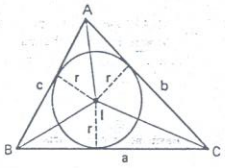
10.7) Chama-se perímetro de um polígono a soma das medidas de seus lados. É costume indicar o perímetro por **2p**, onde **p** indica o *semiperímetro*, isto é, a metade do perímetro. Prove que a área de um triângulo é igual ao produto do seu semiperímetro pelo raio **r** da circunferência inscrita no triângulo:



$$\boxed{S = p \cdot r}$$

Solução

Seja I o incentro do triângulo ABC. Os triângulos ABI, BCI e ACI têm áreas iguais a $\frac{1}{2} c \cdot r$, $\frac{1}{2} a \cdot r$ e $\frac{1}{2} b \cdot r$, respectivamente. Assim, a área do $\triangle$ ABC é



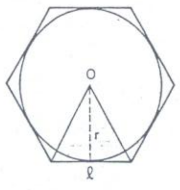
$$S = \frac{1}{2} c \cdot r + \frac{1}{2} a \cdot r + \frac{1}{2} b \cdot r = \frac{(a + b + c)}{2} \cdot r = p \cdot r$$

10.8) Lembremos que o apótema de um *polígono regular* é o raio **r** da circunferência inscrita nesse polígono. Prove que a área de um polígono regular é dada por $S = p \cdot r$, onde **p** é o semiperímetro.

Solução

Ligando cada vértice ao centro, o polígono fica decomposto em **n** triângulos congruentes (**n** é o número de lados do polígono). Cada um desses triângulos tem área igual a $\frac{1}{2} \ell \cdot r$. Assim, a área do polígono é

$$S = n\left(\frac{1}{2} \ell \cdot r\right) = \frac{(n\ell)}{2} \cdot r = p \cdot r$$

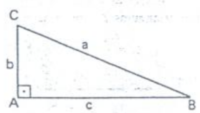


10.2 — TEOREMA DE PITÁGORAS

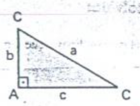
Teorema

Se um triângulo é retângulo, então o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Demonstração



O quadrado com lado medindo $b + c$ é decomposto em quatro triângulos congruentes ao $\triangle$ ABC e um quadrado cujo lado mede **a**. Seja S a área do $\triangle$ ABC. Temos

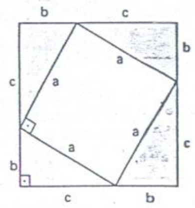
$$4S + a^2 = (b + c)^2$$

Mas $S = \frac{1}{2} b \cdot c$, logo

$$2bc + a^2 = (b + c)^2$$
$$2bc + a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$

e então

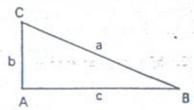
$$a^2 = b^2 + c^2$$



Demonstremos agora o teorema *recíproco* do teorema de Pitágoras.

Teorema

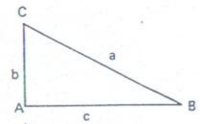
Se os lados do $\triangle$ ABC medem **a**, **b** e **c** e se tem $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo é retângulo, com hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**.

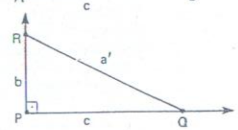


Demonstração

Por um ponto P qualquer, tomemos a semi-reta $\overrightarrow{PQ}$, de modo que seja $\overline{PQ} = c$. Tomemos por P outra semi-reta $\overrightarrow{PR}$, perpendicular à primeira, de tal modo que seja $PR = b$. Assim, obtemos o $\triangle$ PQR, que é retângulo. Se a' é a sua hipotenusa, temos

$$(a')^2 = b^2 + c^2$$



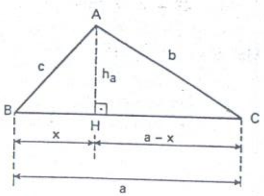


Mas é dado que $a^2 = b^2 + c^2$, logo, $a' = a$. Assim, $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$ (L L L), donde $\hat{A} \equiv \hat{P}$, ou seja, o ângulo $\hat{A}$ é reto.

10.9) Fórmula de Herão – Prove que um triângulo de lados **a**, **b**, **c** e semiperímetro **p** tem área igual a

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Solução



Supondo $c \leq b \leq a$, então a altura $\overleftrightarrow{AH}$ divide o lado maior em dois segmentos, de medidas x e $a - x$ (veja a figura). Temos $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, donde

$$4S^2 = a^2 h_a^2 \qquad (1)$$

No $\triangle ABH$: $c^2 = x^2 + h_a^2$ (2)

No $\triangle ACH$: $b^2 = (a - x)^2 + h_a^2$ (3)

Então

$$b^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h_a^2 = a^2 - 2ax + c^2$$

donde

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

De (2): $h_a^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \dfrac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$

Assim,

$$\begin{aligned} 4a^2h_a^2 &= 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 = \\ &= [2ac - (a^2 + c^2 - b^2)][2ac + (a^2 + c^2 - b^2)] = \\ &= [b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac)][(a^2 + c^2 + 2ac) - b^2] = \\ &= [b^2 - (a - c)^2][(a + c)^2 - b^2] = \\ &= (b - a + c)(b + a - c)(a + c - b)(a + c + b) \end{aligned}$$

Sendo $a + b + c = 2p$, temos:

$$\begin{aligned} b - a + c &= (a + b + c) - 2a = 2p - 2a = 2(p - a) \\ b + a - c &= (a + b + c) - 2c = 2p - 2c = 2(p - c) \\ a + c - b &= (a + b + c) - 2b = 2p - 2b = 2(p - b) \end{aligned}$$

e então

$$4a^2h_a^2 = 16\,p(p - a)(p - b)(p - c)$$

ou

$$a^2h_a^2 = 4\,p(p - a)(p - b)(p - c)$$

Substituindo esta expressão em (1):

$$\begin{aligned} 4S^2 &= 4\,p(p - a)(p - b)(p - c) \\ S^2 &= p(p - a)(p - b)(p - c) \end{aligned}$$

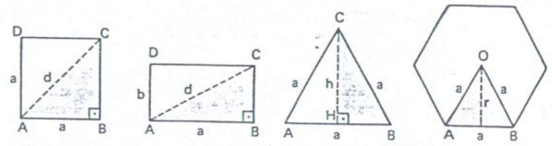
e, finalmente:

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

10.10) Determine a expressão que dá:

a) a diagonal de um quadrado de lado **a**;
b) a diagonal de um retângulo de lados **a** e **b**;
c) a altura de um triângulo eqüilátero de lado **a**;
d) a área de um triângulo eqüilátero de lado **a**;
e) o apótema de um hexágono regular de lado igual a **a**;
f) a área do hexágono regular de lado **a**.

Solução



a) No $\triangle ABC$: $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, donde $d = a\sqrt{2}$

b) No $\triangle ABC$: $d^2 = a^2 + b^2$, donde $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

c) No $\triangle HCB$: $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, donde

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

e assim

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

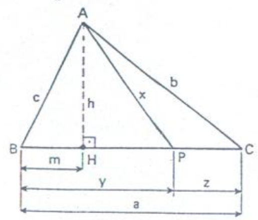
d) $S = \dfrac{1}{2} a \cdot h = \dfrac{1}{2} a \cdot a \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

e) O apótema do hexágono regular é a altura do triângulo eqüilátero OAB: $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

f) A área do hexágono regular é igual a seis vezes a área do $\triangle OAB$:

$$S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

10.11) Relação de Stewart – Seja P um ponto qualquer entre os vértices B e C de um triângulo ABC. Sendo $AP = x$, $BP = y$, $PC = z$, mostre que
$a(x^2 + yz) = b^2y + c^2z$ (relação de Stewart).



Solução

Consideremos a figura anterior.

No $\triangle AHB$: $h^2 = c^2 - m^2$ (1)

No $\triangle AHP$: $h^2 = x^2 - (y - m)^2$ (2)

No $\triangle AHC$: $h^2 = b^2 - (a - m)^2$ (3)

De (1) e (2): $x^2 - (y - m)^2 = c^2 - m^2$

donde: $2ym = c^2 + y^2 - x^2$ (4)

De (1) e (3): $b^2 - (a - m)^2 = c^2 - m^2$

donde: $2am = a^2 + c^2 - b^2$ (5)

Multipliquemos (4) por **a** e (5) por y.

$$2aym = ac^2 + ay^2 - ax^2$$
$$2aym = a^2y + c^2y - b^2y$$

Assim,

$$a^2y + c^2y - b^2y = ac^2 + ay^2 - ax^2$$
$$ax^2 + a^2y - ay^2 = b^2y + ac^2 - c^2y$$
$$ax^2 + ay(a - y) = b^2y + c^2(a - y)$$
$$ax^2 + ayz = b^2y + c^2z$$

e, finalmente,

$$a(x^2 + yz) = b^2y + c^2z$$

Se o ângulo B for obtuso, como na figura ao lado, então teremos:

$h^2 = c^2 - m^2$ (1)

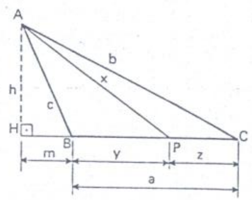
$h^2 = x^2 - (y + m)^2$ (2)

$h^2 = b^2 - (a + m)^2$ (3)

e a dedução conduz ao mesmo resultado.

Examine o caso

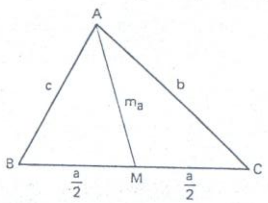
$$\hat{B} = 90°$$



10.12) No $\triangle ABC$, $AM = m_a$ é a mediana relativa ao lado $\overleftrightarrow{BC}$. Determine m_a, em função dos lados **a**, **b** e **c**.

Solução

Apliquemos a relação de Stewart (veja o exercício anterior), sendo $x = m_a$, $y = \frac{a}{2}$ e $z = \frac{a}{2}$:



$$a\left(m_a^2 + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\right) = b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2}$$

Daí, obtemos

$$m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

Exercícios Propostos

10.13) Sendo **d** a diagonal de um quadrado, mostre que a área desse quadrado é $S = \frac{d^2}{2}$.

10.14) Sendo d_1 e d_2 as diagonais de um losango, mostre que a área desse losango é

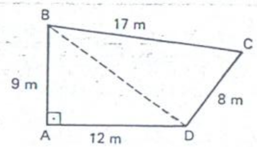
$$S = \frac{d_1 d_2}{2}$$

10.15) Um terreno tem a forma de um quadrilátero, com lados medindo 9 m, 17 m, 8 m e 12 m, como indicado na figura. O ângulo $B\hat{A}D$ é reto.

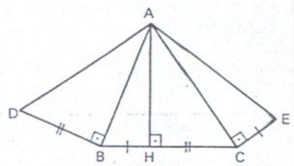
a) Calcule BD.

b) Mostre que $B\hat{D}C$ é reto.

c) Determine a área do terreno.



10.16) Na figura, sendo CE = BH e BD = HC, mostre que AD = AE.

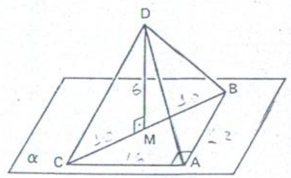


10.17) Na figura, o $\triangle ABC$ é retângulo em A, M é o ponto médio da hipotenusa e $\overleftrightarrow{DM} \perp \alpha$. Se AC = 16, AB = 12 e DM = 6, calcule:

a) DA, DB e DC;

b) a área do $\triangle ABD$;

c) a altura do $\triangle ADB$, relativa ao lado $\overleftrightarrow{AB}$.

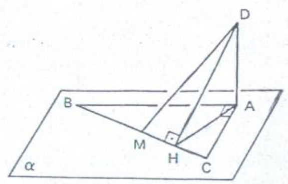


10.18) O $\triangle ABC$ é retângulo em A, M é o ponto médio da hipotenusa. Tem-se $\overleftrightarrow{DA} \perp \alpha$ e $\overleftrightarrow{DH} \perp \overleftrightarrow{BC}$. Se DA = 2, DM = 6 e DH = $= 2\sqrt{3}$, calcule:

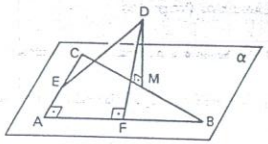
a) a hipotenusa do $\triangle ABC$;

b) a altura do $\triangle ABC$, relativa à hipotenusa;

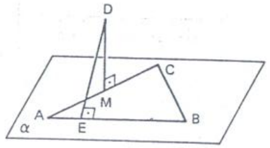
c) a área do $\triangle ABC$.



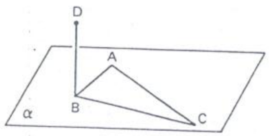
10.19) O $\triangle$ ABC é retângulo em A, M é o ponto médio da hipotenusa e $\overleftrightarrow{DM} \perp \alpha$. Tem-se $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{DF} \perp \overleftrightarrow{AB}$, AB = 32, AC = 24 e DM = 12. Calcule o perímetro do $\triangle$ DEF.



10.20) O $\triangle$ ABC da figura é eqüilátero, M é o ponto médio de $\overline{AC}$, $\overleftrightarrow{DM} \perp \alpha$ e $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Se DM = MB = 12, calcule o raio da circunferência circunscrita ao $\triangle$ DME.

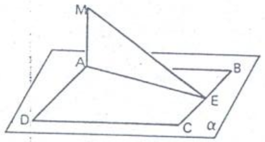


10.21) Na figura, os lados do $\triangle$ ABC medem a = 13, b = 14, c = 15. Tem-se $\overleftrightarrow{DB} \perp \alpha$ e DB = 5. Calcule a distância de D à reta $\overleftrightarrow{AC}$ (Sugestão: calcule primeiramente a altura BH do $\triangle$ ABC, utilizando a fórmula de Herão.)



10.22) Pelo vértice A do hexágono regular ABCDEF, conduz-se $\overleftrightarrow{AP}$ perpendicular ao plano do hexágono. Se AP = 3 cm e a área do hexágono é $S = 81\sqrt{3}\,cm^2$, calcule as distâncias de P a cada vértice do hexágono.

10.23) O ângulo do vértice A do paralelogramo ABCD mostrado na figura é obtuso. Tem-se $\overleftrightarrow{AM} \perp \alpha$, AM = 2AD e $\overleftrightarrow{ME} \perp \overleftrightarrow{BC}$. Calcule a área do paralelogramo, sabendo que a área do $\triangle$ AME é igual a $24\,cm^2$.



10.24) Calcule a distância entre o ponto M e o plano de um triângulo eqüilátero ABC, se o lado do triângulo é igual a a e MA = MB = MC = b. (Veja o exerc. 9.9.)

10.25) Um segmento $\overline{GP}$, de 8 cm de comprimento, é perpendicular ao plano do triângulo eqüilátero ABC, sendo G o baricentro desse triângulo. A área do triângulo é $27\sqrt{3}\,cm^2$. Calcule as distâncias de P a cada vértice e a cada lado do triângulo.

10.26) Os catetos de um triângulo retângulo ABC medem 6 cm e 8 cm. O ponto P dista 13 cm de cada vértice do triângulo. Calcule a distância de P ao plano do triângulo.

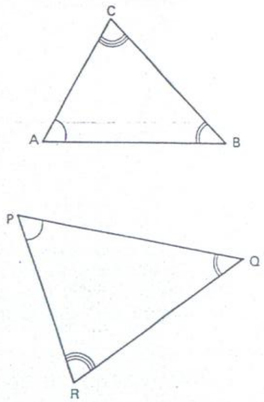
10.27) Pelo vértice A do quadrado ABCD, cujos lados medem 3 m, é levantada uma perpendicular $\overline{AM}$ ao plano do quadrado. Sendo MB = 4 m, calcule MC.

Capítulo 11

Semelhança de triângulos. Relações métricas

11.1 — TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Dois triângulos, ABC e PQR, são semelhantes se é possível estabelecer uma correspondência entre os seus vértices, de tal modo que os seus ângulos internos sejam dois a dois congruentes:



$$\hat{A} \equiv \hat{P}$$
$$\hat{B} \equiv \hat{Q}$$
$$\hat{C} \equiv \hat{R}$$

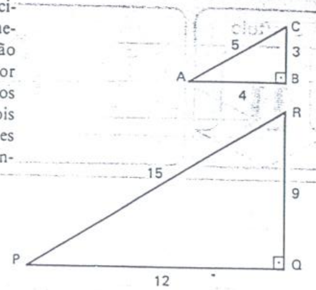
e os seus lados sejam proporcionais:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = k$$

Indicamos $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

O número k, equivalente à razão entre lados correspondentes de dois triângulos semelhantes, chama-se razão de semelhança. (Quando falamos em razão de semelhança, estamos sempre pressupondo uma certa *ordem* na qual os dois triângulos são mencionados: se k é a razão de semelhança entre os triângulos ABC e PQR, as medidas dos lados do $\triangle$ ABC devem figurar nos numeradores e as dos lados do $\triangle$ PQR, nos denominadores, já que os triângulos foram citados nessa ordem.)

Utilizando uma linguagem imprecisa, podemos dizer que triângulos semelhantes têm a *mesma forma*, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Por exemplo, os dois triângulos retângulos da figura ao lado são semelhantes, pois os seus ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes apresentam a mesma *razão*:



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = \frac{1}{3}$$

É importante notar, como já fizemos para a congruência de triângulos, que a definição de semelhança de triângulos pressupõe a fixação prévia de uma *correspondência* entre os dois triângulos:

$$A \leftrightarrow P$$
$$B \leftrightarrow Q$$
$$C \leftrightarrow R$$

Se os dois triângulos forem relacionados por outra correspondência, por exemplo:

$$A \leftrightarrow R$$
$$B \leftrightarrow P$$
$$C \leftrightarrow Q$$

teremos que $\hat{A}$ e $\hat{R}$ não são ângulos congruentes, nem $\hat{B}$ e $\hat{P}$, nem $\hat{C}$ e $\hat{Q}$, mas nem por isso os dois triângulos deixariam de ser semelhantes. Apenas, não o seriam para *esta* correspondência.

11.2 — CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA

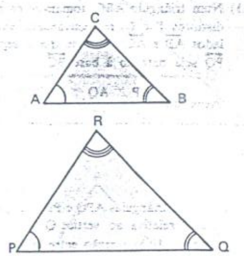
Para se concluir que dois triângulos dados são semelhantes, não é necessário que todas as condições dadas na definição se evidenciem. Por exemplo, sabendo-se que os três ângulos internos são dois a dois congruentes, já se pode garantir que os triângulos são semelhantes, pois a proporcionalidade dos lados será uma conseqüência forçosa. Do mesmo modo, se soubermos que os dois triângulos têm os lados proporcionais, isso acarretará que os ângulos correspondentes são congruentes, resultando que os dois triângulos são semelhantes. Vamos relacionar os principais *critérios de semelhança* de triângulos.

1.º critério $\boxed{\text{A A A}}$ (ângulo — ângulo — ângulo)

$$\text{Se} \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{P} \\ \hat{B} \equiv \hat{Q} \\ \hat{C} \equiv \hat{R} \end{cases}$$

então $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

Se dois triângulos tem congruentes dois a dois **os três ângulos internos**, então esses dois triângulos são semelhantes.

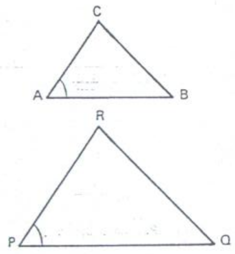


2.º critério $\boxed{\text{L A L}}$ (lado — ângulo — lado)

$$\text{Se} \begin{cases} \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR} \\ \hat{A} \equiv \hat{P} \end{cases}$$

então $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

Se dois triângulos têm **dois pares de lados** proporcionais **e os ângulos compreendidos entre eles** congruentes, então esses dois triângulos são semelhantes.

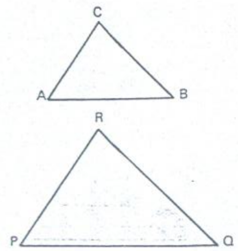


3.º critério $\boxed{\text{L L L}}$

$$\text{Se } \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$$

então $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

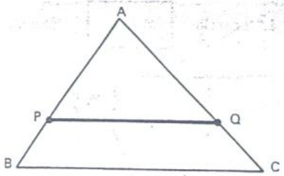
Se dois triângulos têm **os três lados correspondentes proporcionais**, então esses dois triângulos são semelhantes.



Exercícios Resolvidos

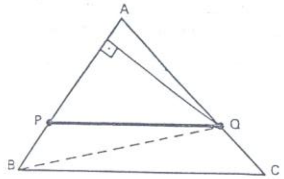
11.1) Num triângulo ABC, tomam-se os pontos distintos P e Q, respectivamente sobre os lados $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, de modo que o segmento $\overleftrightarrow{PQ}$ seja paralelo à base $\overleftrightarrow{BC}$.

Prove que $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$.



Solução

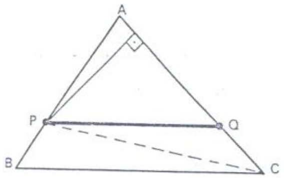
Os triângulos APQ e PBQ têm mesma altura, relativa ao vértice Q. Então (veja exercício 10.5) a razão entre as suas áreas é igual à razão entre as bases. Temos então



$$\frac{S_{APQ}}{S_{PBQ}} = \frac{AP}{PB}$$

O mesmo ocorre com os triângulos APQ e QPC, para os quais se tem

$$\frac{S_{APQ}}{S_{QPC}} = \frac{AQ}{QC}$$



Por outro lado, os triângulos PBQ e QPC têm a mesma base $\overleftrightarrow{PQ}$ e as suas alturas relativas a essa base são iguais, pois $\overleftrightarrow{PQ} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$. Assim, suas áreas são iguais:

$$S_{PBQ} = S_{QPC}$$

Concluímos então que $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$, donde tiramos, sucessivamente:

$$\frac{PB}{AP} = \frac{QC}{AQ}$$

$$\frac{PB}{AP} + 1 = \frac{QC}{AQ} + 1$$

$$\frac{PB + AP}{AP} = \frac{QC + AQ}{AQ}$$

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$$

ou seja,

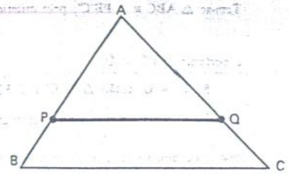
$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$$

11.2) Prove o recíproco do teorema do exercício anterior, isto é, prove que num triângulo ABC, se tomamos os pontos distintos $P \in \overleftrightarrow{AB}$ e $Q \in \overleftrightarrow{AC}$ de tal modo que

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$$

Então,

$$\overleftrightarrow{PQ} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$$

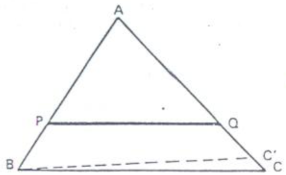


Solução

Imaginemos que a reta conduzida por B, paralela à reta $\overleftrightarrow{PQ}$, intercepta $\overleftrightarrow{AC}$ em C'. Pelo teorema do exercício anterior, tem-se

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{AC'}$$

Conclui-se, então, que AC' = AC. Assim, os pontos C e C' coincidem e portanto $\overleftrightarrow{PQ} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$.



11.3) Demonstre o critério A A A de semelhança.

Solução

Consideremos os triângulos ABC e PQR, para os quais

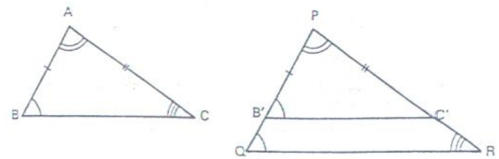
$$\hat{A} \equiv \hat{P}$$
$$\hat{B} \equiv \hat{Q}$$
$$\hat{C} \equiv \hat{R}$$

Para provar que eles são semelhantes, basta provar que os lados correspondentes são proporcionais, ou seja, que

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$$

É suficiente provar que $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$, pois a demonstração da última igualdade é totalmente análoga.

Tomemos sobre a semi-reta $\overrightarrow{PQ}$ o ponto B' tal que PB' = AB e sobre a semi-reta $\overrightarrow{PR}$ o ponto C' tal que PC' = AC.



Tem-se $\triangle ABC \equiv \triangle PB'C'$, pelo critério LAL de congruência. Sendo assim, tem-se

$$P\hat{B'}C' \equiv \hat{B}$$

e portanto $P\hat{B'}C' \equiv \hat{Q}$.

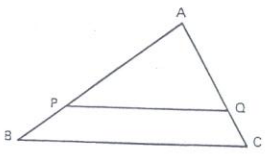
— Se $B' = Q$, então $\triangle PB'C'$ e $\triangle PQR$ são coincidentes, logo $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{AR} = 1$.

— Se $B' \neq Q$, então podemos afirmar que $\overleftrightarrow{B'C'} \,/\!/\, \overleftrightarrow{QR}$ (veja **nota** no exercício 6.30). Neste caso, recaímos na situação do exercício 11.1, isto é, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$.

Nota: Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo deve ser 180°, é claro que se $\hat{A} \equiv \hat{P}$ e $\hat{B} \equiv \hat{Q}$, os terceiros ângulos são congruentes obrigatoriamente: $\hat{C} \equiv \hat{R}$. Assim, na aplicação do critério A A A de semelhança, é suficiente verificar que *dois pares de ângulos correspondentes* são congruentes.

11.4) Na figura, tem-se $\overleftrightarrow{PQ} \,/\!/\, \overleftrightarrow{BC}$. Mostre que

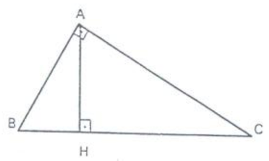
$$\triangle APQ \sim \triangle ABC$$



Solução

As retas paralelas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são cortadas pela transversal $\overleftrightarrow{AB}$, logo, os ângulos correspondentes $A\hat{P}Q$ e $A\hat{B}C$ são congruentes. Assim, os triângulos $\triangle APQ$ e $\triangle ABC$ têm estes dois ângulos congruentes, e como $\hat{A}$ é comum, resulta que são semelhantes, pelo critério A A A.

11.5) O triângulo $\triangle ABC$ é retângulo em A. Seja $\overline{AH}$ a altura relativa à hipotenusa. Mostre que os triângulos $\triangle HBA$ e $\triangle HAC$ são semelhantes entre si e também são semelhantes ao $\triangle ABC$.



Solução

Observando os triângulos $\triangle HBA$ e $\triangle ABC$, temos $B\hat{H}A \equiv B\hat{A}C$, pois ambos são retos. Além disso, o ângulo $\hat{B}$ é comum aos dois triângulos. Assim, por A A A temos

$$\triangle HBA \sim \triangle ABC$$

Por outro lado, para os triângulos $\triangle HAC$ e $\triangle ABC$ temos $A\hat{H}C \equiv B\hat{A}C$, pois ambos são retos e, também, o ângulo $\hat{C}$ é comum. Logo,

$$\triangle HAC \sim \triangle ABC$$

e, conseqüentemente, $\triangle HBA \sim \triangle HAC$.

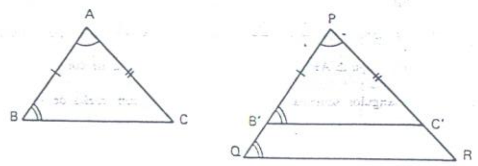
11.6) Demonstre o critério L A L de semelhança.

Solução

Consideremos os triângulos ABC e PQR, para os quais

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} \quad \text{e} \quad \hat{A} \equiv \hat{P}$$

Tomemos sobre a semi-reta $\overrightarrow{PQ}$ o ponto B' tal que PB' = AB e sobre a semi-reta $\overrightarrow{PR}$ o ponto C' tal que PC' = AC. Pelo critério L A L de congruência, temos $\triangle ABC \equiv \triangle PB'C'$.



Sendo assim, $\frac{PB'}{PQ} = \frac{PC'}{PR}$. Pelo teorema do exercício 11.2, concluímos que $\overleftrightarrow{B'C'} \,/\!/\, \overleftrightarrow{QR}$.

Daí resulta que $\triangle PB'C' \sim \triangle PQR$ (veja exercício 11.4) e então

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

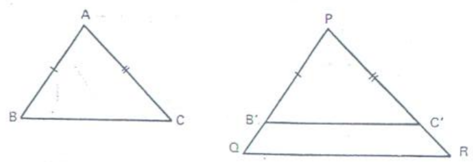
11.7) Demonstre o critério L L L de semelhança.

Solução

Consideremos os triângulos ABC e PQR, para os quais

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$$

Tomemos sobre a semi-reta $\overrightarrow{PQ}$ o ponto B' tal que PB' = AB e sobre a semi-reta $\overrightarrow{PR}$ o ponto C' tal que PC' = AC. Mostremos, primeiramente, que $\triangle PB'C' \sim \triangle PQR$. Como



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

temos

$$\frac{PB'}{PQ} = \frac{PC'}{PR}$$

Além disso, o ângulo $\hat{P}$ é comum aos dois triângulos. Assim, pelo critério L A L de semelhança, vem

$$\triangle PB'C' \sim \triangle PQR$$

Mostremos, agora, que $\triangle ABC \equiv \triangle PB'C'$, o que será suficiente para se concluir que

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

Como $\triangle PB'C' \sim \triangle PQR$, temos $\frac{PC'}{PR} = \frac{B'C'}{QR}$, ou seja, $\frac{AC}{PR} = \frac{B'C'}{QR}$, donde tiramos que $B'C' = \frac{AC}{PR} \cdot QR$.

Por outro lado, como $\frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$, temos que $BC = \frac{AC}{PR} \cdot QR$. Assim sendo, conclui-se que $B'C' = BC$, logo $\triangle ABC \equiv \triangle PB'C'$, pelo critério L L L de congruência.

11.8) Sejam dois triângulos semelhantes, $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$, com razão de semelhança igual a $\frac{AB}{PQ} = k$. Sejam p_1 e p_2, respectivamente, os semiperímetros dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$.

Prove que $\frac{2p_1}{2p_2} = k$.

Solução

Como $\triangle ABC \sim PQR$, temos $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = k$, donde tiramos $AB = k \cdot PQ$, $AC = k \cdot PR$ e $BC = k \cdot QR$. Logo,

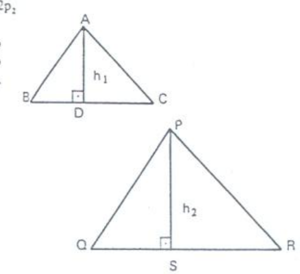
$$AB + AC + BC = k\,(PQ + PR + QR)$$
$$2p_1 = k \cdot (2p_2)$$

e, assim,

$$\frac{2p_1}{2p_2} = k$$

11.9) Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$, como no exercício anterior. Seja h_1 a altura do $\triangle ABC$, relativa ao vértice A, e seja h_2 a altura do $\triangle PQR$, relativa ao vértice P.

Prove que $\frac{h_1}{h_2} = k$.

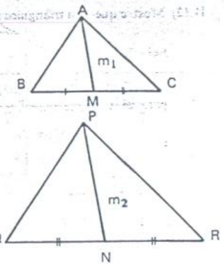


Solução

Observe as figuras. Para os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle PQS$, temos $\hat{B} \equiv \hat{Q}$ e $A\hat{D}B = P\hat{S}Q$, logo, pelo critério A A A, temos $\triangle ABD \sim \triangle PQS$. Daí resulta que $\frac{h_1}{h_2} = \frac{AB}{PQ} = k$.

11.10) Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$, como no exercício 11.8. Sejam m_1 a mediana do $\triangle ABC$, relativa ao lado $\overleftrightarrow{BC}$, e seja m_2 a mediana do $\triangle PQR$, relativa ao lado $\overleftrightarrow{QR}$.

Prove que $\frac{m_1}{m_2} = k$.



Solução

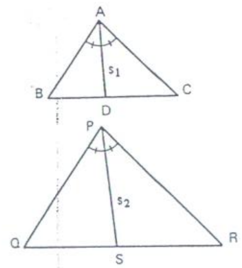
Observe as figuras. Para os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle PQN$, temos $\hat{B} \equiv \hat{Q}$ e ainda

$$\frac{BM}{QN} = \frac{\frac{BC}{2}}{\frac{QR}{2}} = \frac{BC}{QR} = \frac{AB}{PQ} = k$$

Logo, pelo critério L A L de semelhança, temos $\triangle ABM \sim \triangle PQN$. Assim, $\frac{m_1}{m_2} = k$.

11.11) Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$, como no exercício 11.8. Seja s_1 a bissetriz interna do $\triangle ABC$, relativa ao vértice A, e seja s_2 a bissetriz interna do $\triangle PQR$, relativa ao vértice P.

Prove que $\frac{s_1}{s_2} = k$.



Solução

Observe as figuras. Para os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle PQS$, temos $\hat{B} \equiv \hat{Q}$ e ainda

$$B\hat{A}D = \frac{1}{2}\hat{A} = \frac{1}{2}\hat{P} = Q\hat{P}S$$

Assim, pelo critério A A A, $\triangle ABD \sim \triangle PQS$, donde

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{AB}{PQ} = k$$

11.12) Mostre que dois triângulos isósceles são semelhantes se têm os ângulos dos vértices congruentes.

Solução

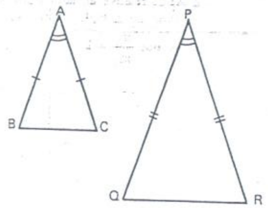
Observe os dois triângulos isósceles, para os quais se tem $\hat{A} \equiv \hat{P}$. Como

$$AB = AC$$

e

$$PQ = PR$$

temos $\dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR}$, logo, pelo critério L A L, $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.



Nota: Poderíamos ter utilizado o critério A A A, observando que

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180° - \hat{A}}{2} = \frac{180° - \hat{P}}{2} = \hat{Q} = \hat{R}$$

11.13) Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$, como no exercício 11.8. Seja R_1 o raio da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$ e seja R_2 o raio da circunferência circunscrita ao $\triangle PQR$. Prove que $\dfrac{R_1}{R_2} = k$.

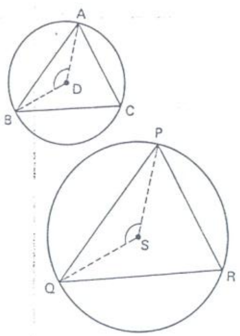
Solução

Observe as figuras. Para os triângulos isósceles ABD e PQS, temos

$$\hat{D} = 2\hat{C} = 2\hat{R} = \hat{S}$$

Assim, pelo resultado do exercício anterior, temos $\triangle ABD \sim \triangle PQS$, donde

$$\frac{AD}{PS} = \frac{AB}{PQ}, \quad \text{isto é,} \quad \frac{R_1}{R_2} = k$$



11.14) Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$, como no exercício 11.8. Sejam r_1 e r_2 os raios das circunferências inscritas nesses triângulos. Prove que $\dfrac{r_1}{r_2} = k$.

Solução

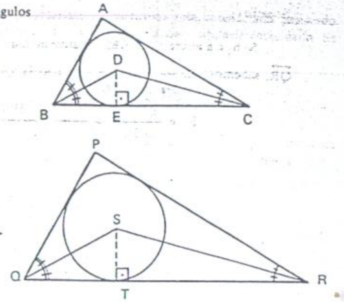
Convém lembrar, inicialmente, que o centro da circunferência inscrita num triângulo (incentro) é a interseção das bissetrizes internas (veja exercício 9.8).

Observe as figuras. Para os triângulos $\triangle BCD$ e $\triangle QRS$, temos

$$C\hat{B}D = \frac{1}{2}\hat{B} = \frac{1}{2}\hat{Q} = R\hat{Q}S$$

e

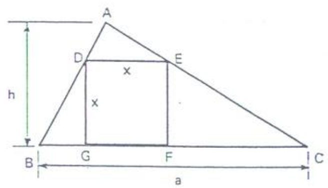
$$B\hat{C}D = \frac{1}{2}\hat{C} = \frac{1}{2}\hat{R} = Q\hat{R}S$$



Assim, pelo critério A A A, $\triangle BCD \sim \triangle QRS$, logo para as *alturas* DE e ST destes triângulos (as quais são exatamente os raios r_1 e r_2) podemos escrever

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{DE}{ST} = \frac{BC}{QR} = k \qquad \text{(veja exercício 11.9)}$$

11.15) Na figura, DEFG é um quadrado. Calcule o lado x desse quadrado, em função da base a e da altura h do $\triangle ABC$.



Solução

A altura do $\triangle ADE$ mede $h - x$, e a sua base mede x. Como $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, podemos escrever

$$\frac{h - x}{h} = \frac{x}{a}$$

donde obtemos $x = \dfrac{ah}{a + h}$.

11.16) Áreas de triângulos semelhantes — Sejam S_1 e S_2 as áreas de dois triângulos semelhantes $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$, cuja razão de semelhança é $\dfrac{AB}{PQ} = k$. Prove que $\dfrac{S_1}{S_2} = k^2$.

Solução

Se h_1 é a altura do $\triangle ABC$, relativa ao lado $\overleftrightarrow{BC}$ e h_2 é a altura do $\triangle PQR$, relativa ao lado $\overleftrightarrow{QR}$, sabemos que $\frac{h_1}{h_2} = k$ (veja exercício 11.9). Temos também $\frac{BC}{QR} = k$. Portanto,

$$S_1 = \frac{BC \cdot h_1}{2} = \frac{(k \cdot QR) \cdot (k \cdot h_2)}{2} = k^2 \cdot \frac{QR \cdot h_2}{2} = k^2 \cdot S_2$$

donde

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2$$

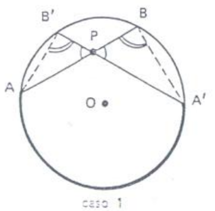
A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

11.17) Potência de um ponto em relação a uma circunferência — Sejam dados uma circunferência fixa, de centro O e raio r, e um ponto P, fixo. Vamos conduzir por P duas retas, que determinam as cordas $\overline{AB}$ ($A \neq B$) e $\overline{A'B'}$ ($A' \neq B'$). Mostre que

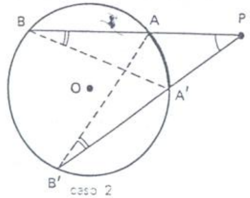
$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

Solução

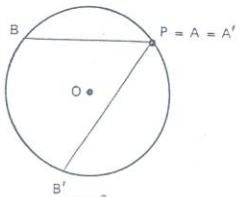
Há três situações a considerar, segundo P esteja no interior do círculo, no seu exterior ou sobre a circunferência.



caso 1



caso 2



caso 3

Casos 1 e 2: Para os triângulos $\triangle APB'$ e $\triangle A'PB$ temos $A\hat{P}B' = A'\hat{P}B$ (opv no caso 1 e comum no caso 2) e ainda

$$A\hat{B}'P = A'\hat{B}P = \frac{1}{2} \text{med}(\widehat{AA'})$$

Logo, pelo critério A A A, $\triangle APB' \sim \triangle A'PB$. Então, $\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB}$, donde

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

Caso 3: Se P pertence à circunferência, então $PA = PA' = 0$, logo

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = 0$$

Nota: O produto $PA \cdot PB$ não depende, portando, da particular reta considerada passando por P. Este produto tem o nome de potência do ponto P, em relação à circunferência dada. Se a circunferência é fixada, podemos indicar

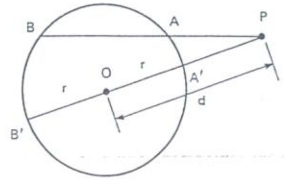
$$PA \cdot PB = \text{Pot}(P)$$

É imediato que, se P pertence à circunferência, então $\text{Pot}(P) = 0$.

11.18) Dados uma circunferência de centro O e raio r e um ponto P qualquer, seja $PO = d$ a distância de P ao centro da circunferência. Mostre que $\text{Pot}(P) = |d^2 - r^2|$.

Solução

Como Pot (P) independe da particular reta considerada, se tomarmos por P uma reta que passe pelo centro O, teremos (veja as figuras):



a) Sendo P externo,

$$\text{Pot}(P) = PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

mas

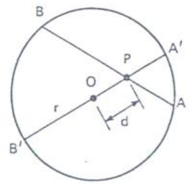
$$PA' = PO - A'O = d - r$$

e

$$PB' = PO + OB' = d + r$$

donde

$$\text{Pot}(P) = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2$$



b) Sendo P interno,

$$\text{Pot}(P) = PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

mas

$$PA' = A'O - PO = r - d$$

e

$$PB' = OB' + PO = r + d$$

donde

$$\text{Pot}(P) = (r - d)(r + d) = r^2 - d^2$$

Assim, em ambos os casos, temos

$$\text{Pot}(P) = |d^2 - r^2|$$

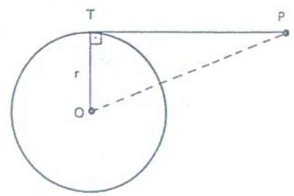
11.19) Seja P um ponto externo a um circulo de centro O e raio r, pelo qual traçamos uma reta que tangencia a circunferência no ponto T. Mostre que $\text{Pot}(P) = (PT)^2$.

Solução

Como $\triangle POT$ é retângulo, pelo teorema de Pitágoras temos

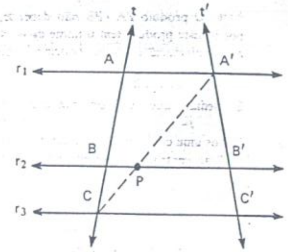
$$(PT)^2 + (OT)^2 = (PO)^2$$

isto é, $(PT)^2 = (PO)^2 - (OT)^2 = d^2 - r^2 = \text{Pot}(P)$ conforme se viu no exercício anterior.



11.20) **Teorema de Tales no plano** – Sejam, num mesmo plano, três retas r_1, r_2 e r_3, paralelas duas a duas, cortadas pelas duas retas transversais t e t', nos pontos A, B, C e A', B', C', respectivamente. Prove que os segmentos determinados nas duas transversais são proporcionais, isto é, prove que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$



Solução

Podemos supor que B está entre A e C e B' está entre A' e C', como está indicado na figura, onde foi desenhada também a reta $\overleftrightarrow{A'C}$, que corta r_2 em P. Nestas condições, temos $\triangle A'PB' \sim \triangle A'CC'$, donde $\dfrac{A'C}{A'P} = \dfrac{A'C'}{A'B'}$ e também $\triangle CPB \sim \triangle CA'A$, donde $\dfrac{A'C}{PC} = \dfrac{AC}{BC}$.

Daí vem $\dfrac{A'C - A'P}{A'P} = \dfrac{A'C' - A'B'}{A'B'}$

$$\frac{PC}{A'P} = \frac{B'C'}{A'B'} \qquad (1)$$

e também

$$\frac{A'C - PC}{PC} = \frac{AC - BC}{BC}$$

$$\frac{A'P}{PC} = \frac{AB}{BC}$$

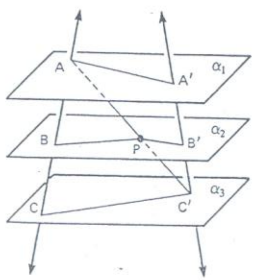
$$\frac{PC}{A'P} = \frac{BC}{AB} \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2), vem $\dfrac{B'C'}{A'B'} = \dfrac{BC}{AB}$. Assim,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB + BC}{A'B' + B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

11.21) Teorema de Tales no espaço – Sejam três planos α_1, α_2 e α_3, paralelos dois a dois, furados por duas retas transversais (não necessariamente coplanares) t e t', nos pontos A, B, C e A', B', C', respectivamente. Prove que os segmentos determinados nas duas transversais são proporcionais, isto é,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$



Solução

Observemos a figura, onde foi desenhada a reta $\overleftrightarrow{AC'}$, que encontra α_2 em P. Para o triângulo $\triangle AA'C'$ temos (utilizando o exercício anterior)

$$\frac{A'B'}{AP} = \frac{A'C'}{AC'} = \frac{B'C'}{PC'} \qquad (1)$$

e para o triângulo $\triangle ACC'$ temos

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{PC'} \qquad (2)$$

Assim, dividindo (2) por (1):

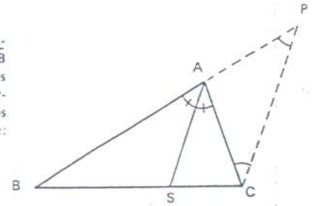
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

11.22) Demonstre que cada bissetriz interna de um triângulo separa o lado em dois segmentos, cujas medidas são proporcionais aos lados adjacentes.

Solução

Vamos construir por C uma reta paralela à bissetriz $\overleftrightarrow{AS}$, a qual encontra a reta $\overleftrightarrow{AB}$ no ponto P. Então, $A\hat{C}P = C\hat{A}S$ (alternos internos). Além disso, o ângulo $C\hat{A}B$, externo ao triângulo $\triangle ACP$, é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele:

$$C\hat{A}B = A\hat{C}P + A\hat{P}C$$
$$2C\hat{A}S = A\hat{C}P + A\hat{P}C$$
$$2C\hat{A}S = C\hat{A}S + A\hat{P}C$$
$$A\hat{P}C = C\hat{A}S$$



Assim, $\triangle ACP$ é isósceles, logo AP = AC.
No $\triangle BCP$ temos

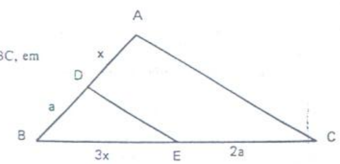
$$\frac{BS}{SC} = \frac{BA}{AP}$$

e portanto

$$\frac{BS}{SC} = \frac{BA}{AC}$$

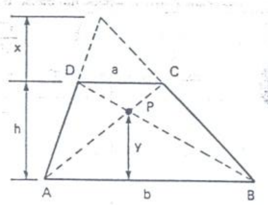
Exercícios Propostos

11.23) Na figura, $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AC}$. Calcule AB e BC, em função de a.

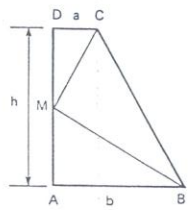


11.24) **Duas circunferências tangentes entre si estão inscritas no ângulo $\hat{A}$. Sendo 5 cm e 13 cm seus raios, determine as distâncias de seus centros ao ponto A.**

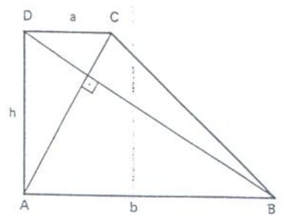
11.25) Do trapézio ABCD da figura, são dadas as bases **a** e **b** e a altura **h** (b > a). Determine **x**, **y** e ainda as razões $\frac{AP}{PC}$ e $\frac{BP}{PD}$.



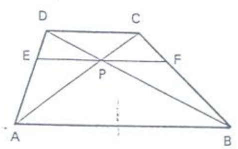
11.26) Dado o trapézio ABCD, retângulo em A e D, toma-se o ponto M sobre $\overleftrightarrow{AD}$, tal que $\frac{AM}{MD} = k$. Sabendo que $B\hat{M}C$ é reto, calcule a altura **h** do trapézio, em função das bases **a** e **b** e de **k**.



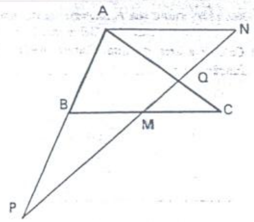
11.27) O trapézio ABCD da figura é retângulo em A e D. Calcule a sua altura **h**, em função das bases **a** e **b**, sabendo que as diagonais são perpendiculares entre si. Determine também, em função de **a** e **b**, as medidas das diagonais.



11.28) Pela interseção P das diagonais do trapézio ABCD, traça-se a reta paralela às bases, que encontra os lados em E e F. Mostre que EP = PF.



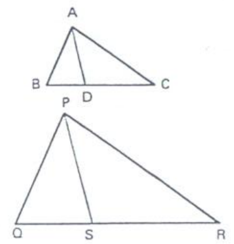
11.29) Na figura, $\overleftrightarrow{AN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e M é o ponto médio de $\overleftrightarrow{BC}$. Mostre que $\frac{PM}{PN} = \frac{MQ}{QN}$.



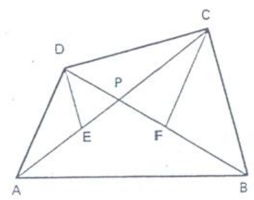
11.30) Sendo $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, tomam-se D e S sobre os lados $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{QR}$, respectivamente, de tal modo que

$$\frac{BD}{DC} = \frac{QS}{SR}$$

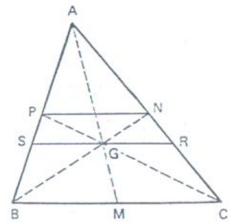
Mostre que $\frac{AD}{PS} = \frac{AB}{PQ}$.



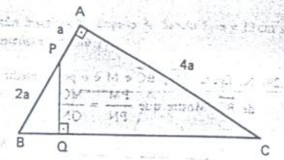
11.31) Na figura, $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CF} \parallel \overleftrightarrow{AD}$. Mostre que $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.



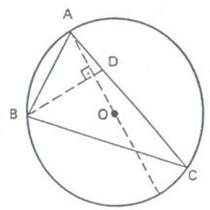
11.32) Na figura, M, N e P são os pontos médios dos lados do triângulo ABC e G é o seu baricentro. Sendo $\overleftrightarrow{SR} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, determine as medidas dos lados do trapézio PSRN, em função das medidas **a**, **b** e **c** dos lados do $\triangle$ ABC.



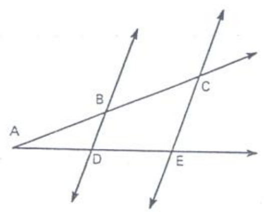
11.33) **Calcule a área do quadrilátero APQC, em função de a.**



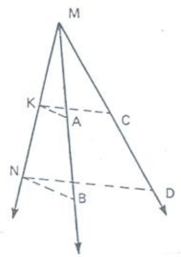
11.34) O $\triangle$ ABC está inscrito numa circunferência de centro O. Por B conduzimos $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AO}$, que encontra $\overleftrightarrow{AC}$ em D. Sendo AB = 6 e AC = 9, calcule AD.



11.35) Na figura, tem-se $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{CE}$, AC + BC = 21 m e $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{5}{3}$. Calcule AB.

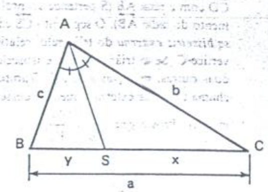


11.36) Têm-se três semi-retas $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{MD}$. Sobre $\overrightarrow{MA}$ toma-se o ponto B, tal que MB = = 54 cm. Sabe-se que MA = 18 cm e MD = = 75 cm. A reta por A, paralela a $\overleftrightarrow{BN}$, encontra $\overrightarrow{MN}$ em K. A reta por K, paralela a $\overleftrightarrow{ND}$, encontra $\overrightarrow{MD}$ em C. Calcule MC.



11.37) O $\triangle$ ABC tem o ângulo $\hat{B}$ obtuso e está inscrito em uma circunferência. A sua altura $\overleftrightarrow{AD}$ é tangente a essa circunferência. Calcule AD, sendo BC = 12 cm e BD = 4 cm.

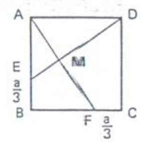
11.38) **Sendo $\overleftrightarrow{AS}$ a bissetriz interna relativa ao vértice A, determine x e y em função de a, b e c.**



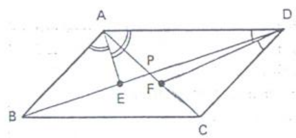
11.39) Dado o quadrado ABCD, de lado a, tomam-se os pontos E sobre $\overline{AB}$ e F sobre $\overline{BC}$, tais que EB = FC = $\dfrac{a}{3}$.

a) Mostre que $\overleftrightarrow{AF} \perp \overleftrightarrow{ED}$.

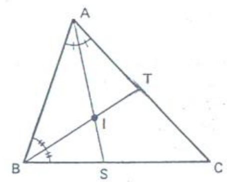
b) Dê a área do $\triangle$ AEM, em função de a.



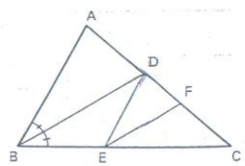
11.40) As bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ do paralelogramo ABCD encontram as diagonais $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ em E e F, respectivamente. Mostre que $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.



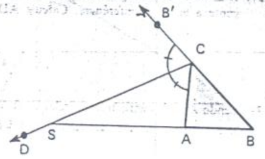
11.41) No $\triangle$ ABC, tem-se AB = 40, AC = 50, BC = 60. Determine a razão $\dfrac{AI}{IS}$.



11.42) Na figura, $\overleftrightarrow{BD}$ é a bissetriz interna, $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BD}$. Sendo AB = 20, BC = 30 e AD − FC = 1, calcule AC.

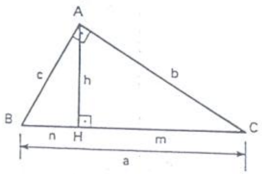


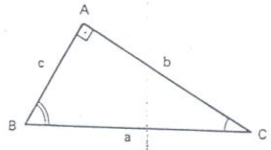
11.43) **Bissetrizes externas de um triângulo** – Seja $\overrightarrow{CD}$ a semi-reta bissetriz do ângulo externo $A\hat{C}B'$ do $\triangle$ ABC e seja S a interseção da reta $\overleftrightarrow{CD}$ com a reta $\overleftrightarrow{AB}$ (S pertence ao prolongamento do lado $\overline{AB}$). O segmento $\overline{CS}$ chama-se *bissetriz externa* do triângulo, relativa ao vértice C. Se o triângulo não é isósceles, há duas outras, relativas a A e B. Também se chama bissetriz externa a medida desses segmentos. Prove que $\dfrac{AS}{SB} = \dfrac{AC}{BC}$.

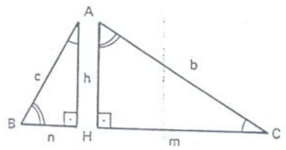


11.3 — RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Se o triângulo ABC é retângulo em A, então a sua altura $\overleftrightarrow{AH}$ separa-o em dois outros triângulos, $\triangle$HBA e $\triangle$ HAC, ambos semelhantes ao $\triangle$ ABC. Examinando a proporcionalidade existente entre os lados destes três triângulos, obteremos um certo número de **relações**, que apresentam uma grande variedade de aplicações. Inicialmente, fixemos alguma **nomenclatura** em relação ao triângulo retângulo, de acordo com as figuras ao lado:







hipotenusa = **a**
catetos = **b** e **c**
altura relativa à hipotenusa = **h**
projeção do cateto **b** sobre a hipotenusa = **m**
projeção do cateto **c** sobre a hipotenusa = **n**

a) $\boxed{\triangle ABC \sim \triangle HBA}$ Escrevemos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{n}$$

De $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{h}$ vem $bc = ah$ (1)

De $\dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{n}$ vem $c^2 = an$ (2)

De $\dfrac{b}{h} = \dfrac{c}{n}$ vem $ch = bn$ (3)

b) $\boxed{\triangle ABC \sim \triangle HAC}$ Escrevemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h}$$

De $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{m}$ vem $b^2 = am$ (4)

De $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{h}$ vem $bc = ah$ (5)

De $\dfrac{b}{m} = \dfrac{c}{h}$ vem $bh = cm$ (6)

c) $\boxed{\triangle HBA \sim \triangle HAC}$ Escrevemos:

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$

De $\dfrac{c}{b} = \dfrac{h}{m}$ vem $bh = cm$ (7)

De $\dfrac{c}{b} = \dfrac{n}{h}$ vem $ch = bn$ (8)

De $\dfrac{h}{m} = \dfrac{n}{h}$ vem $h^2 = mn$ (9)

Várias das relações obtidas coincidem. Eis um resumo:

1.ª) $b^2 = am$	3.ª) $h^2 = mn$	5.ª) $bh = cm$
2.ª) $c^2 = an$	4.ª) $bc = ah$	6.ª) $ch = bn$

Se três números, **x**, **y** e **z**, são tais que $x^2 = yz$, diz-se que **x** é *média geométrica* ou *média proporcional* entre **y** e **z**. As relações acima podem ser enunciadas assim:

1.ª e 2.ª — Cada cateto é média geométrica entre a hipotenusa e a sua projeção sobre ela.

3.ª — A altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre os dois segmentos que ela determina sobre a hipotenusa.

4.ª — O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

5.ª e 6.ª — O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto da sua projeção sobre a hipotenusa, pelo outro cateto.

Observações

1.ª) Note que a 4.ª relação, $bc = ah$, pode ser obtida escrevendo-se a área do $\triangle ABC$ de duas maneiras:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{ah}{2} = \frac{bc}{2}$$

2.ª) Se somarmos a 1.ª e a 2.ª relações:

$$\begin{aligned} b^2 &= am \\ c^2 &= an \\ \hline b^2 + c^2 &= am + an \end{aligned}$$

resulta $b^2 + c^2 = a(m+n) = a \cdot a = a^2$ que é o já conhecido teorema de Pitágoras.

Exercícios Resolvidos

11.44) Dados $m = 3$ e $n = 2$, calcule **a**, **b**, **c** e **h** (os dados referem-se à figura anterior).

Solução

a) $a = m + n = 3 + 2 = 5$ — $a = 5$

b) $h^2 = mn = 3 \cdot 2 = 6$ — $h = \sqrt{6}$

c) $b^2 = am = 5 \cdot 3 = 15$ — $b = \sqrt{15}$

d) $c^2 = an = 5 \cdot 2 = 10$ — $c = \sqrt{10}$

11.45) Mostre que $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ (as letras referem-se à figura anterior).

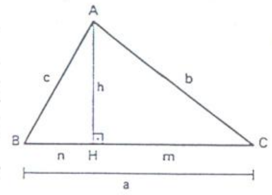
Solução

Lembrando que $bc = ah$ e $b^2 + c^2 = a^2$, escrevemos

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2+c^2}{b^2c^2} = \frac{a^2}{(ah)^2} = \frac{1}{h^2}$$

11.46) Seja um triângulo ABC, cuja altura $\overleftrightarrow{AH}$ encontra a base $\overleftrightarrow{BC}$ num ponto H, interno ao segmento $\overline{BC}$. Prove que, se AH é média geométrica entre BH e HC, então o triângulo é retângulo em A.

Solução



Sabemos que $h^2 = mn$ e devemos provar que $\hat{A}$ é reto.

No $\triangle$ HBA, temos $c^2 = h^2 + n^2$.

No $\triangle$ HAC, temos $b^2 = h^2 + m^2$.

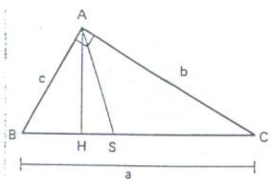
Assim,

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= 2h^2 + m^2 + n^2 = \\ &= 2mn + m^2 + n^2 = \\ &= (m+n)^2 = a^2 \end{aligned}$$

donde $\hat{A}$ é reto (veja o recíproco do teorema de Pitágoras no item 10.2 do capítulo 10).

11.47) Num triângulo retângulo, traçam-se a bissetriz $\overleftrightarrow{AS}$ do ângulo reto e a altura $\overleftrightarrow{AH}$ relativa à hipotenusa (S e H sobre a hipotenusa). Se $\frac{BS}{SC} = k$, calcule $\frac{BH}{HC}$, em função de **k**.

Solução



Temos (pelo exercício 11.22)

$$\frac{BS}{SC} = \frac{c}{b}, \quad \text{donde} \quad \frac{c}{b} = k.$$

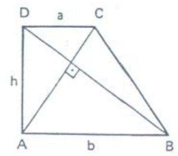
Assim, $\frac{c^2}{b^2} = k^2$

$$\frac{a \cdot (BH)}{a \cdot (HC)} = k^2$$

donde

$$\frac{BH}{HC} = k^2$$

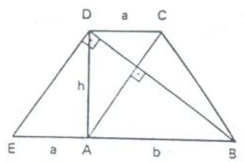
11.48) O trapézio ABCD da figura é retângulo em A e D e as suas diagonais $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são perpendiculares. Calcule a altura **h**, em função das bases **a** e **b**.



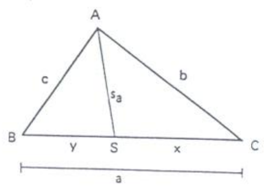
Solução

A reta paralela à diagonal $\overleftrightarrow{AC}$, conduzida por D, encontra $\overline{AB}$ em E. Tem-se EA = a. No triângulo DEB temos: $h^2 = ab$, donde

$$h = \sqrt{ab}$$



11.49) No $\triangle ABC$, $AS = s_a$ é a bissetriz interna relativa ao vértice A. Determine s_a, em função dos lados **a**, **b** e **c**.



Solução

Utilizando o resultado do exercício 11.38, temos $x = \dfrac{ab}{b+c}$ e $y = \dfrac{ac}{b+c}$.

Pela relação de Stewart (veja exercício 10.11), vem

$$a(s_a^2 + xy) = b^2y + c^2x$$

$$a\left(s_a^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}\right) = \frac{ab^2c}{b+c} + \frac{abc^2}{b+c}$$

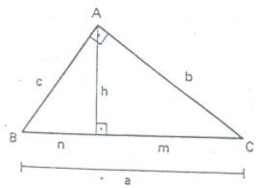
$$s_a^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc$$

e então

$$s_a = \frac{\sqrt{bc\,[(b+c)^2 - a^2]}}{b+c}$$

Exercícios Propostos

11.50) Considere o $\triangle ABC$ da figura, onde estão indicados os elementos **a**, **b**, **c**, **h**, **m** e **n**. Em cada linha da tabela seguinte, são dados os valores de dois destes elementos. Pede-se calcular os demais.

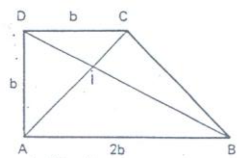


	a	b	c	m	n	h
a	25	20				
b	169		65			
c	289			225		
d	625				49	
e	841					420
f		20	15			
g		156		144		
h		255			64	
i		600				168
j			580	441		
k			15		9	
l			65			60
m				225	64	
n				576		168
o					400	420
p	65		33			

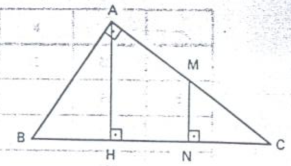
11.51) Para o $\triangle ABC$ do exercício anterior, mostre que $\dfrac{m}{n} = \dfrac{b^2}{c^2}$.

11.52) Um segmento de 8 cm é perpendicular ao diâmetro de uma circunferência, tendo suas extremidades no diâmetro e na circunferência. O diâmetro fica, então, separado em dois segmentos cujas medidas diferem de 12 cm. Calcule o raio da circunferência.

11.53) O trapézio ABCD é retângulo em A e D. Calcule:
a) as diagonais;
b) as medidas AI, BI, CI e DI.

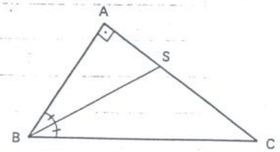


11.54) Pelo ponto médio M do cateto $\overleftrightarrow{AC}$ do triângulo retângulo ABC, toma-se um segmento $\overline{MN}$ perpendicular à hipotenusa $\overline{BC}$, encontrando-a em N. Calcule os lados do triângulo ABC, sabendo que BN = 5 cm e NC = 3 cm.



11.55) No $\triangle$ ABC da figura, $\overrightarrow{BS}$ é a bissetriz do maior dos ângulos agudos. Calcule BS, sabendo que BC = 30 cm e que AC − AB = = 6 cm.

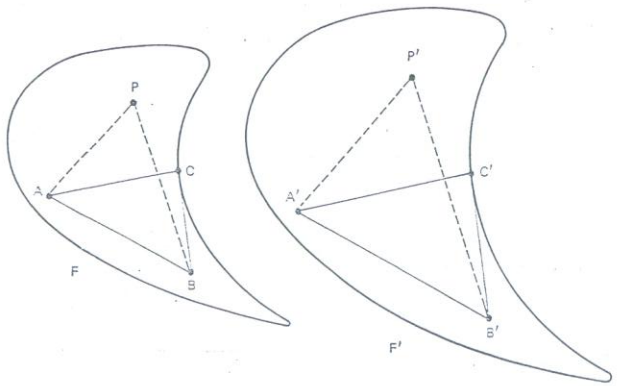
(Sugestão: veja exercício 11.22.)



11.4 — O CONCEITO GERAL DE SEMELHANÇA

No item 11.1, vimos a definição da relação de semelhança entre *triângulos*. Vamos estender este conceito a outras figuras geométricas planas. A partir da figura F da ilustração, vamos *construir* outra figura, F′, que seja semelhante a ela.

Escolhidos três pontos arbitrários, A, B e C, da figura F, **não alinhados**, tomemos outros três pontos A′, B′ e C′, de tal modo que $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.



Agora, dado um ponto qualquer P da figura F, podemos obter em correspondência outro ponto P′, do seguinte modo:

a) Se $P \notin \overleftrightarrow{AB}$, escolhemos P′ de modo que $\triangle A'P'B' \sim \triangle APB$ (P′ e P em semiplanos correspondentes, com relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$).

b) Se $P \in \overleftrightarrow{AB}$, escolhemos P′ de modo que $P' \in \overleftrightarrow{A'B'}$ e $\frac{A'P'}{AP} = \frac{B'P'}{BP} = \frac{A'B'}{AB}$.

Cada ponto de F terá uma *imagem* através da correspondência assim definida. Tais imagens formam uma nova figura, F′, que é semelhante à figura F. Podemos definir:

> Duas figuras são semelhantes se existe uma correspondência entre seus pontos, tal que a razão entre um segmento da primeira e o correspondente segmento da segunda figura seja constante.

A razão entre dois segmentos correspondentes chama-se razão de semelhança.

No exercício 11.16 foi demonstrado que dois triângulos semelhantes, de razão de semelhança igual a k, têm suas áreas na razão igual a k^2. Tal fato se estende ao caso de figuras planas semelhantes quaisquer. Vamos enunciar este fato geral, embora omitindo a sua demonstração.

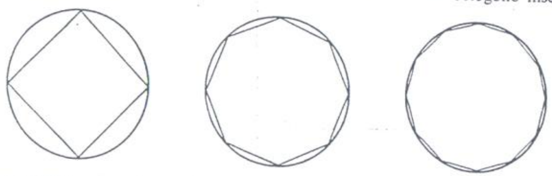
> Dadas duas figuras semelhantes F e F′, seja **k** a razão de semelhança, isto é, se $AB \subset F$ e $A'B' \subset F'$ são dois segmentos correspondentes das duas figuras, seja $k = \frac{AB}{A'B'}$. Sendo assim, as áreas das duas figuras estão entre si na razão k^2, isto é,
>
> $$\frac{S_F}{S_{F'}} = k^2$$

Capítulo 12

Razões trigonométricas. Áreas do círculo e dos setores

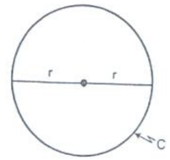
12.1 — A CIRCUNFERÊNCIA E SEUS ARCOS

Vamos estabelecer primeiramente, de modo intuitivo, a noção de comprimento de uma circunferência. Tomando-se quatro pontos na circunferência, obtemos um quadrilátero inscrito. Com oito pontos, temos um octógono inscrito.



Aumentando-se o número de pontos considerados, os polígonos inscritos, cujo número de lados é cada vez maior, têm o comprimento de cada lado cada vez menor. O *perímetro* de cada polígono representa uma melhor aproximação para o comprimento da circunferência, quanto maior é o número de pontos marcados. Podemos dizer que o comprimento da circunferência é o valor para o qual *tende* a seqüência de perímetros, à medida que o números de vértices aumenta indefinidamente.

Indiquemos por C o comprimento de uma circunferência de raio **r**. Vamos admitir, sem demonstração, o seguinte fato.



A razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro é a mesma para todas as circunferências.

Isto equivale a admitir que dois círculos quaisquer são **figuras semelhantes**. O valor dessa razão é indicado pela letra grega minúscula π:

$$\boxed{\frac{C}{2r} = \pi}$$

O símbolo π não representa uma variável, mas sim um número bem determinado. Seu valor tem sido calculado com aproximação de um número muito grande de decimais. É, aproximadamente,

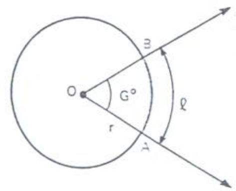
$$\pi \cong 3,1415926535$$

embora se use, na maioria das aplicações, a aproximação $\pi \cong 3,14$.

Da definição de π, resulta a expressão que dá o comprimento de uma circunferência de raio **r**:

$$\boxed{C = 2\pi r}$$

Determinemos agora o comprimento de um arco circular. Suponha que o arco $\widehat{AB}$, contido na circunferência de raio **r**, tem a sua *medida em graus* igual a G°. É claro que a **circunferência** toda pode ser vista como um arco cuja medida em graus é 360°. Vamos admitir que os comprimentos dos arcos sejam proporcionais às suas medidas em graus. Podemos, então, utilizar a "regra de três":



arco $\widehat{AB}$	**circunferência**
G° ————	360°
ℓ ————	C

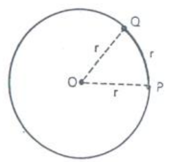
donde resulta

$$\boxed{\ell = \frac{G}{360} C}$$

Mas, sendo $C = 2\pi r$, podemos ainda escrever

$$\boxed{\ell = \frac{G}{180} \cdot \pi r}$$

12.2 — RADIANO



Consideremos um arco $\widehat{PQ}$ cujo comprimento seja igual ao raio **r**. Podemos adotar este arco como unidade de medida (como já fizemos com o grau, no capítulo 5). A esse arco atribuiremos, então, a medida 1 rad (1 radiano). O *ângulo central* $P\hat{O}Q$ também tem medida 1 rad.

Nota: É costume *omitir* o símbolo **rad**. Por exemplo, se escrevemos que um certo arco *mede 2*, fica subentendido que a sua medida é *2 radianos*.

A circunferência toda também pode ser medida em radianos. Fazemos a "regra de três":

comprimento	**medida em radianos**
r	1
C	x

obtendo

$$x = \frac{C}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Assim, a circunferência mede 2π radianos.

Para fazer a conversão de unidades, faz-se a "regra de três":

graus	**radianos**
360	2π
G	α

donde

$$\frac{G}{360} = \frac{\alpha}{2\pi} \text{ ou ainda } \boxed{\frac{G}{180} = \frac{\alpha}{\pi}}$$

Se o arco $\widehat{AB}$, de comprimento ℓ, tem a sua *medida em radianos* igual a α, então

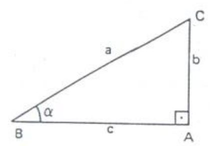
$$\ell = \frac{G}{180}\pi r = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \pi r = \alpha r$$

$$\boxed{\ell = \alpha r} \quad (\alpha \text{ rad})$$

O comprimento de um arco de circunferência é igual ao produto do raio pela sua medida em radianos.

12.3 — RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Seja α a medida de um *ângulo agudo* do triângulo retângulo mostrado na figura. Definimos:



> **Seno** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.
> **Cosseno** de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa.

Indica-se $\text{sen}\ \alpha = \frac{b}{a}$ e $\cos \alpha = \frac{c}{a}$.

É claro que esta definição só se aplica para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (α em radianos).

Para estender as noções de seno e cosseno a outros valores de α, adotamos as definições seguintes:

1.ª) $\text{sen}\ 0 = 0$, $\cos 0 = 1$

2.ª) $\text{sen}\ \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

3.ª) $\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ (\pi - \alpha)$
$\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha)$

Desta última definição resulta que, dado um *ângulo obtuso*, o seu **seno** é o mesmo seno do seu suplemento e o seu **cosseno** é o cosseno do seu suplemento, com o sinal trocado. Temos também $\text{sen}\ \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$.

Definimos ainda, para $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, as razões trigonométricas tangente e secante:

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \text{ e } sec\ \alpha = \frac{1}{cos\ \alpha}$$

e, para $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \pi$, definimos a cotangente e a cossecante:

$$cotg\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} \text{ e } cossec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}$$

Para o caso de um *ângulo agudo* do triângulo retângulo ABC, é fácil perceber que a tangente é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente:

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{b}{c}$$

É fundamental a seguinte relação: $\boxed{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1}$

válida para todo α. No caso do ângulo agudo, ela é uma conseqüência do teorema de Pitágoras:

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

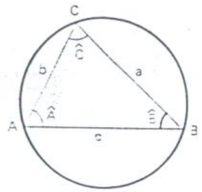
Nas aplicações, vamos utilizar freqüentemente os valores da tabela abaixo, referentes aos ângulos de 30°, 45° e 60°.

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Para outros valores de α, as razões trigonométricas estão tabeladas ao final deste volume.

12.4 — LEI DOS SENOS E LEI DOS COSSENOS

Para um triângulo ABC qualquer, valem as relações



$$\boxed{\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} = 2R}$$

onde R é o raio da circunferência circunscrita. Em outras palavras, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.

Esta propriedade é conhecida como *lei dos senos*.

Valem, também, as seguintes relações:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\ cos\ \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \hat{C} \end{aligned}}$$

conhecidas como *lei dos cossenos*.

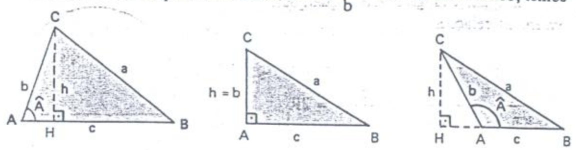
Por brevidade, não apresentamos aqui as demonstrações destas duas importantes propriedades, que o leitor encontra deduzidas no volume 3 desta coleção (*Trigonometria*), à página 207.

12.5 — EXPRESSÕES DA ÁREA DO TRIÂNGULO

A área de um triângulo ABC pode ser dada pelas seguintes expressões:

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\ ab\ sen\ \hat{C} \\ S &= \frac{1}{2}\ ac\ sen\ \hat{B} \\ S &= \frac{1}{2}\ bc\ sen\ \hat{A} \end{aligned}}$$

Mostremos a validade da terceira. A altura $\overleftrightarrow{CH}$ pode ter o seu pé no interior do lado $\overleftrightarrow{AB}$, coincidindo com A, ou no exterior do lado $\overleftrightarrow{AB}$, como as figuras mostram. Nos dois primeiros casos, tem-se $\frac{h}{b} = \text{sen}\ \hat{A}$. No terceiro, temos

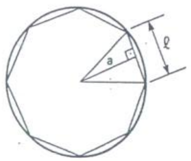


$\frac{h}{b} = \text{sen}\ (\pi - \hat{A})$, logo também $\frac{h}{b} = \text{sen}\ \hat{A}$. Assim, em qualquer caso temos $h = b\ \text{sen}\ \hat{A}$, logo

$$S = \frac{ch}{2} = \frac{cb\ \text{sen}\ \hat{A}}{2} = \frac{1}{2}\ bc\ \text{sen}\ \hat{A}$$

12.6 — ÁREA DO CÍRCULO E DOS SETORES

A noção de área de um círculo pode ser estabelecida, de modo intuitivo, utilizando-se uma seqüência de polígonos inscritos, como fizemos para o comprimento da circunferência. Diz-se que a área do círculo é o valor para o qual *tende* a seqüência das áreas dos polígonos inscritos, quando o número de vértices aumenta indefinidamente. Se pensarmos em polígonos regulares, a área de um polígono é dada por



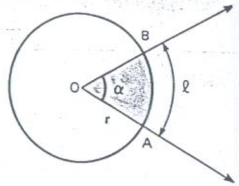
$$S = pa$$

onde **p** é o seu *semiperímetro* e **a** é o seu *apótema* (veja exercício 10.8). Se o número de vértices aumenta, os semiperímetros tendem a $\frac{C}{2}$ e os apótemas se aproximam do próprio **raio** do círculo. A área do círculo será, então,

$$S = \frac{C}{2} \cdot r$$

ou ainda, pondo $C = 2\pi r$: $\boxed{S = \pi r^2}$

Seja, agora, um **setor circular** cujo ângulo central mede α (em radianos) e cujo *arco* tem comprimento ℓ. O círculo todo pode ser visto como um setor cujo ângulo central mede 2π. Vamos admitir que as áreas dos setores são proporcionais às medidas dos seus ângulos centrais. Podemos, então, utilizar a "regra de três":



setor		**círculo**
α	———	2π
S	———	πr^2

donde resulta

$$\boxed{S = \frac{\alpha r^2}{2}}$$

Mas, sendo $\ell = \alpha r$, podemos ainda escrever

$$\boxed{S = \frac{\ell r}{2}}$$

Exercícios Resolvidos

12.1) Prove que, num triângulo ABC, tem-se

$$\frac{\text{tg}\ \hat{B}}{\text{tg}\ \hat{C}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$$

Solução

Pela *lei dos cossenos*, temos

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{e} \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

donde

$$\frac{\cos \hat{C}}{\cos \hat{B}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + c^2 - b^2} \cdot \frac{c}{b}$$

ou

$$\frac{b}{c} \cdot \frac{\cos \hat{C}}{\cos \hat{B}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$$

Mas, pela *lei dos senos*, $\frac{b}{c} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{sen } \hat{C}}$, logo

$$\frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{sen } \hat{C}} \cdot \frac{\cos \hat{C}}{\cos \hat{B}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$$

isto é,

$$\frac{\text{tg } \hat{B}}{\text{tg } \hat{C}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$$

12.2) Seja R o raio da circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$. Mostre que a área do triângulo é igual a

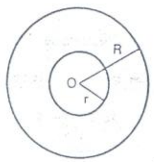
$$S = \frac{abc}{4R}$$

Solução

Sabemos que $S = \frac{1}{2}$ ab sen $\hat{C}$ e, pela *lei dos senos*, temos ainda $\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$. Assim, sen $\hat{C} = \frac{c}{2R}$, donde

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

12.3) Área da coroa circular — Sejam dois círculos concêntricos, de raios **r** e R, r < R. Os pontos do círculo maior, que não pertencem ao interior do círculo menor, formam uma figura chamada **coroa circular**. Dê a área da coroa, em função de **r** e R.



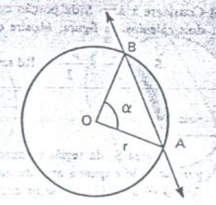
Solução

A área S da coroa é igual à área S_1 do círculo maior *menos* a área S_2 do círculo menor:

$$S = S_1 - S_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$$

12.4) Área do segmento circular — Se uma reta intercepta uma circunferência em dois pontos distintos A e B, o círculo fica separado em duas partes, cada uma delas chamada **segmento circular.**

Seja α = med (AÔB ($0 < \alpha < \pi$). Determine a área do segmento circular, em função de **r** e α.



Solução

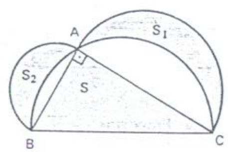
A área S do segmento circular é igual à área S_1 do setor OAB *menos* a área S_2 do triângulo OAB. Como

$$S_1 = \frac{\alpha r^2}{2} \text{ e } S_2 = \frac{1}{2} r^2 \text{ sen } \alpha$$

vem

$$S = \frac{\alpha r^2}{2} - \frac{1}{2} r^2 \text{ sen } \alpha = \frac{r^2}{2} (\alpha - \text{sen } \alpha)$$

12.5) Lúnulas de Hipócrates — Na ilustração, tem-se um triângulo ABC retângulo em A. Por meio de três semicírculos cujos diâmetros são os lados do triângulo, formam-se as duas figuras sombreadas, que se denominam **lúnulas de Hipócrates**. Mostre que a área do triângulo é igual à soma das áreas das duas lúnulas.



Solução

No semicírculo de diâmetro $\overleftrightarrow{BC}$, o lado $\overleftrightarrow{AC}$ determina um segmento circular de área S_3 e o lado $\overleftrightarrow{AB}$ determina outro segmento circular de área S_4. Temos

$$S + S_3 + S_4 = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$$

Mas $a^2 = b^2 + c^2$, logo

$$S + S_3 + S_4 = \frac{\pi (b^2 + c^2)}{4} = \frac{\pi b^2}{4} + \frac{\pi c^2}{4}$$

Assim,

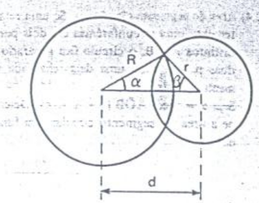
$$S + S_3 + S_4 = (S_1 + S_3) + (S_2 + S_4)$$

donde

$$S = S_1 + S_2$$

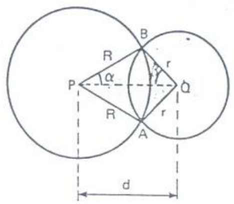
12.6) **Considere a área S da porção comum aos dois círculos da figura. Mostre que**

$$S = \frac{\alpha R^2}{2} + \frac{\beta r^2}{2} - Rd \operatorname{sen} \alpha$$



Solução

A área S_1 da região sombreada na figura ao lado é igual à área do quadrilátero APBQ *menos* a área do setor circular PAB. Temos



$$S_{APBQ} = 2S_{\Delta PBQ} =$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2} Rd \operatorname{sen} \alpha =$$
$$= Rd \operatorname{sen} \alpha$$

e

$$S_{setor\ PAB} = \frac{\alpha R^2}{2}$$

Assim,

$$S_1 = Rd \operatorname{sen} \alpha - \frac{\alpha R^2}{2}.$$

A área S procurada é igual à área do setor circular QAB *menos* a área S_1. Temos

$$S_{setor\ QAB} = \frac{\beta r^2}{2}$$

Portanto,

$$S = \frac{\alpha R^2}{2} + \frac{\beta r^2}{2} - Rd \operatorname{sen} \alpha$$

Exercícios Propostos

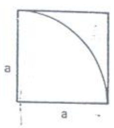
12.7) Dê a expressão da área S de um círculo, em função do comprimento C de sua circunferência.

12.8) A área de um quadrado, *menos* a área do círculo inscrito nele, é igual a $2 - \sqrt{\pi}$. Determine a área S do círculo.

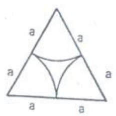
12.9) Um círculo de raio R é dividido, por uma circunferência concêntrica de raio r, em duas partes equivalentes. Determine r, em função de R.

Nas questões seguintes, de números 12.10 a 12.17, calcule a área das partes sombreadas.

12.10)



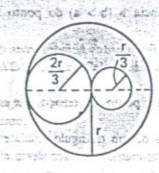
12.11)



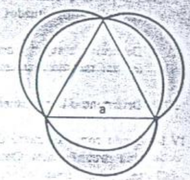
12.12)

12.13)

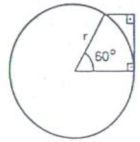
12.14)



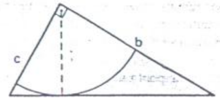
12.15)



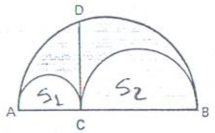
12.16)



12.17)



12.18) Na figura, tem-se $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Mostre que a área da região sombreada é igual à área do círculo que tem diâmetro $\overline{CD}$.



Exercícios Suplementares

IV.1) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas que tangenciam uma dada superfície esférica em um ponto dado.

IV.2) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas tangentes a duas retas, r e s, paralelas entre si.

IV.3) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas de um dado raio r, tangentes a um plano dado.

IV.4) Determine o lugar geométrico dos pés das retas perpendiculares conduzidas por um ponto A a todos os planos que passam por um ponto B (B ≠ A).

IV.5) Determine o lugar geométrico dos pontos do espaço, eqüidistantes dos vértices de um trapézio isósceles.

IV.6) Determine o lugar geométrico dos pontos do espaço, eqüidistantes das retas que contêm os lados de um triângulo.

IV.7) Um ponto P está situado à distância **a** de um plano. Determine o lugar geométrico dos pontos do plano, situados à distância **b** (b > a) do ponto P.

IV.8) Determine o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de três retas paralelas, não contidas em um mesmo plano.

IV.9) Determine o lugar geométrico dos pontos do espaço, que estão à distância **a** de um plano dado.

IV.10) Tendo como diâmetro um lado de um triângulo eqüilátero, toma-se, no plano do triângulo, uma circunferência. Determine a medida do arco dessa circunferência situado no interior do triângulo.

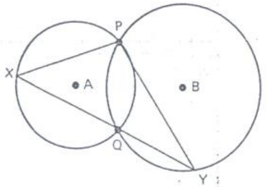
IV.11) Um arco mede 40°. Sob que ângulo os pontos desse arco vêem a corda correspondente?

IV.12) Um triângulo ABC tem ângulos internos medindo $\hat{A} = 50°$, $\hat{B} = 60°$ e $\hat{C} = 70°$. Uma semicircunferência de diâmetro $\overleftrightarrow{BC}$ corta os outros dois lados. Dê as medidas dos arcos em que a semicircunferência fica dividida.

IV.13) Seja P um ponto do interior de um círculo de centro O (P ≠ O). Determine o lugar geométrico dos pontos médios das cordas que contêm P.

IV.14) Seja P um ponto do exterior de um círculo de centro O (P pertence ao plano do círculo). Determine o lugar geométrico dos pontos médios das cordas cujas retas suportes passam por P.

IV.15) As circunferências de centros A e B cortam-se segundo arcos de 90° e 60°. Calcule a medida do ângulo $X\hat{P}Y$.



IV.16) Calcule a área de um trapézio isósceles cujas diagonais são perpendiculares entre si, sabendo que a medida da diagonal é 8 cm.

IV.17) Um trapézio isósceles tem um ângulo agudo de 60° e a diagonal é perpendicular ao lado lateral. Sendo **d** a medida da diagonal e **a** a medida do lado lateral, calcule a área do trapézio.

IV.18) Tomam-se os pontos A e B, um em cada face de um diedro reto. As distâncias desses pontos à aresta são iguais a 52 cm e 15 cm e a distância entre as suas projeções sobre a aresta é igual a 36 cm. Calcule o comprimento do segmento $\overleftrightarrow{AB}$.

IV.19) Um triângulo isósceles tem lados 10 cm, 10 cm e 12 cm. O ponto P dista 5 cm de cada lado do triângulo. Calcule:

a) a área do triângulo;
b) o raio da circunferência inscrita no triângulo;
c) a distância de P ao plano do triângulo.

IV.20) Os catetos de um triângulo retângulo medem 12 cm e 9 cm. Calcule a distância entre o plano do triângulo e um ponto cujas distâncias aos lados do triângulo são iguais a 5 cm.

IV.21) Um triângulo de área 576 cm² tem as medidas dos lados proporcionais a 17, 10 e 9. Calcule essas medidas.

IV.22) Em um quadrilátero ABCD, a diagonal $\overleftrightarrow{AC}$ mede 34 cm e os lados medem AB = 20 cm, BC = 42 cm, CD = 16 cm, AD = 30 cm. Calcule a área desse quadrilátero.

IV.23) Um dos lados de um paralelogramo mede 14 cm e as diagonais medem 26 cm e 30 cm. Calcule a área desse paralelogramo.

IV.24) Pelo ponto onde a circunferência inscrita tangencia um dos lados de um triângulo de lados 7 cm, 8 cm e 9 cm conduz-se um segmento de 2 cm, perpendicular ao plano do triângulo. Calcule a distância da extremidade desse segmento ao incentro do triângulo.

IV.25) Sobre o lado $\overleftrightarrow{BC}$ de um triângulo ABC, de lados AB = 7a, AC = 8a e BC = 9a, toma-se um ponto P tal que BP = 3a. Calcule AP. (Sugestão: use a relação de Stewart, do exercício 10.11.)

IV.26) Os lados de um triângulo retângulo ABC medem AB = 15 cm, AC = 20 cm e BC = 25 cm. Sobre o lado $\overleftrightarrow{BC}$, toma-se o ponto P tal que BP = 10 cm. Por P conduz-se o segmento $\overleftrightarrow{PQ}$, de 12 cm, perpendicular ao plano do triângulo. Calcule a distância de Q ao vértice do ângulo reto.

IV.27) No △ ABC, AB = 40 cm, AC = 50 cm, BC = 60 cm. Se I é o incentro desse triângulo, determine a razão na qual a bissetriz do ângulo fica dividida pelo ponto I.

IV.28) No △ ABC, AB = 15 cm, AC = 25 cm e BC = 30 cm. Tomam-se sobre $\overleftrightarrow{AB}$ o ponto D e sobre $\overleftrightarrow{AC}$ o ponto E, tais que $A\hat{E}D \equiv A\hat{B}C$. Sabendo que o perímetro do △ ADE é 28 cm, calcule BD e CE.

IV.29) As bases de um trapézio medem **a** e **b** (a < b). Determine:

a) a medida do segmento paralelo às bases, que divide o trapézio em dois trapézios semelhantes;
b) a razão na qual o lado lateral fica dividido por esse segmento.

IV.30) No △ ABC, o ângulo é o dobro do ângulo $\hat{B}$. Sendo dados AB = c e AC = b, calcule BC = a.

IV.31) Calcule o comprimento da bissetriz interna do ângulo reto de um triângulo de catetos **b** e **c**.

IV.32) Um triângulo ABC tem lados AB = AC = 10 cm e BC = 5 cm. Sendo $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{CE}$ bissetrizes internas, calcule a razão entre as áreas dos triângulos ADE e ABC.

IV.33) Um triângulo ABC tem lados de medidas AB = c, AC = b e BC = a. Uma circunferência, que contém B e tangencia $\overleftrightarrow{AC}$ no ponto A, corta o lado $\overleftrightarrow{BC}$ em um ponto D. Calcule AD.

IV.34) Pelos vértices A e C de um retângulo ABCD, conduzem-se perpendiculares à diagonal $\overleftrightarrow{BD}$, que a dividem em três partes iguais. Sendo AD = a, calcule AB.

IV.35) Em um trapézio retângulo cujas bases medem 2 cm e 8 cm, as diagonais são perpendiculares entre si. Calcule as medidas dessas diagonais.

IV.36) Em um triângulo ABC, $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BQ}$ são alturas e H é o ortocentro. Se AH = x, HP = y e HQ = z, calcule BH.

IV.37) Duas circunferências tangenciam-se externamente e seus raios são iguais a 3a e 12a. Calcule a medida do segmento contido em uma tangente comum, cujas extremidades são os pontos de tangência.

IV.38) Duas cordas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ de uma circunferência cortam-se, de modo que $\overleftrightarrow{AB}$ fica dividida ao meio e $\overleftrightarrow{CD}$ fica dividida na razão $CP : PD = 1 : 2$ (P é a interseção das duas cordas). Calcule a razão entre as medidas das duas cordas.

IV.39) Em uma circunferência de raio r, $\overleftrightarrow{AB}$ é um diâmetro. Por um ponto C dessa circunferência, tal que $AC = \frac{3r}{2}$, passa-se a corda $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Calcule CD.

IV.40) Em um triângulo retângulo, seja r o raio da circunferência inscrita e sejam x e y as medidas dos segmentos determinados na hipotenusa pelo ponto de tangência da circunferência. Prove que

$$r(x + y + r) = xy$$

IV.41) Para o triângulo do exercício anterior, mostre que a área é igual a xy.

IV.42) Sendo G o baricentro de um triângulo eqüilátero ABC, toma-se o segmento $\overleftrightarrow{VG}$, perpendicular ao plano do triângulo. Sabe-se que $\overleftrightarrow{VA}$ forma 30° com o plano do triângulo e que $VA = \ell$. Calcule o lado do triângulo.

IV.43) Sobre um plano α, toma-se o ponto A e fora de α, no mesmo semi-espaço, tomam-se os pontos B e C, de tal modo que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ formam 30° com o plano α e med $(B\hat{A}C) = 60°$. Sendo $AB = 4$ cm e $AC = 6$ cm, calcule a medida da projeção de $\overleftrightarrow{BC}$ sobre o plano α.

IV.44) Tomam-se os pontos A e B num plano α e o ponto C fora de α. Os segmentos $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são congruentes, formam 60° entre si e suas projeções sobre α são perpendiculares entre si e medem 2 cm cada uma. Calcule AC.

IV.45) Um triângulo retângulo ABC tem catetos $AB = 5$ cm e $AC = 12$ cm. O cateto $\overleftrightarrow{AB}$ está contido em um plano α e $\overleftrightarrow{AC}$ forma com α um ângulo cujo seno é igual a $\frac{1}{3}$. Calcule o seno do ângulo que a hipotenusa forma com o plano α.

IV.46) Os pontos A e B estão contidos em um plano α. Fora de α toma-se o ponto C, tal que $AB = AC$. O segmento $\overleftrightarrow{AB}$ forma 45° com α e $\overleftrightarrow{AC}$ forma 45° com a projeção de $\overleftrightarrow{AB}$ sobre α. Calcule a medida do ângulo $B\hat{A}C$.

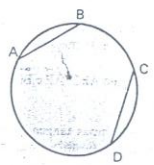
IV.47) De um triângulo, conhecem-se as medidas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e o raio R da circunferência circunscrita. Determine a área do triângulo. (Veja exercício 12.2.)

IV.48) Prove que, em todo triângulo, tem-se

$$abc = 4\,pRr$$

IV.49) Calcule a área do círculo circunscrito ao triângulo de lados 7 cm, 8 cm e 9 cm.

IV.50) Calcule a área da região assinalada, sendo 2 cm o raio do círculo e sabendo que os arcos têm medidas $\widehat{AB} = 15°$ e $\widehat{CD} = 75°$.



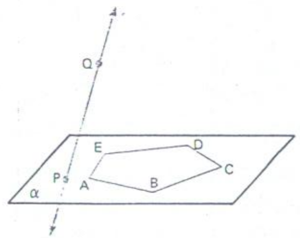
PARTE V

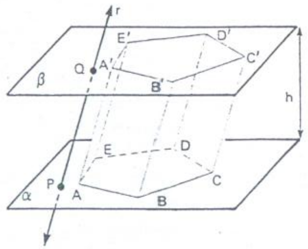
Capítulo 13

Prismas

13.1 — NOÇÃO DE PRISMA

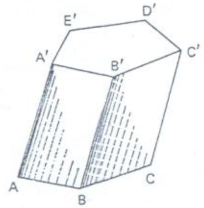
Imaginemos que sobre um plano α esteja situado um polígono ABC... Seja **r** uma reta que fura o plano α no ponto P (essa reta não precisa ser perpendicular ao plano α). Sobre a **reta r** tomamos um ponto Q, distinto de P, e por esse ponto consideramos o plano β, paralelo a α. Em seguida, construímos todos os segmentos paralelos a r, que têm uma extremidade num ponto do polígono e a outra no plano β. Unindo todos esses segmentos, obtemos um *sólido* que recebe o nome de prisma.





Nomenclatura

Na figura ao lado, temos o exemplo de um prisma. Vamos estabelecer certos **nomes** relacionados a algumas partes desta figura.



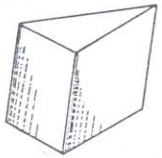
Bases: são os polígonos ABCDE e A'B'C'D'E' (situados em cada um dos dois planos paralelos).
Arestas das bases: são os lados desses polígonos.
Arestas laterais: são os segmentos $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$, $\overleftrightarrow{DD'}$, $\overleftrightarrow{EE'}$, todos paralelos à reta r.
Faces laterais: são os *paralelogramos* cujos lados opostos são arestas correspondentes às bases. Exemplos: ABB'A', BCC'B', etc.
Altura do prisma: é a *distância* entre os planos das bases (indicada por h na figura anterior).
Área lateral: é a soma das áreas das faces laterais.
Área total: é a soma das áreas das duas bases com a área lateral.

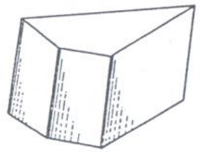
13.2 — CLASSIFICAÇÃO DOS PRISMAS

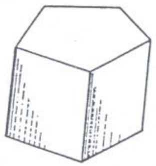
a) Segundo o número de arestas das bases

- Prisma triangular: é aquele cujas bases são triângulos.
- Prisma quadrangular: é aquele cujas bases são quadriláteros.
- Prisma pentagonal: é aquele cujas bases são pentágonos.

E assim por diante.

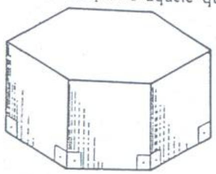

prisma triangular

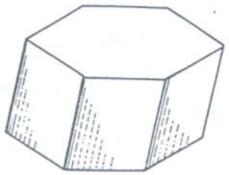

prisma quadrangular


prisma pentagonal

b) Segundo a inclinação das arestas laterais

- Prisma reto: é aquele cujas arestas laterais são *perpendiculares* aos planos das bases. (Neste caso, as faces laterais são retângulos.)
- Prisma oblíquo: é aquele que não é reto.

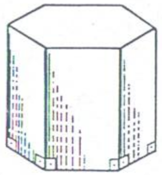

prisma reto

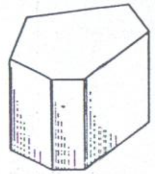

prisma oblíquo

c) Segundo a forma das bases

- **Prisma regular**: é o prisma *reto* cujas bases são *polígonos regulares*.

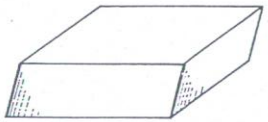
Reforçando: Ao dizermos que um prisma é regular, já se subentende que o mesmo é **reto**, além de ter como bases polígonos regulares. Se um prisma *não é reto* ou então se as bases *não são* polígonos regulares, o prisma é **não regular**.

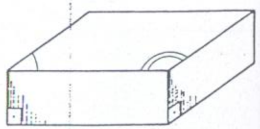

prisma hexagonal regular

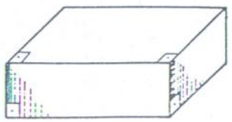

prisma hexagonal não regular

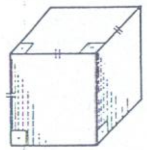
13.3 — PARALELEPÍPEDOS

Os prismas cujas bases são *paralelogramos* são chamados paralelepípedos.
Os prismas *retos* cujas bases são *retângulos* são chamados paralelepípedos reto-retângulos. Um caso particular deste tipo de prisma é o cubo, cujas bases, bem como as faces laterais, são **quadrados**. O cubo é também chamado *hexaedro regular*.

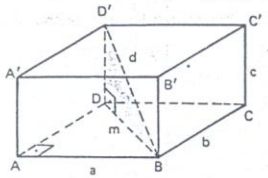

paralelepípedo oblíquo


paralelepípedo reto


paralelepípedo
reto-retângulo


cubo
(ou hexaedro regular)

Para o paralelepípedo reto-retângulo, existe um modo simples de determinar a medida da **diagonal**, conhecendo-se as medidas das arestas. A diagonal do **paralelepípedo** está indicada pelo segmento $\overline{BD'}$ e a sua medida é **d**. O segmento $\overline{BD}$ é uma *diagonal da base* e a sua medida é **m**. As letras **a**, **b** e **c** representam as medidas das arestas. Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos ABD e BDD', obtemos sucessivamente:



$$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 \Rightarrow m^2 = a^2 + b^2$$

e

$$(BD')^2 = (BD)^2 + (DD')^2 \Rightarrow d^2 = m^2 + c^2$$

Assim, temos $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ e, finalmente,

$$\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

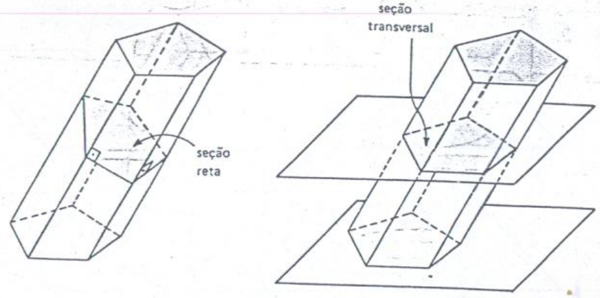
A área total de um paralelepípedo reto-retângulo pode ser também facilmente determinada. Basta notar que cada *base* tem área $S_b = ab$ e que, além disso, o paralelepípedo tem duas faces laterais com área $S_1 = ac$ e outras duas com área $S_2 = bc$. Assim, a área total é

$$S_t = 2\,S_b + 2\,S_1 + 2\,S_2 = 2\,ab + 2\,ac + 2\,bc$$

$$\boxed{S_t = 2\,(ab + ac + bc)}$$

13.4 — SEÇÕES DE UM PRISMA

Consideremos um plano que intercepta todas as arestas laterais de um prisma. A interseção desse plano com o prisma chama-se seção. Se o plano da seção é perpendicular às arestas laterais, então a seção chama-se reta ou normal. Se o plano da seção é paralelo à base do prisma, a seção é chamada transversal. É imediato que as seções transversais são todas polígonos congruentes aos polígonos das bases do prisma. Assim, *todas as seções transversais de um prisma têm mesma área*. Da mesma forma, todas as seções retas de um prisma são polígonos congruentes entre si, resultando que *todas as seções retas de um prisma têm mesma área*.



13.5 — VOLUME DE UM SÓLIDO

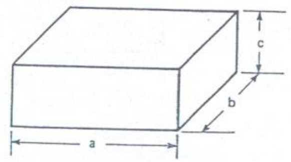
O volume de um sólido é um número que mede a sua *extensão*, ou seja, a porção de espaço ocupada por ele. A noção de volume fica estabelecida, de modo mais preciso, quando fixamos as **propriedades** que o volume deve ter. A cada sólido será, então, associado um *número real não negativo*, chamado volume, que deverá satisfazer as propriedades seguintes:

1.ª) Sólidos congruentes têm mesmo volume.

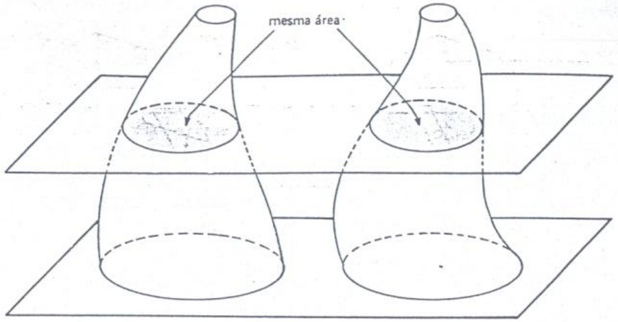
2.ª) Se um sólido S for decomposto como a união de um certo número de outros sólidos $S_1, S_2, \ldots, S_n$, de tal modo que dois quaisquer dentre eles não tenham em comum pontos de seus interiores, então o volume de S é a soma dos volumes desses sólidos.

3.ª) O volume de um **paralelepípedo reto-retângulo** cujas arestas têm medidas **a**, **b** e **c** é igual a

$$\boxed{V = abc}$$



4.ª) Princípio de Cavalieri — Dados dois sólidos e um plano, suponha que todo plano, paralelo ao plano dado, ao interceptar um dos dois sólidos, intercepta também o outro, de tal modo que as duas seções obtidas tenham mesma área. Sendo assim, *os dois sólidos têm o mesmo volume*



Aplicando estas propriedades, podemos obter os volumes de muitos tipos de sólidos, a começar pelos prismas.

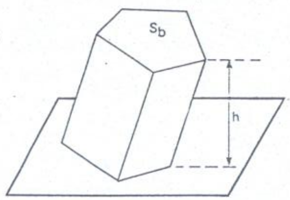
13.6 — VOLUME DE UM PRISMA

Vale a seguinte propriedade:

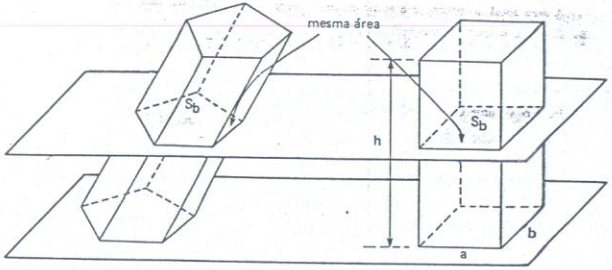
> O volume de um prisma é igual ao produto da *área da sua base*, pela sua *altura*.

Se S_b é a área da base e h é a altura, tem-se

$$\boxed{V = S_b \cdot h}$$



Através do princípio de Cavalieri, esta afirmação pode ser facilmente justificada. Considere um paralelepípedo reto-retângulo com a mesma altura **h** e cuja base tem a mesma área S_b da base do prisma dado. Todo plano paralelo às bases determina, nesses sólidos, seções transversais de mesma área. Isto significa, pelo princípio de Cavalieri, que os dois sólidos têm o mesmo volume.

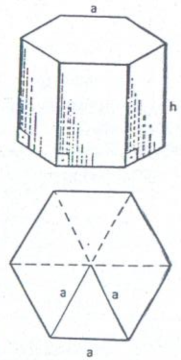


Para o paralelepípedo, como $S_b = a \cdot b$, o volume é $V = abh = S_bh$. Logo, o volume do prisma é também $V = S_bh$.

Exercícios Resolvidos

13.1) Consideremos um prisma hexagonal regular, de altura **h**, no qual a aresta da base tem medida **a**. Pede-se:

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).



Solução

a) A base do prisma é um hexágono regular de lado **a**, cuja área é igual a seis vezes a área de um *triângulo eqüilátero de lado* **a**. Como fizemos no exercício 10.10 d, temos

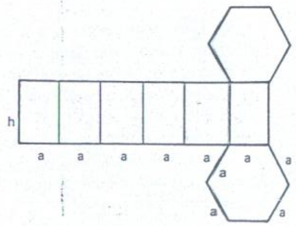
$$S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Assim, a área do hexágono é

$$S_b = 6\,S_\Delta = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

b) Cada face lateral do prisma é um retângulo de base **a** e altura **h**, portanto de área igual a $a \cdot h$. A área lateral do prisma é a soma das áreas das seis faces laterais; logo

$$S_\ell = 6\,ah$$



c) A **área total** do prisma é a soma da *área lateral* com as áreas *das duas bases*:

$$S_t = S_\ell + 2\,S_b = 6\,ah + 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

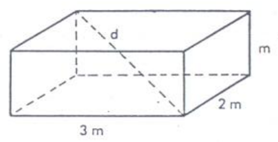
$$S_t = 6ah + 3a^2\sqrt{3}$$

d) Para o volume do prisma, temos:

$$V = S_b h = \frac{3a^2 h\sqrt{3}}{2}$$

13.2) As arestas de um paralelepípedo reto-retângulo medem m, 2 m e 3 m. Calcule:

a) a medida da diagonal (d);
b) a área total (S_t);
c) o volume (V)



Solução

a) $d = \sqrt{m^2 + (2\,m)^2 + (3\,m)^2} =$
$= \sqrt{m^2 + 4\,m^2 + 9\,m^2} = \sqrt{14\,m^2}$ $\qquad d = m\sqrt{14}$

b) $S_t = 2\,[m \cdot (2\,m) + m \cdot (3\,m) + (2\,m) \cdot (3\,m)] =$
$= 2\,[2\,m^2 + 3\,m^2 + 6\,m^2] = 22\,m^2$ $\qquad S_t = 22\,m^2$

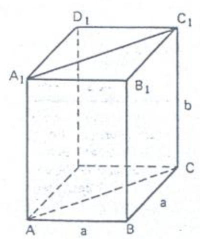
c) $V = m\,(2\,m)\,(3\,m) = 6\,m^3$ $\qquad V = 6\,m^3$

13.3) A área da face lateral de um prisma quadrangular regular é Q. Determine a área da seção diagonal.

Solução

Tem o nome de seção diagonal aquela determinada por um plano que contêm as diagonais das duas bases. Temos ab = Q. A área da seção diagonal é S = AC · b. Como AC = a $\sqrt{2}$, temos

$$S = (a\sqrt{2})\,b = ab\sqrt{2} = Q\sqrt{2}$$



13.4) A base de um prisma é um triângulo eqüilátero de lado **a**. Um dos vértices da base superior projeta-se no centro da base inferior. As arestas laterais formam 60° com o plano da base. Calcule o volume do prisma.

Solução

No $\triangle$ ABC, temos

$$AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

No $\triangle$ AA_1G, temos

$$\frac{h}{AG} = tg\,60°$$

donde

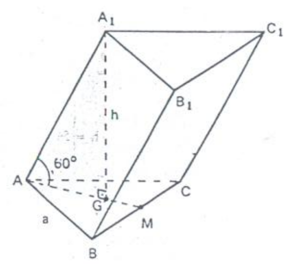
$$h = AG \cdot tg\,60° = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$$

A área da base do prisma é

$$S_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Assim, o volume é

$$V = S_b \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$



13.5) A face lateral de um prisma hexagonal regular é um quadrado de diagonal **d**. Calcule a aresta do cubo que tem volume igual ao desse prisma.

Solução

A aresta da base e a altura do prisma são iguais a

$$a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

Pelo exercício 13.1, temos

$$V = \frac{3a^2 h\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{(d\sqrt{2})^2}{4} \cdot \frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} =$$

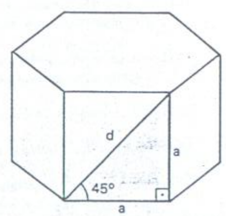
$$= \frac{3d^3\sqrt{6}}{8}$$

Se **b** é a aresta do cubo, temos

$$b^3 = \frac{3d^3\sqrt{6}}{8}$$

donde

$$b = \frac{d\sqrt[6]{54}}{2}$$



13.6) A diagonal da base de um paralelepípedo reto-retângulo mede 6 cm e forma 30° com o lado maior da base. Calcule a altura do paralelepípedo, se o seu volume é 54 cm³.

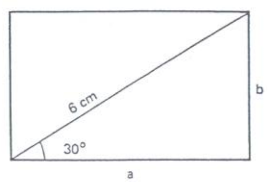
Solução

Os lados da base são

$$a = 6 \cos 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,\text{cm}$$

e

$$b = 6 \operatorname{sen} 30^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3\,\text{cm}$$



Assim, o volume é

$$V = abh = 9\sqrt{3} \cdot h = 54$$

donde

$$h = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$$

Exercícios Propostos

13.7) Determine a soma dos ângulos internos de todas as faces de um prisma cuja base é um polígono de **n** lados.

13.8) Em um prisma, a soma dos ângulos internos de todas as faces é igual a 2 880°. Quantas faces laterais tem o prisma?

13.9) Em um prisma, a soma dos ângulos internos das duas bases é igual a 1 800°. Quantas faces laterais tem o prisma?

13.10) Em um prisma, a soma dos ângulos internos de todas as faces laterais é igual a 3 960°. Quantas são as faces laterais?

13.11) Um prisma tem, no total, 12 faces. Calcule a soma dos ângulos internos de todas as faces.

13.12) A soma dos ângulos internos de uma das bases de um prisma é igual a 720°. Calcule a soma dos ângulos internos de todas as faces.

13.13) Em um prisma, a soma dos ângulos internos de todas as faces é igual a cinco vezes a soma dos ângulos internos de uma base. Quantas faces laterais tem esse prisma?

13.14) Um prisma tem **n** faces laterais. Quantas são as arestas?

13.15) Quantas faces laterais tem um prisma de 21 arestas?

13.16) Em um prisma, o número de arestas, mais o número de vértices, mais o número de faces, é igual a 32. Quantos lados tem o polígono da base?

13.17) Calcule a soma de todos os diedros de um paralelepípedo (note que arestas opostas, situadas em uma mesma face, determinam diedros suplementares).

13.18) Calcule a área total e a diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo de arestas 3, 5 e 12.

13.19) Um paralelepípedo reto-retângulo tem como base um retângulo de lados 4 e 6. Sabendo que a área total é 308, determine a altura e a diagonal desse paralelepípedo.

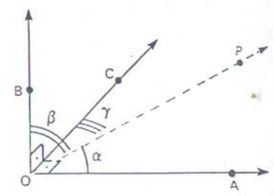
13.20) As arestas de um paralelepípedo reto-retângulo têm por medidas três números inteiros e consecutivos. Determine essas arestas, sabendo que a área total é 52.

13.21) Seja x o ângulo agudo formado por duas diagonais de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 2 cm, 3 cm e 6 cm. Calcule cos x.

13.22) As dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo são proporcionais a 3, 4 e 12 e a sua diagonal mede 26 cm. Calcule as dimensões do paralelepípedo.

13.23) Sejam OABC um triedro tri-retângulo (veja o item 8.7) e $\overrightarrow{OP}$ uma semi-reta contida no triedro, que forma com as arestas do triedro os ângulos α, β e γ. Mostre que

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \gamma = 2$$



13.24) As diagonais das faces laterais de um paralelepípedo reto-retângulo formam com o plano da base ângulos de 30° e 45°. Sendo x o ângulo que a diagonal do paralelepípedo forma com o plano da base, calcule tg x.

13.25) O perímetro da base de um paralelepípedo reto-retângulo é 14 cm, sua diagonal é 13 cm e sua altura é 12 cm. Calcule a área total.

13.26) As áreas das faces de um paralelepípedo reto-retângulo são proporcionais a 3, 5 e 15 e a área total é 184 cm². Determine as dimensões do paralelepípedo.

13.27) Quantos recipientes em forma de paralelepípedo reto-retângulo podem ser fabricados, no máximo, a partir de uma chapa de aço de 140 cm × 70 cm, se as dimensões dos recipientes são 35 cm × 20 cm × 10 cm?

13.28) Dois paralelepípedos reto-retângulos têm as somas das arestas iguais e uma diagonal também igual. O que ocorre com as áreas totais?

13.29) Num cubo de aresta **a**, as extremidades das três arestas que partem do mesmo vértice são os vértices de um triângulo. Calcule a área desse triângulo.

13.30) Dado um cubo de aresta **a**, constrói-se um segundo cubo, tendo como aresta a diagonal da face do primeiro. Se a diagonal do novo cubo mede 12 cm, calcule a diagonal do primeiro.

13.31) Um cubo tem aresta **a**. Qual é a diagonal de um cubo que tem como aresta a diagonal do primeiro?

13.32) Seja x o ângulo agudo formado por duas diagonais de um cubo. Calcule cos x.

13.33) Um cubo tem diagonal **d** e um segundo cubo tem diagonal d + x. Qual é a diferença entre as suas arestas?

13.34) A aresta de um cubo é a e a aresta de um segundo cubo é $a + x$. Calcule a diferença entre as suas diagonais.

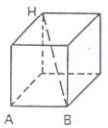
13.35) A área total de um cubo é S. Calcule a diagonal desse cubo.

13.36) Um cubo tem aresta a. De quanto devemos aumentar esta aresta para que a área total do novo cubo seja o dobro da área total do primeiro?

13.37) Um cubo tem diagonal d e um segundo cubo tem diagonal $d + x$. Calcule a diferença entre suas áreas totais.

13.38) A área total de um cubo de aresta a é S. Calcule a área total de um cubo de aresta ka.

13.39) O cubo da figura tem aresta a. Calcule a distância do vértice A à diagonal $\overleftrightarrow{BH}$.



13.40) Os lados da b[illegible] de um paralelepípedo reto-retângulo são iguais a 16 cm e 18 cm e a diagonal do paralelepípedo mede 34 cm. Determine a razão entre a área total e a área lateral.

13.41) [illegible]pedo reto-retângulo tem arestas de 3 cm, 5 cm e 8 cm. Determine:

a) [illegible]l (d);
b) a área total (S_t);
c) o volume (V).

13.42) Um paralelepípedo reto-retângulo tem volume igual a 216 cm³, área da base igual a 24 cm² e diagonal da base igual a $2\sqrt{13}$ cm. Determine as três medidas das arestas.

13.43) Num paralelepípedo reto-retângulo, cuja diagonal mede $\sqrt{35}$ cm, as três arestas formam uma PA de razão 2 cm. Qual é o volume desse paralelepípedo?

13.44) Calcule o volume de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são a aresta a, a diagonal de face e a diagonal de um cubo.

13.45) Calcule a área total e o volume de um cubo de diagonal d.

13.46) A diagonal da base de um paralelepípedo reto-retângulo é 16 cm. O lado maior da base determina, na circunferência circunscrita, um arco de 120°. A área lateral do paralelepípedo é 24 cm². Calcule o seu volume.

13.47) Seja um cubo de aresta 5 cm. Calcule:

a) a sua diagonal (d);
b) a área da base (S_b);
c) a área lateral (S_ℓ);
d) a área total (S_t);
e) o volume (V).

13.48) Seja um cubo cuja diagonal mede 12 cm. Calcule:

a) a aresta (a);
b) a área da base (S_b);
c) a área lateral (S_ℓ);
d) a área total (S_t);
e) o volume (V).

13.49) A diagonal de uma face de um cubo mede 4 cm. Determine o volume do cubo.

13.50) Um cubo tem área total igual a 18 cm². Determine o volume desse cubo.

13.51) Em um cubo, a aresta, a diagonal e a área total formam, nessa ordem, uma PG. Determine o volume do cubo.

13.52) Seja um cubo de área total 216 cm². Calcule:

a) a sua aresta (a);
b) a sua diagonal (d);
c) a área lateral (S_ℓ);
d) a área da base (S_b);
e) o volume (V).

13.53) Determine a diagonal de uma face de um cubo de volume igual a $2\sqrt{2}$ cm³.

13.54) Determine o volume de um cubo cuja área lateral é igual a 12 cm².

13.55) Em um cubo, a área da base, a área total e o volume formam, nessa ordem, uma PG. Determine a aresta do cubo.

13.56) A soma das medidas das arestas de um cubo é igual a 18 cm. Calcule a diagonal, a área total e o volume do cubo.

13.57) Em um cubo, a diagonal de uma face é ℓ. Calcule a diagonal, a área total e o volume desse cubo.

13.58) A diferença entre as arestas de dois cubos é x e a diagonal do maior é d. Calcule a área total e o volume do cubo menor.

13.59) A soma de todas as diagonais das faces de um cubo é igual a 48 cm. Calcule o volume desse cubo.

13.60) A área total e o volume de um cubo são expressos por um mesmo número. Calcule a aresta do cubo.

13.61) Três cubos de chumbo, com arestas 6 cm, 8 cm e 10 cm são fundidos em um só cubo. Qual é a aresta do cubo obtido?

13.62) Um cubo de chumbo, de aresta 20 cm, é dividido, por fusão, em três cubos cujas arestas são proporcionais a 3, 4 e 5. Calcule os volumes dos cubos assim obtidos.

13.63) Calcule a área total de um cubo cujo volume é igual ao de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 4 cm, 6 cm e 9 cm.

13.64) Um cubo e um paralelepípedo reto-retângulo têm mesma área total. As dimensões do paralelepípedo são proporcionais a 1, 6 e 6, e o seu volume é 562,5 cm³. Calcule o volume do cubo.

13.65) São dados um cubo de aresta 12 cm e um paralelepípedo reto de mesmo volume do cubo. O ângulo agudo da base do paralelepípedo é 30° e as suas arestas são proporcionais a 12, 9 e 4 (as duas primeiras são as arestas da base). Determine a área total do paralelepípedo.

13.66) Um prisma reto pentagonal tem altura 7 e área lateral 91. Qual é o perímetro da base?

13.67) A altura do prisma reto pentagonal da figura é 6 e as arestas da base têm as medidas 2, 3, 5, 7 e 8. Determine a área lateral do prisma.

13.68) Um prisma reto tem área lateral igual a $156\,cm^2$ e o perímetro da base é 26 cm. Quanto mede a aresta lateral?

13.69) A diagonal de um prisma quadrangular regular mede **d** e faz, com o plano da face lateral, um ângulo de 60°. Determine a medida da aresta da base.

13.70) A diagonal de um prisma quadrangular regular mede **d** e faz, com a aresta lateral, um ângulo de 60°. Determine a medida da aresta da base.

13.71) A aresta da base de um prisma quadrangular regular é igual a 20 cm. Calcule a distância entre a diagonal do prisma e uma aresta lateral que não a corta.

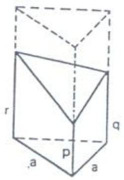
13.72) Calcule a diagonal de um prisma quadrangular regular no qual a área da base é igual a $450\,cm^2$ e a aresta lateral a 40 cm.

13.73) Calcule a diagonal de um prisma quadrangular regular no qual a área da base é $200\,cm^2$ e a área da face lateral é $210\sqrt{2}\,cm^2$.

13.74) A aresta da base de um prisma regular hexagonal é **a** e a altura é **2a**. Calcule as diagonais do prisma e as tangentes trigonométricas dos ângulos que cada diagonal forma com o plano da base.

13.75) Em um paralelepípedo reto, as arestas da base são **m** e **n** e formam entre si 60°. A diagonal maior da base é igual à menor diagonal do paralelepípedo. Calcule as diagonais do paralelepípedo.

13.76) Um prisma triangular regular cuja aresta da base mede **a**, é cortado por um plano inclinado, obtendo-se um tronco com arestas laterais **p**, **q** e **r**. Calcule a área lateral desse tronco.



13.77) A base de um prisma reto é um losango. Sendo 8 cm e 5 cm as medidas das diagonais do prisma e 2 cm a altura, calcule o lado da base.

13.78) A base de um prisma reto é um hexágono regular de lado **a**. As faces laterais são quadrados. Calcule as diagonais do prisma.

13.79) A base de um prisma reto é um losango com lado de 10 cm e altura 9,6 cm. A altura do prisma é 12 cm. Calcule as diagonais do prisma.

13.80) A base de um prisma reto é um paralelogramo, cujos lados são iguais a 13 cm e 15 cm e cuja altura é 12 cm. A diagonal menor do prisma forma 45° com o plano da base. Calcule as diagonais do prisma.

13.81) A base de um prisma oblíquo é um triângulo eqüilátero de lado **a**. A aresta lateral forma 60° com o plano da base. Um dos vértices da base superior tem projeção ortogonal sobre o plano da base no centro da circunferência circunscrita. Calcule a altura do prisma e a área de cada face lateral.

13.82) A base de um prisma reto é um paralelogramo de lados 15 cm e $2\sqrt{38}$ cm. A soma das diagonais da base é 32 cm e a altura do prisma é 12 cm. Calcule as diagonais do prisma.

13.83) Em um prisma quadrangular regular, a diagonal faz 30° com o plano da base e a área lateral é igual a $48\sqrt{6}\,cm^2$. Calcule a aresta da base.

13.84) Em um prisma triangular regular, a aresta da base é **a**. A diagonal da face lateral faz, com o plano de outra face lateral, um ângulo de 30°. Calcule a área lateral.

13.85) A altura de um prisma triangular regular é igual a $14\sqrt{3}$ cm e as áreas da base e lateral são proporcionais a 2 e 7. Determine a aresta da base.

13.86) A diagonal de um prisma quadrangular regular faz 30° com a face lateral. A aresta da base é **a**. Determine a área lateral.

13.87) A aresta da base de um prisma hexagonal regular é **a**. A maior diagonal forma 60° com o plano da base. Calcule a área total.

13.88) Em um prisma reto, a base é um triângulo retângulo de catetos 10 cm e 24 cm. A diagonal da maior face lateral forma 60° com o plano da base. Calcule a área lateral.

13.89) A base de um paralelepípedo reto é um losango cuja diagonal maior é igual a quatro vezes o raio R do círculo inscrito. A menor diagonal do paralelepípedo forma 60° com o plano da base. Determine a área lateral.

13.90) Determine o perímetro da base e a altura de um prisma reto pentagonal, dadas a área lateral 60 e a soma 40 das 15 arestas.

13.91) Em um prisma triangular regular, a altura é igual à aresta da base. Seja α o ângulo formado por duas diagonais de faces que concorrem num mesmo vértice. Calcule $\cos\alpha$.

13.92) Seja um prisma regular de base triangular no qual a altura é igual à aresta da base. Sendo S a área da base, determine, em função de S:

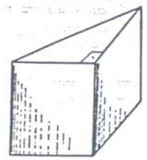
a) a aresta da base (a);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).

13.93) Sejam dois prismas regulares de mesma altura, o primeiro de base quadrada e o segundo de base hexagonal. Em ambos os prismas a aresta da base mede 2 cm. Qual é a razão entre os seus volumes?

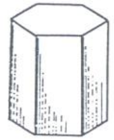
13.94) Seja um prisma regular de base triangular, no qual a altura **h** é igual à aresta da base. Determine, em função de **h**.

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).

13.95) Um prisma reto tem como base um triângulo retângulo isósceles cujo cateto mede 3 cm. Sabendo que a área total é 48 cm², determine a altura desse prisma, bem como o seu volume.

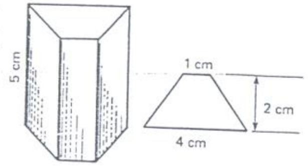


13.96) O prisma regular hexagonal da figura tem volume igual a 27. A altura é **h** e a aresta da base é **a**. Sabendo que $h = a\sqrt{3}$, determine a aresta da base.



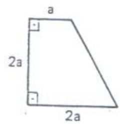
13.97) Um prisma reto tem como base um trapézio isósceles e a sua altura é 5 cm. O trapézio tem altura 2 cm e as suas bases medem 1 cm e 4 cm. Determine:

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).

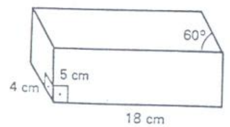


13.98) Um prisma reto de base trapezoidal tem altura **a** e a sua base é o trapézio representado na figura ao lado. Determine:

a) a área do trapézio (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).

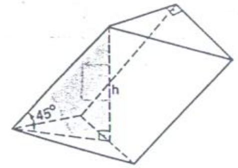


13.99) Um paralelepípedo de altura 5 cm tem como base um paralelogramo de lados 4 cm e 18 cm. Dois lados desse paralelogramo formam ângulo de 60°. Determine a área total e o volume do paralelepípedo.



13.100) Sejam dois prismas regulares de mesma altura, o primeiro de base triangular e o segundo de base hexagonal. Em ambos os prismas a aresta da base mede 2 cm. Qual é a razão entre os seus volumes?

13.101) A base de um prisma oblíquo é um triângulo retângulo isósceles. A projeção de uma das arestas laterais sobre o plano da base coincide com a mediana relativa a um dos catetos do triângulo. As arestas laterais formam 45° com o plano da base. Calcule o volume do prisma, sabendo que sua altura é **h**.



13.102) A altura de um prisma reto de base quadrada é 40 cm e sua área total é 2 208 cm². Determine o volume do prisma.

13.103) Determine o volume de um paralelepípedo reto cujas arestas são todas iguais a 4 cm, sendo 60° o ângulo da base.

13.104) A base de um paralelepípedo reto é um losango com lado **a** e ângulo de 60°. A área lateral do paralelepípedo é $8a^2$. Calcule o volume do paralelepípedo.

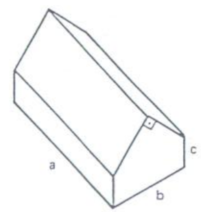
13.105) A base de um paralelepípedo reto é um paralelogramo de lados **a** e **4a** e cujo ângulo agudo é 60°. A maior diagonal do paralelepípedo mede 5a. Calcule o volume.

13.106) A base de um paralelepípedo reto é um paralelogramo cujo lado maior é igual a 25 cm e cuja diagonal menor é igual a 15 cm e serve como altura do paralelogramo. A menor diagonal do paralelepípedo forma 45° com o plano da base. Calcule o volume.

13.107) O lado da base de um prisma regular é igual a **a** e a aresta lateral é igual a **b**. Calcule o volume, se o prisma é:

a) triangular;
b) quadrangular;
c) hexagonal.

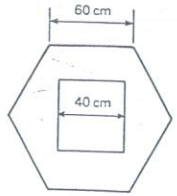
13.108) Calcule a capacidade do armazém da figura, sendo a = 25 m, b = 10 m e c = 4 m.



13.109) Em um prisma triangular regular, o segmento da perpendicular conduzida por um vértice ao lado oposto da outra base tem medida **a** e faz 60° com o plano da base. Determine o volume do prisma.

13.110) O volume de um prisma triangular regular é 90 cm³ e o raio da circunferência inscrita na base é 3 cm. Calcule a altura do prisma.

13.111) A seção reta de uma barra oca de metal é dada na figura ao lado. Calcule o volume de metal que constitui a barra, sabendo que o seu comprimento é 1,5 m (adote $\sqrt{3} = 1,7$).



13.112) A base de um prisma reto é um triângulo retângulo cujos catetos são 20 cm e 21 cm. A maior face lateral do prisma é um quadrado. Determine o volume do prisma.

13.113) A base de um prisma reto é um trapézio, cujo maior lado é igual à altura do prisma. As áreas das faces laterais são proporcionais aos números 1, 1, 1 e 2. Se o volume do prisma é igual a $12\sqrt{3}\,cm^3$, calcule os lados da base.

13.114) Um cubo de aresta 15 cm tem o mesmo volume de um prisma triangular reto cujos lados da base e altura são proporcionais a 87, 75, 18 e 50. Determine a área total do prisma.

13.115) As áreas das faces de um prisma reto são 300 cm², 240 cm², 180 cm², 96 cm² e 96 cm². Calcule o seu volume.

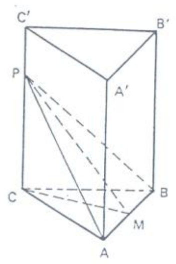
13.116) Em um prisma triangular reto, a maior face lateral tem área S. Calcule a menor altura da base, sabendo que o volume é V.

13.117) Em um prisma regular hexagonal todas as arestas são iguais a **a**. Calcule:

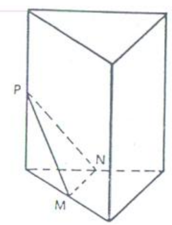
a) as diagonais do prisma;
b) a área da seção obtida por um plano que contém a maior diagonal da base e a aresta paralela da outra base;
c) as distâncias entre esta seção e as arestas do prisma que são paralelas a ela.

13.118) A área da seção diagonal de um cubo é igual a $16\sqrt{2}\,cm^2$. Calcule a aresta do cubo, a diagonal da base e a diagonal do cubo.

13.119) Um prisma triangular regular tem aresta da base igual a **a** e altura **h**. Toma-se sobre a aresta $\overleftrightarrow{CC'}$ um ponto P. Ache a área do triângulo ABP, sabendo que seu plano forma 45° com o plano da base.



13.120) É dado um prisma triangular regular, cuja base tem lado **a**. Pelos pontos médios M e N de duas arestas da base conduz-se um plano que forma 60° com o plano da base e corta a aresta lateral em um ponto P. Ache a área da seção.

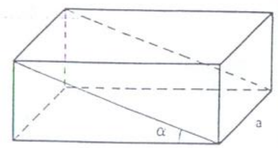


131.121) Num prisma triangular reto, os lados da base são 10 cm, 17 cm e 21 cm e a altura do prisma é 18 cm. Determine a área da seção obtida por um plano que contém uma aresta lateral e a menor altura do triângulo da base.

13.122) Um prisma hexagonal regular tem faces laterais quadradas de lados **a**. Um plano contém uma aresta da base e a aresta oposta da outra base. Determine a área da seção.

13.123) Calcule a área da seção diagonal de um cubo de aresta igual a 6 m.

13.124) Num paralelepípedo reto-retângulo uma das arestas da base tem medida **a**. A seção do paralelepípedo por um plano que contém esta aresta e a aresta oposta da outra base tem área S e forma ângulo α com o plano da base. Calcule o volume do paralelepípedo.



13.125) Em um prisma triangular regular, toma-se um plano que contém uma aresta de uma base e o vértice oposto da outra base. Se a altura do prisma e a aresta da base são iguais, calcule o cosseno do ângulo que o plano tomado forma com o plano da base.

13.126) Em um prisma triangular regular, toma-se um plano que contém uma aresta de uma base e o vértice oposto da outra base, obtendo-se uma seção triangular. Calcule o ângulo do plano da seção com o plano da base, sabendo que a altura da seção (relativa ao lado desigual) é igual à aresta da base do prisma.

13.127) Em um prisma triangular regular, toma-se uma seção por um plano que contém uma aresta de uma base e o vértice oposto da outra base. Se o plano da seção forma 60° com o plano da base e a aresta da base do prisma é **a**, calcule a diagonal da face lateral desse prisma.

13.128) Em um prisma quadrangular regular $ABCDA_1B_1C_1D_1$, a altura é o quádruplo da aresta da base. Tomam-se os pontos M e N sobre as arestas laterais $\overleftrightarrow{AA_1}$ e $\overleftrightarrow{BB_1}$, de tal modo que $AM = \frac{1}{4}AA_1$ e $BN = \frac{1}{2}BB_1$. Calcule o ângulo $D\hat{M}N$.

13.129) A aresta de um cubo mede 5 cm. Calcule o perímetro e a área da seção do cubo por um plano que passa pelas extremidades de três arestas que contêm um mesmo vértice.

13.130) É dado um cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$, com aresta **a**. Sobre a aresta $\overleftrightarrow{C_1D_1}$ toma-se um ponto L, com $C_1L = \frac{3a}{4}$; sobre a aresta $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ toma-se o ponto M, com $A_1M = \frac{a}{2}$; sobre a aresta $\overleftrightarrow{BB_1}$ toma-se o ponto N, com $B_1N = \frac{a}{4}$. Calcule o perímetro da seção determinada no cubo, por um plano conduzido pelos pontos L, M e N.

13.131) Os lados da base de um paralelepípedo reto-retângulo são 20 cm e 21 cm e as seções diagonais são quadrados. Determine a área lateral do paralelepípedo.

13.132) Em um prisma regular hexagonal, a aresta da base é igual à aresta lateral. Calcule a área lateral, se a menor seção diagonal tem área $25\sqrt{3}\,cm^2$.

13.133) A área da maior seção diagonal de um prisma hexagonal regular é igual a Q. Calcule a área lateral.

13.134) A área lateral de um prisma hexagonal regular é $48\ m^2$. Calcule as áreas das seções diagonais.

13.135) Um plano, determinado pela aresta da base de um prisma triangular regular e o ponto médio da aresta lateral oposta, forma 30° com o plano da base. Se a aresta da base é 10 cm, calcule a área lateral.

13.136) A base de um prisma reto é um losango cujo lado é **a** e o ângulo agudo é 60°. Um plano, determinado pela diagonal maior de uma base e o vértice de um ângulo obtuso da outra, determina no prisma uma seção em forma de triângulo retângulo. Calcule a área total.

13.137) A base de um paralelepípedo reto é um losango com ângulo agudo de 60°. A área da maior seção diagonal é Q. Calcule a área lateral.

13.138) A base de um paralelepípedo reto é um losango. As áreas das seções diagonais são $60\ cm^2$ e $80\ cm^2$. Determine a área lateral.

13.139) Em um paralelepípedo reto-retângulo $ABCDA_1B_1C_1D_1$, os lados da base são 8 cm e 6 cm e a área da seção ACD_1 é $74\ cm^2$. Determine o volume do paralelepípedo.

13.140) A base de um prisma reto é um triângulo cujos lados são 6 cm, 25 cm e 29 cm. Pelos pontos médios dos dois lados maiores é tomada uma seção paralela à face lateral. A área desta seção é igual a $24\ cm^2$. Calcule o volume do prisma.

Capítulo

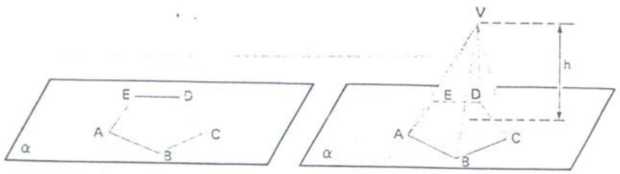
14

Pirâmides

14.1 — NOÇÃO DE PIRÂMIDE

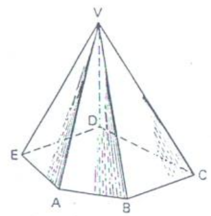
Imaginemos que sobre um plano α esteja situado um polígono ABC... Seja V um ponto situado fora do plano α.

Podemos construir todos os segmentos que têm uma extremidade num ponto do polígono e a outra no ponto V. Unindo todos esses segmentos, obtemos um *sólido* que recebe o nome de *pirâmide*.



Nomenclatura

Na figura ao lado temos o exemplo de uma pirâmide. Vamos estabelecer os **nomes** das partes dessa figura.



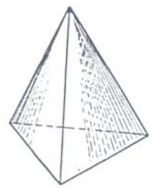
Vértice da pirâmide: é o ponto V.
Base: é o polígono ABCDE.
Arestas da base: são os lados desse polígono.
Arestas laterais: são os segmentos $\overleftrightarrow{VA}$, $\overleftrightarrow{VB}$, $\overleftrightarrow{VC}$, $\overleftrightarrow{VD}$ e $\overleftrightarrow{VE}$.
Faces laterais: são os *triângulos* que têm um dos lados numa aresta da base e o vértice oposto no ponto V. Exemplos: VAB, VBC, etc.
Altura da pirâmide: é a *distância* entre o vértice V e o plano da base (indicada por **h** na figura anterior).
Área lateral: é a soma das áreas das faces laterais.
Área total: é a soma da área da base com a área lateral.

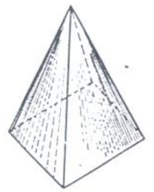
14.2 — CLASSIFICAÇÃO DAS PIRÂMIDES

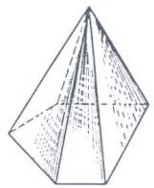
a) Segundo o número de arestas das bases

- Pirâmide triangular: é aquela cuja base é um triângulo.
- Pirâmide quadrangular: é aquela cuja base é um quadrilátero.
- Pirâmide pentagonal: é aquela cuja base é um pentágono.

E assim por diante.


pirâmide triangular


pirâmide quadrangular

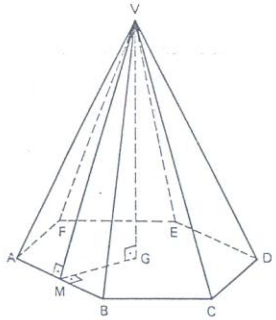

pirâmide pentagonal

b) Segundo a forma da base

- Pirâmide regular: é a pirâmide cuja *base* é um polígono regular e na qual a *projeção* do vértice V sobre o plano da base é o centro G desse polígono. Na figura temos representada uma pirâmide regular hexagonal. Ali, temos:

VG = h = altura
GM = apótema da base
VM = apótema da pirâmide

Numa pirâmide regular, as faces laterais são triângulos isósceles congruentes entre si.

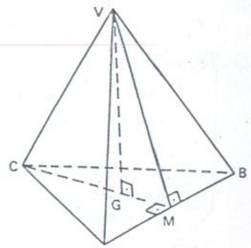


14.3 — TETRAEDRO REGULAR

Uma pirâmide de base triangular é também chamada tetraedro, pois esse sólido tem quatro faces, sendo três faces laterais e uma base.

Ao dizermos que um tetraedro é regular, subentende-se que *todas as suas arestas são congruentes*, tanto as da base como as laterais. Neste caso, todas as faces são triângulos eqüiláteros.

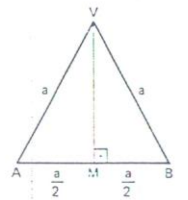
Altura do tetraedro regular

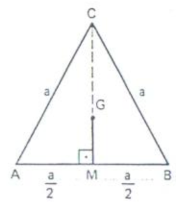


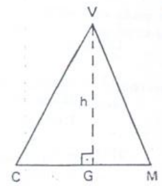
tetraedro regular

Num tetraedro regular, pode-se determinar a relação entre a altura **h** e a aresta **a**. Basta acompanhar as figuras. Em primeiro lugar, o *apótema da pirâmide*, VM, é a altura do triângulo eqüilátero ABV. Temos

$$\boxed{VM = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$







Em segundo lugar, sendo G o baricentro do triângulo ABC, sabemos que $GM = \frac{1}{3}$ CM. Como CM é a altura do triângulo eqüilátero do lado **a**, temos também $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; logo

$$\boxed{GM = \frac{a\sqrt{3}}{6}}$$

Finalmente, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo VGM, obtemos:

$$VM^2 = VG^2 + GM^2$$

ou seja $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$

Simplificando esta equação, resulta:

$$h^2 = \frac{2a^2}{3}.$$

e daí obtemos $\boxed{h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}}$

que é a **relação entre a altura e a aresta do tetraedro regular.**

Área total do tetraedro regular

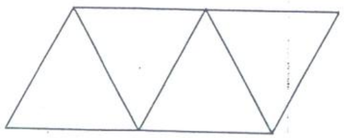
A área de *uma* face do tetraedro regular (como por exemplo o triângulo ABV) é dada pela expressão

$$S_\Delta = \frac{a \cdot VM}{2}$$

e como $VM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, tem-se $S_\Delta = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

A área total do tetraedro regular é igual a quatro vezes esta área:

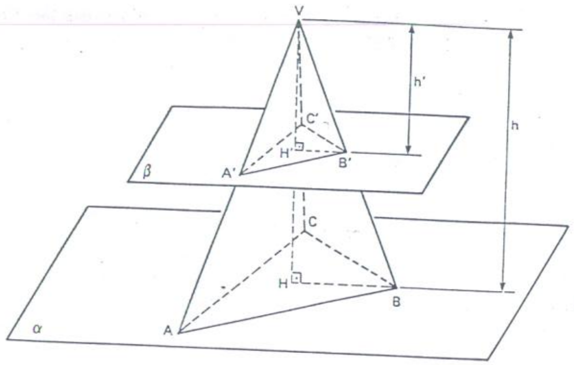
$$\boxed{S_t = a^2\sqrt{3}}$$



A área total do tetraedro regular é a soma das áreas de quatro triângulos eqüiláteros. Recortando a figura acima, em cartolina, e dobrando-a ao longo das linhas podemos construir um modelo do tetraedro regular.

14.4 — SEÇÃO PARALELA À BASE DE UMA PIRÂMIDE TRIANGULAR

Se α é o plano da base ABC de uma pirâmide triangular, então um novo plano $\beta \parallel \alpha$, que corta as arestas laterais da pirâmide, intercepta a pirâmide segundo um triângulo A′B′C′, que pode ser chamado *seção paralela à base*. Um fato importante a ser estabelecido é que os triângulos $\triangle A'B'C'$ e $\triangle ABC$ são *semelhantes*.



Notemos que $\overleftrightarrow{A'B'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{A'C'} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{B'C'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Assim,

$$\triangle VA'B' \sim \triangle VAB \quad \Rightarrow \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB}$$

$$\triangle VA'C' \sim \triangle VAC \quad \Rightarrow \quad \frac{A'C'}{AC} = \frac{VA'}{VA} = \frac{VC'}{VC}$$

$$\triangle VB'C' \sim \triangle VBC \quad \Rightarrow \quad \frac{B'C'}{BC} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC}$$

donde

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{VB'}{VB}$$

Por outro lado, como $\triangle VB'H' \sim \triangle VBH$, temos

$$\frac{VB'}{VB} = \frac{VH'}{VH} = \frac{h'}{h}$$

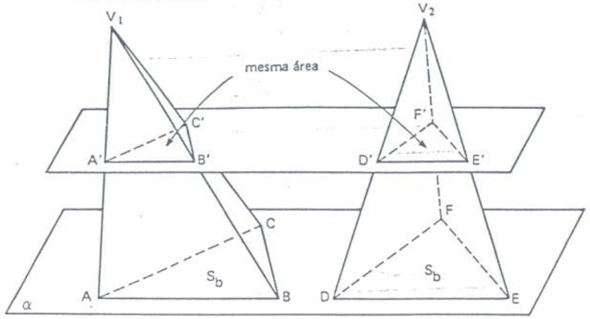
e assim,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{h'}{h}.$$

Concluímos, portanto, que $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ e, ainda, que a *razão de semelhança* é igual a $\dfrac{h'}{h}$. Como vimos no exercício 11.16, *a razão entre as áreas* desses dois triângulos é o quadrado da razão de semelhança:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

14.5 — O PRINCÍPIO DE CAVALIERI APLICADO ÀS PIRÂMIDES TRIANGULARES



Se duas pirâmides triangulares têm *bases de áreas iguais* e *mesma altura*, então elas têm **o mesmo volume**. Este fato pode ser reconhecido através do princípio de Cavalieri (veja o item 13.5). Suponhamos que as duas pirâmides têm suas bases contidas em um mesmo plano α. Todo plano paralelo a α, ao interceptar a pirâmide V_1ABC segundo o triângulo $A'B'C'$, intercepta também a pirâmide V_2DEF segundo um outro triângulo $D'E'F'$. Para se concluir que as duas pirâmides têm mesmo volume, basta mostrar que as duas seções assim obtidas têm mesma área.

Como vimos no item anterior,

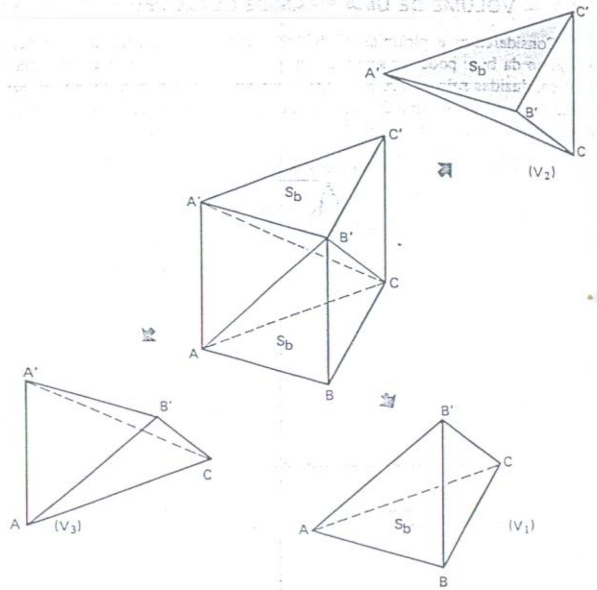
$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{S_{D'E'F'}}{S_{DEF}} = \left(\frac{h'}{h}\right)$$

e como $S_{ABC} = S_{DEF} = S_b$, é claro que

$$S_{A'B'C'} = S_{D'E'F'}$$

14.6 — VOLUME DE UMA PIRÂMIDE TRIANGULAR

O volume de uma pirâmide triangular pode ser determinado, fazendo-se uso de um recurso interessante. Consideremos um prisma triangular com área da base S_b e altura **h**. A ilustração a seguir mostra como esse prisma pode ser decomposto em três pirâmides triangulares. Cortando-se o prisma pelo plano ACB', obtemos a pirâmide $B'ABC$. Um segundo corte do prisma pelo plano $A'B'C$ determina as pirâmides $CA'B'C'$ e $B'AA'C$. Podemos provar que as três pirâmides assim obtidas *têm volumes iguais*.



As pirâmides $B'ABC$ e $CA'B'C'$ têm bases de mesma área S_b e também têm mesma altura, que é igual à altura do próprio prisma. Assim, tem-se $V_1 = V_2$.

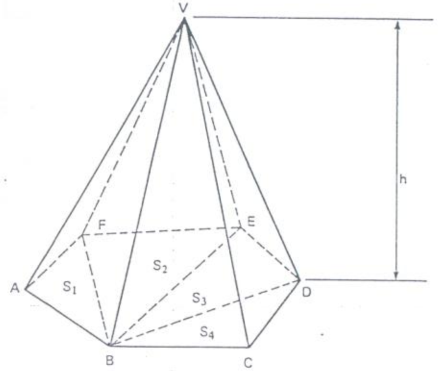
Por outro lado, considerando a pirâmide $B'A'CC'$ (de vértice B' e base $\triangle A'CC'$) e a pirâmide $B'AA'C$ (de vértice B' e base $\triangle AA'C$), vemos que as suas bases têm mesma área (pois os triângulos $\triangle A'CC'$ e $\triangle AA'C$ são congruentes) e ambas têm também alturas iguais (é a distância do ponto B' ao plano que contém a face $ACC'A'$ do prisma). Assim, tem-se $V_2 = V_3$.

Este raciocínio mostra que o volume da pirâmide $B'ABC$ é igual à terça parte do volume do prisma, isto é,

$$\boxed{V_1 = \frac{1}{3} S_b h}$$

14.7 — VOLUME DE UMA PIRÂMIDE QUALQUER

Consideremos a pirâmide VABCDEF, de altura h e área da base S_b. O polígono da base pode ser separado em quatro triângulos, por meio das diagonais conduzidas pelo vértice B. Assim, a pirâmide fica separada em quatro *pirâmides triangulares*. A soma dos volumes dessas quatro pirâmides é igual ao volume da pirâmide dada. Temos, então,



$$V = \frac{1}{3}S_1h + \frac{1}{3}S_2h + \frac{1}{3}S_3h + \frac{1}{3}S_4h =$$
$$= \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)\,h = \frac{1}{3}S_bh$$

É claro que o raciocínio é válido para uma pirâmide com um número qualquer de vértices na sua base. Concluímos, assim, que para qualquer pirâmide, o volume pode ser obtido pela expressão

$$\boxed{V = \frac{1}{3}S_bh}$$

> O volume de uma pirâmide qualquer é a terça parte do produto da *área da sua base*, pela sua *altura*.

14.1) Calcule o volume de um tetraedro regular de aresta **a**.

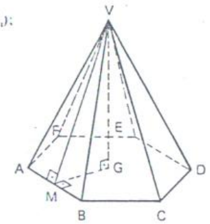
Solução

Como vimos no item 14.3, a altura do tetraedro regular é dada por $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. A área da sua base é a área do triângulo eqüilátero de lado **a**: $S_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Assim, $V = \frac{1}{3}S_bh =$ $= \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}$, donde resulta

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

14.2) Consideremos uma pirâmide hexagonal regular de altura h, na qual a aresta da base tem medida **a**. Pede-se:

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_l);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).



Solução

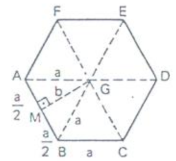
a) A base da pirâmide é um hexágono regular de lado **a**. A sua área é igual a seis vezes a área de um *triângulo eqüilátero* de lado **a**. A área do triângulo eqüilátero é dada por

$$S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

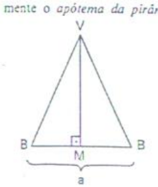
Sendo assim, a área do hexágono é

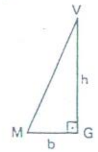
$$S_b = 6S_3 = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{S_b = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}}$$



b) Cada face lateral da pirâmide é um triângulo isósceles de base **a** e cuja altura VM é justamente o *apótema da pirâmide*. A área desse triângulo é





$S = \frac{a \cdot VM}{2}$. Portanto, é necessário determinar VM. Observando o triângulo retângulo MGV, escrevemos:

$$VM^2 = GM^2 + VG^2 = b^2 + h^2$$

O valor de **b** pode ser obtido facilmente. Basta notar que **b** é a altura do triângulo eqüilátero ABG; logo $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Então:

$$VM^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{3a^2}{4} + h^2 = \frac{3a^2 + 4h^2}{4}$$

donde

$$\boxed{VM = \frac{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}{2}}$$

Agora, já podemos escrever a área do triângulo ABV:

$$S = \frac{a\sqrt{3a^2 + 4h^2}}{4}$$

A área lateral da pirâmide é a soma das áreas dos seis triângulos, logo:

$$\boxed{S_\ell = \frac{3a\sqrt{3a^2 + 4h^2}}{2}}$$

c) A **área total** da pirâmide é a soma da *área lateral* com a *área da base*:

$$S_t = \frac{3a\sqrt{3a^2 + 4h^2}}{2} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{S_t = \frac{3a}{2} \cdot [\sqrt{3a^2 + 4h^2} + a\sqrt{3}]}$$

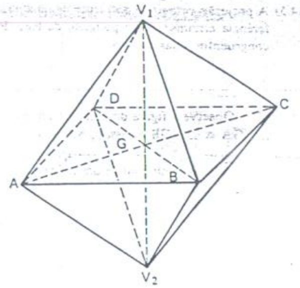
d) Para o volume da pirâmide, temos

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h = \frac{1}{3}\left(\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\right) \cdot h$$

$$\boxed{V = \frac{a^2 h\sqrt{3}}{2}}$$

14.3) **Octaedro regular** – **Consideremos duas pirâmides quadrangulares de mesma base ABCD e vértices V_1 e V_2 situados em semi-espaços opostos em relação ao plano da base. Vamos supor que a base ABCD seja um *quadrado* e que as faces laterais de ambas as pirâmides sejam *triângulos eqüiláteros*. A união dessas duas pirâmides forma um sólido dotado de oito faces triangulares, chamado octaedro regular.**

Calcule o volume de um octaedro regular de aresta **a**.



Solução

O volume do octaedro é, evidentemente, o dobro do volume de uma das pirâmides. Consideremos, então, a pirâmide V_1ABCD. A área da base dessa pirâmide é $S_b = a^2$. Resta determinar a altura V_1G. Para isso, é suficiente notar que o quadrilátero V_1DV_2B *é um quadrado* de lado **a** e V_1G é a metade da diagonal desse quadrado. Assim, $V_1G = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Temos, então, para o volume da pirâmide:

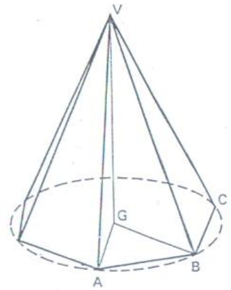
$$V_p = \frac{1}{3} S_b \cdot V_1G = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

e assim o volume do octaedro é $\boxed{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}}$

14.4) Uma pirâmide tem suas arestas laterais congruentes duas a duas. Prove que o polígono da base é inscritível em uma circunferência, cujo centro é a projeção ortogonal do vértice da pirâmide sobre o plano da base.

Solução

Seja G a projeção ortogonal do vértice V sobre o plano da base. Como $V\hat{G}A = V\hat{G}B = 90°$ e $VA = VB$, temos $\triangle VGA \equiv \triangle VGB$, donde $GA = GB$. Da mesma forma, teremos $GB = GC$, e assim por diante. Portanto, o ponto G é o centro de uma circunferência circunscrita ao polígono da base da pirâmide.



14.5) A projeção ortogonal do vértice de uma pirâmide sobre o plano da base é o centro da circunferência circunscrita ao polígono da base. Prove que esta pirâmide tem suas arestas laterais congruentes duas a duas.

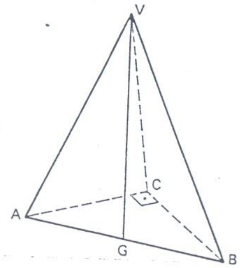
Solução

Observe a figura do exercício anterior. Temos $V\hat{G}A = V\hat{G}B = 90°$ e $GA = GB$. Logo, $\triangle VGA \equiv \triangle VGB$ e, assim, $VA = VB$.

14.6) A base de uma pirâmide é um triângulo retângulo e as arestas laterais são congruentes duas a duas. Prove que uma das faces laterais é perpendicular ao plano da base.

Solução

Se as arestas laterais são congruentes duas a duas, então a projeção ortogonal G do vértice da pirâmide, sobre o plano da base, é o ponto médio da hipotenusa $\overline{AB}$. Assim, o plano pl (VAB) contém uma reta $\overleftrightarrow{VG}$, que é perpendicular ao plano da base, donde a face lateral VAB é perpendicular ao plano da base.



14.7) Uma pirâmide hexagonal regular tem aresta lateral de 10 cm e altura 8 cm. Calcule as áreas das *seções diagonais* (isto é, seções determinadas por planos que contêm o vértice e uma diagonal da base).

Solução

No $\triangle VGD$, temos $(VD)^2 = (VG)^2 + (GD)^2$ donde $(GD)^2 = (VD)^2 - (VG)^2 = 10^2 - 8^2 = 36$ e, assim, $GD = 6$ cm. Para a seção VAD, temos $S_1 = \frac{1}{2}(AD) \cdot (VG)$, logo $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$ cm².

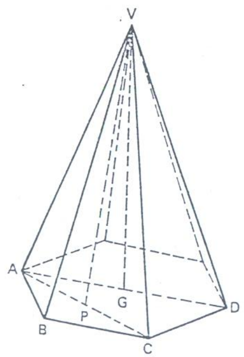
O lado do hexágono mede 6 cm, logo a diagonal $\overline{AC}$ mede $6\sqrt{3}$ cm. Para a seção VAC, temos

$(VP)^2 = (VC)^2 - (PC)^2 = 10^2 - (3\sqrt{3})^2 = 73$

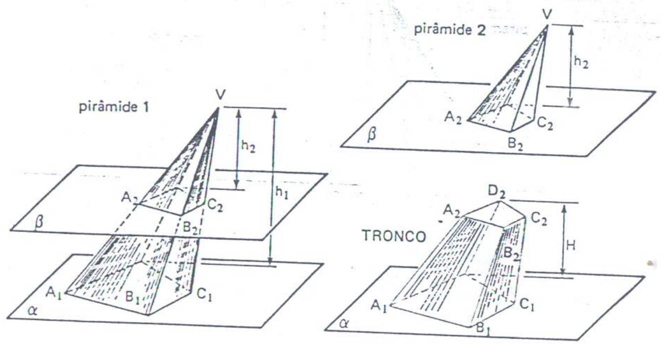
donde $VP = \sqrt{73}$. Portanto, a sua área é

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot (AC) \cdot (VP) =$$

$$= \frac{1}{2}(6\sqrt{3})(\sqrt{73}) = 3\sqrt{219} \text{ cm}$$



14.8 — TRONCO DE PIRÂMIDE DE BASES PARALELAS



Consideremos uma pirâmide de vértice V e altura h_1 (pirâmide 1). Imaginemos que um plano β, paralelo ao plano α da base, corte a pirâmide à distância h_2 do vértice, sendo $h_2 < h_1$. A interseção do plano β com a pirâmide é um polígono *semelhante* ao polígono da base e tem o nome de seção transversal. Note que o plano β separa a pirâmide em dois sólidos, um dos quais é também uma pirâmide de vértice V e altura h_2 (pirâmide 2). O outro é um sólido chamado tronco de pirâmide.

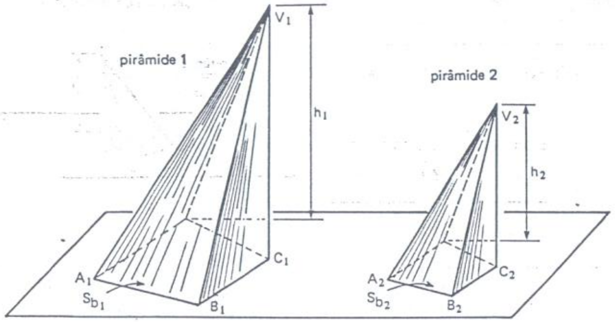
As bases das duas pirâmides são as bases do tronco e a diferença $H = h_1 - h_2$, que representa a distância entre as duas bases, é a altura do tronco. As faces laterais do tronco são *trapézios*.

14.9 — PIRÂMIDES SEMELHANTES

As duas pirâmides, 1 e 2, obtidas acima são semelhantes. No capítulo 11, item 11.4, havíamos examinado a formulação de um conceito geral de semelhança entre *figuras planas*. Não há, no entanto, motivo especial que nos impeça de estender tal conceito a quaisquer figuras geométricas.

> Duas figuras são semelhantes se existe uma correspondência entre seus pontos, tal que a razão entre um segmento da primeira e o correspondente segmento da segunda figura seja constante.

A razão **k** entre dois segmentos correspondentes chama-se **razão de semelhança.**



No caso das duas pirâmides observadas no item anterior, temos:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1V_1}{A_2V_2} = \frac{B_1V_1}{B_2V_2} = \ldots = k$$

Tomando-se, por exemplo, duas diagonais das bases, temos $\frac{A_1C_1}{A_2C_2} = k$. Em particular, podemos escrever também $\frac{h_1}{h_2} = k$.

Duas pirâmides semelhantes apresentam:

a) os ângulos poliédricos correspondentes, congruentes;
b) as faces correspondentes, semelhantes;
c) as arestas correspondentes, proporcionais.

Temos ainda as seguintes afirmações:

> 1.ª) As **áreas** de superfícies correspondentes estão entre si na razão k^2.
> 2.ª) Os **volumes** dos dois sólidos, ou de partes correspondentes, estão entre si na razão k^3.

A 1.ª afirmação já tinha sido referida no item 11.4. Considerando-se as áreas das bases, as áreas laterais, as áreas totais, as áreas de faces laterais, etc., de cada pirâmide, podemos escrever

$$\frac{S_{b_1}}{S_{b_2}} = \frac{S_{\ell_1}}{S_{\ell_2}} = \frac{S_{t_1}}{S_{t_2}} = \frac{S_{V_1A_1B_1}}{S_{V_2A_2B_2}} = \ldots = k^2$$

Para os **volumes** das duas pirâmides temos

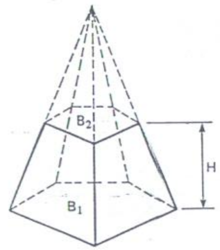
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}S_{b_1} \cdot h_1}{\frac{1}{3}S_{b_2} \cdot h_2} = \frac{S_{b_1}}{S_{b_2}} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k^2 \cdot k = k^3$$

confirmando a 2.ª afirmação

14.10 — VOLUME DO TRONCO DE PIRÂMIDE

Para calcular o volume do tronco de pirâmide, basta subtrair do volume da pirâmide 1, o volume da pirâmide 2:

$$V_T = V_1 - V_2$$



Para maior comodidade de notação, indiquemos as áreas das bases do tronco por B_1 e B_2.

Como $V_1 = k^3V_2$, vem

$$V_T = k^3V_2 - V_2 = V_2(k^3 - 1) = V_2(k - 1)(k^2 + k + 1)$$

Mas $V_2(k-1) = \frac{1}{3}B_2h_2\left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right) = \frac{1}{3}B_2(h_1 - h_2) = \frac{1}{3}B_2H$ e como

$$k^2 = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{e} \quad k = \frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_2}}$$

podemos escrever

$$V_T = \frac{1}{3}B_2H \cdot \left[\frac{B_1}{B_2} + \frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_2}} + 1\right]$$

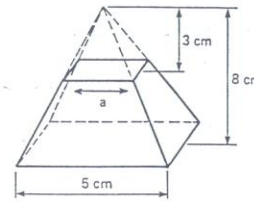
donde resulta, finalmente,

$$\boxed{V_T = \frac{H}{3}\left[B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2\right]}$$

Exercício Resolvido

14.8) Uma pirâmide regular de base quadrada tem aresta da base igual a 5 cm e altura 8 cm. Seciona-se essa pirâmide com um plano paralelo à base, situado à distância de 3 cm do vértice. Determine o volume do tronco de pirâmide assim obtido.

Solução



O volume da pirâmide dada é

$$V_1 = \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 8 = \frac{200}{3} \text{ cm}^3$$

A pirâmide menor, de altura 3 cm e aresta da base igual a **a**, tem volume

$$V_2 = \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3} a^2 \cdot 3 = a^2$$

Determinemos **a**, lembrando que as duas pirâmides são *semelhantes*, isto é, a razão entre as arestas das bases é igual à razão entre as alturas:

$$\frac{a}{5} = \frac{3}{8}$$

donde

$$a = \frac{15}{8} \text{ cm}$$

Assim,

$$V_2 = \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64} \text{ cm}^3$$

O volume do tronco é dado por

$$V_T = V_1 - V_2 = \frac{200}{3} - \frac{225}{64} = \frac{12\,125}{192} \cong 63{,}2 \text{ cm}^3$$

Outro modo

A base maior do tronco tem área $B_1 = 25 \text{ cm}^2$. A base menor tem área B_2 tal que

$$\frac{B_2}{B_1} = k^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

donde

$$B_2 = 25 \cdot \frac{9}{64} = \frac{225}{64} \text{ cm}^2$$

A altura do tronco é H = 5 cm.

Podemos, então, aplicar a *fórmula* deduzida acima.

$$V_T = \frac{H}{3}\left[B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2\right] =$$

$$= \frac{5}{3}\left[25 + \sqrt{25 \cdot \frac{225}{64}} + \frac{225}{64}\right] =$$

$$= \frac{5}{3}\left[25 + \frac{75}{8} + \frac{225}{64}\right] = \frac{12\,125}{192} \cong 63{,}2 \text{ cm}^3$$

Exercícios Propostos

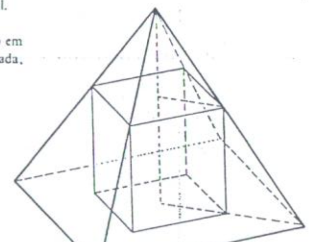
14.9) Dê a soma de todos os ângulos das faces de uma pirâmide:

a) triangular;
b) quadrangular;
c) pentagonal;
d) cuja base é um polígono de **n** lados.

14.10) Quantos lados tem a base de uma pirâmide na qual a soma de todos os ângulos das faces é igual a 3 600°?

14.11) Prove que o plano que contém a altura de uma pirâmide e a altura de uma face lateral é perpendicular ao plano desta face lateral.

14.12) Determine a aresta x do cubo inscrito em uma pirâmide regular de base quadrada, com aresta da base **a** e altura **h**.



14.13) Em uma pirâmide regular de altura **h**, a aresta da base é **a**. Calcule a aresta lateral e a altura da face lateral (correspondente ao lado da base), sendo a pirâmide:

a) triangular;
b) quadrangular.

14.14) Em uma pirâmide regular, a aresta da base é **a** e a aresta lateral é **b**. Calcule a altura da pirâmide, sendo ela:

a) triangular;
b) quadrangular;
c) hexagonal.

14.15) A base de uma pirâmide é um triângulo isósceles cuja base mede 30 cm e cujo ângulo do vértice é 120°. A altura da pirâmide mede 10 cm e passa pelo centro da circunferência circunscrita à base. Determine a medida da aresta lateral da pirâmide.

14.16) Cada aresta lateral de uma pirâmide mede 52 cm. A base da pirâmide é um triângulo com lados $12\sqrt{10}$ cm, 24 cm e $12\sqrt{10}$ cm. Calcule a altura da pirâmide.

14.17) A altura de um prisma triangular regular é igual a 6 cm e a aresta da base é 3 cm. O centro da base superior e os vértices da base inferior servem como vértices de uma pirâmide. Seja x o ângulo da aresta lateral da pirâmide com o plano da base. Calcule tg x.

14.18) A base de uma pirâmide é um paralelogramo cujos lados medem 3 cm e 7 cm. A altura da pirâmide é 4 cm e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é a interseção das diagonais da base. Calcule as diagonais da base, sabendo que a maior aresta lateral mede 6 cm.

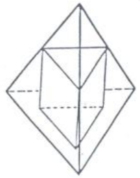
14.19) Em uma pirâmide quadrangular, todas as arestas são congruentes duas a duas. Seja x o ângulo do vértice da seção diagonal da pirâmide. Calcule x.

14.20) Determine quantas diagonais tem um tronco de pirâmide:

a) quadrangular; b) pentagonal; c) cuja base tem n lados.

14.21) Em uma pirâmide triangular regular, a aresta da base mede 6 cm e a aresta lateral oposta dista 5 cm dela. Determine a medida da aresta lateral.

14.22) Em um tetraedro regular de aresta a é inscrito um prisma triangular regular, cujas arestas são todas iguais, de modo que os vértices de uma de suas bases estejam sobre as arestas laterais do tetraedro, enquanto que a outra base está contida na base do tetraedro. Determine a aresta do prisma.

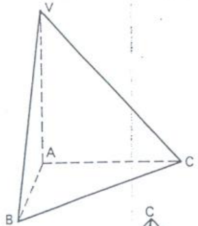


14.23) Seja x a medida do diedro determinado por uma aresta de um tetraedro regular. Calcule cos x.

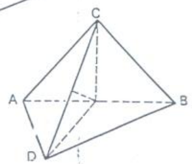
14.24) Seja x a medida do ângulo que uma aresta de um tetraedro regular forma com uma face que não a contém. Calcule cos x.

14.25) Uma pirâmide triangular tem vértice V e a sua aresta lateral $\overleftrightarrow{BV}$ é perpendicular ao plano da base ABC. Sendo AV = 10 cm, CV = 20 cm e $B\hat{A}V = 30°$, calcule sen x, onde $x = B\hat{C}V$.

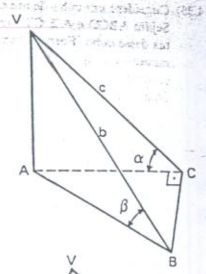
14.26) Uma pirâmide VABC, de base triangular, tem sua aresta lateral $\overleftrightarrow{VA}$ perpendicular ao plano da base. Os ângulos das faces medem $B\hat{V}A = 30°$, $A\hat{V}C = 45°$ e $B\hat{V}C = 60°$. Calcule o cosseno do ângulo $B\hat{A}C$.



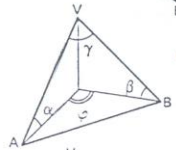
14.27) Uma pirâmide tem como base um triângulo retângulo isósceles ABD, de hipotenusa, AB = a. A face lateral CAB é também um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $\overline{AB}$, cujo plano é perpendicular ao plano da base. Calcule a distância entre as arestas opostas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.



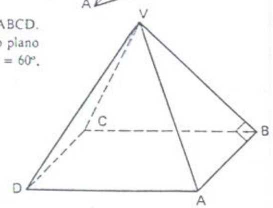
14.28) Uma pirâmide tem como base o △ ABC, retângulo em C, e a aresta lateral $\overleftrightarrow{AV}$ é perpendicular ao plano da base. Sendo VB = b, VC = c e $A\hat{C}V = \alpha$, calcule sen β, onde $\beta = A\hat{B}V$.



14.29) Uma pirâmide tem como base um triângulo ABC e sua aresta lateral $\overleftrightarrow{CV}$ é perpendicular ao plano da base. Sendo $C\hat{A}V = \alpha$, $C\hat{B}V = \beta$ e $A\hat{V}B = \gamma$, determine cos φ, onde $\varphi = A\hat{C}B$.



14.30) Uma pirâmide tem como base um retângulo ABCD. O plano da face lateral VBC é perpendicular ao plano da base. Sendo $A\hat{V}B = C\hat{V}D = 30°$ e $A\hat{V}D = 60°$, calcule sen x, onde $x = C\hat{V}B$.



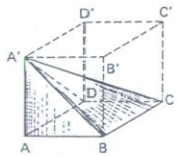
14.31) A base de uma pirâmide é o triângulo eqüilátero ABC. A face lateral VABC é também um triângulo eqüilátero, sendo $VC = \frac{1}{3}AB$. Dado AB = a, calcule a distância entre as arestas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{VC}$.

14.32) Qual deve ser a aresta de um tetraedro regular cuja área total é $36\sqrt{3}$ cm²?

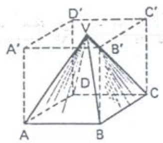
14.33) Seja A a área da base de um tetraedro regular. Calcule a altura desse tetraedro, em função de A.

14.34) Numa pirâmide hexagonal regular, a área lateral é 72 cm² e a aresta lateral mede 5 cm. Calcule a aresta da base.

14.35) Considere um cubo de aresta igual a 1 cm. Sejam ABCD e A'B'C'D' duas faces opostas desse cubo. Podemos obter uma pirâmide tomando o quadrado ABCD como base e o ponto A' como vértice. Qual é a área lateral dessa pirâmide?



14.36) Considere um cubo de aresta igual a 1 cm. Sejam ABCD e A'B'C'D' duas faces opostas desse cubo. Forma-se uma pirâmide tomando-se o quadrado ABCD como base e, como vértice, o centro V da face A'B'C'D'. Qual é a área lateral dessa pirâmide?



14.37) Uma pirâmide de 10 cm de altura tem por base um quadrado de lado 15 cm. Qual é a área da seção transversal dessa pirâmide, situada à distância de 6 cm do vértice?

14.38) A base de uma pirâmide é um triângulo ABC com lados AB = AC = 15 cm e BC = 16 cm. A aresta $\overline{VA}$ da pirâmide mede 8 cm e é perpendicular ao plano da base. Determine as medidas das arestas $\overline{VB}$ e $\overline{VC}$ e a área da face VBC.

14.39) A base de uma pirâmide é um retângulo ABCD, com lados de 9 cm e 12 cm. A aresta lateral $\overline{VB}$ é perpendicular ao plano da base e mede 12 cm. Determine as áreas das seções diagonais da pirâmide.

14.40) Dadas a aresta da base 3 e a altura 4 de uma pirâmide regular, determine a área lateral, sendo a pirâmide:
a) triangular; b) quadrangular; c) hexagonal.

14.41) Determine a área lateral de uma pirâmide regular a) triangular, b) quadrangular, c) hexagonal, cuja aresta da base mede **a**, sabendo que cada face lateral forma 60° com o plano da base.

14.42) A área lateral de uma pirâmide regular é 12 cm² e a aresta da base mede 2 cm. Calcule a aresta lateral e a altura, se a pirâmide é:
a) triangular; b) quadrangular; c) hexagonal.

14.43) Calcule a altura de uma pirâmide regular a) triangular, b) quadrangular, c) hexagonal, de aresta da base **a**, sabendo que a área lateral é o dobro da área da base.

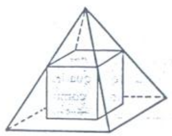
14.44) A área da seção diagonal de uma pirâmide quadrangular regular é igual à área da base, cuja aresta é **a**. Calcule a área lateral da pirâmide.

14.45) A altura de uma pirâmide hexagonal regular é igual a 8 cm e a aresta da base mede $4\sqrt{3}$ cm. Determine a área total da pirâmide.

14.46) Determine a área lateral de uma pirâmide hexagonal regular cuja aresta lateral mede 17 cm, sabendo que o diâmetro da circunferência inscrita na base é igual a $16\sqrt{3}$ cm.

14.47) Em uma pirâmide triangular regular com aresta da base igual a 24 cm, cada face lateral é perpendicular à aresta lateral não contida nela. Calcule a área lateral desta pirâmide.

14.48) Um cubo é inscrito em uma pirâmide quadrangular regular, como mostra a figura. A altura da pirâmide é igual ao dobro da aresta do cubo. Sendo **a** a aresta do cubo, calcule a área lateral da pirâmide.



14.49) As faces laterais de uma pirâmide triangular apresentam no vértice da pirâmide ângulos de 60°, 60° e 90°. Cada aresta lateral mede **a**. Determine a área total da pirâmide.

14.50) A aresta da base de uma pirâmide é **a**. Uma das arestas laterais é perpendicular ao plano da base e mede **a**. Calcule a área lateral da pirâmide, se sua base é:
a) um triângulo eqüilátero;
b) um quadrado,
c) um hexágono regular.

14.51) A base de uma pirâmide é um retângulo de área igual a 100 cm². Duas faces laterais são perpendiculares ao plano da base e duas outras formam com ele 30° e 60°. Calcule a área total da pirâmide.

14.52) A base de uma pirâmide é um retângulo cuja diagonal mede **m**. O ângulo entre as diagonais é de 60° e as arestas laterais formam também 60° com o plano da base. Calcule a área lateral dessa pirâmide.

14.53) É dado um cubo de aresta **a**. Forma-se um quadrado com vértices nos pontos médios das arestas de uma face. Calcule a área total da pirâmide que tem como base esse quadrado e como vértice o centro da face oposta do cubo.

14.54) Com base em um mesmo triângulo eqüilátero de lado **a** constroem-se uma pirâmide e um prisma regulares, de mesmas altura e área lateral. Calcule a altura.

14.55) Os lados correspondentes das bases de um tronco de pirâmide são proporcionais a 3 e 7. Um ponto de uma aresta lateral divide-a na razão 2 : 1 (o maior segmento ficando do lado da menor base). Por esse ponto conduz-se um plano paralelo às bases. Em que razão fica dividida a área lateral do tronco?

14.56) Em uma pirâmide triangular regular, a aresta da base e a altura são iguais a **a**. Calcule a área lateral dessa pirâmide.

14.57) Calcule a altura de uma pirâmide quadrangular regular de aresta da base 6 cm, sabendo que a sua área lateral é $\frac{5}{8}$ da área lateral de um prisma reto de base e altura iguais às da pirâmide.

14.58) É dada a altura **h** de uma pirâmide hexagonal regular. Determine a aresta da base, sabendo que a área lateral é $\frac{16}{3}$ da área de um triângulo eqüilátero de lado igual à altura dada.

14.59) Em uma pirâmide quadrangular regular, de aresta da base **a**, a área lateral é igual a $3a^2$. Calcule a altura da pirâmide.

14.60) Uma pirâmide regular triangular de altura **h** tem como faces laterais triângulos retângulos. Calcule a área lateral da pirâmide.

14.61) De uma pirâmide de altura igual a 12 m obtém-se um tronco de altura igual a 9 m. Qual é a razão entre as áreas da base menor e da base maior desse tronco?

14.62) Uma pirâmide de base quadrada tem altura de 25 cm. Calcule a aresta da base, sabendo que a seção transversal feita a 15 cm do vértice tem área de 36 cm².

14.63) Os lados das bases de um tronco de pirâmide medem 16 cm e 12 cm. Pelo ponto médio da altura, conduz-se um plano paralelo às bases. Em que razão fica dividida a área lateral do tronco?

14.64) Uma pirâmide tem altura **h** e área de base B. A que distância do vértice deve ser conduzido um plano paralelo à base, para que a área da seção seja b?

14.65) A que distância do vértice deve ser conduzido um plano paralelo à base de uma pirâmide, para se obter dois sólidos de mesma área lateral?

14.66) Dá-se a altura 9 cm de uma pirâmide regular de base quadrada e constrói-se sobre a base um cubo, de modo que a face do cubo, oposta à base, corte a pirâmide segundo um quadrado de lado $\frac{5}{4}$ cm. Calcule o lado da base da pirâmide.

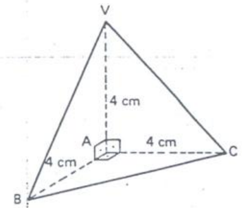
14.67) Dois planos paralelos à base de uma pirâmide dividem a superfície lateral em três partes cujas áreas são proporcionais a 3, 4 e 5 (contadas a partir do vértice). Em que proporção fica a altura dividida por esses planos?

14.68) Considere uma pirâmide regular de altura 8 cm cuja base é um quadrado de 5 cm de lado. Calcule:

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).

14.69) Uma pirâmide de altura igual a 4 cm tem como base um triângulo retângulo isósceles de cateto igual a 4 cm, como indica a figura. A aresta $\overline{VA}$ é perpendicular ao plano da base. Calcule:

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).



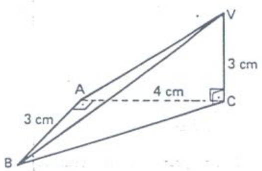
14.70) Determine o volume de um tetraedro regular de altura igual a 10 cm.

14.71) Considere uma pirâmide regular de altura 8 cm, cuja base é um triângulo eqüilátero de 4 cm de lado. Calcule:

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).

14.72) Uma pirâmide de altura igual a 3 cm tem como base um triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm, como indica a figura. A aresta $\overline{VC}$ é perpendicular ao plano da base. Calcule:

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).



14.73) Determine o volume de um tetraedro regular cuja base tem área igual a $12\sqrt{3}\,cm^2$.

14.74) Numa pirâmide hexagonal regular, a altura é igual ao triplo da aresta da base. Determine a aresta da base, sabendo que o volume dessa pirâmide é igual a $12\sqrt{3}\,cm^3$.

14.75) Qual é o volume de um tetraedro regular cuja área total é $25\sqrt{3}\,cm^2$?

14.76) Numa pirâmide hexagonal regular, a aresta da base mede $\sqrt{3}$ cm. Qual deve ser a altura dessa pirâmide para que a aresta da base, a altura e o volume formem, nessa ordem, uma PG?

14.77) Calcule o volume de uma pirâmide regular triangular na qual a aresta da base mede **a** e a altura é igual a **2a**. (Note que não é um tetraedro regular!)

14.78) A área total de um tetraedro regular é S. Calcule, em função de S:

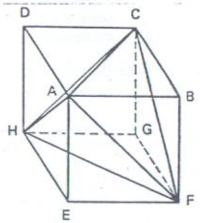
a) a altura do tetraedro (h);
b) o volume (V).

14.79) Considere um prisma regular e uma pirâmide regular, ambos de mesma altura. O prisma tem como base um triângulo eqüilátero de lado **a** e a pirâmide tem como base um quadrado de lado **a**. Qual é a razão entre os volumes do prisma e da pirâmide?

14.80) Numa pirâmide regular de base quadrada, a aresta da base mede $\sqrt{2}$ cm. Qual deve ser a altura dessa pirâmide para que a aresta da base, a altura e o volume formem, nessa ordem, uma PG?

14.81) Prove que, num tetraedro regular, sendo P um ponto de seu interior, então a soma das distâncias de P às quatro faces é igual à altura do tetraedro.

14.82) As diagonais das faces de um cubo de aresta **a** (mostrado na figura) são as arestas de um tetraedro regular ACFH. Determine o volume do tetraedro.



14.83) Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular, de aresta da base **a** e aresta lateral **2a**.

14.84) Calcule o volume de uma pirâmide quadrangular regular, de aresta da base **a** e aresta lateral **2a**.

14.85) Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular, de aresta da base **a** e aresta lateral **2a**.

14.86) Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular, de altura **h** e aresta lateral **2h**.

14.87) Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular, de altura **h** e aresta lateral **2h**.

14.88) Calcule o volume de uma pirâmide quadrangular regular, de altura **h** e aresta lateral **2h**.

14.89) Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular, cuja face lateral é um triângulo isósceles de base **a** e altura **2a**.

14.90) Calcule o volume de uma pirâmide quadrangular regular, cuja face lateral é um triângulo isósceles de base **a** e altura **2a**.

14.91) Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular, cuja face lateral é um triângulo isósceles de base **a** e altura **2a**.

14.92) Em uma pirâmide triangular regular, de aresta da base **a**, a face lateral forma 30° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.93) Em uma pirâmide quadrangular regular, de aresta da base **a**, a face lateral forma 45° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.94) Em uma pirâmide hexagonal regular, de aresta da base **a**, a face lateral forma 60° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.95) Em uma pirâmide triangular regular, de aresta da base **a**, a aresta lateral forma 30° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.96) Em uma pirâmide quadrangular regular, de aresta da base **a**, a aresta lateral forma 60° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.97) Em uma pirâmide hexagonal regular, de aresta da base **a**, a aresta lateral forma 45° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.98) A aresta da base de uma pirâmide triangular regular mede 2 cm e a reta perpendicular conduzida de um vértice da base à face oposta encontra o apótema da pirâmide no seu ponto médio. Calcule o volume da pirâmide.

14.99) O centro da base superior de um prisma triangular regular e os pontos médios das arestas da base inferior são os vértices de uma pirâmide. Calcule a razão entre os volumes do prisma e da pirâmide.

14.100) Mesmo problema anterior, no caso de um prisma quadrangular regular.

14.101) Mesmo problema anterior, no caso de um prisma hexagonal regular.

14.102) Calcule o volume de uma pirâmide quadrangular regular, sabendo que a seção diagonal é um triângulo eqüilátero de lado **a**.

14.103) Calcule o volume de uma pirâmide quadrangular regular, sabendo que a face lateral é um triângulo eqüilátero de lado **a**.

14.104) Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular, sabendo que o plano determinado pela altura e uma aresta lateral define uma seção que é um triângulo isósceles a) cuja base é o apótema da pirâmide; b) cuja base é a aresta lateral. A aresta da base é **a**.

14.105) É dada uma pirâmide quadrangular regular. A área da seção que contém uma diagonal da base, e é perpendicular à aresta lateral, é igual a S. O plano da seção é inclinado de 60° sobre o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.106) A face lateral de uma pirâmide hexagonal regular forma 60° com o plano da base e tem área de $\sqrt{3}\,cm^2$. Calcule o volume da pirâmide.

14.107) Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular na qual a seção que contém a menor diagonal da base e o vértice da pirâmide forma 60° com o plano da base e tem área igual a $2\sqrt{3}\,cm^2$.

14.108) O volume de uma pirâmide hexagonal regular é igual a $45\sqrt{3}\,cm^3$ e a área da seção que contém a diagonal maior da base e o vértice da pirâmide é $15\,cm^2$. Calcule a medida da aresta lateral da pirâmide.

14.109) A aresta da base de uma pirâmide triangular regular é **a** e a distância de um vértice da base à face oposta é $\frac{a}{2}$. Calcule o volume da pirâmide.

14.110) A base de uma pirâmide é um triângulo retângulo do qual um dos catetos é **a** e o ângulo adjacente mede 30°. Calcule o volume da pirâmide, sabendo que as arestas laterais formam 60° com a base.

14.111) A base de uma pirâmide é um triângulo isósceles de base igual a 12 cm e altura 18 cm. Cada aresta lateral mede 26 cm. Determine o volume da pirâmide.

14.112) A base de uma pirâmide é um triângulo retângulo de catetos 24 cm e 32 cm. Cada aresta lateral forma 60° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.113) Uma pirâmide triangular tem duas faces perpendiculares entre si, cada uma delas sendo um triângulo eqüilátero de lado igual a 12 cm. Calcule o volume da pirâmide.

14.114) A base de uma pirâmide é um retângulo de área igual a $1\,m^2$. Duas faces laterais são perpendiculares ao plano da base e as duas outras formam 30° e 60° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.115) A base de uma pirâmide é um retângulo. A face lateral que contém o maior lado da base é perpendicular à base, tem a forma de um triângulo eqüilátero e forma 60° com a face lateral que contém o lado oposto da base. Calcule o volume da pirâmide, sabendo que a área desta outra face lateral é $\sqrt{3}\,cm^2$.

14.116) Um tetraedro tem como base um triângulo retângulo isósceles de cateto **a** e as suas arestas laterais são todas iguais a **a**. Calcule o volume do tetraedro.

14.117) Sobre uma mesma base de área $100\,cm^2$, constroem-se um prisma reto e uma pirâmide, de modo que o volume do prisma é o dobro do da pirâmide. Calcule a área da seção que a base superior do prisma determina na pirâmide.

14.118) Dê a razão entre o volume de um cubo e o volume de um tetraedro regular cuja aresta é a diagonal de uma face do cubo.

14.119) Ache o volume de uma pirâmide quadrangular regular, de aresta lateral ℓ, sabendo que as faces laterais formam ângulo de 60° com o plano da base.

14.120) Uma pirâmide triangular regular tem aresta lateral ℓ e as faces laterais formam ângulo de 45° com o plano da base. Calcule a área lateral e o volume da pirâmide.

14.121) Qual é o volume de um octaedro regular cuja aresta mede 15 cm?

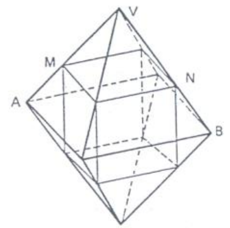
14.122) Qual deve ser a aresta de um octaedro regular para que o seu volume seja $8\sqrt{2}\ cm^3$?

14.123) Os pontos médios das arestas de um tetraedro regular são vértices de um octaedro regular. Determine a razão entre o volume do octaedro e do tetraedro.

14.124) Os centros das faces de um cubo são vértices de um octaedro regular. Determine a aresta **b** do octaedro, sendo **a** a aresta do cubo.

14.125) Os baricentros das faces de um octaedro regular são os vértices de um cubo. Determine a aresta **b** do cubo, sendo **a** a aresta do octaedro.

14.126) Um cubo está inscrito em um octaedro regular, de modo que seus vértices estejam nas arestas do octaedro, como a ilustração mostra. A aresta do octaedro é **a**. Determine a aresta do cubo. (Note que $\triangle ABV \sim \triangle MNV$.)



14.127) Determine a área da superfície de um octaedro regular de aresta **a**.

14.128) A aresta de um octaedro regular é igual a 1 m. Determine a distância entre dois vértices opostos.

14.129) Seja α a medida do diedro determinado por uma aresta de um octaedro regular. Calcule cos α.

14.130) Uma pirâmide tem altura de 15 cm e a sua base tem área de 18 cm². Uma seção transversal separa essa pirâmide em dois sólidos de mesmo volume. Qual é a área dessa seção transversal?

14.131) Numa pirâmide de 3 m de altura, toma-se uma seção transversal a 1 m do vértice, separando-se, desta forma, a pirâmide em dois sólidos. Qual é a razão entre os volumes desses dois sólidos?

14.132) Com duas seções transversais, separa-se uma pirâmide em três sólidos de igual altura, dos quais um é também uma pirâmide e os outros dois são troncos. Qual é a razão entre os volumes desses troncos?

14.133) Planos paralelos à base de uma pirâmide dividem a sua altura em três partes iguais. Em que proporção o volume da pirâmide fica dividido por estes planos?

14.134) Planos paralelos à base dividem uma pirâmide em três sólidos de mesmo volume. Em que proporção a altura da pirâmide fica dividida por estes planos?

14.135) A que distância do vértice de uma pirâmide deve ser conduzido um plano paralelo à base, para se obter duas partes de volumes iguais?

14.136) A que distância do vértice de uma pirâmide de altura **h** deve ser conduzido um plano paralelo à base, de modo a obter uma pirâmide cujo volume seja $\frac{1}{8}$ do volume do tronco?

14.137) Em um tronco de pirâmide triangular regular, as arestas das bases são 5 cm e 11 cm e a aresta lateral é 4 cm. Calcule a altura do tronco.

14.138) Em um tronco de pirâmide triangular regular, de altura igual a 15 cm, a face lateral é um trapézio de 17 cm de altura. A altura da base menor é 6 cm. Calcule os lados das bases e a aresta lateral do tronco.

14.139) Em um tronco de pirâmide triangular regular, a aresta lateral mede 12 cm e forma 60° com o plano da base maior. A aresta da base menor mede $3\sqrt{3}$ cm. Calcule a aresta da base maior e a altura do tronco.

14.140) Em um tronco de pirâmide triangular regular, as arestas das bases medem 18 cm e 12 cm e a face lateral forma 45° com o plano da base maior. Calcule a altura e a aresta lateral do tronco.

14.141) As bases de um tronco de pirâmide de 6 cm de altura são triângulos retângulos isósceles cujas hipotenusas medem 10 cm e 26 cm. O vértice da pirâmide correspondente tem suas projeções ortogonais, sobre os planos das bases, nos pontos médios das hipotenusas. Determine as áreas laterais do tronco.

14.142) Em um tronco de pirâmide quadrangular regular, a altura é igual à metade da aresta lateral e as arestas das bases são **a** e **b** ($a > b$). Calcule a altura do tronco.

14.143) Em um tronco de pirâmide quadrangular regular, as arestas das bases são **a** e **b** ($a > b$). A aresta lateral forma 60° com a aresta da base maior. Determine a altura da face lateral, a aresta lateral, o ângulo que a aresta lateral forma com o plano da base maior e a altura do tronco.

14.144) Em um tronco de pirâmide quadrangular regular, as diagonais são perpendiculares entre si. As arestas das bases medem 20 cm e 10 cm. Determine a altura e a aresta lateral do tronco, bem como a altura da face lateral.

14.145) As faces laterais de um tronco de pirâmide regular são trapézios de bases iguais a 10 cm e 6 cm e altura 15 cm. Calcule a área total do tronco, sabendo que a pirâmide é:

a) triangular; b) quadrada; c) hexagonal.

14.146) Em um tronco de pirâmide hexagonal regular, a altura é 13 cm e os lados das bases medem 18 cm e 12 cm. Calcule a área lateral do tronco.

14.147) Os lados das bases de um tronco de pirâmide regular são iguais a **a** e **3a**. Sua altura é **2a**. Calcule a área lateral do tronco, se a pirâmide é:

a) triangular; b) quadrangular; c) hexagonal.

14.148) Os lados das bases de um tronco de pirâmide quadrangular regular são proporcionais a 1 e 5. A altura do tronco é 21 cm e a área da seção diagonal é $630\sqrt{2}\ cm^2$. Calcule a área lateral do tronco.

14.149) Os lados das bases de um tronco de pirâmide triangular regular são 6 cm e 4 cm. As faces laterais formam 60° com o plano da base. Determine a área total do tronco.

14.150) Em um tronco de pirâmide quadrangular regular, as arestas das bases medem 18 cm e 12 cm. As arestas laterais formam 45° com o plano da base. Calcule a área lateral do tronco.

14.151) Em um tronco de pirâmide triangular regular, as arestas das bases medem 18 cm e 12 cm. As arestas laterais formam 45° com o plano da base. Calcule a área lateral do tronco.

14.152) As áreas da base maior, face lateral e base menor de um tronco de pirâmide quadrangular regular são proporcionais a 25, 16 e 9. Calcule a área total deste tronco, se a área da sua seção diagonal é $16\sqrt{30}\ cm^2$.

14.153) A diagonal de um tronco de pirâmide quadrangular regular forma 60° com a diagonal da base maior. Estas diagonais medem 8 cm e 5 cm, respectivamente. Calcule a área lateral do tronco.

14.154) A aresta lateral de um tronco de pirâmide triangular regular mede 20 cm e forma 30° com o plano da base. A aresta da base menor mede 12 cm. Calcule a área lateral do tronco.

14.155) Em um tronco de pirâmide triangular regular, a área lateral é $12\sqrt{601}\ cm^2$, a altura é 12 cm e a aresta lateral é 13 cm. Calcule as arestas das bases.

14.156) Em um tronco de pirâmide hexagonal regular, a altura e a aresta da base menor são iguais a 6 cm. A aresta lateral forma 45° com o plano da base. Calcule a área lateral do tronco.

14.157) Dentro de um tronco de pirâmide quadrangular regular, toma-se uma pirâmide cuja base é a base maior do tronco e cujo vértice é o centro da base menor. As arestas das bases medem a e 2a. As áreas laterais do tronco e da pirâmide são iguais. Determine a altura do tronco.

14.158) As bases de um tronco de pirâmide são triângulos retângulos isósceles, cujas hipotenusas medem $4\sqrt{2}$ cm e $6\sqrt{2}$ cm. A aresta lateral que liga os vértices dos ângulos retos das bases é perpendicular aos planos das bases e mede 4 cm. Calcule a área lateral do tronco.

14.159) As arestas das bases de um tronco de pirâmide quadrangular regular são **a** e **b**. Determine a altura para que a área lateral do tronco seja igual à soma das áreas das bases.

14.160) Em um tronco de uma pirâmide quadrangular regular a altura é 2 cm, os lados das bases são 3 cm e 5 cm. Calcule a diagonal do tronco.

14.161) Determine as arestas das bases de um tronco de uma pirâmide quadrangular regular sabendo que a altura do tronco é 7 cm, sua aresta lateral é 9 cm e a diagonal é 11 cm.

14.162) Em um tronco de uma pirâmide quadrangular regular, a aresta da base maior é 9 cm e a aresta lateral é 8 cm. Calcule a altura do tronco, sabendo que a diagonal do tronco é perpendicular à aresta lateral.

14.163) Em um tronco de uma pirâmide triangular regular, os lados das bases são 2 cm e 6 cm. Calcule a altura do tronco, sabendo que a face lateral forma 60° com o plano da base maior.

14.164) A altura de um tronco de uma pirâmide quadrangular regular é 4 cm e a diagonal do tronco é 5 cm. Calcule a área da seção determinada por um plano que contém as diagonais das duas bases.

14.165) Em um tronco de uma pirâmide quadrangular regular, as áreas das bases são Q e q $(Q > q)$ e as arestas laterais formam ângulos de 45° com o plano da base maior. Calcule a área da seção por um plano que contém as diagonais das bases.

14.166) O tronco de uma pirâmide triangular regular tem bases de lados 8 m e 5 m e altura 3 m. Um plano contém uma aresta da base maior e o vértice oposto da base menor. Calcule a área da seção.

14.167) Em um tronco de pirâmide, a razão entre arestas correspondentes das duas bases é $\frac{13}{17}$. A seção paralela que contém o ponto médio da altura do tronco (seção média) tem perímetro igual a 45 m. Calcule os perímetros das bases.

14.168) As áreas das bases de um tronco de pirâmide são $2\ m^2$ e $98\ m^2$. Calcule a área da seção paralela que passa pelo ponto médio da altura do tronco.

14.169) A altura de um tronco de pirâmide é igual a **h** e as áreas das bases são 16 e 81. A que distância da base maior deve ser tomada uma seção paralela às bases, de modo que sua área seja igual a 36?

14.170) Calcule a altura de um tronco de pirâmide de volume igual a $49\ cm^3$ sabendo que as áreas das bases são $9\ cm^2$ e $25\ cm^2$.

14.171) Uma pirâmide de base quadrada tem 15 m de altura e aresta da base igual a 6 m. Cortando-se nessa pirâmide uma seção transversal situada a 5 m da base, obtém-se um tronco. Calcule:
a) as áreas das bases do tronco (S_1 e S_2);
b) o volume do tronco (V_T).

14.172) Calcule o volume de um tronco de pirâmide de 12 cm de altura sabendo que as áreas das bases são $5\ cm^2$ e $20\ cm^2$.

14.173) As faces laterais de um tronco de pirâmide regular são trapézios de altura 13 cm. As bases do tronco são quadrados de lados 4 cm e 14 cm. Calcule o volume desse tronco.

14.174) Um tronco de pirâmide hexagonal regular tem altura de 8 m e as arestas das duas bases medem 7 m e 5 m. Determine o volume desse tronco.

14.175) Determine o volume de um tronco de pirâmide triangular regular, no qual as arestas das bases medem 4 cm e 2 cm, e a altura é 5 cm.

14.176) Determine o volume de um tronco de pirâmide quadrangular regular, no qual as arestas das bases medem 4 cm e 2 cm e a altura é 5 cm.

14.177) Determine o volume de um tronco de pirâmide hexagonal regular, no qual as arestas das bases medem 4 cm e 2 cm e a altura é 5 cm.

14.178) As arestas das bases de um tronco de pirâmide triangular regular medem 12 cm e 8 cm e as faces laterais formam 60° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

14.179) As arestas das bases de um tronco de pirâmide quadrangular regular medem 12 cm e 8 cm e as faces laterais formam 45° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

14.180) As arestas das bases de um tronco de pirâmide hexagonal regular medem 6 cm e 4 cm e as faces laterais formam 60° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

14.181) Os lados das bases de um tronco de pirâmide triangular regular são 8 cm e 4 cm e as arestas laterais formam 30° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

14.182) Os lados das bases de um tronco de pirâmide quadrangular regular são 8 cm e 4 cm e as arestas laterais formam 45° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

14.183) Os lados das bases de um tronco de pirâmide hexagonal regular são 8 cm e 4 cm e as arestas laterais formam 60° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

14.184) Os lados das bases de um tronco de pirâmide triangular regular são 6 m e 4 m e o ângulo agudo da face lateral é de 60°. Calcule o volume do tronco.

14.185) Mesmo problema anterior, no caso de um tronco de pirâmide quadrangular regular.

14.186) Mesmo problema anterior, no caso de um tronco de pirâmide hexagonal regular.

14.187) Calcule o volume de um tronco de pirâmide triangular regular de aresta lateral $\sqrt{48}$ cm e arestas das bases 10 cm e 4 cm.

14.188) Calcule o volume de um tronco de pirâmide quadrangular regular de arestas das bases 10 cm e 4 cm e aresta lateral $\sqrt{48}$ cm.

14.189) Calcule o volume de um tronco de pirâmide hexagonal regular de aresta lateral $\sqrt{48}$ cm e arestas das bases 10 cm e 4 cm.

14.190) As arestas das bases de um tronco de pirâmide triangular regular medem 9 cm e 3 cm. As faces laterais são trapézios cuja altura é igual à soma dos raios das circunferências inscritas nas bases. Calcule o volume do tronco.

14.191) Em um tronco de pirâmide triangular regular a aresta lateral é igual ao raio R da circunferência circunscrita à base maior e forma 60° com o plano da base. Determine o volume do tronco.

14.192) Em um tronco de pirâmide triangular regular as áreas das bases são iguais a $4\sqrt{3}$ cm² e $9\sqrt{3}$ cm² e a área da face lateral é $\frac{5\sqrt{30}}{3}$ cm². Calcule o volume do tronco.

14.193) As arestas das bases de um tronco de pirâmide quadrangular regular são 24 cm e 12 cm e a face lateral é um trapézio de altura 10 cm. Calcule o volume do tronco.

14.194) Determine o volume de um tronco de pirâmide quadrangular regular sabendo que a diagonal mede 40 cm e é perpendicular à aresta lateral, que mede 30 cm.

14.195) Um tronco de pirâmide quadrangular regular tem volume 109 cm³, altura 3 cm e as suas diagonais das bases são proporcionais a 5 e 7. Calcule as medidas das arestas das bases.

14.196) Em um tronco de pirâmide quadrangular regular, a área da base menor é 16 cm² e a área da face lateral é 64 cm². Calcule o volume do tronco, se a face lateral forma 60° com o plano da base.

14.197) Em um tronco de pirâmide triangular regular, a altura é 6 m, os lados de uma base são 29 m, 52 m e 27 m e o perímetro da outra base é 72 m. Determine o volume do tronco.

14.198) Em um tronco de pirâmide de volume 152 m³ e altura 6 m, as áreas das bases são proporcionais a 9 e 4. Determine o volume da pirâmide não truncada.

14.199) Em um tronco de pirâmide as áreas das bases são 9 m² e 49 m² e a altura é 36 m. Calcule o volume da pirâmide não truncada.

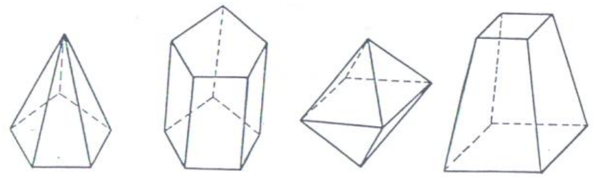
14.200) Em um tronco de pirâmide de bases quadradas, a soma dos perímetros das bases é 32 cm, a soma das áreas das bases é 34 cm² e o volume é 245 cm³. Calcule as arestas das bases e a altura do tronco.

Capítulo

15 Poliedros convexos

15.1 — TIPOS DE POLIEDROS

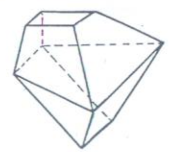
Pirâmides, prismas, octaedros regulares, troncos de pirâmides, são sólidos limitados por superfícies fechadas, formadas exclusivamente de polígonos convexos. Toda superfície fechada que consiste inteiramente de polígonos convexos é chamada *superfície poliédrica* e o sólido limitado por essa superfície chama-se *poliedro*. Os polígonos que formam a superfície poliédrica são as *faces* do poliedro. Para um poliedro convexo supõe-se que:



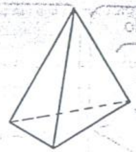
a) Não há duas faces num mesmo plano.
b) Cada lado de uma face está contido em duas, e somente duas faces.
c) O plano que contém cada face deixa todas as demais faces num mesmo semi-espaço.

Os *vértices* das faces são também os vértices do poliedro e os *lados* das faces são chamados *arestas* do poliedro. Note que cada vértice do poliedro corresponde a um *ângulo poliédrico*, no qual está contido todo o poliedro.

Um segmento com extremidades em dois vértices do poliedro e não contido em uma face é chamado *diagonal* do poliedro.



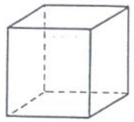
Os poliedros são classificados de acordo com o seu número de faces. O mínimo número de faces é quatro e o poliedro com quatro faces chama-se **tetraedro**. Outros nomes seguem na tabela abaixo.

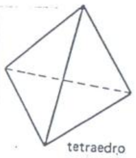

tetraedro

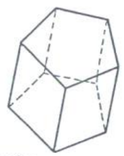
nome	número de faces
tetraedro	4
pentaedro	5
hexaedro	6
octaedro	8
decaedro	10
dodecaedro	12
icosaedro	20

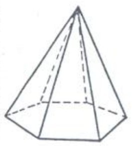
15.2 — TEOREMA DE EULER

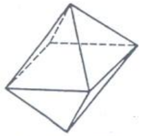
Consideremos os sólidos representados nas figuras. São todos eles exemplos de poliedros convexos.

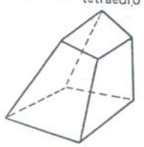

cubo


tetraedro


prisma pentagonal


pirâmide hexagonal


octaedro regular


tronco de pirâmide quadrangular

Indiquemos por:
V: o número de **vértices**
A: o número de **arestas**
F: o número de **faces**

de cada um desses poliedros e calculemos, para cada um, o valor da expressão

$$V - A + F$$

Os resultados estão resumidos na tabela abaixo.

poliedro convexo	V	A	F	V − A + F
cubo	8	12	6	2
tetraedro	4	6	4	2
prisma pentagonal	10	15	7	2
pirâmide hexagonal	7	12	7	2
octaedro regular	6	12	8	2
tronco	8	12	6	2

Como você pode notar, o valor da expressão $V - A + F$ permanece o mesmo para todos os poliedros convexos do exemplo. Na verdade, encontraríamos o mesmo valor para qualquer outro poliedro convexo. A propriedade que estamos observando é conhecida como teorema de Euler.

Eis o seu enunciado geral:

> Para todo **poliedro convexo** vale a relação:
>
> $$V - A + F = 2$$

Antes de dar a sua demonstração, examinemos um exemplo de aplicação.

Exercício Resolvido

15.1) Um poliedro convexo tem oito faces, sendo uma pentagonal, duas quadrangulares e cinco triangulares. Quantas arestas e quantos vértices tem esse poliedro?

Solução

Calculemos o número de arestas:

1 face pentagonal	−	5 arestas
2 faces quadrangulares	−	8 arestas
5 faces triangulares	−	15 arestas
		28 arestas

Sendo assim, o número de arestas do poliedro é A = 14 (pois como cada aresta é comum a duas faces, no cálculo acima, cada aresta havia sido contada duas vezes). Temos, então: F = 8 e A = 14 e como

$$V - A + F = 2$$

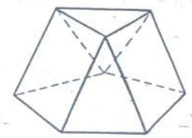
obtemos

$$V - 14 + 8 = 2$$

isto é,

$$V = 8$$

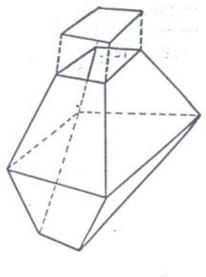
A figura sugere *uma das formas possíveis* de um sólido com essas características.



15.3 — DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE EULER

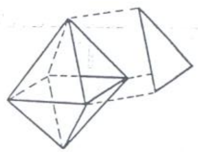
A superfície poliédrica S que limita um poliedro convexo tem V vértices, A arestas e F faces. Sendo $N = V - A + F$, provemos que $N = 2$. Ao longo da demonstração, vamos eliminar sucessivamente as faces, uma a uma, da superfície poliédrica.

Vamos, primeiramente, remover uma das faces. Na *superfície aberta* S_1 o número de arestas A_1 e o número de vértices V_1 não se alteram, enquanto que o número de faces decresce em uma unidade. Assim,



$$V_1 - A_1 + F_1 = N - 1$$

Uma aresta de uma superfície poliédrica é chamada *de fronteira* se está contida em uma única face. Um *vértice de fronteira* é aquele que pertence a uma única face. Uma face também se chama *face de fronteira* se contém uma aresta de fronteira. É claro que somente superfícies abertas têm elementos de fronteira. Uma face qualquer deve ter no mínimo uma aresta que *não seja de fronteira*, caso contrário a superfície estaria reduzida a um polígono plano.



Consideremos agora dois casos:

1.º) Todas as faces de S_1 são triângulos.
2.º) Ao menos uma das faces de S_1 tem mais que três lados.

Demonstração no 1.º caso

Uma face triangular pode ter **uma** ou **duas** arestas de fronteira e **no máximo um** vértice de fronteira. Assim, vamos remover de S_1 uma face de fronteira, obtendo uma nova superfície S_2. A face removida pode ter uma aresta de fronteira e nenhum vértice de fronteira. Neste caso,

$$V_2 - A_2 + F_2 = V_1 - (A_1 - 1) + (F_1 - 1) = V_1 - A_1 + F_1 = N - 1$$

Mas, se a face removida tem duas arestas de fronteira e um vértice de fronteira, então

$$V_2 - A_2 - F_2 = (V_1 - 1) - (A_1 - 2) + (F_1 - 1) = V_1 - A_1 + F_1 = N - 1$$

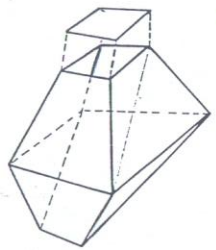
Assim, **a remoção de uma face de fronteira não muda o valor da expressão $V_1 - A_1 - F_1$. Se continuarmos removendo faces de fronteira, uma por uma,** chegaremos a uma só face triangular, para a qual

$$V - A + F = 1$$

Logo, $N - 1 = 1$, isto é, $N = 2$, como queríamos provar.

Demonstração no 2.º caso

Se uma face de S_1 tem mais que três lados, consideramos nessa face uma diagonal, que passa a ser considerada como se fosse *uma nova aresta*. Esta nova aresta divide a face em duas. Com tal recurso, o número de faces e o número de arestas aumentam em uma unidade cada, de modo que a expressão $V_1 - A_1 + F_1$ não se altera. Assim, dividindo cada face não triangular em faces triangulares, recaímos no 1.º caso, onde já foi provado que



$$V - A + F = 2$$

15.4 — SOMA DOS ÂNGULOS DAS FACES

Recordemos, inicialmente, a seguinte propriedade da Geometria Plana, já examinada no exercício 6.42:

> Em um polígono convexo de **n** lados, a soma das medidas dos ângulos internos é dada pela expressão
>
> $$S_n = (n - 2) \cdot 180°$$

Assim, por exemplo,

para o triângulo:	$S_3 = (3 - 2) \cdot 180° = 180°$
para o quadrilátero:	$S_4 = (4 - 2) \cdot 180° = 360°$
para o pentágono:	$S_5 = (5 - 2) \cdot 180° = 540°$

e assim por diante.

Tomemos o sólido apresentado no exercício 15.1, o qual tem uma face pentagonal, duas quadrangulares e cinco triangulares. Podemos calcular a soma das medidas dos ângulos de todas as faces desse poliedro, escrevendo

$$S = S_5 + 2S_4 + 5S_3 = 540^\circ + 2 \cdot (360^\circ) + 5 \cdot (180^\circ) = 2\,160^\circ$$

Entretanto, esta soma pode também ser calculada mediante uma *fórmula geral*, que daremos a seguir.

> A soma das medidas dos ângulos das faces de um poliedro convexo é dada pela expressão
>
> $$S = (V - 2) \cdot 360^\circ$$

Para o poliedro do exemplo acima, temos $V = 8$, donde

$$S = (8 - 2) \cdot 360^\circ = 2\,160^\circ$$

resultado que confirma a contagem direta feita anteriormente. Vejamos, agora, como se demonstra essa fórmula geral.

Demonstração

Se o poliedro tem F faces, podemos considerá-las numeradas 1, 2, 3, ..., F. Sejam $n_1, n_2, \ldots, n_F$ os números de lados de cada face. Se somarmos $n_1 + n_2 + \ldots + n_F$, como cada lado está contido em duas faces, esta soma resultará igual a 2A.

A soma das medidas dos ângulos da face **i** é igual a

$$S_i = (n_i - 2) \cdot 180^\circ$$

A soma das medidas de todos os ângulos de todas as faces é

$$\begin{aligned} S &= (n_1 - 2) \cdot 180^\circ + (n_2 - 2) \cdot 180^\circ + \ldots + (n_F - 2) \cdot 180^\circ = \\ &= (n_1 + n_2 + \ldots + n_F - 2F) \cdot 180^\circ = \\ &= (2A - 2F) \cdot 180^\circ = (A - F) \cdot 360^\circ \end{aligned}$$

Mas, pelo teorema de Euler, temos $V - A + F = 2$, donde $A - F = V - 2$ e assim

$$\boxed{S = (V - 2) \cdot 360^\circ}$$

Exercício Resolvido

15.2) Qual é o polígono da base de uma pirâmide na qual a soma dos ângulos das faces é 12π radianos?

Solução

Sendo $S = 2\pi(V - 2) = 12\pi$ obtemos imediatamente $V = 8$. Ora, um destes vértices é o *vértice da pirâmide*; logo, os outros sete são os *vértices da base*. Isto mostra que o polígono da base é um heptágono.

Exercícios Propostos

15.3) Um poliedro convexo de oito faces tem cinco faces triangulares e três pentagonais. Calcule o número de arestas e o número de vértices desse poliedro.

15.4) Um poliedro convexo tem sete faces triangulares, três pentagonais e uma face hexagonal. Determine o número de arestas e o número de vértices desse poliedro.

15.5) Quantos vértices tem um poliedro convexo de doze faces pentagonais?

15.6) Em um poliedro convexo de 13 arestas, o número de vértices é igual ao dobro do número de faces. Quantas faces tem esse poliedro?

15.7) Um poliedro convexo tem nove faces quadrangulares e duas pentagonais. Calcule o número de arestas e o número de vértices desse poliedro.

15.8) Em um poliedro convexo de 30 arestas, a diferença entre o número de faces e o número de vértices é $F - V = 8$. Quantos vértices tem esse poliedro?

15.9) Qual é a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo que tem 11 faces e 18 arestas?

15.10) Qual é o polígono da base de uma pirâmide na qual a soma dos ângulos das faces é igual a 4π radianos?

15.11) Qual é o polígono da base de uma pirâmide na qual a soma dos ângulos das faces é igual a 8π radianos?

15.12) Qual é o polígono da base de um prisma no qual a soma dos ângulos das faces é igual a 20π radianos?

15.13) Calcule o número de faces de um poliedro convexo de 18 arestas sabendo que a soma dos ângulos das faces é 28π radianos.

15.14) A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo é 16π. Esse poliedro só tem faces triangulares e pentagonais. Sendo 20 o número de arestas, qual é o número de faces de cada tipo?

15.15) A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo é 26π radianos. Esse poliedro só tem faces quadrangulares e hexagonais. Sendo 21 o número de arestas, qual é o número de faces de cada tipo?

15.16) Um poliedro convexo tem quatro faces triangulares e quatro quadrangulares. Calcule a soma das medidas dos ângulos das faces desse poliedro.

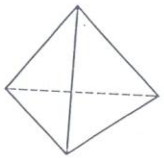
15.5 — POLIEDROS REGULARES

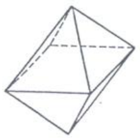
Poliedro regular é um poliedro cujas faces são todas polígonos regulares com mesmo número de lados e cujos ângulos poliédricos são congruentes.

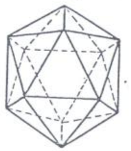
Cada vértice determina um ângulo poliédrico, constituído de *no mínimo três faces*. A soma das medidas dos ângulos das faces deste ângulo poliédrico é, como vimos no exercício 8.21, *menor do que* 360°.

Caso das faces triangulares

Se as faces do poliedro regular são **triângulos eqüiláteros**, então o mesmo vértice pode pertencer a *três triângulos* ($3 \cdot 60° < 360°$), ou a *quatro triângulos* ($4 \cdot 60° < 360°$), ou a *cinco triângulos* ($5 \cdot 60° < 360°$). Assim, só pode haver três tipos de poliedros regulares com faces triangulares. São eles:


tetraedro regular


octaedro regular


icosaedro regular

a) Tetraedro regular, formado por:

$F = 4$ faces triangulares
$V = 4$ vértices
$A = 6$ arestas

b) Octaedro regular, formado por:

$F = 8$ faces triangulares
$V = 6$ vértices
$A = 12$ arestas

c) Icosaedro regular, formado por:

$F = 20$ faces triangulares
$V = 12$ vértices
$A = 30$ arestas

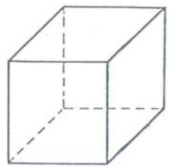
Caso das faces quadradas

Se as faces de um poliedro são **quadrados**, então o mesmo vértice pode pertencer a *três quadrados* ($3 \cdot 90° < 360°$), mas nunca a 4 ou mais ($4 \cdot 90° = 360°$).

Assim, só pode haver um tipo de poliedro regular com faces quadradas: o *cubo*, também chamado *hexaedro regular*.

Cubo ou Hexaedro regular

$F = 6$ faces quadradas
$V = 8$ vértices
$A = 12$ arestas

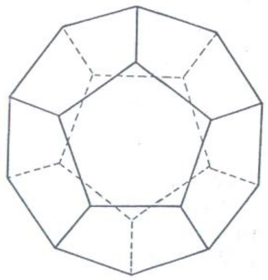

cubo ou hexaedro regular

Caso das faces pentagonais

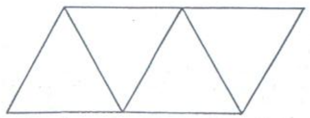
Se as faces de um poliedro são **pentágonos regulares**, então o mesmo vértice pode pertencer a *três pentágonos* ($3 \cdot 108° < 360°$), mas nunca a 4 ou mais ($4 \cdot 108° > 360°$). Assim, só pode haver um tipo de poliedro regular com faces pentagonais: o *dodecaedro regular*.

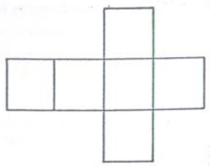
Dodecaedro regular

$F = 12$ faces pentagonais
$V = 20$ vértices
$A = 30$ arestas

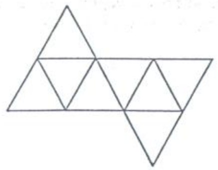

dodecaedro regular

A área total de cada poliedro regular é a soma das áreas de todos os polígonos regulares que constituem suas faces. Recortando as figuras seguintes, em cartolina, e dobrando-as ao longo das linhas, podemos construir os modelos dos poliedros regulares.

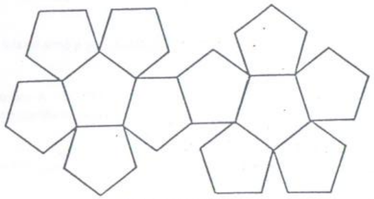

tetraedro regular



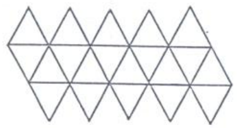
cubo ou hexaedro regular



octaedro regular



dodecaedro regular



icosaedro regular

Exercícios Propostos

15.17) Quantos vértices tem um poliedro convexo que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma face pentagonal e duas faces hexagonais?

15.18) Dois tetraedros regulares de arestas iguais são colocados juntos, de modo que as faces de contato coincidam. Quantos vértices, arestas e faces tem o poliedro assim obtido?

15.19) Prove que, num poliedro convexo que tem o número de vértices igual ao de faces, o número de arestas é par.

15.20) Existe poliedro convexo com número par de faces e número ímpar de vértices, sendo que cada face tem o número de lados par igual para todas as faces?

15.21) Um poliedro convexo tem **a** faces de **n** lados, **b** faces de **m** lados e **c** faces de **r** lados. Calcule o número de vértices.

15.22) Um poliedro convexo, cujas faces são quadriláteros e pentágonos, tem 15 arestas. A soma das medidas dos ângulos das faces é 2 880°. Quantas faces de cada tipo tem o poliedro?

15.23) A soma das medidas dos ângulos das faces de uma pirâmide é igual a n · 360°. Dê o número de vértices da base da pirâmide.

15.24) A soma das medidas dos ângulos das faces de um tronco de pirâmide é igual a n · 360°. Dê o número de arestas laterais do tronco.

15.25) Um poliedro convexo tem 16 faces. De um de seus vértices partem cinco arestas, de cinco outros vértices partem quatro arestas e de cada um dos vértices restantes partem três arestas. Calcule o número de arestas e de vértices desse poliedro.

15.26) Quantos vértices tem um poliedro convexo com três faces triangulares, cinco quadrangulares e sete pentagonais?

15.27) Calcule o número de faces de um poliedro convexo que tem cinco vértices, sabendo que de dois vértices partem cinco arestas e que partem quatro arestas de cada um dos demais.

15.28) Um poliedro convexo de 65 vértices tem **n** faces triangulares e **2n** faces pentagonais. Calcule o número de arestas.

15.29) A soma das medidas dos ângulos das faces de um poliedro convexo é 2 520°. Qual é o número de faces, se há 30 arestas?

15.30) Num poliedro convexo, cada face tem um número ímpar de lados. Diga se o número de faces é par ou ímpar.

15.31) Num poliedro convexo, o número de arestas que parte de cada vértice é ímpar. Diga se o número de vértices é par ou ímpar.

15.32) De um tetraedro regular, suprimem-se duas faces. Dê o número de arestas, vértices e faces da superfície aberta.

15.33) De um octaedro regular, suprimem-se três faces com um vértice em comum. Dê o número de arestas, vértices e faces da superfície aberta.

15.34) De um icosaedro regular, suprimem-se três faces com um vértice em comum. Dê o número de arestas, vértices e faces da superfície aberta.

15.35) De um cubo, suprimem-se três faces com um vértice em comum. Dê o número de arestas, vértices e faces da superfície aberta.

15.36) De um dodecaedro regular, suprimem-se três faces com um vértice em comum. Dê o número de arestas, vértices e faces da superfície aberta.

15.37) Em uma pirâmide regular de volume V, a aresta da base é **a** e a soma das medidas dos ângulos das faces é 1 080°. Determine a altura da pirâmide.

15.38) Em uma pirâmide regular de área lateral S, a aresta da base é **a** e a soma das medidas dos ângulos das faces é 1 440°. Determine o apótema da pirâmide.

15.39) Em um tronco de pirâmide regular de volume V, as arestas das bases são **a** e **2a** e a soma das medidas dos ângulos das faces é 2 160°. Determine a altura do tronco.

15.40) Mesmo problema anterior, sendo a soma das medidas dos ângulos das faces igual a 1 440°.

15.41) Calcule a área lateral de uma pirâmide regular cujas arestas têm todas medida **a**, sabendo que V + A + F = 18.

15.42) Um tronco de pirâmide regular tem as arestas das bases iguais a **a** e **2a** e as arestas laterais iguais a **a**. Calcule a área lateral do tronco, sabendo que $V + F = 26$.

15.43) Em uma pirâmide regular, a altura é igual à aresta da base. Determine tg α, onde α é o ângulo que a face lateral forma com o plano da base, sabendo que $2V + F = 2A$.

15.44) Com base em um mesmo polígono regular de lado **a**, constroem-se uma pirâmide e um prisma, ambos de altura igual a **a**. O número de faces da pirâmide somado ao número de faces do prisma resulta em 11. Calcule o volume da pirâmide.

15.45) São dados um prisma e uma pirâmide regulares, cujas bases são polígonos congruentes. O número total de arestas dos dois sólidos é igual ao dobro do número total de faces. Se ambos os sólidos têm aresta da base **2a** e altura **a**, calcule a razão entre a área lateral da pirâmide e a do prisma.

15.46) São dados dois poliedros regulares de mesmo número de arestas. O primeiro tem o número de arestas igual ao dobro do seu número de vértices. Calcule a razão entre os volumes desses dois sólidos, se as arestas de ambos têm medida **a**.

15.47) São dados dois poliedros regulares de aresta **a**. A soma das medidas dos ângulos das faces do primeiro é igual ao dobro da do segundo. Calcule a razão entre os volumes desses dois sólidos.

15.48) Uma pirâmide e um prisma regulares têm todas as arestas iguais a **a**. O total de vértices é 11 e o total de faces é 10. Calcule a razão entre as áreas laterais dos dois sólidos.

15.49) Duas pirâmides regulares têm aresta da base **a** e altura **h**. O total de vértices é 11 e o número de arestas da primeira é o dobro do da segunda. Calcule a razão entre os volumes das duas pirâmides.

15.50) Dois prismas regulares têm aresta da base **2a** e altura **a**. O número de vértices do primeiro é igual ao número de faces do segundo, enquanto que o número de arestas do segundo é o triplo do número de faces do primeiro. Determine a razão entre os volumes dos dois prismas.

15.51) Dê a área da superfície total de um poliedro regular, no qual a aresta mede 2 cm e a soma das medidas dos ângulos das faces é igual àquela correspondente a um prisma triangular.

15.52) Um prisma regular tem como base um polígono com número par de lados. Com um plano que contém uma aresta lateral e a maior diagonal da base, divide-se o prisma em dois outros, congruentes, cada um dos quais tem quatro vértices a menos que o prisma inicial. Quantas arestas tem o prisma inicial?

15.53) Em um prisma regular as arestas todas têm medida **a** e o número de arestas é igual ao número de diagonais do prisma. Calcule o seu volume.

15.54) Dois prismas são tais que o número de faces do primeiro é igual ao número de diagonais do segundo e o número de arestas do segundo é o dobro do número de vértices do primeiro. Quantas faces tem o segundo prisma?

15.55) Um prisma regular tem todas as arestas iguais a **a** e o número de arestas é igual ao número de diagonais de faces. Dê a área total desse prisma.

15.56) Um prisma tem o número de vértices igual ao número de diagonais. Quantas arestas tem esse prisma?

15.57) O número de diagonais de um prisma é igual a quatro vezes o seu número de faces. Quantos vértices tem o prisma?

15.58) O número de diagonais de um prisma é o dobro do seu número de arestas. Calcule a soma das medidas dos ângulos das faces desse prisma.

Exercícios Suplementares

V.1) Determine as medidas das três arestas de um paralelepípedo reto-retângulo, dada a sua soma 43a, a medida da diagonal 25a e a área de uma face $180a^2$.

V.2) Num prisma quadrangular regular, a soma das medidas das 12 arestas é 7a e a área total é $2a^2$. Determine as medidas das arestas e da diagonal.

V.3) Um paralelepípedo reto-retângulo tem diagonal de 13 cm e área total de 192 cm^2. A seção por um plano que contém duas arestas opostas tem área de 60 cm^2. Determine as dimensões do paralelepípedo.

V.4) Calcule a área total de um paralelepípedo reto-retângulo, sabendo que a sua diagonal mede 5 cm e que a soma das medidas de todas as suas 12 arestas é igual a 36 cm.

V.5) Calcule as três dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo, sabendo que estão em PA, que a diagonal mede $3\sqrt{2}$ cm e que a área total é 18 cm^2.

V.6) Calcule a distância entre um vértice de um cubo de aresta **a** e uma diagonal do cubo que não passa por esse vértice.

V.7) A base de um paralelepípedo oblíquo é um losango de lado 60 cm. O plano da seção diagonal que contém a maior diagonal do losango é perpendicular ao plano da base e a área desta seção é 7 200 cm^2. A aresta lateral mede 80 cm e forma 60° com o plano da base. Calcule a medida da diagonal menor da base.

V.8) As três dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo estão em PG. A área total é 28 cm^2 e a diagonal mede $\sqrt{21}$ cm. Calcule o volume.

V.9) Determine as três dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo sabendo que a soma de duas delas é 25 cm, o volume é 900 cm^3 e a área total é 600 cm^2.

V.10) Uma das dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo é 1 cm. Sendo 10 cm^3 o volume e 54 cm^2 a área total, calcule as duas outras dimensões.

V.11) Se a medida da aresta de um cubo é aumentada de k metros, o volume aumenta de $7k^3$ metros cúbicos. Qual é a medida da aresta desse cubo?

V.12) Um cubo ABCD $A_1B_1C_1D_1$ tem aresta de 8 cm. Um plano que passa pelos pontos médios das arestas $\overleftrightarrow{CC_1}$, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ determina no cubo uma seção. Calcule o perímetro dessa seção.

V.13) No exercício anterior, calcule a área da seção.

V.14) Em um prisma triangular regular, todas as arestas têm medida **a**. Calcule a área da seção obtida por um plano que contém uma aresta da base e o ponto médio da aresta lateral oposta.

V.15) Um prisma reto de altura 10 cm tem como base um triângulo de lados 4 cm, 13 cm e 15 cm. Calcule o volume do prisma.

V.16) No exercício anterior, calcule a área da seção obtida por um plano que contém uma aresta lateral e a menor altura da base.

V.17) No exercício anterior, calcule a área da seção obtida por um plano que contém a menor aresta da base e o vértice oposto da outra base.

V.18) No exercício anterior, calcule a área da seção obtida por um plano que contém a maior aresta da base e o ponto da aresta lateral oposta, situado à distância de 2,4 cm da base.

V.19) A base de um prisma reto é um triângulo retângulo de catetos 15 cm e 20 cm e a sua altura é 16 cm. Calcule a área da seção obtida por um plano que contém a hipotenusa da base e o vértice do ângulo reto da outra base.

V.20) Um prisma tem como base um triângulo retângulo isósceles de cateto 10 cm. Uma aresta lateral forma 45° com o plano da base e sua projeção sobre o plano da base é a bissetriz do ângulo reto. Calcule a área da seção obtida por um plano que contém essa aresta lateral e o ponto médio da hipotenusa da base.

V.21) No exercício anterior, calcule a distância do vértice do ângulo reto da base ao plano da face lateral oposta.

V.22) Um paralelepípedo tem como faces losangos de lado **a** e ângulo de 60°. Determine as áreas das seções diagonais.

V.23) Calcule o volume do paralelepípedo do exercício anterior.

V.24) A base de um prisma reto é um trapézio isósceles de bases 12 cm e 22 cm. Um plano que contém a base maior da base do prisma e a base menor da outra forma 60° com o plano dessa base e determina uma seção de área 408 cm². Calcule a área lateral do prisma.

V.25) A base de um paralelepípedo reto é um paralelogramo de lados 2 cm e 25 cm e ângulo de 60°. A diagonal maior do paralelogramo é congruente à diagonal menor do paralelepípedo. Calcule a área lateral do paralelepípedo.

V.26) A base de um prisma reto é um trapézio isósceles circunscrito a uma circunferência de raio 8 cm. O lado lateral do trapézio mede 20 cm. Calcule a altura do prisma, se a sua área lateral é 160 cm².

V.27) Os lados da base de um prisma triangular reto são proporcionais a 3, 25 e 26. A aresta lateral do prisma mede 10 cm e a área total é de 288 cm². Calcule a área lateral.

V.28) Em um prisma triangular oblíquo, as distâncias entre as arestas laterais são 7 cm, 8 cm e 9 cm e a aresta lateral mede 10 cm. Calcule a área lateral desse prisma.

V.29) A base de um prisma oblíquo é um triângulo eqüilátero de lado **a**. Uma das arestas laterais mede **b** e forma 60° com as arestas da base adjacentes. Calcule a área lateral do prisma.

V.30) A base de um prisma é um triângulo eqüilátero de lado **a**. Um dos vértices da base superior tem projeção no centro da base inferior. A aresta lateral do prisma forma 60° com o plano da base. Calcule o volume do prisma.

V.31) A base de um paralelepípedo reto é um losango de lado **a**. A seção que contém duas arestas opostas das bases forma 45° com o plano da base e tem área S. Calcule o volume do paralelepípedo.

V.32) A diagonal da base de um paralelepípedo reto-retângulo mede **d**. Por esta diagonal conduz-se um plano que contém a extremidade de uma aresta lateral e forma 30° com o plano da base. A área da seção é S. Calcule o volume do paralelepípedo.

V.33) Um paralelepípedo oblíquo tem como base um retângulo de lados 7 cm e 24 cm. Uma das seções diagonais é um paralelogramo cujo plano é perpendicular ao plano da base e tem área igual a 250 cm². Calcule o volume do paralelepípedo.

V.34) Em um prisma triangular regular, conduz-se um plano que contém uma aresta da base e o vértice oposto da outra base, formando 45° com o plano da base. Sendo S a área da seção, calcule o volume do prisma.

V.35) A maior diagonal de um prisma regular hexagonal mede ℓ e forma 30° com o plano da face lateral do prisma. Calcule o volume do prisma.

V.36) A base de um prisma triangular regular é inscrita em uma circunferência de raio 4 cm. A altura do prisma é igual ao lado do hexágono regular circunscrito a essa mesma circunferência. Calcule o volume do prisma.

V.37) A base de um prisma é um triângulo eqüilátero de lado **a** e as faces laterais são losangos com ângulo de 60°. Calcule o volume do prisma.

V.38) Dê a expressão do volume de um prisma reto cuja base é um triângulo eqüilátero de lado **a** e cujas faces laterais são quadrados.

V.39) Dê a expressão do volume de uma pirâmide regular de base quadrada, cujas faces laterais são triângulos eqüiláteros de lado **a**.

V.40) Numa pirâmide quadrangular regular, a altura é **h** e a área lateral excede de $\frac{3h^2}{2}$ a área da base. Calcule a aresta da base.

V.41) Calcule a aresta da base de uma pirâmide triangular regular, de altura **h**, sabendo que a área total é igual à área de um triângulo eqüilátero de lado $h\sqrt{2}$.

V.42) Uma pirâmide tem como base um retângulo e o pé da altura é o centro desse retângulo. Um dos lados da base mede **a**, a altura da pirâmide é $a\sqrt{2}$ e a área lateral é $a^2\sqrt{3}$. Calcule o outro lado da base.

V.43) Em uma pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base é **a** e cuja altura é também **a**, inscreve-se um prisma regular de base quadrada, com uma base na base da pirâmide. Sendo $\frac{16a^2}{9}$ a área total do prisma, calcule o seu volume.

V.44) Uma pirâmide tem como base um triângulo de lados 7 cm, 8 cm e 9 cm e as arestas laterais medem 8,1 cm. Calcule o volume da pirâmide.

V.45) Dê a razão entre o volume de um cubo e o volume de um tetraedro regular cuja aresta é a diagonal de uma face do cubo.

V.46) A diagonal da base de uma pirâmide quadrangular regular mede **a** e a aresta lateral também mede **a**. Calcule a área total da pirâmide.

V.47) No exercício anterior, calcule o volume da pirâmide.

V.48) A base de uma pirâmide é um triângulo retângulo ABC, de hipotenusa $BC = 4\sqrt{29}$ cm. A aresta lateral $\overline{VA}$ é perpendicular ao plano da base. Sendo $VB = 17$ cm e $VC = 25$ cm, calcule o volume da pirâmide.

V.49) A altura de uma pirâmide é dividida em três partes iguais por planos paralelos à base. Determine as áreas das seções, se a área da base é $900\ cm^2$.

V.50) Pelo ponto que divide a altura de uma pirâmide na razão $2 : 3$ (contada do vértice à base) conduz-se um plano paralelo à base. A área da seção é $10\ cm^2$ menor do que a área da base. Calcule a área da seção.

V.51) Em que razão fica dividida a altura de uma pirâmide, a partir do vértice, por uma seção paralela à base, se a área da seção é igual à metade da área da base?

V.52) Em que razão fica dividida a altura de uma pirâmide, a partir do vértice, por uma seção paralela à base, se a área da seção é igual a $\frac{m}{n}$ da área da base? $(m < n)$.

V.53) A área da base de uma pirâmide é igual a $224\ cm^2$ e a área de uma seção paralela à base é $14\ cm^2$. A distância da seção à base é 27 cm. Calcule a altura da pirâmide.

V.54) a) Tome um ponto qualquer no interior de um quadrado. Sejam **a**, **b**, **c** e **d** as distâncias desse ponto aos vértices. Calcule **d**, em função de **a**, **b** e **c**.
b) A base de uma pirâmide é um quadrado e o pé da altura é um ponto do interior desse quadrado. Sejam **x**, **y** e **z** as medidas de três arestas laterais. Calcule a medida da quarta aresta lateral.

V.55) O lado da base de uma pirâmide quadrangular regular mede 5 cm e as arestas laterais determinam diedros de 120°. Calcule a área lateral dessa pirâmide.

V.56) Calcule a área total de uma pirâmide triangular regular de aresta da base **a**, sabendo que o diedro determinado pela aresta da base mede 60°.

V.57) A área da seção de uma pirâmide quadrangular regular, que contém a altura e o apótema da pirâmide, é igual a $9\ cm^2$. A face lateral forma 60° com o plano da base. Calcule a área lateral da pirâmide.

V.58) Em uma pirâmide quadrangular regular, as arestas laterais determinam diedros de 120°. Sendo S a área da seção que contém o vértice da pirâmide e uma diagonal da base, calcule a área lateral da pirâmide.

V.59) Calcule o volume de uma pirâmide triangular, cujas arestas laterais medem 10 cm, 15 cm e 9 cm e formam um triedro triretângulo.

V.60) A base de uma pirâmide é um triângulo de lados 12 cm, 20 cm e 28 cm. Cada aresta lateral forma 45° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

V.61) A base de uma pirâmide é um triângulo isósceles ABC cujo ângulo do vértice é $\hat{A} = 45°$. A aresta lateral $\overline{VA}$ é perpendicular e congruente a $\overleftrightarrow{AB}$ e a $\overleftrightarrow{AC}$. Sendo $VB = VC = \ell$, calcule o volume da pirâmide.

V.62) Pelo centro da base de uma pirâmide triangular regular, conduz-se uma seção paralela à face lateral. Calcule a razão entre os volumes das partes obtidas.

V.63) Um tronco de pirâmide tem áreas das bases B e $k \cdot B$ $(k > 1)$ e altura H. Calcule a altura da pirâmide não truncada.

V.64) Um tronco de pirâmide tem altura $\frac{13\sqrt{3}}{6}$ cm e as suas bases são quadrados cujos perímetros têm soma igual a $16\sqrt{3}$. Calcule as medidas das arestas das bases, sabendo que o volume do tronco é igual ao de um cubo com altura igual à do tronco.

V.65) Um tronco de pirâmide tem por base inferior um quadrado de 4 m de lado. O volume desse tronco é $40\ m^3$ e a sua altura é 5 m. Quanto mede o lado da base superior?

V.66) Em um tronco de pirâmide de altura **h** e áreas das bases B_1 e B_2, a seção paralela às bases, que divide a altura ao meio, tem área B. Mostre que o volume do tronco pode ser dado por

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4B)$$

V.67) Em um tronco de pirâmide quadrangular regular, a área da base menor é $36\ cm^2$ e a área da face lateral é $14\ cm^2$. A face lateral forma 60° com o plano da base. Calcule a medida da aresta da base maior.

V.68) O lado da base menor de um tronco de pirâmide hexagonal regular mede 14 cm. A face lateral tem altura 8 cm e forma 30° com o plano da base. Calcule a medida do lado da base maior.

V.69) As bases de um tronco de pirâmide triangular regular têm lados 20 cm e 50 cm e a altura do tronco é 10 cm. Uma seção paralela a uma face lateral contém um vértice da base menor. Calcule a área dessa seção.

V.70) As diagonais de um tronco de pirâmide quadrangular regular são perpendiculares às arestas laterais. A medida da aresta lateral é 72 cm e a altura do tronco é 56 cm. Calcule as medidas dos lados das bases.

V.71) As arestas das bases de um tronco de pirâmide quadrangular regular medem 18 cm e 12 cm e as faces laterais formam 60° com o plano da base. Calcule a diagonal do tronco.

V.72) A face lateral de um tronco de pirâmide quadrangular regular é um trapézio de bases 6 cm e 12 cm e altura 20 cm. Calcule a área da seção que contém duas arestas opostas das bases.

V.73) As bases de um tronco de pirâmide são retângulos de lados 30 cm e 40 cm e ainda 15 cm e 20 cm. Uma das arestas laterais mede 8 cm e é perpendicular aos planos das bases. Calcule as medidas das três outras arestas.

V.74) Uma aresta lateral de um tronco de pirâmide triangular regular mede 4 m e forma 60° com o plano da base. O raio da circunferência circunscrita à base menor é 1 m. Calcule o volume do tronco.

V.75) As áreas das bases de um tronco de pirâmide hexagonal regular são $60\sqrt{3}\ cm^2$ e $40\sqrt{3}\ cm^2$ e as faces laterais formam 45° com o plano da base. Calcule a área lateral do tronco.

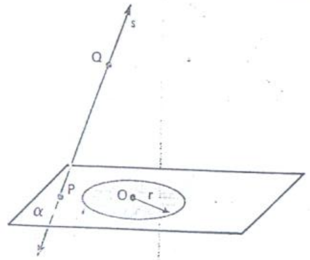
PARTE VI

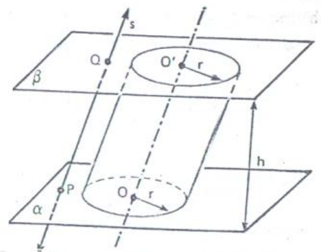
Capítulo 16

Cilindros circulares

16.1 — NOÇÃO DE CILINDRO CIRCULAR

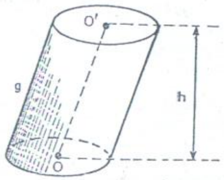
Imaginemos que sobre um plano α esteja situado um círculo de centro O e raio **r**. Seja **s** uma reta que fura o plano α no ponto P (essa reta não precisa ser perpendicular ao plano α). Sobre a reta **s** tomamos um ponto Q, distinto de P, e por esse ponto consideramos o plano β, paralelo a α. Em seguida, construímos todos os segmentos paralelos a **s**, que têm uma extremidade num ponto do círculo e a outra no plano β. Unindo todos esses segmentos, obtemos um *sólido* que recebe o nome de cilindro circular.





Nomenclatura

Na figura ao lado temos o exemplo de um cilindro circular. Vejamos quais são os nomes de certas partes dessa figura.



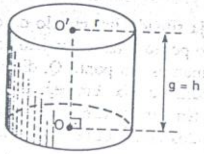
Bases: são os círculos de centros O e O' e raio **r** (contidos nos planos α e β).
Eixo: é a reta $\overleftrightarrow{OO'}$.

Geratrizes: são os segmentos paralelos a $\overline{OO'}$ que têm extremidades nos pontos das *circunferências* das bases.
Altura: é a distância entre os planos das bases (indicada por **h** na figura).
Área lateral: é a área da superfície formada pela união das geratrizes.
Área total: é a soma das áreas das bases com a área lateral.

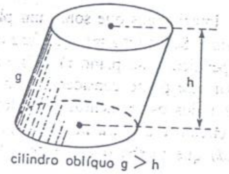
16.2 — CLASSIFICAÇÃO DOS CILINDROS

a) **Segundo a inclinação do eixo**

- **Cilindro reto**: é aquele cujas geratrizes são perpendiculares ao plano da base.
- **Cilindro oblíquo**: é aquele que não é reto.



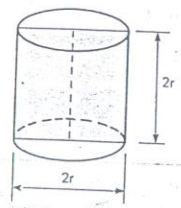
cilindro reto ou de revolução



cilindro oblíquo $g > h$

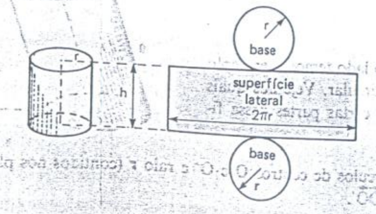
b) **Segundo a forma da seção meridiana**

- **Cilindro eqüilátero**: é o *cilindro reto* para o qual $h = 2r$, isto é, cuja interseção com um plano que contém o eixo é um *quadrado*. A interseção de um cilindro qualquer com um plano que contém o eixo é chamada **seção meridiana**. Assim, o cilindro eqüilátero é aquele cujas seções meridianas são quadrados.



cilindro eqüilátero

16.3 — ÁREA LATERAL E ÁREA TOTAL DO CILINDRO RETO



Se a superfície lateral do cilindro reto for *desenrolada*, isto é, **desenvolvida num plano**, o resultado será um retângulo de altura **h** e comprimento $2\pi r$. Portanto, a **área lateral** do cilindro reto é dada por

$$\boxed{S_\ell = 2\pi rh}$$

A **área total** do cilindro reto é obtida somando-se a área lateral com as áreas das duas bases:

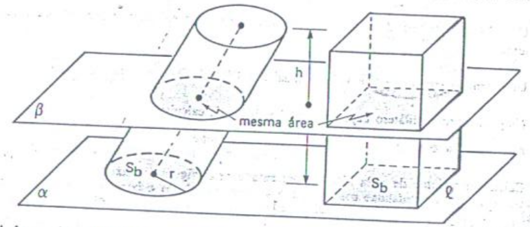
$$S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

e, assim,

$$\boxed{S_t = 2\pi r(h + r)}$$

16.4 — VOLUME DO CILINDRO

O *princípio de Cavalieri* (veja item 13.5) pode ser utilizado para determinarmos o volume de um cilindro circular. Sejam **h** a altura e **r** o raio da base do cilindro. A área da base é $S_b = \pi r^2$. Imaginemos um paralelepípedo reto-retângulo cuja altura seja **h** e cuja base esteja contida no mesmo plano α que contém a base do cilindro.



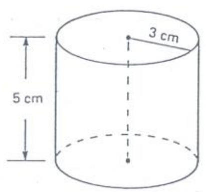
A base do paralelepípedo pode ser adotada como sendo um quadrado com a mesma área S_b da base do cilindro. Basta, para isto, que tal quadrado tenha lado de medida $\ell = r\sqrt{\pi}$. Qualquer plano $\beta \parallel \alpha$ que secciona o cilindro, secciona também o paralelepípedo e tais seções têm *mesma área*, pois são figuras congruentes às respectivas bases. Assim, o cilindro e o paralelepípedo têm **mesmo volume**. Daí resulta que o volume do cilindro é dado por

$$\boxed{V = S_b \cdot h = \pi r^2 h}$$

Exercício Resolvido

16.1) Dado um cilindro reto de altura 5 cm e raio da base igual a 3 cm, calcule:

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V);
e) a área da seção meridiana (S_m).



Solução

a) $S_b = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$
b) $S_\ell = 2\pi r h = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 30\pi \text{ cm}^2$
c) $S_t = S_\ell + 2S_b = 30\pi + 18\pi = 48\pi \text{ cm}^2$
d) $V = S_b h = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 45\pi \text{ cm}^3$
e) $S_m = (2r)h = 6 \cdot 5 = 30 \text{ cm}^2$

Exercícios Propostos

16.2) Dado um cilindro reto de altura 4 cm e volume igual a $3\pi \text{ cm}^3$, calcule:
a) o raio da base (r);
b) a área da base (S_b);
c) a área lateral (S_ℓ);
d) a área total (S_t).

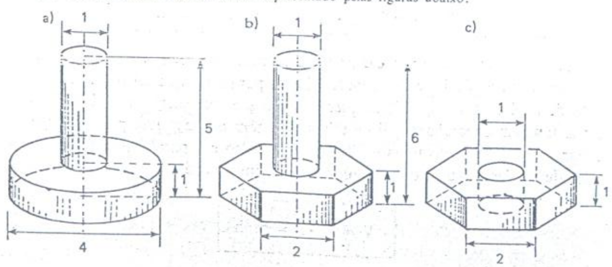
16.3) Um cilindro reto tem volume igual a $15\pi \text{ cm}^3$ e a área da sua base é igual a $10\pi \text{ cm}^2$. Determine:
a) o raio da base (r);
b) a altura (h);
c) a área lateral (S_ℓ);
d) a área total (S_t).

16.4) Um cilindro reto tem altura igual ao raio da base e a sua área lateral é $16\pi \text{ cm}^2$. Calcule o volume.

16.5) Um cilindro eqüilátero tem volume igual a $1\,000 \text{ cm}^3$. Qual é o raio da base?

16.6) Num cilindro eqüilátero cuja área total é $16\pi \text{ cm}^2$, calcule:
a) o raio da base (r);
b) o volume (V).

16.7) Calcule o volume de cada sólido representado pelas figuras abaixo:



16.8) Determine a altura de um cilindro reto cuja área lateral é igual ao dobro da área da base, sabendo que a circunferência da base tem comprimento igual a 4π cm.

16.9) Um primeiro cilindro tem altura 2h e raio da base r; um segundo cilindro tem altura **h** e raio da base 2r. Qual é a razão entre os seus volumes?

16.10) Sendo V o volume de um cilindro eqüilátero, calcule em função de V:
a) o raio da base (r);
b) a área lateral (S_ℓ).

16.11) Aumentando de 6 cm o raio ou a altura de um cilindro reto, num ou noutro caso, o seu volume aumenta de y cm^3. Sendo 2 cm a altura original, calcule o raio original.

16.12) Sendo A a área lateral de um cilindro eqüilátero, calcule em função de A:
a) o raio da base (r);
b) o volume (V).

16.13) Um primeiro cilindro reto tem altura **h** e raio da base **r** e um segundo tem altura **H** e raio da base R. Sabendo que os dois cilindros têm áreas laterais iguais, determine a razão entre seus volumes, em função dos raios das bases.

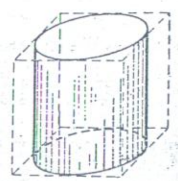
16.14) Qual é o volume de ferro utilizado para fabricar um pedaço de tubo com 10 cm de comprimento e diâmetro interno de 2 cm, sendo 0,3 cm a espessura do ferro?

16.15) Uma indústria produz azeite em latas de 1 litro, com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, tendo por base um quadrado de lado **2a** e altura **3a**. Deseja-se modificar a forma das latas, passando-se a usar latas cilíndricas de altura igual a **2a**. Pergunta-se:

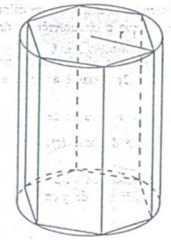
a) Qual deve ser o raio da base?
b) Qual das duas embalagens utiliza menos material?

16.16) Considere um tetraedro regular de aresta **a** e um cilindro eqüilátero de altura **a**. Determine a razão entre as áreas totais dos dois sólidos.

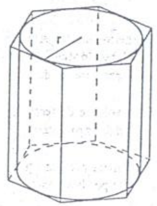
16.17) Calcule o volume de um cilindro inscrito em um cubo de aresta **a**.



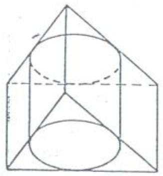
16.18) Calcule a razão entre o volume de um cilindro reto de raio r e o volume do prisma regular hexagonal nele inscrito.



16.19) Calcule a razão entre o volume de um cilindro reto de raio r e o volume do prisma hexagonal regular a ele circunscrito.

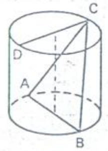


16.20) Um cilindro reto de raio R e altura h está inscrito em um prisma triangular. Sendo P o perímetro da base do prisma, calcule o seu volume.



16.21) A seção meridiana de um cilindro circular reto é um retângulo cuja diagonal mede 10 cm e forma 60° com o plano da base. Calcule a área lateral do cilindro.

16.22) Os diâmetros $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ das bases do cilindro reto indicado são ortogonais entre si. Sendo ABC um triângulo eqüilátero de lado **a**, calcule a área lateral do cilindro.



16.23) A seção meridiana de um cilindro é um quadrado de área S. Calcule a área da base.

16.24) A altura de um cilindro reto é 16 cm e o raio da base é 10 cm. Um segmento de 20 cm tem uma extremidade em cada circunferência das bases. Calcule a distância entre o eixo do cilindro e a reta suporte deste segmento.

16.25) Um triângulo ABC, com lados AB = 15 cm, AC = 14 cm e BC = 13 cm, gira em torno de um eixo que passa por C e é paralelo ao lado $\overleftrightarrow{AB}$. Calcule a área da seção meridiana da superfície cilíndrica gerada pelo lado $\overline{AB}$.

16.26) Um cilindro reto com raio da base 8 cm é cortado por um plano que contém duas geratrizes. A área da seção obtida é igual a 75% da área da seção meridiana. Calcule a distância entre o eixo do cilindro e o plano da seção.

16.27) Dado um cilindro reto de altura 30 cm e raio da base 40 cm, conduz-se um plano paralelo ao eixo e à distância de 24 cm dele. Calcule a área da seção.

16.28) Um plano paralelo ao eixo de um cilindro reto corta em suas bases arcos de 120°. O perímetro da seção obtida é 60 cm e a sua área é 225 cm². Determine o raio da base e a altura do cilindro.

16.29) Um cilindro reto tem altura 16 cm e raio da base 10 cm. Um plano paralelo ao eixo determina uma seção quadrada. Calcule a distância desse plano ao eixo do cilindro.

16.30) Em um cilindro reto toma-se uma seção perpendicular à base, de modo que a circunferência da base fica dividida na razão de 1 : 5. Calcule a razão entre as áreas desta seção e da seção meridiana.

16.31) A superfície lateral de um cilindro é obtida a partir de um quadrado de lado **a**. Calcule a área da base do cilindro.

16.32) A área da seção meridiana de um cilindro reto está para a área da base na razão de $4 : \pi$. Calcule o ângulo entre as diagonais da seção meridiana.

16.33) Um prisma quadrangular regular é inscrito em um cilindro. A diagonal da face lateral do prisma tem medida ℓ e forma 60° com o plano da base. Calcule a diagonal da seção meridiana do cilindro.

16.34) Em um cilindro eqüilátero inscreve-se uma pirâmide cuja base é um triângulo eqüilátero, sendo uma de suas arestas laterais uma geratriz do cilindro. Se a diagonal da seção meridiana do cilindro mede $8\sqrt{2}$ cm, calcule a área da maior face da pirâmide.

16.35) Um cubo de aresta **a** é inscrito em um cilindro. Determine a área da seção meridiana do cilindro.

16.36) Uma pirâmide quadrangular regular é inscrita em um cilindro reto de altura 5 cm. A aresta lateral forma 60° com o plano da base. Calcule o raio da base do cilindro.

16.37) Um prisma triangular regular é inscrito em um cilindro. Um segmento tem por extremidades o centro da base do cilindro e o ponto médio de uma aresta lateral do prisma. Sabendo que esse segmento mede 16 cm e forma 30° com a aresta lateral, calcule a área da seção meridiana do cilindro.

16.38) A diagonal da seção meridiana de um cilindro eqüilátero mede **d**. Calcule a aresta lateral da pirâmide quadrangular regular inscrita nesse cilindro.

16.39) Um cilindro está inscrito em um prisma triangular reto cujas arestas da base medem 26 cm, 28 cm e 30 cm. Sendo 40 cm a altura do prisma, calcule a área da seção meridiana do cilindro.

16.40) Um cilindro está inscrito em um prisma triangular reto cujas arestas da base medem 30 cm, 36 cm e 42 cm. Sendo 50 cm a medida da diagonal da seção meridiana do cilindro, calcule a área lateral do prisma.

16.41) Um cilindro é inscrito em um prisma reto de altura 17 cm, cuja base é um losango de diagonais iguais a 8 cm e 15 cm. Calcule a área da seção meridiana do cilindro.

16.42) Um cilindro é inscrito em um prisma hexagonal regular cuja altura é 23 cm. Calcule a área da base do cilindro, se a área lateral do prisma é igual a $276\sqrt{3}$ cm².

16.43) Um segmento tangencia a superfície lateral de um cilindro reto de altura 25 cm e raio da base 12 cm. As extremidades do segmento estão situadas nos planos das bases e suas distâncias ao eixo do cilindro são 20 cm e 15 cm. Calcule o comprimento desse segmento.

16.44) Um cilindro é inscrito em um prisma quadrangular regular de altura **2a** e diagonal da base **2a**. Calcule a diagonal da seção meridiana do cilindro.

16.45) Em um cilindro inscrito em um prisma triangular regular de aresta da base **a** e altura **3a**, inscreve-se um prisma quadrangular regular. Calcule a área lateral deste prisma.

16.46) Um retângulo de área S, girando em torno de um de seus lados, gera um cilindro circular reto. Calcule a área da face lateral de um prisma triangular regular circunscrito a esse cilindro.

16.47) Um cilindro está inscrito em um prisma reto, cuja base é um trapézio isósceles de bases 8 cm e 18 cm. Nesse cilindro inscreve-se um prisma triangular regular. Calcule a área lateral deste prisma, sendo 10 cm a sua altura.

16.48) Uma pirâmide quadrangular regular é inscrita em um cilindro de altura 10 cm. A extremidade de uma geratriz que passa por um vértice da base da pirâmide dista 6 cm da aresta lateral. Calcule a aresta da base e a aresta lateral da pirâmide.

16.49) Calcule a área lateral de um cilindro eqüilátero de geratriz ℓ.

16.50) Calcule a altura de um cilindro eqüilátero de área lateral S.

16.51) Calcule a razão entre a área lateral e a área da base de um cilindro eqüilátero.

16.52) Calcule a área lateral de um cilindro reto, sendo S a área da sua seção meridiana.

16.53) Calcule a área lateral de um cilindro reto cuja diagonal da seção meridiana tem medida ℓ e forma 60° com o plano da base.

16.54) A área lateral de um cilindro reto é igual à área de um círculo cujo diâmetro é uma geratriz do cilindro. Calcule a razão entre a altura e o raio da base do cilindro.

16.55) A área lateral de um cilindro reto é igual à área do círculo circunscrito à seção meridiana. Calcule a razão entre a altura do cilindro e o raio da base.

16.56) Calcule a razão entre as áreas laterais de um cilindro eqüilátero e de uma pirâmide quadrangular regular inscrita nele.

16.57) Calcule a área lateral de uma pirâmide triangular regular inscrita em um cilindro eqüilátero de altura 2r.

16.58) Inscreve-se um tetraedro regular em um cilindro reto. Calcule a área lateral do cilindro, sendo **a** a aresta do tetraedro.

16.59) A aresta de um cubo é igual ao raio **r** da base de um cilindro reto e a área total do cubo é igual à área lateral do cilindro. Determine a altura do cilindro.

16.60) Calcule a razão entre as áreas laterais dos cilindros circunscrito e inscrito em um prisma triangular regular.

16.61) Calcule a área total de um cilindro cujo diâmetro da base é igual à diagonal da face de um cubo de aresta **a** e cuja altura é igual ao diâmetro desse cubo.

16.62) Um prisma quadrangular regular é inscrito em um cilindro eqüilátero. Calcule a razão entre as áreas laterais dos dois sólidos.

16.63) Calcule a razão entre a área total de um cubo e a área lateral do cilindro inscrito nele.

16.64) Um retângulo de lados **a** e **b** gira em torno do lado de medida **a** e depois em torno do lado de medida **b**. Calcule a razão entre as áreas laterais dos cilindros obtidos.

16.65) Na questão anterior, dê a razão entre as áreas totais dos dois cilindros.

16.66) Um plano paralelo ao eixo de um cilindro reto determina na circunferência da base um arco de 120°. Se a área da seção é S, calcule a área lateral do cilindro.

16.67) Um prisma quadrangular regular inscrito em um cilindro tem face lateral de área S. Calcule a área lateral do cilindro.

16.68) O desenvolvimento da superfície lateral de um cilindro é um retângulo cuja diagonal mede **d** e forma 30° com a base do retângulo. Calcule a área total do cilindro.

16.69) Determine a altura de um cilindro eqüilátero cuja área total é igual à de um cubo de aresta **a**.

16.70) Um cilindro reto de altura 15 cm e raio da base 10 cm é cortado por um plano paralelo ao seu eixo, que determina na circunferência da base um arco de 120°. Calcule a área da maior porção da superfície lateral do cilindro, separada por esse plano.

16.71) No problema anterior, calcule a área da maior porção da base do cilindro.

16.72) A área total de um cilindro eqüilátero é igual a 15 m². Calcule a área da sua seção meridiana.

16.73) Calcule a área total de um cilindro reto se a área da base é igual a 490π cm² e a área da seção meridiana é 400 cm².

16.74) A seção meridiana de um cilindro reto tem área 300 cm² e diagonal de 25 cm. Calcule a área total desse cilindro.

16.75) O diâmetro $\overleftrightarrow{AB}$ da base superior de um cilindro reto é ortogonal ao diâmetro $\overleftrightarrow{CD}$ da base inferior. Sendo AC = 10 cm e sabendo que a distância do segmento $\overleftrightarrow{AC}$ ao eixo do cilindro é 4 cm, calcule a área total do cilindro.

... um prisma reto cuja base é um quadrado de lado igual ao raio da base do cilindro e cuja altura é igual ao comprimento da circunferência da base do cilindro. Dê a razão dos volumes dos dois sólidos.

16.77) São dados dois cilindros retos. A altura do primeiro é o dobro da altura do segundo e o raio da base do segundo é o triplo do raio da base do primeiro. Calcule a razão entre seus volumes.

16.78) Um cilindro tem raio **r** e altura 3**r**, enquanto que um segundo cilindro tem raio 3**r** e altura **r**. Calcule a razão entre seus volumes.

16.79) O raio da base de um cilindro reto é 10 cm e a área da seção paralela ao eixo, que dista 6 cm do eixo, é 80 cm². Calcule o volume do cilindro.

16.80) A seção meridiana de um cilindro é um quadrado de área S. Calcule o volume do cilindro.

16.81) Um triângulo ABC, com lados AB = 7 cm, BC = 8 cm e AC = 9 cm, gira em torno de um eixo que passa por A e é paralelo ao lado $\overleftrightarrow{BC}$. Calcule o volume do cilindro correspondente à superfície gerada pelo lado $\overleftrightarrow{BC}$.

16.82) Os diâmetros $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ das bases de um cilindro reto são ortogonais. Sendo 6 cm o raio da base do cilindro e AC = 11 cm, calcule o volume do cilindro.

16.83) Em um cilindro reto de volume 980 cm³ conduz-se um plano paralelo ao eixo, à distância de 7 cm deste. A área da seção obtida é a metade da área da seção meridiana do cilindro. Calcule a altura do cilindro.

16.84) Um plano paralelo ao eixo de um cilindro reto corta em suas bases arcos de 60°. O perímetro da seção é 26 cm e a sua área é 42 cm². Calcule o volume do cilindro.

16.85) A diagonal da seção meridiana de um cilindro reto mede ℓ e forma 30° com o plano da base. Calcule o volume do cilindro.

16.86) Um cilindro tem altura igual a 6 cm. Um plano paralelo ao eixo e distante 3 cm dele determina no cilindro uma seção quadrada. Calcule o volume do cilindro.

16.87) Em um cilindro reto, toma-se uma seção perpendicular à base, de modo que a circunferência da base fica dividida na razão 1 : 5. Se a área da seção é 49 cm² e a altura do cilindro é 7 cm, calcule o volume.

16.88) O desenvolvimento da superfície lateral de um cilindro é um quadrado de lado **a**. Calcule o volume do cilindro.

16.89) Calcule a área total de um cilindro eqüilátero de volume igual a V.

16.90) Calcule a área da seção meridiana de um cilindro eqüilátero de volume V.

16.91) Um cilindro eqüilátero é obtido fundindo-se um cubo de chumbo de aresta **a**. Qual é a altura do cilindro?

16.92) Um cubo é obtido fundindo-se um cilindro de chumbo de altura $\sqrt{3}$ cm e raio da base 1 cm. Qual é a diagonal do cubo?

16.93) Um prisma triangular regular é inscrito em um cilindro e um cilindro é inscrito nesse prisma. Calcule a razão entre os volumes desses cilindros.

16.94) Mesmo problema anterior, no caso de um prisma quadrangular regular.

16.95) Mesmo problema anterior, no caso de um prisma hexagonal regular.

16.96) Um cilindro reto tem volume V. Calcule o volume de um prisma quadrangular regular inscrito.

16.97) Um cilindro reto tem volume V. Calcule o volume de um prisma quadrangular regular circunscrito.

16.98) Calcule o volume de um prisma triangular regular, inscrito em um cilindro de volume V.

16.99) Um prisma quadrangular regular é inscrito em um cilindro. A diagonal da face lateral do prisma mede ℓ e forma 60° com o plano da base. Calcule o volume do cilindro.

16.100) Em um cilindro eqüilátero inscreve-se uma pirâmide cuja base é um triângulo eqüilátero, sendo uma de suas arestas laterais perpendicular ao plano da base. Se a área da face maior da pirâmide é $15\sqrt{3}$ cm², calcule o volume do cilindro.

16.101) Um cubo de aresta **a** é inscrito em um cilindro. Calcule o volume do cilindro.

16.102) Uma pirâmide triangular regular é inscrita em um cilindro reto de altura 5 cm. A aresta lateral forma 30° com o plano da base. Calcule o volume do cilindro.

16.103) Um prisma quadrangular regular é inscrito em um cilindro. O segmento que tem por extremidades o centro de uma base do cilindro e o ponto médio de uma aresta lateral do prisma mede 2 cm e forma 60° com a aresta lateral. Calcule o volume do cilindro.

16.104) O volume de um cilindro eqüilátero é V. Calcule a medida da aresta lateral da pirâmide quadrangular regular inscrita nesse cilindro.

16.105) Calcule o volume de um cilindro eqüilátero, sabendo que é numericamente igual à área total do cilindro.

16.106) Calcule a área total de um cilindro eqüilátero, sabendo que o seu volume é numericamente igual à área lateral.

16.107) Calcule o volume de um cilindro de altura igual a 9 cm, inscrito em um prisma triangular reto cujas arestas da base medem 5 cm, 6 cm e 7 cm.

16.108) O raio da base de um cilindro reto é **r** e, no desenvolvimento da superfície lateral, a geratriz forma 60° com a diagonal. Calcule o volume do cilindro.

16.109) Um cilindro de volume $\pi\sqrt{5}$ cm³ está inscrito em um prisma reto cuja base é um triângulo de lados 7 cm, 8 cm e 9 cm. Calcule o volume do prisma.

16.110) Um cilindro é inscrito em um prisma reto de altura **h**, cuja base é um losango de lado **h** e ângulo agudo de 60°. Calcule o volume do cilindro.

16.111) Um cilindro é inscrito em um prisma hexagonal regular cujas arestas são todas iguais a **a**. Dê o volume do cilindro.

16.112) Um prisma triangular regular tem a diagonal da face lateral medindo 4 cm e formando 60° com o plano da base. Calcule o volume do cilindro inscrito.

16.113) Em um cilindro inscrito em um prisma quadrangular regular, inscreve-se um tetraedro regular de aresta **a**. Calcule o volume do prisma.

16.114) Um cilindro eqüilátero é inscrito em um prisma cuja base é um trapézio isósceles de bases 4 cm e 9 cm. Calcule o volume do cilindro.

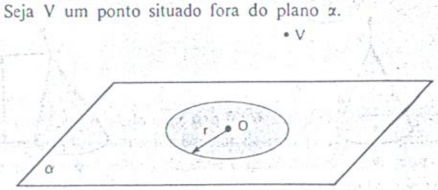
16.115) Calcule a razão entre os volumes de um cilindro eqüilátero de raio da base **a** e um tetraedro regular de aresta **a**.

Capítulo 17

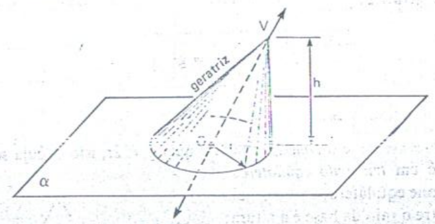
Cones circulares

17.1 — NOÇÃO DE CONE CIRCULAR

Imaginemos que sobre um plano α esteja situado um círculo de centro O e raio **r**. Seja V um ponto situado fora do plano α.



Podemos construir todos os segmentos que têm uma extremidade num ponto do círculo e a outra no ponto V. Unindo todos esses segmentos, obtemos um *sólido* que recebe o nome de **cone circular**.

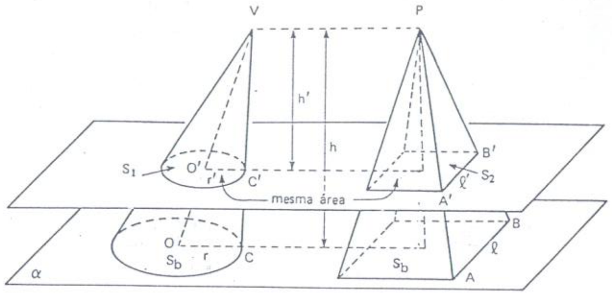


Nomenclatura

Vamos estabelecer os **nomes** de algumas partes do cone circular.

Vértice: é o ponto V.
Base: é o círculo de centro O e raio **r**.

17.4 — VOLUME DE UM CONE



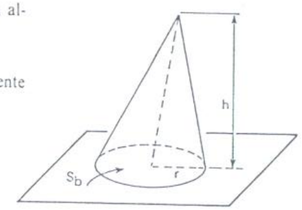
Propriedade

O **volume** de um cone qualquer é a terça parte do produto da *área de sua base* pela sua *altura*.

Se S_b é a área da base e **h** é a altura, temos $V = \frac{1}{3} S_b h$.

Sendo **r** o raio da base, logicamente $S_b = \pi r^2$, portanto:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$



Este fato pode ser reconhecido através do princípio de Cavalieri (veja o item 13.5). Suponhamos que uma *pirâmide de base quadrada* tem sua base contida no mesmo plano α da base do cone e que sua altura é a mesma altura **h** do cone. Imaginemos que a base da pirâmide tenha área igual à da base do cone. Para isto, basta tomar o lado ℓ do quadrado tal que $\pi r^2 = \ell^2$, isto é, $\ell = r\sqrt{\pi}$. Um plano paralelo a α, ao interceptar o cone segundo um círculo de raio r', intercepta também a pirâmide segundo um quadrado de lado ℓ'. Para se concluir que a pirâmide e o cone têm mesmo volume, basta mostrar que as duas seções assim obtidas têm mesma área.

Conforme vimos no item 14.9, para a pirâmide temos

$$\frac{S_2}{S_b} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{ donde } S_2 = S_b \cdot \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Para o cone, como △ VO'C' ~ △ VOC, temos

$$\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h}. \text{ Assim, } \frac{S_1}{S_b} = \frac{\pi(r')^2}{\pi r^2} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{ donde}$$

$$S_1 = S_b \cdot \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

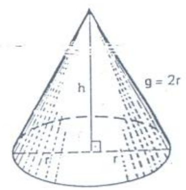
Daí resulta que $S_1 = S_2$. Fica, portanto, confirmada a propriedade citada anteriormente que dá o volume do cone circular:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

Exercícios Resolvidos

17.1) Considere um cone eqüilátero cujo raio da base é **r**. Determine:

a) a geratriz (g);
b) a área da base (S_b);
c) a área lateral (S_ℓ) e a área total (S_t);
d) a altura (h);
e) o volume (V).



Solução

Como vimos no item 17.2, se o cone considerado é eqüilátero, tem-se $g = 2r$ e ainda $h = r\sqrt{3}$. A área da base é $S_b = \pi r^2$. Para a área lateral, temos

$$S_\ell = \pi r g = \pi r(2r) = 2\pi r^2$$

donde a área total resulta

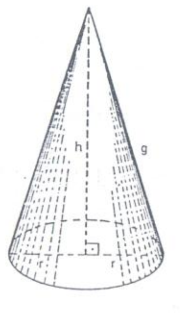
$$S_t = S_\ell + S_b = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$$

Finalmente, o volume é dado por

$$V = \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3}(\pi r^2) \cdot r\sqrt{3} = \frac{\pi r^3\sqrt{3}}{3}$$

17.2) Num cone reto, a seção meridiana (isto é, a seção determinada por um plano que contém o eixo do cone) é um triângulo cuja área é igual à área da base do cone. Se o raio da base mede 1 cm, determine a área lateral e o volume do cone.

Solução



A área da seção meridiana é dada por $\frac{(2r)h}{2} = rh$. Temos, então, $rh = \pi r^2$, donde

$$h = \pi r = \pi \text{ cm}.$$

Como $g^2 = h^2 + r^2 = \pi^2 r^2 + r^2 = r^2(\pi^2 + 1)$ temos $g = r\sqrt{\pi^2 + 1} = \sqrt{\pi^2 + 1}$ cm. Assim, a área lateral é

$$S_\ell = \pi r g = \pi\sqrt{\pi^2 + 1} \text{ cm}^2$$

e o volume é igual a

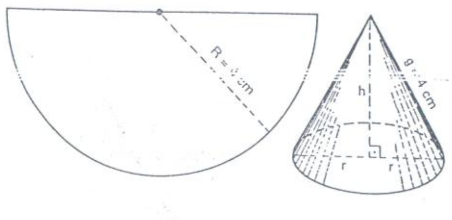
$$V = \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3}(\pi r^2)h =$$

$$= \frac{1}{3}(\pi)(\pi) = \frac{\pi^2}{3} \text{ cm}^3$$

17.3) Se a superfície lateral de um cone reto é desenvolvida em um plano (*desenrolada*), resulta um semicírculo de raio igual a 4 cm. Calcule o volume do cone.

Solução

O raio R do semicírculo é igual à geratriz do cone: g = 4 cm. A área do semicírculo é igual à área lateral do cone:



$$\frac{\pi R^2}{2} = \pi r g$$

$$\frac{\pi \cdot 4^2}{2} = \pi \cdot r \cdot 4$$

Daí obtemos

$$r = 2 \text{ cm}$$

o que indica que o cone obtido é *eqüilátero*. Sua altura é $h = r\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm. Assim, para o volume temos:

$$V = \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3}(\pi r^2)\cdot h = \frac{1}{3}(\pi \cdot 2^2)\cdot 2\sqrt{3} = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

Exercícios Propostos

17.4) Considere um cone reto de altura 4 m, cuja base tem 3 m de raio. Calcule:

a) a geratriz (g);
b) a área da base (S_b);
c) a área lateral (S_ℓ);
d) a área total (S_t);
e) o volume (V).

17.5) A geratriz de um cone de revolução mede 6 cm e a área da base é 5π cm². Calcule:

a) o raio da base (r);
b) a altura (h);
c) a área lateral (S_ℓ);
d) a área total (S_t);
e) o volume (V).

17.6) Considere um cone cuja geratriz mede 7 cm. Sabendo que a altura desse cone é igual ao diâmetro da base, calcule:

a) o raio da base (r);
b) a altura (h);
c) a área da base (S_b);
d) a área lateral (S_ℓ);
e) a área total (S_t);
f) o volume (V).

17.7) Determine o volume de um cone eqüilátero de altura igual a $\sqrt{3}$ cm.

17.8) Num cone reto, a altura é igual ao triplo do raio da base. Determine a geratriz, sabendo que o volume desse cone é igual a 10π cm³.

17.9) Qual é a área total de um cone eqüilátero cuja geratriz mede 12 cm?

17.10) Qual deve ser a altura de um cone eqüilátero cuja área lateral é 12π cm²?

17.11) A seção meridiana de um cone reto é um triângulo de área igual a 16 cm². Sabendo que a altura é maior do que o raio da base e que a geratriz mede 7 cm, calcule o volume desse cone.

17.12) Calcule o volume de um cone eqüilátero cuja base tem área igual a 12π m².

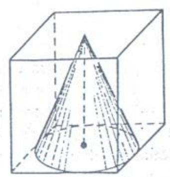
17.13) Num cone de revolução, a área lateral é 72 cm² e a geratriz mede 5 cm. Calcule o raio da base.

17.14) Qual deve ser o raio da base de um cone eqüilátero para que o seu volume seja 8π cm³?

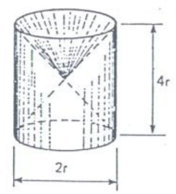
17.15) Qual é o volume de um cone eqüilátero cuja área total é 25π cm²?

17.16) Num cone reto, o raio da base é igual a $\sqrt{3}$ cm. Qual deve ser a altura desse cone para que o raio da base, a altura e o volume formem, nessa ordem, uma PG?

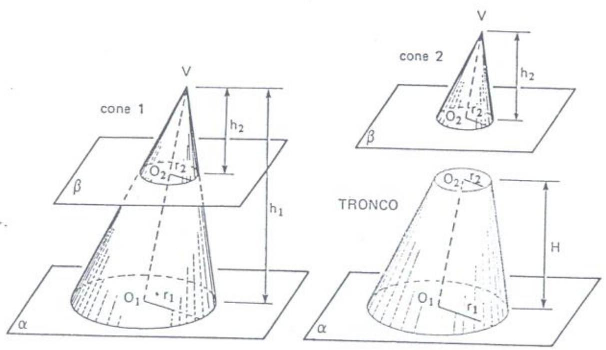
17.17) Considere um cubo de aresta igual a 1 cm. Podemos obter um cone tomando como base o círculo inscrito numa das faces do cone e como vértice o centro da face oposta. Qual é a área lateral desse cone?



17.18) A figura ao lado representa um cilindro do qual foram retirados dois cones. Determine o volume da parte do sólido que permaneceu onde estava.



17.5 — TRONCO DE CONE DE BASES PARALELAS



Consideremos um cone circular de vértice V e altura h_1, cuja base é um círculo de centro O_1 e raio r_1 (cone 1). Imaginemos que um plano β, paralelo ao plano α da base, corte o cone à distância h_2 do vértice, sendo $h_2 < h_1$. A interseção do plano β com o cone, ou seja, a **seção transversal** assim obtida é um círculo de centro O_2 e raio r_2. Note que o plano β separa o cone em dois sólidos, um dos quais é também um cone de vértice V e altura h_2 (cone 2). O outro é um sólido chamado tronco de cone.

As bases dos dois cones são as bases do tronco e a diferença $H = h_1 - h_2$ é a altura do tronco.

17.6 — CONES SEMELHANTES

Os cones 1 e 2 do item anterior são *semelhantes*, isto é, os segmentos correspondentes desses dois sólidos são proporcionais. Tomando-se, por exemplo, os raios das bases, as alturas e os segmentos de eixos de cada um dos cones, temos

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{VO_1}{VO_2} = k$$

onde **k** é a razão de semelhança

Para cones semelhantes valem também as duas propriedades seguintes.

1.ª) As **áreas** de superfícies correspondentes estão entre si na razão k^2.
2.ª) Os **volumes** dos dois sólidos, ou de partes correspondentes, então entre si na razão k^3.

Assim, por exemplo, para as áreas das bases, temos

$$\frac{S_{b_1}}{S_{b_2}} = k^2$$

e para os volumes:

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3$$

As duas afirmações acima são de fácil constatação.

17.7 — VOLUME DO TRONCO DE CONE

Para calcular o volume do tronco de cone, basta subtrair do volume do cone 1 o volume do cone 2:

$$V_T = V_1 - V_2$$

Então, $V_T = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 - \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2$

$$\boxed{V_T = \frac{1}{3}\pi\,[r_1^2 h_1 - r_2^2 h_2]}$$

Exercícios Resolvidos

17.19) Mostre que o volume do tronco de cone é igual a

$$V_T = \frac{\pi H}{3}[r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2]$$

Solução

Devemos lembrar que

$$h_1 - h_2 = H,\ h_1 = kh_2 \text{ e } r_1 = kr_2$$

Escrevemos, então,

$$V_T = \frac{1}{3}\pi[r_1^2 h_1 - r_2^2 h_2] = \frac{1}{3}\pi[k^2 r_2^2 \cdot kh_2 - r_2^2 h_2] =$$

$$= \frac{\pi r_2^2 h_2}{3} \cdot [k^3 - 1] =$$

$$= \frac{\pi r_2^2 h_2}{3} \cdot (k-1)(k^2+k+1) =$$

$$= \frac{\pi}{3}(h_2 k - h_2)(r_2^2 k^2 + r_2^2 k + r_2^2) =$$

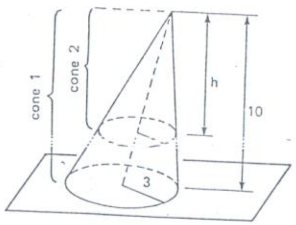
$$= \frac{\pi}{3}(h_1 - h_2)(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) =$$

$$= \frac{\pi H}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$

17.20) Um cone circular tem raio da base igual a 3 cm e altura igual a 10 cm. A que distância do vértice deve ser tomada uma seção transversal para se obter um tronco de volume igual à metade do volume do cone dado?

Solução

A situação do problema está representada na figura. A distância pedida é a altura **h** do cone 2. Sendo V_1, V_2 e V_T, respectivamente, os volumes dos cones 1 e 2 e do tronco, temos



$$V_T = \frac{1}{2}V_1$$

e como $V_T = V_1 - V_2$, vem $\frac{1}{2}V_1 = V_1 - V_2$ donde $V_1 = 2V_2$ ou ainda $\frac{V_1}{V_2} = 2$. Isto significa que a razão de semelhança k entre os cones 1 e 2 é tal que $k^3 = 2$, ou seja: $k = \sqrt[3]{2}$.

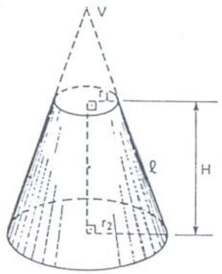
Sendo assim, $\frac{10}{h} = k = \sqrt[3]{2}$, isto é, $h = \frac{10}{\sqrt[3]{2}}$. Então a seção transversal deve estar à distância

$$h = \frac{10}{\sqrt[3]{2}} \cong 7{,}94 \text{ cm}$$

do vértice do cone. (Note que o raio da base é, neste problema, um dado desnecessário.)

17.21) Seja **um tronco de cone reto**, de altura H e raios das bases r_1 e r_2. Indiquemos por ℓ a *geratriz do tronco* (veja a figura). Mostre que a área lateral do tronco pode ser dada pela expressão

$$S_\ell = \pi(r_1 + r_2) \cdot \ell$$



Solução

Seja V o vértice dos cones cujas bases são os círculos de raios r_1 e r_2 que constituem as bases do tronco. O cone maior tem área lateral $S_2 = \pi r_2 g_2$ e o cone menor tem área lateral $S_1 = \pi r_1 g_1$, onde $g_2 - g_1 = \ell$. A área lateral do tronco é dada por $S = S_2 - S_1 = \pi(r_2 g_2 - r_1 g_1)$.

Mas como $\frac{g_2}{g_1} = \frac{r_2}{r_1}$, temos $g_2 r_1 - g_1 r_2 = 0$, portanto podemos escrever

$$S = \pi(r_2 g_2 - r_1 g_1 + g_2 r_1 - g_1 r_2) =$$

$$= \pi[g_2(r_1 + r_2) - g_1(r_1 + r_2)] =$$

$$= \pi(r_1 + r_2)(g_2 - g_1) =$$

$$= \pi(r_1 + r_2) \cdot \ell$$

Exercícios Propostos

17.22) Um cone de 35 cm de altura tem raio da base igual a 7 cm. Qual é a área da seção transversal desse cone, situada à distância de 30 cm do vértice?

17.23) De um cone de altura igual a 22 cm obtém-se um tronco de altura igual a 11 cm. Qual é a área da base menor do tronco se se sabe que a base maior tem raio igual a 6 cm?

17.24) Um cone circular tem altura de 77 m. Calcule o raio da base sabendo que a seção transversal feita a 21 m do vértice tem área de 225π m².

17.25) Um cone tem 15 cm de altura e raio da base igual a 6 cm. Cortando-se nesse cone uma seção transversal situada a 5 cm da base, obtém-se um tronco. Calcule:

a) as áreas das bases do tronco (S_1 e S_2);
b) o volume do tronco (V_T).

17.26) Calcule o volume de um tronco de cone de 36 cm de altura sabendo que as áreas das bases são 5π cm² e 20π cm².

17.27) Calcule o volume de um tronco de cone que se obtém cortando-se um cone eqüilátero, cujo raio da base mede 6 cm, por um plano cuja distância ao vértice é igual à metade da altura do cone.

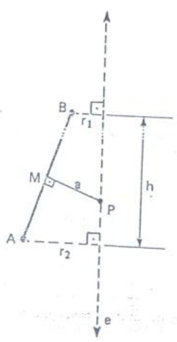
17.28) Calcule a altura de um tronco de cone de 78π cm³ de volume sabendo que os raios das bases são 2 cm e 5 cm.

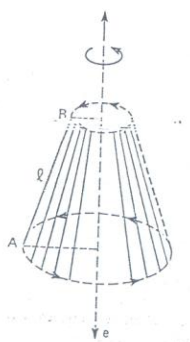
17.29) Um cone é separado, por meio de duas seções transversais, em três sólidos, de mesmo volume, sendo um deles um cone e os outros dois, troncos de cone. Determine a razão entre as áreas laterais dos dois troncos.

17.30) Com uma seção transversal separa-se um cone eqüilátero em dois sólidos de igual volume. Calcule a área dessa seção transversal sabendo que o raio da base do cone dado é 10 cm.

17.8 — SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Consideremos uma reta **e** (que chamaremos eixo de rotação) e um segmento $\overleftrightarrow{AB}$, coplanar com a reta **e** e contido em um dos semiplanos que têm origem nessa reta. Imaginemos que o segmento "gira" em torno do eixo **e**, produzindo uma *superfície*. Com uma linguagem mais precisa, imaginemos que cada ponto do segmento $\overleftrightarrow{AB}$ determina uma circunferência que passa por ele e tem como centro o pé da perpendicular conduzida desse ponto ao eixo. A união de todas estas circunferências forma uma superfície, chamada *superfície de revolução*. Se o segmento $\overleftrightarrow{AB}$ está inclinado em relação ao eixo, sem cortá-lo, obtém-se a superfície lateral de um tronco de cone. Se $\overleftrightarrow{AB}$ é paralelo ao eixo, obtém-se a superfície lateral de um cilindro reto. Se $\overleftrightarrow{AB}$ tem uma extremidade sobre o eixo, obtém-se a superfície lateral de um cone reto (estamos supondo que o segmento $\overleftrightarrow{AB}$ não é perpendicular ao eixo, pois neste caso teríamos um círculo ou uma coroa circular).



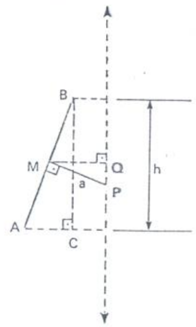


Seja ℓ o comprimento do segmento $\overleftrightarrow{AB}$ e indiquemos por r_1 e r_2 as distâncias de suas extremidades ao eixo. Já vimos, no exercício resolvido 17.21, que a área da superfície de revolução pode ser dada por

$$S = \pi(r_1 + r_2)\ell$$

Consideremos o ponto médio M do segmento $\overleftrightarrow{AB}$. A mediatriz de $\overleftrightarrow{AB}$ encontra o eixo no ponto P. Indiquemos MP = a. É possível provar que a área da superfície de revolução pode ser dada também pela expressão

$$\boxed{S = 2\pi a h}$$



Basta notar, na figura ao lado, que $\triangle ABC \sim \triangle PMQ$, donde

$$\frac{AB}{PM} = \frac{BC}{MQ}$$

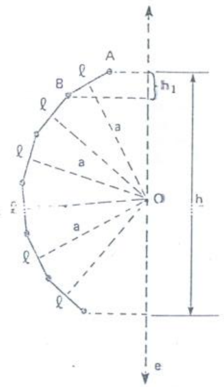
Lembrando que $MQ = \frac{r_1 + r_2}{2}$, temos

$$\frac{\ell}{a} = \frac{2h}{r_1 + r_2}$$

donde $\quad (r_1 + r_2)\ell = 2ah$

e, assim, $S = 2\pi ah$.

Este resultado pode ser generalizado. Consideremos uma seqüência de segmentos congruentes entre si, formando uma poligonal regular, circunscrita a uma circunferência de raio a e centro O. Seja **e** um eixo de rotação que passa por O e não corta a poligonal, como mostra a figura. A área da superfície de revolução gerada pela rotação do segmento $\overleftrightarrow{AB}$ é igual a $S_1 = 2\pi a h_1$. Analogamente, para os demais segmentos da poligonal, teríamos $S_2 = 2\pi a h_2$, $S_3 = 2\pi a h_3$, etc.



Assim, a área total resulta

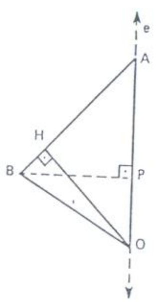
$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots = 2\pi a\,(h_1 + h_2 + h_3 + \ldots) = 2\pi a h$$

A área da superfície de revolução gerada pela rotação de uma poligonal regular em torno de um eixo de seu plano, passando pelo centro da circunferência inscrita, é igual ao produto do comprimento da circunferência inscrita pela projeção da poligonal sobre o eixo:

$$S = 2\pi ah$$

17.9 — SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Se o triângulo ABO gira em torno de um eixo que contém o lado $\overleftrightarrow{AO}$, obtém-se um sólido que se chama *de revolução*. Vamos mostrar que o volume desse sólido é igual à terça parte do produto da altura OH pela área da superfície de revolução gerada pelo lado $\overleftrightarrow{AB}$. Para isso, notemos que o sólido de revolução é a união de dois cones retos, gerados pela rotação dos triângulos ABP e BPO. Assim, o seu volume é



$$V = \frac{1}{3}\pi(BP)^2 \cdot AP + \frac{1}{3}\pi(BP)^2 \cdot PO = \frac{1}{3}\pi(BP)^2(AP + PO) =$$

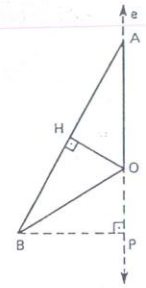
$$= \frac{1}{3}\pi(BP)^2 \cdot AO$$

Mas $(BP) \cdot (AO) = (AB) \cdot (OH)$, pois ambos os produtos dão o dobro da área do $\triangle$ ABO. Assim,

$$V = \frac{1}{3}\pi(BP)(AB) \cdot (OH)$$

A expressão $\pi(BP)(AB)$ representa a área lateral do cone gerado pela rotação do $\triangle$ ABP, isto é, é a área da superfície de revolução gerada pela rotação do lado $\overleftrightarrow{AB}$. Indicando esta área por S_{AB}, escrevemos

$$V = \frac{1}{3}S_{AB} \cdot OH$$



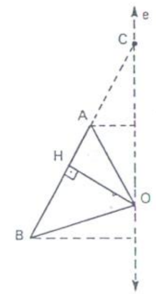
Na situação ilustrada ao lado, o volume do sólido obtido é a *diferença* entre os volumes dos dois cones:

$$V = \frac{1}{3}\pi(BP)^2 \cdot AP - \frac{1}{3}\pi(BP)^2 \cdot PO =$$

$$= \frac{1}{3}\pi(BP)^2(AP - PO) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi(BP)^2 \cdot AO$$

mas, como se vê, a conclusão final é igualmente válida.

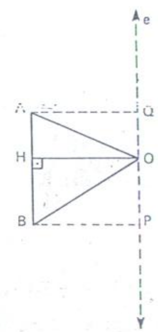


Seja, agora, um triângulo que gira em torno do eixo e de seu plano, mas tendo apenas um vértice pertencente ao eixo, como na figura ao lado. Neste caso, prolongando $\overleftrightarrow{AB}$ até encontrar o eixo no ponto C, podemos exprimir o volume procurado como a diferença entre os volumes dos sólidos gerados pelos triângulos CBO e CAO:

$$V = \frac{1}{3}S_{CB} \cdot OH - \frac{1}{3}S_{CA} \cdot OH =$$

$$= \frac{1}{3}(S_{CB} - S_{CA}) \cdot OH = \frac{1}{3}S_{AB} \cdot OH$$

resultado idêntico ao anterior.



Se $\overleftrightarrow{AB} \parallel e$, caso em que seu prolongamento não encontraria este eixo, o volume pedido pode ser calculado como sendo o volume do cilindro gerado pelo retângulo ABPQ (veja a figura), *menos* os volumes dos cones gerados pelos triângulos OAQ e OBP. Teríamos:

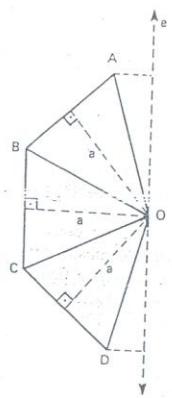
$$V = \pi(OH)^2 \cdot AB - \frac{1}{3}\pi(OH)^2 \cdot OP - \frac{1}{3}\pi(OH)^2 \cdot OQ =$$
$$= \pi(OH)^2 \cdot AB - \frac{1}{3}\pi(OH)^2(OP + OQ) =$$
$$= \pi(OH)^2 \cdot AB - \frac{1}{3}\pi(OH)^2 \cdot AB =$$
$$= \frac{2}{3}\pi(OH)^2 AB$$

Mas $2\pi(OH)(AB)$ é a área da superfície gerada por $\overleftrightarrow{AB}$, assim temos também

$$V = \frac{1}{3} S_{AB} \cdot OH$$

Impõe-se uma conclusão geral:

O volume do sólido gerado pela rotação de um triângulo em torno de um eixo do seu plano, que contém um de seus vértices, deixando o triângulo contido em um só semiplano, é igual à terça parte do produto da área gerada pelo lado oposto a esse vértice, pela altura relativa a esse vértice.

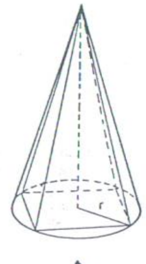


O resultado acima pode ser generalizado. Consideremos um *setor poligonal regular* (veja a figura ao lado), circunscrito a uma circunferência de raio **a** e centro O. Seja **e** um eixo coplanar com o setor, passando O, mas sem cortar o setor. O volume do sólido gerado pela rotação do setor poligonal em torno do eixo **e** é igual à terça parte do produto do apótema **a** pela área da superfície gerada pela poligonal do setor. Basta notar que o $\triangle OAB$ gera um sólido de volume $V_1 = \frac{1}{3} S_{AB} \cdot a$, o $\triangle OBC$ gera um sólido de volume $V_2 = \frac{1}{3} S_{BC} \cdot a$ e assim por diante. Logo, o volume total é

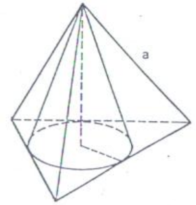
$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots =$$
$$= \frac{1}{3} S_{AB} \cdot a + \frac{1}{3} S_{BC} \cdot a + \frac{1}{3} S_{CD} \cdot a + \ldots =$$
$$= \frac{1}{3}(S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + \ldots) \cdot a =$$
$$= \frac{1}{3} S_{poligonal} \cdot a$$

Exercícios Propostos

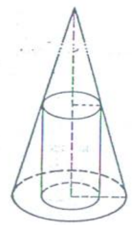
17.31) Calcule a razão entre o volume de um cone circular reto de raio **r** e o volume da pirâmide regular de base quadrada inscrita nele.



17.32) Calcule o volume de um cone circular reto inscrito em um tetraedro regular de aresta **a**. (Lembre-se de que, no item 14.3, ficou determinado que a altura de um tetraedro regular é $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.)



17.33) Em um cone circular reto inscreve-se um cilindro reto de volume V, cujo raio é a metade do raio da base do cone. Determine o volume do cone, em função de V.



17.34) A seção meridiana de um cone reto é um triângulo retângulo de área igual a 25 cm². Calcule a geratriz e a área da base do cone.

17.35) A razão entre a área da base de um cone reto e a área da sua seção meridiana é $\pi\sqrt{3}$. Dê o ângulo formado pela geratriz com o plano da base.

17.36) Calcule a razão entre a área da base e a área da seção meridiana de um cone eqüilátero.

17.37) Duas geratrizes de um cone reto são perpendiculares entre si e determinam na circunferência da base uma corda de medida igual ao dobro da altura do cone. Calcule o ângulo que a geratriz forma com o plano da base.

17.38) No problema anterior, sendo ℓ o comprimento da geratriz, calcule a área da seção meridiana do cone.

17.39) O ângulo do vértice da seção meridiana de um cone reto é 120° e a altura é **h**. Um segundo cone é construído com mesmo vértice, sendo a geratriz perpendicular à geratriz do cone dado. Se o novo cone tem altura **h**, qual é a área da sua seção meridiana?

17.40) Um cone reto tem altura 4 cm e geratriz de 10 cm. Conduz-se um plano pelo vértice, formando 30° com a altura. Calcule a área da seção.

17.41) O raio da base de um cone reto é **r**. O ângulo do vértice da seção meridiana é 120°. Calcule a área da seção que contém duas geratrizes perpendiculares entre si.

17.42) A altura de um cone reto é 6 m. Calcule a área da seção obtida por um plano que contém o vértice, forma 30° com o plano da base e determina na circunferência da base um arco de 120°.

17.43) Pelo vértice de um cone reto de altura **h**, conduz-se um plano que forma 60° com o plano da base e corta na circunferência da base um ângulo de 90°. Qual é a razão entre a área da base e a área da seção?

17.44) A seção meridiana de um cone reto é um triângulo retângulo. Uma seção é tomada por duas geratrizes que formam um ângulo de 60°. Seja α o ângulo que essa seção forma com o plano da base. Calcule tg α.

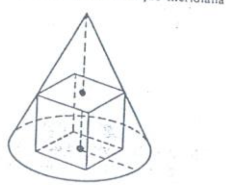
17.45) A altura de um cone reto é 36 cm e o diâmetro da base é 24 cm. Uma seção paralela à base tem área 64π cm². Determine a distância dessa seção ao plano da base.

17.46) A altura de um cone reto é 15 cm. Uma seção paralela à base, de área igual a 36π cm², situa-se à distância de 6 cm da base. Qual é o raio da base do cone?

17.47) Em um cone de altura **h** é inscrita uma pirâmide triangular regular. As faces laterais da pirâmide formam com o plano da base um ângulo α, tal que tg α = 2. Calcule a geratriz do cone.

17.48) Um tetraedro regular é inscrito em um cone. Seja α o ângulo do vértice da seção meridiana do cone. Calcule tg α.

17.49) Um cubo de aresta **a** é inscrito em um cone eqüilátero. Calcule a geratriz do cone.



17.50) Em um cone eqüilátero, inscreve-se um cilindro eqüilátero, de modo que ambos tenham mesmo eixo. Calcule a área da seção meridiana do cone, sabendo que a do cilindro é a².

17.51) Um prisma quadrangular regular é inscrito em um cone eqüilátero. A aresta da base é **a** e a altura do prisma é o dobro dessa medida. Calcule a área da seção meridiana do cone.

17.52) Calcule a área lateral de um cone reto, sabendo que um cilindro reto com a mesma base do cone e altura igual à metade da geratriz do cone tem área lateral igual a S.

17.53) Em um cone reto o raio da base é **r** e a área lateral é o dobro da área da base. Calcule a geratriz do cone.

17.54) Calcule a altura de um cone eqüilátero cuja área lateral é S.

17.55) A área da base de um cone reto é 9π cm² e a sua altura é 4 cm. Calcule a área lateral.

17.56) Um cone e um cilindro retos têm mesma base, mesma altura e mesma área lateral. Calcule o ângulo do vértice da seção meridiana do cone.

17.57) Um cone eqüilátero e um cilindro eqüilátero têm mesma área lateral. Qual é a razão entre as suas áreas totais?

17.58) Um cone e um cilindro retos têm mesmas base, altura e área lateral. Qual é o ângulo que a geratriz do cone forma com o plano da base?

17.59) Calcule a área total de um cone reto, sabendo que a sua seção meridiana é um triângulo retângulo de perímetro igual a P.

17.60) Um triângulo retângulo gira em torno da hipotenusa. Calcule a área da superfície do sólido gerado, se os catetos são 10 cm e 24 cm.

17.61) Pelo vértice de um cone reto conduz-se um plano que forma 30° com o plano da base e corta, na circunferência da base, um arco de 60°. Calcule a área lateral do cone, sabendo que a distância desse plano ao centro da base é igual a **a**.

17.62) Um plano que contém o vértice de um cone reto e corta, na circunferência da base, um arco de 90°, determina uma seção em forma de triângulo eqüilátero de área S. Calcule a área lateral do cone.

17.63) O desenvolvimento da superfície lateral de um cone de geratriz igual a 30 cm é um setor de 120°. Calcule o raio da base do cone.

17.64) Um cone reto tem raio da base r e geratriz g. Qual é o ângulo do setor circular obtido desenvolvendo-se a superfície lateral desse cone?

17.65) De um setor circular de 90° e raio 18 cm obtém-se a superfície lateral de um cone. Calcule a área total desse cone.

17.66) De um setor circular de 90°, cuja área é S, obtém-se a superfície lateral de um cone. Calcule a área total desse cone.

17.67) Uma superfície cônica é obtida a partir de um semicírculo. Qual é o ângulo do vértice da seção meridiana dessa superfície cônica?

17.68) A área lateral de um cone reto é $20\ cm^2$ e a sua superfície lateral provém de um setor circular de 72°. Determine a área total do cone.

17.69) Um cilindro eqüilátero é inscrito em um cone eqüilátero. Calcule a razão entre as áreas laterais do cone e do cilindro.

17.70) A base menor de um tronco de cone tem raio 8 cm. A altura é 6 cm e a geratriz forma 45° com o plano da base. Calcule a área lateral do tronco.

17.71) A área lateral de um tronco de cone é $128\pi\ cm^2$ e a geratriz mede 8 cm. Calcule os raios das bases, sabendo que são proporcionais a 2 e 5.

17.72) A geratriz de um tronco de cone mede ℓ e forma 60° com o plano da base. O raio da base maior é três vezes o da menor. Calcule a área total do tronco.

17.73) A geratriz de um tronco de cone mede ℓ, forma 60° com o plano da base e é perpendicular à diagonal da seção meridiana do tronco. Calcule a área lateral do tronco.

17.74) A geratriz de um tronco de cone forma 60° com o plano da base e é perpendicular à diagonal da seção meridiana do tronco. Sendo R o raio da base maior, calcule a área total do tronco.

17.75) Um tronco de cone reto tem altura 16 cm e raios das bases 8 cm e 20 cm. Calcule o raio da base de um cilindro reto que tem a mesma altura e a mesma área total do tronco de cone.

17.76) Um tronco de cone reto tem altura 20 cm e raios das bases 15 cm e 30 cm. Calcule a geratriz de um cone eqüilátero cuja área total é igual à área lateral do tronco dado.

17.77) Um tronco de cone tem áreas das bases iguais a $100\pi\ cm^2$ e $256\pi\ cm^2$ e área da seção meridiana igual a $208\ cm^2$. Calcule a área lateral do tronco.

17.78) Um tronco de cone tem área lateral $90\pi\ cm^2$ e o raio da base menor é 4 cm. Sabendo que o raio da base maior é igual à soma da metade da geratriz com o raio da base menor, calcule o raio da base maior.

17.79) Um tronco de cone tem geratriz ℓ e a sua seção meridiana é um trapézio circunscritível a uma circunferência. Calcule a área lateral do tronco.

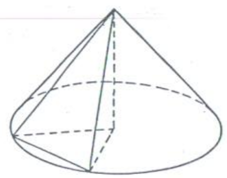
17.80) Uma seção de um tronco de cone reto por um plano que contém duas geratrizes é um trapézio com ângulo de 60° e corta nas circunferências das bases arcos de 90°. Sendo $150\ cm^2$ a área desta seção, calcule a área lateral do tronco.

17.81) Os raios das bases de um tronco de cone reto são 12 cm e 6 cm e a área da base maior é média geométrica entre as áreas lateral e da base menor. Calcule a área da seção meridiana.

17.82) A altura de um cone é igual a H e o ângulo entre a geratriz e o plano da base é 45°. Calcule a área da seção que contém duas geratrizes que formam entre si 30°.

17.83) Em um tronco de cone de raios das bases R e r (R > r) toma-se uma seção por um plano que forma 45° com o plano da base a corta arcos de 45° nas circunferências das bases. Calcule a área desta seção.

17.84) A altura de um cone circular reto é igual ao raio r da base. Pelo vértice do cone conduz-se um plano que determina na circunferência da base um arco de 60°. Calcule a área da seção.



17.85) A altura de um cone circular reto é igual ao raio r da base. Pelo vértice do cone conduz-se um plano que determina na circunferência da base um arco de 90°. Calcule a área da seção.

17.86) A altura de um cone é 20 cm e o raio da base é 25 cm. Calcule a área da seção do cone por um plano que contém o vértice e cuja distância ao centro da base é 12 cm.

17.87) As bases de um tronco de cone têm áreas $1\ m^2$ e $49\ m^2$. A área de uma seção paralela é igual à sua média aritmética. Se a altura do tronco é H, quais são as alturas dos dois tronos determinados por essa seção?

17.88) Um trono de cone tem altura igual a 10 cm e os raios das bases 8 cm e 18 cm. A que distância da base menor deve ser tomada uma seção paralela às bases, cuja área seja a média geométrica das áreas das bases?

17.89) Num cone de altura **h**, a geratriz forma ângulo de 60° com o plano da base. Cortando-se o cone por um plano paralelo à base, distante **d** dessa base, obtém-se um tronco de cone cuja área lateral é igual à área da base do cone. Determine **d**.

17.90) As bases de um tronco de cone de bases paralelas têm raios r_1 e r_2 ($r_1 < r_2$). A área lateral do tronco é igual à soma das áreas das bases. Sabendo que $r_1 = 10$ cm e que a geratriz do tronco forma ângulo de 60° com o plano da base maior, calcule o raio da base maior.

17.91) Um cone circular reto, cuja altura é igual ao raio da base, está inscrito em uma pirâmide de base triangular. A área total da pirâmide é o dobro da do cone. Calcule o volume da pirâmide, sabendo que a área lateral do cone é igual a $\pi\sqrt{2}$.

17.92) Um cone de volume V tem o raio da base triplicado e a altura reduzida à metade. Qual é o volume do novo cone?

17.93) A altura de um cone é multiplicada por 12. Como deve mudar o raio da base para que o volume triplique?

17.94) Em um cone reto de área lateral S, a distância do centro da base à geratriz é **d**. Calcule o volume do cone.

17.95) Em um cone reto, a área da seção meridiana é S e o comprimento da circunferência da base é ℓ. Calcule o volume do cone.

17.96) Um cone reto tem geratriz **g** e o comprimento da circunferência da base é ℓ. Calcule o volume do cone.

17.97) Um cone tem área da base igual a $16\pi\ cm^2$ e área lateral $20\pi\ cm^2$. Calcule o seu volume.

17.98) Um cone tem área da base igual a 9π cm² e área total 24π cm². Calcule o seu volume.

17.99) A área da seção meridiana de um cone reto é 120 cm² e a geratriz mede 17 cm. Calcule o volume do cone.

17.100) Em um cone reto, a área lateral e o volume são numericamente iguais. Dê a relação entre a altura e o raio da base.

17.101) Em um cone reto, a área total e o volume são numericamente iguais. Dê a relação entre a altura e o raio da base.

17.102) Em um cone reto, a área da base e o volume são numericamente iguais. Dê a relação entre a altura e o raio da base.

17.103) O volume de um cone é $\dfrac{32\pi\sqrt{5}}{3}$ m³ e o raio da base é 4 m. Calcule o ângulo central do desenvolvimento da superfície lateral do cone.

17.104) Um cone é inscrito e outro é circunscrito a uma pirâmide triangular regular. Calcule a razão entre os volumes desses cones.

17.105) Em uma pirâmide hexagonal regular, a aresta lateral é o dobro da aresta da base. O apótema da base é 6 cm. Calcule os volumes dos cones inscrito e circunscrito à pirâmide.

17.106) Um cubo é inscrito em um cone eqüilátero, de modo que uma de suas faces está contida no plano da base do cone e os quatro vértices da face oposta pertencem à superfície lateral do cone. Calcule a razão dos volumes do cone e do cubo.

17.107) A base de uma pirâmide é um triângulo retângulo. As faces laterais que contêm os catetos formam com a base ângulos de 30° e 60°. Um cone circular reto está circunscrito à pirâmide. Determine o volume do cone, se a altura da pirâmide é **h**.

17.108) Um cone reto é inscrito em um cubo. Calcule a razão entre os seus volumes.

17.109) Um cone eqüilátero é inscrito em um prisma quadrangular regular. Calcule a razão entre os seus volumes.

17.110) Um cone eqüilátero é inscrito em um prisma hexagonal regular. Calcule a razão entre os seus volumes.

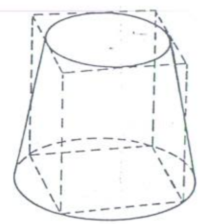
17.111) Em um tronco de cone reto a altura é igual ao raio da base menor. O raio da base maior é 12 cm e a geratriz forma 45° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

17.112) Os raios das bases de um tronco de cone reto são 3 cm e 10 cm e o volume é $1\,112\pi$ cm³. Calcule a altura e a geratriz do tronco.

17.113) A altura de um tronco de cone é 4 m e o raio de uma das bases é 6 m. Calcule a área lateral do tronco, cujo volume é 228π m³.

17.114) A geratriz de um tronco de cone forma 60° com o plano da base e sua medida ℓ é igual ao diâmetro da base menor. Calcule o volume do tronco.

17.115) Calcule o volume de um tronco de cone se uma de suas bases é um círculo inscrito numa face de um cubo de aresta **a**, e a outra base é um círculo circunscrito à base oposta desse cubo.



17.116) O volume de um tronco de cone é igual a 416π cm³. Os raios das bases e a geratriz são proporcionais a 5, 2 e 5. Calcule a área total do tronco.

17.117) Em um tronco de cone a seção meridiana é um trapézio cujas diagonais são perpendiculares entre si. A geratriz tem medida ℓ e forma 60° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

17.118) Em um tronco de cone, o segmento que tem extremidades no centro da base maior e num ponto da circunferência da base menor tem medida **d** e forma 30° com o plano da base. Calcule o volume do tronco, sabendo que esse segmento é perpendicular à geratriz.

17.119) Os raios das bases de um tronco de cone reto são 6 cm e 8 cm. Uma pirâmide quadrangular regular é inscrita nesse tronco e tem volume igual a 1 280 cm³. Calcule o volume do tronco.

17.120) Em um tronco de cone reto, a circunferência inscrita na seção meridiana tem raio R e o raio da base maior é o dobro do da menor. Calcule o volume do tronco.

17.121) A circunferência inscrita na seção meridiana de um tronco de cone tangencia as geratrizes em pontos cuja distância é igual a **a**. Sabendo que as geratrizes formam 45° com o plano da base, calcule o volume do tronco.

17.122) Dado um tronco de cone reto, considere-se uma superfície cônica com vértice no centro da base maior do tronco e com base coincidindo com a base menor do tronco. Calcule a relação entre os raios das bases do tronco ($r_1 < r_2$) sabendo que aquela superfície cônica divide o tronco em duas partes cujos volumes estão na razão de 4 para 15 (a parte menor é o cone).

17.123) Inscreve-se um cone em um tronco de cone reto, de modo que a base do cone coincide com a base maior do tronco e o seu vértice é o centro da base menor do tronco. Se o volume do cone é a metade do do tronco, calcule a relação entre os raios das bases do tronco ($r_1 < r_2$).

17.124) Um tetraedro regular de aresta **a** é inscrito em um tronco de cone reto de geratriz **a**, de modo que uma face do tetraedro é inscrita na base menor do tronco. Calcule o volume do tronco.

17.125) Em um tronco de cone reto as áreas das bases são π cm² e 16π cm² e a área da seção meridiana é $\dfrac{245}{4}$ cm². Calcule a altura do cilindro eqüilátero que tem o mesmo volume desse tronco.

17.126) Em um tronco de cone reto é cavado um furo cilíndrico com o mesmo eixo do tronco, cujo diâmetro é igual ao da base menor do tronco. Se a altura do tronco é igual a três vezes o raio da base menor e a geratriz é igual a cinco vezes esse raio, calcule o volume do sólido resultante.

17.127) Um tronco de cone reto tem raios das bases **r** e **2r** e altura **4r**. A que distância da base maior deve ser tomado um ponto V, sobre o eixo do tronco, de modo que tenham mesmo volume os dois cones de vértice V e bases nas bases do tronco?

17.128) No problema anterior, qual é o volume do sólido obtido retirando-se do tronco os dois cones?

17.129) Dado um tronco de pirâmide triangular regular, circunscreve-se a ele um tronco de cone cujas bases são os círculos circunscritos às bases do tronco de pirâmide. Qual é a razão entre os volumes dos dois troncos?

17.130) Dado um tronco de pirâmide triangular regular, inscreve-se nele um tronco de cone cujas bases são os círculos inscritos nas bases do tronco de pirâmide. Qual é a razão entre os volumes dos dois troncos?

17.131) Dado um tronco de pirâmide triangular regular, toma-se um tronco de cone cuja base maior é o círculo circunscrito à base maior do tronco de pirâmide e cuja base menor é o círculo inscrito na base menor do tronco de pirâmide. Se V é o volume do tronco de pirâmide, calcule o volume do tronco de cone. Sabe-se que a aresta da base maior do tronco de pirâmide é o dobro da aresta da base menor.

17.132) Dado um tronco de cone reto, toma-se um prisma triangular regular cuja base inferior é inscrita na base maior do tronco e cuja base superior é circunscrita à base menor do tronco. Se V é o volume do prisma, calcule o volume do tronco.

17.133) Em um tronco de cone de altura **a**, a base maior é um círculo circunscrito a um quadrado de lado **a** e a base menor é um círculo inscrito em um triângulo eqüilátero de lado **a**. Calcule o volume do tronco.

17.134) O raio da base de um cone é 16 cm. Calcule a área da seção paralela à base, que divide a altura na razão 2 : 3 (considere dois casos).

17.135) Um vaso cônico de altura 16 cm e raio da base 12 cm contém uma quantidade de líquido igual a $\frac{1}{8}$ do seu volume. Determine o nível do líquido (isto é, a distância do vértice do cone à superfície do líquido).

17.136) Dois planos paralelos à base de um cone de volume V dividem a altura em três partes iguais. Calcule o volume da parte do meio.

17.137) Um plano paralelo à base de um cone divide a altura na razão 1 : 2. Em que razão fica dividido o volume? (Considere dois casos.)

17.138) Os raios das bases de um tronco de cone são 4 cm e 10 cm. Dois planos paralelos às bases dividem a altura do tronco em três partes iguais. Em que proporção fica dividido o volume do tronco?

17.139) Dados os raios das bases R e r ($r < R$), determine a razão entre os volumes do tronco de cone e do correspondente cone não truncado.

17.140) Em que razão fica dividido o volume de um tronco de cone por um plano paralelo à base, que divide a altura ao meio? Admita que o raio da base maior é o triplo do da menor.

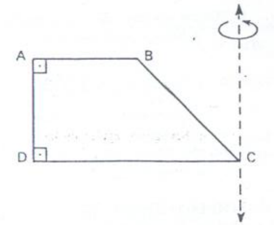
17.141) Dois planos paralelos à base de um cone dividem a área lateral em três partes iguais. Em que proporção fica dividido o volume?

17.142) Um triângulo retângulo ABC, de hipotenusa $\overleftrightarrow{AC}$, gira em torno do cateto $\overleftrightarrow{BC}$. Calcule:

a) o comprimento da circunferência gerada pelo ponto A;
b) a área da superfície gerada pelo lado $\overleftrightarrow{AB}$;
c) a área da superfície gerada pelo lado $\overleftrightarrow{AC}$;
d) o volume do sólido gerado pelo triângulo.

17.143) O trapézio ABCD da figura, para o qual $AB = AD = a$ e $CD = 2a$, gira em torno de um eixo do seu plano, que passa por C e é paralelo ao lado $\overleftrightarrow{AD}$. Calcule:

a) a área da superfície gerada pelos lados do trapézio;
b) o volume do sólido gerado pelo trapézio.



17.144) Um triângulo eqüilátero ABC de lado **a** gira em torno de um eixo que passa por A e é perpendicular ao lado $\overleftrightarrow{AB}$. Calcule:

a) a área da superfície gerada pela altura $\overleftrightarrow{AH}$;
b) a área da superfície gerada pelo lado $\overleftrightarrow{AC}$;
c) o volume do sólido gerado pelo triângulo.

17.145) Um losango ABCD de lado **a** e ângulo agudo de 60° ($\overleftrightarrow{AC}$ é a diagonal maior) gira em torno de um eixo do seu plano, que passa pelo ponto C e é perpendicular à diagonal $\overleftrightarrow{AC}$. Calcule:

a) a área da superfície gerada pelos lados do losango;
b) o volume do sólido gerado pelo losango.

17.146) Um trapézio isósceles de bases **a** e **3a** e altura **a** gira em torno de um eixo do seu plano, que passa por uma extremidade da base maior e é perpendicular às bases. Calcule:

a) a área da superfície gerada pelos lados do trapézio;
b) o volume do sólido gerado pelo trapézio.

17.147) Um triângulo de lados AB = 26 cm, AC = 28 cm e BC = 30 cm gira em torno do lado $\overleftrightarrow{AC}$. Calcule:

a) a área da superfície gerada pelos lados;
b) o volume do sólido gerado pelo triângulo.

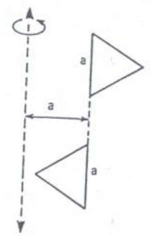
17.148) Um triângulo retângulo de hipotenusa **2a** e ângulo de 30° gira em torno de um eixo que passa pelo vértice do ângulo reto e é paralelo à hipotenusa. Determine:

a) a área da superfície gerada pelos lados do triângulo;
b) o volume do sólido gerado pelo triângulo.

17.149) Calcule o volume e a área total do sólido gerado pela rotação de um hexágono regular de lado **a**, em torno da sua maior diagonal.

17.150) Um triângulo eqüilátero de lado **a** gira em torno de um eixo paralelo a um de seus lados e à distância **a** dele. Calcule (considerando dois casos):

a) a área da superfície gerada pelos lados do triângulo;
b) o volume do sólido gerado pelo triângulo.



17.151) Um hexágono regular de lado **a** gira em torno de um de seus lados. Calcule:

a) a área da superfície gerada pelos lados; b) o volume do sólido gerado.

17.152) Um losango de lado **a** e ângulo agudo de 60° gira em torno de um eixo que passa pelo vértice de um ângulo agudo e é perpendicular a um lado. Calcule:

a) a área da superfície gerada pelos lados; b) o volume do sólido gerado.

17.153) Um trapézio isósceles, de bases 9 cm e 15 cm e lado 5 cm, gira em torno de um eixo do seu plano, que passa por uma extremidade da base maior e é perpendicular a ela. Calcule:

a) a área da superfície gerada pelos lados; b) o volume do sólido gerado.

17.154) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de um triângulo ABC de lados AB = 10 cm, AC = BC = 13 cm em torno do lado $\overleftrightarrow{AC}$.

17.155) Um triângulo ABC gira em torno do lado $\overleftrightarrow{AB}$. Sendo S a área do triângulo e ℓ o comprimento da circunferência gerada pelo vértice C, calcule o volume do sólido gerado.

17.156) Determine o volume do sólido gerado pela rotação de um trapézio isósceles em torno de sua base menor, sendo as bases 5 cm e 21 cm e o lado 17 cm.

17.157) Um triângulo ABC, de área S, gira em torno do lado $\overleftrightarrow{BC}$, sendo BC = a. Calcule o volume do sólido gerado.

17.158) Um trapézio isósceles, com ângulo agudo de 60° e lado lateral de 6 cm, tem a diagonal perpendicular ao lado lateral. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação desse trapézio em torno do lado lateral.

Capítulo

18 Esfera

18.1 — ESFERA E SUPERFÍCIE ESFÉRICA

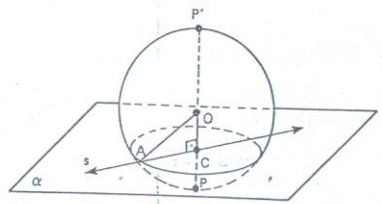
No item 9.6 vimos definidas as noções de esfera e superfície esférica, que recordamos aqui.

Sejam dados um ponto O e uma medida **r**. O conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância a O é *menor ou igual a r* chama-se esfera de centro O e raio r.

Chama-se superfície esférica o conjunto dos pontos da esfera cuja distância ao centro O é *igual a r*.

18.2 — SEÇÃO PLANA DE UMA ESFERA. PÓLOS

Consideremos um plano α cuja distância ao centro O da esfera *seja menor do que o raio r*. A interseção desse plano com a esfera é um círculo de centro C.



Determinemos a relação entre os raios da esfera e desse círculo. Sejam ρ o raio do círculo e **d** a distância do plano do círculo ao centro da esfera. Conforme se vê na figura, pode-se escrever

$$OA^2 = OC^2 + CA^2$$

isto é:

$$r^2 = d^2 + \rho^2$$

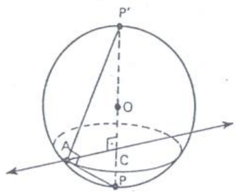
portanto:

$$\boxed{\rho = \sqrt{r^2 - d^2}}$$

Os pontos P e P' que a reta $\overleftrightarrow{OC}$ determina na superfície esférica são denominados pólos. As distâncias dos pólos ao ponto A chamam-se *distâncias polares*. Podemos indicá-las assim:

$$PA = p \qquad P'A = p'$$

Observemos a figura. O triângulo PAP' é retângulo em A, sendo que podemos aplicar nele a conhecida *relação métrica*:



$$PA^2 = PP' \cdot PC$$

Mas PA = p, PP' = 2r e PC = r − d, donde

$$p^2 = 2r\,(r - d)$$

isto é:

$$\boxed{p = \sqrt{2r\,(r - d)}}$$

Analogamente, encontraremos

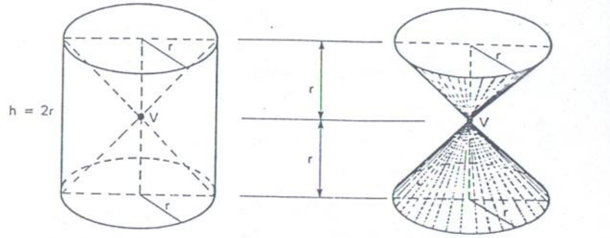
$$\boxed{p' = \sqrt{2r\,(r + d)}}$$

18.3 — VOLUME DA ESFERA

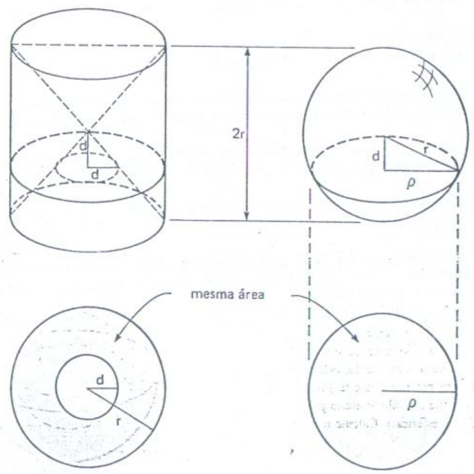
O **volume** de uma esfera de raio **r** é dado pela expressão

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Este resultado pode ser obtido pela aplicação do *princípio de Cavalieri* (veja o item 13.5). Para isto, imaginemos um cilindro eqüilátero cujo raio da base seja **r**, igual ao raio da esfera. Seja V o centro do cilindro, isto é, o ponto médio



do seu eixo. Podemos considerar *dois cones*, com vértice nesse ponto V e tendo como bases as bases do cilindro. Suponhamos que estes dois cones são *retirados* do cilindro e vamos tomar o sólido que resulta, ou seja, a parte do cilindro situada fora dos dois cones. Este sólido será denominado **sólido auxiliar** (em verdade, seu nome clássico é ***anticlepsidra***).



Vamos imaginar que a esfera tangencia os dois planos das bases do cilindro. Um plano paralelo a estes, situado a uma distância **d** ($d < r$) do centro da esfera, intercepta o sólido auxiliar segundo uma *coroa circular* e a esfera, segundo um *círculo*. As circunferências que limitam a coroa circular têm raios **d** e **r**, logo a área da coroa é

$$S_{coroa} = \pi r^2 - \pi d^2$$

A área do círculo determinado na esfera é

$$S_{círculo} = \pi \rho^2$$

Mas, como vimos no item 18.2, tem-se $\rho^2 = r^2 - d^2$. Assim,

$$S_{círculo} = \pi (r^2 - d^2) = \pi r^2 - \pi d^2$$

Nota-se, então, que $S_{coroa} = S_{círculo}$. Pelo princípio de Cavalieri, isto acarreta que *o volume da esfera é igual ao volume do sólido auxiliar.*

Podemos, então, calcular este volume tomando o volume do cilindro, *menos* duas vezes o volume de um dos cones retirados. Temos

$$V_{cilindro} = S_b h = (\pi r^2)\, h = (\pi r^2)\, 2r = 2\pi r^3$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3} (\pi r^2) \cdot r = \frac{\pi r^3}{3}$$

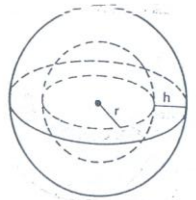
Então, para o volume da esfera obtemos

$$V = V_{cilindro} - 2V_{cone} = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Exercício Resolvido

18.1) Duas esferas concêntricas (isto é, de mesmo centro) têm raios r e r + h, como ilustrado ao lado.

a) Calcule o volume da esfera *interna*.
b) Calcule o volume da esfera *externa*.
c) Chamemos de **concha esférica** a parte da esfera externa que está fora da esfera interna (é o sólido limitado pelas duas superfícies esféricas). Calcule o seu volume.



Solução

a) Seja V_1 o volume da esfera interna. Temos

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

b) Seja V_2 o volume da esfera externa. Temos

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi (r + h)^3 = \frac{4}{3} \pi (r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3)$$

c) O volume da concha esférica é dado por

$$V = V_2 - V_1 = \frac{4}{3} \pi (3r^2h + 3rh^2 + h^3)$$

ou seja,

$$V = \frac{4\pi h}{3} (3r^2 + 3rh + h^2)$$

18.4 — ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

A determinação de fórmulas para a área lateral de um cone reto, ou de um cilindro reto, é um problema relativamente simples. Já o cálculo da *área de uma superfície esférica* representa um desafio maior, pois não é possível "desenrolar" uma superfície esférica, transformando-a em uma figura plana, como no caso do cone ou do cilindro. Examinando o exercício resolvido 18.1, podemos obter um caminho para chegar à fórmula desejada. Embora o método que usaremos esteja apoiado numa espécie de "conceito de limite", ele é aceitável, dentro de um nível intuitivo.

Seja S a área da superfície esférica de raio r (a *interna*, no exercício 18.1). Parece fácil de se aceitar, intuitivamente, que o produto $S \cdot h$ é uma boa aproximação para o volume V da concha esférica. Tal aproximação torna-se tanto melhor quanto menor fica a espessura **h** da concha. Em outras palavras, o quociente $\frac{V}{h}$ representa uma boa aproximação para a área S, desde que h seja suficientemente pequeno. Assim, parece claro que, se **h** tende a zero, a razão $\frac{V}{h}$ tende ao valor S da área da superfície esférica de raio **r**. Ora, como vimos,

$$V = \frac{4\pi h}{3} (3r^2 + 3rh + h^2)$$

donde

$$\frac{V}{h} = \frac{4\pi}{3} (3r^2 + 3rh + h^2)$$

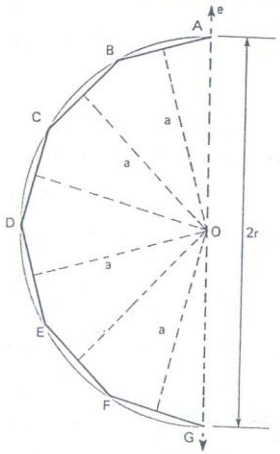
Assim, a área S é dada pela expressão que se obtém desta, supondo h = 0:

$$S = \frac{4\pi}{3}(3r^2 + 3r \cdot 0 + 0^2)$$

e então

$$\boxed{S = 4\pi r^2}$$

Outra maneira de se chegar a este resultado é aproveitar as observações feitas no item 17.8. Uma superfície esférica é a superfície de revolução gerada pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo contendo seu diâmetro. A poligonal regular ABCDEFG, inscrita na semicircunferência, gera uma superfície de área



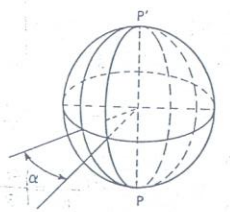
$$S_6 = 2\pi a\,(2r) = 4\pi a r$$

(O índice 6 relaciona-se ao número de lados da poligonal.) É intuitivo que, aumentando-se o número de lados da poligonal considerada, as superfícies de revolução passam a ter áreas cada vez mais próximas da área da superfície esférica. Ora, nestas circunstâncias, o apótema **a** tenderia ao valor do próprio raio **r**. Assim, a área da superfície esférica ficaria igual a

$$S = 4\pi r \cdot r = 4\pi r^2$$

18.5 — FUSO ESFÉRICO

Seja $\overleftrightarrow{PP'}$ um diâmetro de uma superfície esférica de raio **r**. Tomando-se dois semiplanos com origem na reta $\overleftrightarrow{PP'}$, obtemos um *diedro*. A interseção do diedro com a superfície esférica recebe o nome de **fuso esférico**



Um fuso esférico é caracterizado pela medida do diedro correspondente. Utilizando esta medida *em graus*, é fácil notar que um fuso esférico correspondente ao diedro de 90° abrange a quarta parte da superfície esférica; um diedro de 180° determina um fuso que é a metade da superfície esférica. Por extensão, podemos considerar a superfície esférica toda como sendo um fuso cujo diedro mede 360°.

Para calcular a área de um fuso esférico, basta construir a "regra de três":

ângulo		área
$\alpha°$	———	S_{fuso}
360°	———	$4\pi r^2$

donde se obtém

$$\boxed{S_{fuso} = \frac{4\pi r^2 \alpha}{360}} \quad (\alpha \text{ em graus}).$$

Podemos exprimir esta área utilizando a medida do diedro em *radianos*. Neste caso, teremos a "regra de três":

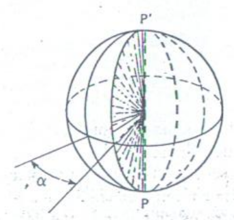
ângulo		área
α rad	———	S_{fuso}
2π rad	———	$4\pi r^2$

donde se obtém

$$\boxed{S_{fuso} = 2r^2\alpha} \quad (\alpha \text{ em radianos}).$$

18.6 — CUNHA ESFÉRICA

O diedro cuja aresta contém o diâmetro $\overleftrightarrow{PP'}$ da esfera de raio **r** intercepta a esfera segundo um *sólido* que se denomina **cunha esférica**. Note que este sólido é limitado por dois semicírculos de raio **r** e pelo fuso esférico correspondente a esse mesmo diedro. Podemos calcular o **volume da cunha** como calculamos a área do fuso, isto é, construindo uma "regra de três". Se α é a medida do diedro *em graus*, temos



ângulo	volume
$\alpha°$	V_{cunha}
$360°$	$\frac{4\pi r^3}{3}$

donde

$$\boxed{V_{cunha} = \frac{4\pi r^3 \alpha}{360 \cdot 3}} \quad (\alpha \text{ em graus}).$$

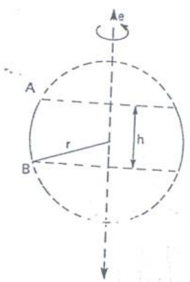
Se α é a medida do diedro *em radianos*, temos

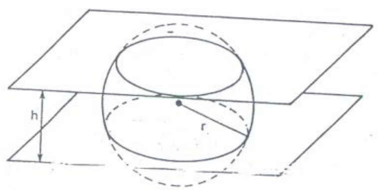
ângulo	volume
α rad	V_{cunha}
2π rad	$\frac{4\pi r^3}{3}$

donde

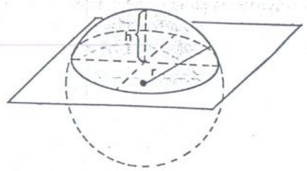
$$\boxed{V_{cunha} = \frac{2r^3\alpha}{3}} \quad (\alpha \text{ em radianos}).$$

18.7 — ZONA ESFÉRICA E CALOTA





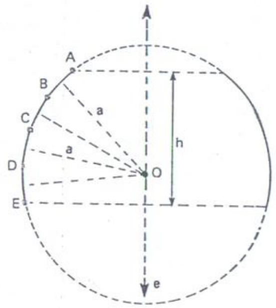
A parte de uma superfície esférica compreendida entre dois planos paralelos é denominada *zona esférica*. A zona esférica pode ser considerada, também, como sendo a superfície de revolução gerada pela rotação de um arco de circunferência em torno de um diâmetro coplanar com ele, e que não o corte. A distância entre os dois planos que determinam a zona é a altura da zona.



Até aqui estamos subentendendo que os dois planos realmente *cortam* a superfície esférica. Se um dos planos corta e o outro *tangencia* a superfície esférica, obtemos uma zona esférica *de uma so base*, que é denominada calota.

Podemos mostrar que a área de uma zona esférica pode ser obtida pela expressão

$$\boxed{S = 2\pi rh}$$



onde **h** é a altura da zona e **r** é o raio da superfície esférica. Para isto, basta considerar uma poligonal regular inscrita no arco que gera a zona. Como vimos no item 17.8, a poligonal gera uma superfície de área igual a

$$S_4 = 2\pi ah$$

(O indice 4 refere-se ao caso da figura ao lado, onde a poligonal tem quatro segmentos.) Se o número de lados da poligonal aumenta, a área obtida tende à área da zona. É claro que o apótema **a** tende a ficar igual ao raio **r**. Assim, a área da zona é

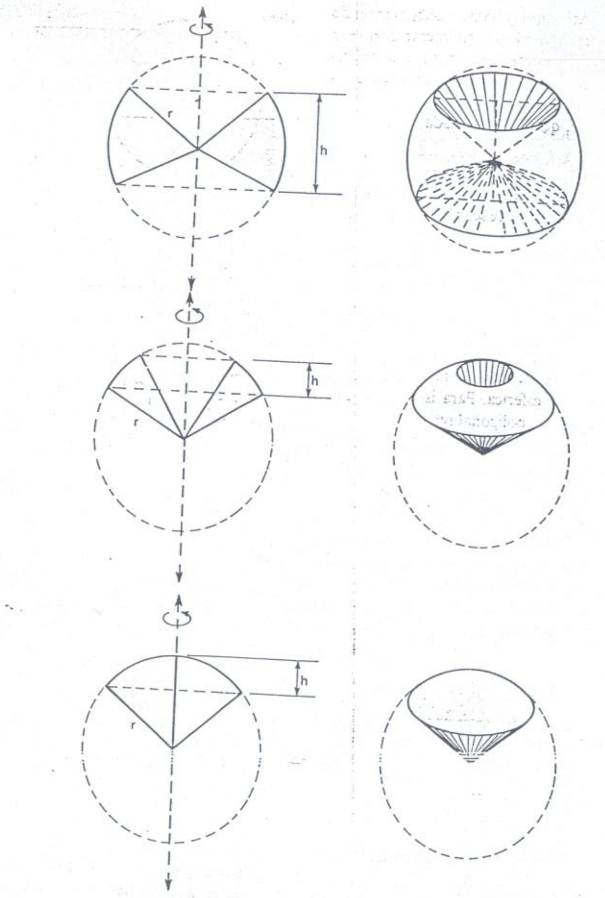
$$S = 2\pi rh$$

Esta expressão vale, também, para a calota.

É interessante notar que a superfície esférica toda pode ser considerada como sendo uma zona, de altura $h = 2r$. Teriamos de volta a expressão da área da superfície esférica: $S = 4\pi r^2$.

18.8 — SETOR ESFÉRICO

Imaginemos um *setor circular* contido em um círculo de raio **r** e um eixo de rotação que contém um diâmetro desse círculo, mas não corta o arco do setor,



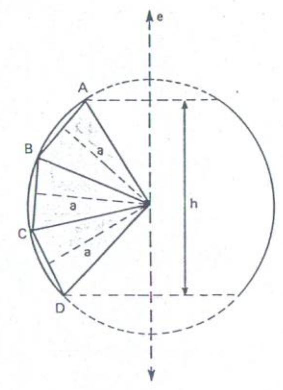
exceto eventualmente em uma extremidade. O sólido gerado pela rotação desse setor circular em torno desse eixo chama-se **setor esférico**. Note que a parte da superfície esférica que limita o setor esférico é uma *zona* (ou, eventualmente,

uma *calota*). Podemos mostrar que o volume de um setor esférico pode ser obtido pela expressão

$$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi r^2 h}$$

onde **r** é o raio do setor e **h** é a altura da zona esférica (ou da calota) que corresponde ao setor esférico.

Para isto, basta considerar um *setor poligonal regular* inscrito no setor circular considerado, lembrando em seguida as observações feitas no item 17.9. O setor poligonal gera um sólido de revolução cujo volume é dado por



$$V_3 = \frac{1}{3} S_{poligonal} \cdot a$$

apótema e $S_{poligonal}$ é a área da superfície de revolução gerada pela poligonal ABCD (o índice 3 refere-se ao número de lados da poligonal). É intuitivo que, aumentando-se o número de lados dessa poligonal, ao mesmo tempo o apótema **a** tende ao valor do raio **r** e a área S tende à área da zona esférica correspondente. Assim, o volume do setor esférico fica

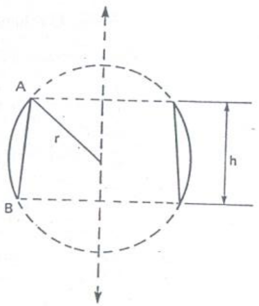
$$V = \frac{1}{3}(2\pi r h) \cdot r = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

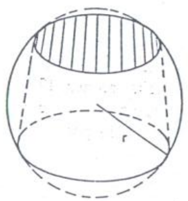
É interessante notar que a esfera toda pode ser considerada como sendo um setor esférico de altura $h = 2r$ (gerado pela rotação do semicírculo em torno de seu diâmetro). Teríamos de volta a expressão do volume da esfera:

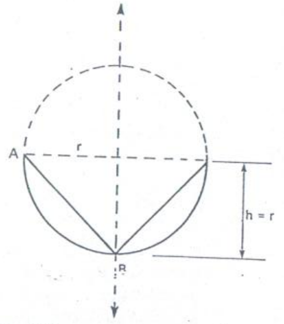
$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot (2r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

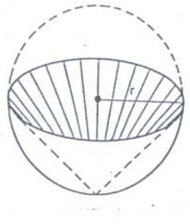
18.9 — ANEL ESFÉRICO

O arco $\widehat{AB}$ e a corda $\overline{AB}$ de uma circunferência limitam uma figura plana chamada **segmento circular**. Imaginemos um segmento circular contido em um círculo de raio **r** e um eixo de rotação que contém um diâmetro desse círculo, mas não corta o arco do segmento circular, exceto eventualmente em uma extremidade.





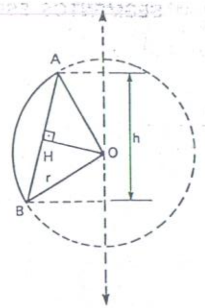




O sólido gerado pela rotação desse segmento circular em torno desse eixo chama-se **anel esférico**. Note que, externamente, o anel esférico é limitado por uma zona esférica e, internamente, pela superfície lateral de um tronco de cone, ou de um cilindro, ou de um cone mesmo, dependendo da posição da corda $\overline{AB}$ em relação ao eixo de rotação.

Podemos mostrar que o volume de um anel esférico pode ser obtido pela expressão

$$\boxed{V = \frac{1}{6}\pi (AB)^2 \cdot h}$$



O volume do anel esférico é igual ao volume do *setor esférico* gerado pelo **setor circular OAB** *menos* o volume do *sólido de revolução* gerado pelo **triângulo OAB**.

O volume do setor esférico é, como vimos no item anterior, igual a

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

O sólido de revolução gerado pelo triângulo OAB tem volume igual a

$$V_2 = \frac{1}{3} S_{AB} \cdot OH$$

(como vimos no item 17.9). Por outro lado, a área gerada pela rotação do segmento $\overline{AB}$ é (conforme o item 17.8): $S_{AB} = 2\pi \cdot (OH) \cdot h$.

Assim, $V_2 = \frac{2}{3}\pi (OH)^2 h$.

Para o volume do anel esférico, temos:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi (OH)^2 h = \frac{2}{3}\pi (r^2 - OH)^2 h$$

Mas $r^2 - (OH)^2 = (HB)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{(AB)^2}{4}$ e assim

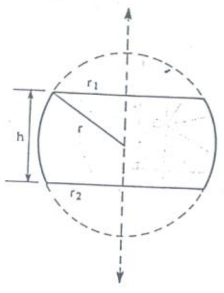
$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{(AB)^2}{4} \cdot h = \frac{1}{6}\pi (AB)^2 h$$

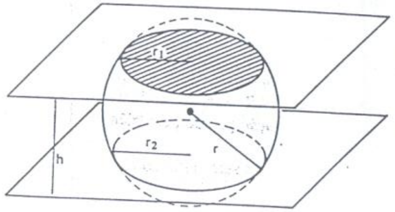
Note que, no caso em que o segmento circular considerado abrange todo o semicírculo, cujo diâmetro está contido no eixo de rotação, o anel esférico alcança toda a extensão da esfera. Neste caso, teríamos AB = 2r e h = 2r, logo o volume da esfera fica

$$V = \frac{1}{6}\pi (2r)^2 \cdot 2r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

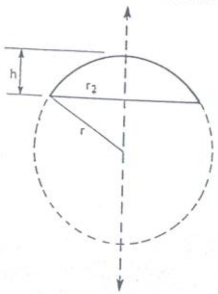
como já sabíamos.

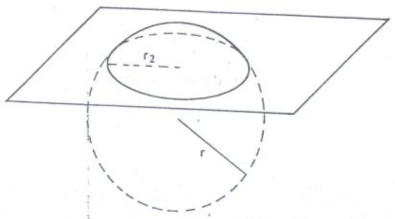
18.10 — SEGMENTOS ESFÉRICOS





A parte de uma esfera compreendida entre dois planos paralelos é um sólido denominado segmento esférico. Ele é limitado lateralmente por uma zona esférica e apresenta como *bases* círculos contidos em cada um dos planos. É claro que o segmento esférico tem duas bases unicamente quando os dois planos cortam a esfera. Se um dos planos corta a esfera e o outro a *tangencia*, obtemos um segmento esférico de uma só base, que é limitado por uma calota esférica.



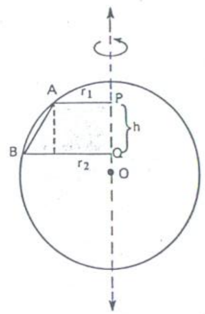


Podemos mostrar que o volume de um segmento esférico pode ser obtido pela expressão

$$\boxed{V = \frac{1}{6}\pi h\,(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2)}$$

onde r_1 e r_2 são os raios das bases.

Para isso, notemos, inicialmente, que o volume do segmento esférico é igual ao volume do *anel esférico* gerado pelo segmento circular de corda $\overline{AB}$, *mais* o volume do *tronco de cone* gerado pela rotação do trapézio ABQP (veja a figura a seguir).



O volume do anel esférico, como vimos no item 18.9, é igual a $V_1 = \frac{1}{6}\pi\,(AB)^2 h$. O volume do tronco de cone (veja o exercício 17.19) é igual a

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\,h =$$
$$= \frac{1}{6}\pi\,(2r_1^2 + 2r_1 r_2 + 2r_2^2)\,h$$

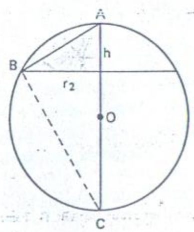
Mas $(AB)^2 = (r_2 - r_1)^2 + h^2 =$
$= r_2^2 - 2r_1 r_2 + r_1^2 + h^2$

Assim, o volume do segmento esférico fica

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{6}\pi\,(r_2^2 - 2r_1 r_2 + r_1^2 + h^2 + 2r_1^2 + 2r_1 r_2 + 2r_2^2)\,h =$$
$$= \frac{1}{6}\pi h\,(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2)$$

No caso de um segmento esférico de uma só base, basta considerar um dos raios igual a zero. Pondo, por exemplo, $r_1 = 0$, temos

$$V = \frac{1}{6}\pi h\,(h^2 + 3r_2^2)$$



É possível, entretanto, escrever esta fórmula em função do raio r da esfera. Basta notar que no triângulo retângulo ABC vale a conhecida relação métrica

$$r_2^2 = h\,(2r - h) = 2hr - h^2$$

e então

$$V = \frac{1}{6}\pi h\,(h^2 + 6hr - 3h^2) =$$
$$= \frac{1}{3}\pi h^2\,(3r - h)$$

18.2) Determine o raio da esfera inscrita em um cubo de aresta **a**.

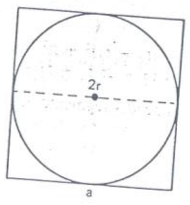
Solução

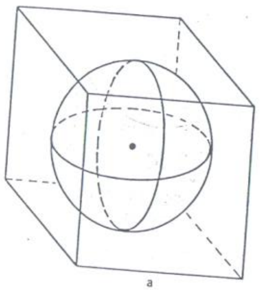
Basta notar que o diâmetro da esfera é igual à aresta do cubo:

$$2r = a$$

donde

$$r = \frac{a}{2}$$





18.3) Determine a aresta de um cubo inscrito em uma esfera de raio **r**.

Solução

Basta notar que a *diagonal do cubo* (segmento $\overleftrightarrow{AB}$ indicado na figura) é um *diâmetro da esfera*:

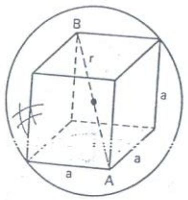
$$AB = 2r$$

Como vimos (item 13.3), a diagonal do cubo é dada por

$$AB = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

Assim, $a\sqrt{3} = 2r$, donde

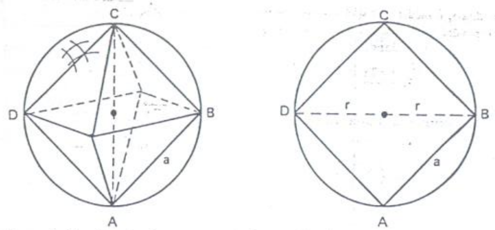
$$a = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$



18.4) Calcule a aresta de um octaedro regular inscrito em uma esfera de raio **r**.

Solução

Basta notar que o diâmetro da esfera é igual à diagonal do quadrado ABCD. Temos então $2r = a\sqrt{2}$, logo $a = r\sqrt{2}$.



18.5) Calcule o raio da esfera inscrita em um octaedro regular de aresta **a**.

Solução

A superfície esférica tangencia a face ABV do octaedro em um ponto P situado sobre a altura $\overleftrightarrow{VM}$ do △ ABV. Assim, o raio $\overline{CP}$ é a altura do △ VCM que pode ser visto na ilustração. De uma conhecida relação métrica (veja item 11.3) temos

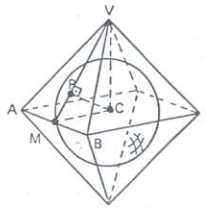
$$(CP) \cdot (VM) = (CM) \cdot (CV)$$

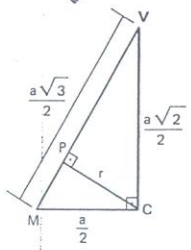
ou seja

$$r \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

e daí resulta

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$



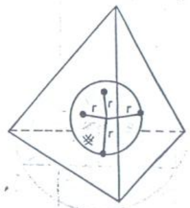


18.6) Determine o raio da esfera inscrita em um tetraedro regular de aresta **a**.

Solução

Seja O o centro da esfera inscrita. As suas distâncias a cada face do tetraedro são iguais ao raio da esfera. Como vimos no exercício 14.81, a soma dessas quatro distâncias é igual à altura do tetraedro, logo $4r = h$. Mas, do item 14.3, sabemos que $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, logo $4r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, donde $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$. É importante observar, neste exercício, que *o raio da esfera inscrita no tetraedro regular é a quarta parte da altura*:

$$r = \frac{h}{4}$$

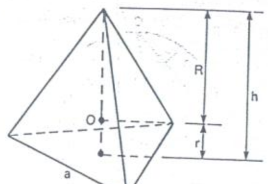


Além disso, é fácil notar que a distância de O a um vértice do tetraedro é o raio R *da esfera circunscrita*, donde obtemos

$$R = \frac{3h}{4}$$

ou, se preferirmos colocá-lo em função da aresta:

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$



18.7) Determine o raio da esfera que tangencia *as arestas* de um tetraedro regular de aresta a.

Solução

As arestas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são tangenciadas pela esfera em seus pontos médios M e N. Observe que

$$\Delta\, AMO \sim \Delta\, NGO$$

donde tiramos

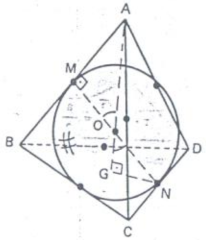
$$\frac{MO}{GO} = \frac{AO}{NO}$$

Mas MO = NO = s (raio da esfera tangente às arestas), GO = r e AO = R (raios das esferas inscrita e circunscrita ao tetraedro). Assim,

$$\frac{s}{r} = \frac{R}{s}, \quad \text{donde} \quad s^2 = Rr$$

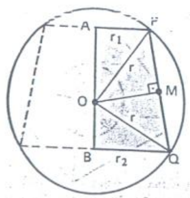
e, finalmente,

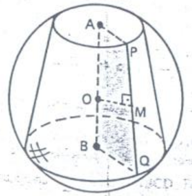
$$s = \sqrt{R \cdot r}$$



18.8) Numa esfera de raio r está inscrito um tronco de cone cujas bases têm raios r_1 e r_2. Determine a altura do tronco. (Suponha que o centro da esfera está no interior do tronco.)

Solução





As distâncias do centro da esfera a cada um dos planos das bases do tronco são dadas por $OA = \sqrt{r^2 - r_1^2}$ e $OB = \sqrt{r^2 - r_2^2}$ e como h = OA + OB, obtemos $h = \sqrt{r^2 - r_1^2} + \sqrt{r^2 - r_2^2}$.

18.9) Um tronco de cone reto de bases paralelas tem raios das bases r_1 e r_2. Qual deve ser a altura do tronco, para que seja possível inscrever nele uma esfera?

Solução

Observe que a geratriz do tronco é igual a $r_1 + r_2$. Além disso, é fácil perceber que o Δ POQ é retângulo em O. Assim, se r é o raio da esfera inscrita, temos

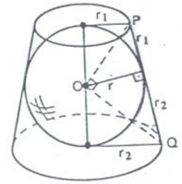
$$r^2 = r_1 r_2$$

ou seja,

$$r = \sqrt{r_1 r_2}$$

Como a altura do tronco é h = 2r, resulta que

$$h = 2\sqrt{r_1 \cdot r_2}$$



Exercícios Propostos

18.10) Uma esfera tem 1,5 m de raio. Calcule:

a) o seu volume (V);
b) a área da sua superfície (S);
c) o raio da seção da esfera por um plano situado a 1 m do centro;
d) as distâncias polares correspondentes a essa seção.

18.11) Uma esfera tem volume igual a 36π cm³. Calcule:

a) o seu raio (r);
b) a área de sua superfície (S).

18.12) A seção de uma esfera por um plano situado a 3 cm do centro tem área igual a 16π cm². Determine o volume da esfera.

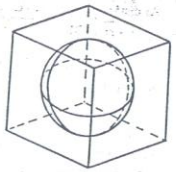
18.13) A seção de uma esfera por um plano que passa pelo centro tem área igual a 12π cm². Determine:

a) o raio da esfera (r);
b) o volume da esfera (V);
c) a área da superfície esférica (S).

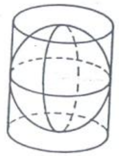
18.14) Numa esfera de raio igual a 6 cm, a que distância do centro deve ser tomada uma seção plana cuja área seja igual à metade da área da seção plana que contém o centro da esfera?

18.15) Numa esfera de volume igual a $\frac{1\,372\pi}{3}$ cm³ toma-se uma seção plana cuja área é igual a 24π cm². Qual é a distância dessa seção ao centro da esfera?

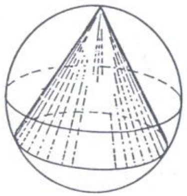
18.16) Determine o volume de uma esfera inscrita num cubo de aresta a.



18.17) Considere uma esfera inscrita em um cilindro eqüilátero. Determine a razão entre a área da superfície esférica e a área lateral do cilindro.

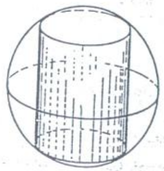


18.18) Um cone eqüilátero está inscrito em uma esfera. Determine a razão entre os volumes desses dois sólidos.

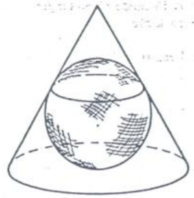


18.19) Um cubo está inscrito em uma esfera de raio r. Determine a razão entre os volumes desses dois sólidos.

18.20) Considere um cilindro eqüilátero inscrito numa esfera de raio r. Determine a razão entre os volumes desses dois sólidos.



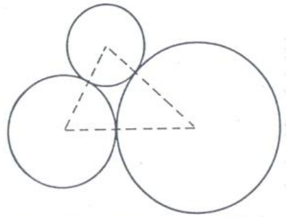
18.21) Uma esfera está inscrita em um cone eqüilátero. Determine a razão entre os volumes desses dois sólidos.



18.22) Sejam duas esferas das quais uma tem área igual ao dobro da área da outra. Determine a razão entre os seus volumes.

18.23) Sejam duas esferas das quais uma tem o volume igual ao dobro do volume da outra. Determine a razão entre as áreas das duas superfícies esféricas.

18.24) Os centros de três esferas que se tangenciam duas a duas, externamente (como a figura indica), formam um triângulo de lados 3, 4 e 5. Determine a soma dos volumes das três esferas.



18.25) Duas seções paralelas de uma esfera de raio 10 cm têm raios iguais a 6 cm e 8 cm. Calcule a distância entre os planos das duas seções.

18.26) A distância entre os centros de duas superfícies esféricas é 9 cm e seus raios são 7 cm e 8 cm. Calcule o raio da circunferência segundo a qual elas se cortam.

18.27) A área do círculo máximo de uma esfera (aquele que contém o centro) é 225π cm² e a área de uma seção paralela a ele é 144π cm². Calcule a distância desta seção ao centro da esfera.

18.28) Dois planos paralelos dividem o diâmetro de uma esfera na proporção 1 : 2 : 3. Em que proporção fica dividida a área da superfície esférica?

18.29) Conduz-se um plano pela extremidade de um raio de uma esfera de raio r, formando com ele 30°. Calcule a área da seção obtida.

18.30) Por um ponto de uma superfície esférica de raio r, conduz-se um plano que forma 45° com o plano tangente nesse ponto. Calcule a área da seção que esse plano determina na esfera.

18.31) Um plano tangente e um plano secante são conduzidos por um ponto de uma superfície esférica. Calcule o ângulo entre estes planos, sabendo que a área da seção é igual à quarta parte da área do círculo máximo.

18.32) O raio de uma esfera é 13 cm. A que distância do centro da esfera deve passar um plano secante, de modo que a seção obtida circunscreva um triângulo de lados 6 cm, 8 cm e 10 cm?

18.33) A 18 cm do plano tangente a uma esfera de raio 25 cm passa um plano secante. Calcule o raio da seção.

18.34) Uma superfície cônica toca uma esfera ao longo de uma circunferência de raio 12 cm. Se o raio da esfera é 13 cm, calcule a distância do vértice da superfície cônica ao centro da esfera.

18.35) Uma superfície esférica tem como diâmetro a altura de um cone eqüilátero cujo raio da base é 8 cm. Calcule o comprimento da linha de interseção do cone com a superfície esférica.

18.36) Duas superfícies esféricas de mesmo raio r são tais que o centro de cada uma pertence à outra. Calcule o comprimento da circunferência ao longo da qual elas se interceptam.

18.37) A base e a altura de um hemisfério são a base e a altura de um cone reto inscrito nele. Um plano paralelo à base divide a altura ao meio. Sendo S a área da base do cone, calcule a área da coroa circular contida nesse plano, limitada pela superfície esférica e pela superfície lateral do cone.

18.38) Uma pirâmide regular tem como base um quadrado de lado $a = 24$ cm e altura $h = 5$ cm. Calcule o raio da esfera inscrita nessa pirâmide.

18.39) Uma pirâmide triangular regular tem aresta da base igual a 1 cm e altura 2 cm. Calcule o raio da esfera inscrita.

18.40) Uma pirâmide triangular regular tem aresta da base igual a 6 cm e altura 3 cm. Calcule o raio da esfera circunscrita.

18.41) A base de uma pirâmide é um triângulo eqüilátero de lado **a**. A aresta lateral $\overrightarrow{VA}$ é perpendicular ao plano da base e a face lateral VBC forma 60° com o plano da base. Calcule o raio da esfera inscrita.

18.42) Em uma esfera de raio r está inscrito um tetraedro regular. Calcule o volume do tetraedro. (Veja exercício 18.6.

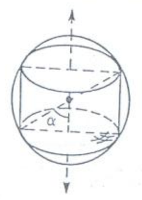
18.43) Calcule o volume da esfera e a área da superfície esférica circunscritas a um tetraedro regular de aresta **a**. (Veja exercício 18.6.

18.44) Num tetraedro regular, inscreve-se uma esfera de raio $r = 10$ cm. Calcule o volume do tetraedro. (Veja os exercícios 18.6 e 14.1.)

18.45) Um tetraedro regular tem aresta **a**. Determine o raio da esfera que tangencia as faces laterais do tetraedro nos pontos situados sobre os lados da base.

18.46) Calcule a distância entre duas faces opostas de um octaedro regular de aresta **a**. (Veja exercício 18.5.)

18.47) Um cilindro está inscrito em uma esfera. A diagonal da seção meridiana do cilindro forma com seu eixo um ângulo $\alpha = 60°$. Calcule a razão entre os volumes do cilindro e da esfera.



18.48) Em uma esfera está inscrito um cilindro circular reto. Sejam V_1, R e S o volume, o raio e a área da superfície da esfera. Sejam V_2, r e A o volume, o raio da base e a área lateral do cilindro. Sabendo que $2RA = rS$, calcule $\frac{V_1}{V_2}$.

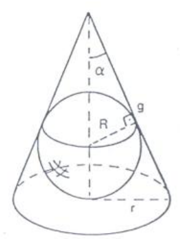
18.49) Um cone reto, inscrito em uma esfera de raio **r**, apresenta um ângulo de 30° entre a geratriz e o eixo. Calcule o volume do cone.

18.50) Em uma esfera de raio R está inscrito um cone de altura **h**. Calcule a área lateral do cone.

18.51) Uma esfera está inscrita em um cone circular reto cuja base tem raio R. A circunferência segundo a qual a esfera tangencia a superfície lateral do cone tem raio **r**. Determine a área da superfície esférica.

18.52) Em um cone circular reto está inscrita uma superfície esférica cuja área é igual à área da base do cone. A circunferência de contato entre a superfície esférica e a superfície lateral do cone divide esta última em duas partes. Qual é a razão entre as áreas dessas duas partes?

18.53) Uma esfera de raio R está inscrita em um cone, cuja área lateral é igual a $\frac{3}{2}$ da área da superfície esférica. Calcule a altura do cone. (Sugestão: adote como variável auxiliar $x = \operatorname{sen} \alpha$, pondo os raios R, r e a geratriz g em função de x.)



18.54) Em um tronco de cone de bases paralelas está inscrita uma esfera de raio R. A geratriz do tronco forma 60° com o plano da base maior. Calcule o volume do tronco.

18.55) O diâmetro de uma superfície esférica de área S é igual à altura de um cone eqüilátero. Calcule a área total do cone.

18.56) O diâmetro de uma superfície esférica de área S é igual ao diâmetro da base de um cone eqüilátero. Calcule a área lateral do cone.

18.57) O diâmetro de uma superfície esférica de área S é igual ao diâmetro da base de um cilindro reto, cuja altura é igual ao raio da base. Calcule a área total do cilindro.

18.58) Sobre um plano tangente a uma superfície esférica, toma-se um ponto distante 16 cm do ponto de tangência e 8 cm da superfície esférica. Calcule a área da superfície esférica.

18.59) Um cone eqüilátero e um hemisfério têm base comum. Se a área da superfície do hemisfério é S, calcule a área lateral do cone. (A superfície do hemisfério corresponde à metade da superfície esférica, acrescida do círculo da base.)

18.60) No problema anterior, calcule o comprimento da circunferência segundo a qual a superfície lateral do cone corta o hemisfério.

18.61) A base de um segmento esférico tem diâmetro 10 cm e o arco da seção meridiana mede 120°. Calcule a área da calota.

18.62) Em uma esfera de raio 25 cm, toma-se um segmento esférico de raios das bases 20 cm e 24 cm. Calcule a área da zona esférica correspondente. (Considere dois casos.)

18.63) Determine a área de uma calota esférica de altura 30 cm e raio da base 40 cm.

18.64) Um ponto luminoso situa-se à distância r de uma superfície esférica de raio r. Qual é a porcentagem da área da superfície esférica iluminada pelo ponto?

18.65) Em um círculo de raio r, toma-se um segmento circular cujo arco mede 90°. Calcule a área total da superfície do sólido obtido quando esse segmento circular gira em torno do diâmetro perpendicular à sua corda.

18.66) Um segmento circular de 120° e área S gira em torno da sua altura. Calcule a área total do sólido gerado.

18.67) Qual deve ser o ângulo formado pela geratriz de um cone reto com o plano de sua base, de modo que a superfície esférica inscrita no cone fique dividida, pela circunferência ao longo da qual ela toca a superfície do cone, em duas calotas cujas áreas estejam entre si na razão 1/3?

18.68) Uma das bases de uma zona esférica de uma superfície esférica de raio r é o círculo máximo. Sabendo que a área da zona esférica é igual à soma das áreas das suas bases, determine a sua altura.

18.69) Uma esfera de volume V tem raio igual ao raio da base de um cilindro cuja altura é igual a $\frac{4}{3}$ do raio da base. Calcule o volume do cilindro.

18.70) Com duas superfícies esféricas concêntricas, obtém-se uma concha esférica de espessura d (veja exercício 18.1). Qual deve ser a altura de um tronco de cone reto cujos raios das bases são iguais aos raios das duas superfícies esféricas, de modo que o volume do tronco seja igual ao da concha?

18.71) Calcule a área de uma superfície esférica, que é numericamente igual ao volume da esfera correspondente.

18.72) Um cilindro eqüilátero e uma esfera têm mesmo volume. Qual é a razão entre as áreas de suas superfícies?

18.73) Um vaso cilíndrico de diâmetro da base 12 cm e altura 72 cm tem água até metade de sua altura. Quanto subirá o nível da água se uma esfera de aço de 10 cm de diâmetro for colocada dentro da água do vaso?

18.74) Determine o volume de um segmento esférico cuja base tem 16 cm de diâmetro, sabendo que a seção meridiana tem um arco de 60°.

18.75) Em uma esfera de raio 25 cm tomam-se duas seções paralelas, de raios 20 cm e 24 cm. Calcule o volume do segmento esférico limitado pelas duas seções (considere dois casos).

18.76) Duas esferas de mesmo raio r são colocadas de modo que o centro de cada uma pertence à superfície da outra. Calcule o volume da parte comum.

18.77) Um cubo está inscrito em uma esfera de raio R. Determine o volume do menor segmento esférico determinado por um plano que contém uma face do cubo.

18.78) Pelos pontos que dividem um diâmetro de uma esfera de raio R em quatro partes iguais, conduzem-se três planos paralelos entre si, perpendiculares ao diâmetro. Calcule os volumes dos segmentos esféricos em que a esfera fica separada pelos três planos.

18.79) Uma esfera é inscrita em um cone eqüilátero de volume V. O plano que contém a circunferência de tangência separa a esfera em dois segmentos esféricos. Calcule seus volumes.

18.80) Calcule o volume de uma esfera inscrita em um tronco de cone reto, cujas bases têm raios 9 cm e 25 cm.

Exercícios Suplementares

Com esta série de exercícios, faremos uma revisão geral dos capítulos anteriores.

VI.1) São dados os pontos A e B, pertencentes a um plano α, e o ponto O pertencente ao plano $\beta \parallel \alpha$. Tomam-se por O um plano γ que contém A e um plano δ que contém B, os quais cortam α segundo retas paralelas entre si. Mostre que $\gamma \cap \delta \subset \beta$.

VI.2) São dados um plano α, uma reta r que fura α e um ponto O fora de r e de α. Construa por O uma reta paralela a α e concorrente com r.

VI.3) Prove que os segmentos que têm extremidades nos pontos médios de lados opostos de um quadrilátero reverso cortam-se no seu ponto médio.

VI.4) Mostre que o perímetro de um quadrilátero convexo é maior do que a soma das duas diagonais.

VI.5) Mostre que o perímetro de um quadrilátero convexo é menor do que o dobro da soma das duas diagonais.

VI.6) Prove que, num triângulo ABC, os vértices B e C são eqüidistantes da reta que contém a mediana relativa ao vértice A.

VI.7) Dá-se um triângulo ABC, retângulo em A. A bissetriz interna relativa ao vértice B encontra o lado oposto em S. Mostre que AS < SC.

VI.8) Dado um triângulo ABC, qual é o ponto P do lado $\overleftrightarrow{AB}$, pelo qual se pode passar uma reta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, que encontra $\overleftrightarrow{AC}$ em um ponto Q tal que PQ = CQ?

VI.9) Pelo incentro I de um triângulo ABC, conduz-se uma reta paralela ao lado $\overleftrightarrow{BC}$, que encontra $\overleftrightarrow{AB}$ em D e $\overleftrightarrow{AC}$ em E. Mostre que

$$BD + CE = DE$$

VI.10) Dado um triângulo isósceles ABC, de vértice A, por um ponto $D \in \overleftrightarrow{BC}$ tomamos retas paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, obtendo os pontos E em $\overleftrightarrow{AC}$ e F em $\overleftrightarrow{AB}$. Mostre que o perímetro do quadrilátero AFDE é igual a 2(AB).

VI.11) É dado um triângulo eqüilátero ABC, cujo lado tem medida **a**. Por um ponto O do seu interior, traça-se uma paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, encontrando A' em $\overleftrightarrow{BC}$, uma paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, encontrando B' em $\overleftrightarrow{AC}$ e uma paralela a $\overleftrightarrow{AC}$, encontrando C' em $\overleftrightarrow{AB}$. Calcule OA' + OB' + OC'.

VI.12) Sendo α a medida em graus do ângulo $\hat{A}$ de um triângulo ABC e I o incentro, calcule a medida do ângulo $B\hat{I}C$.

VI.13) Sendo β e γ ($\beta > \gamma$) as medidas dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC, determine a medida do ângulo entre a altura $\overleftrightarrow{AH}$ e a bissetriz interna $\overleftrightarrow{AS}$.

VI.14) Mostre que a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo de **n** lados é igual a 360°.

VI.15) Qual é o polígono convexo cuja soma das medidas dos ângulos internos é igual à dos externos?

VI.16) São dados a reta **r** e o plano α, oblíquos. Fora de **r** e de α, toma-se o ponto A. Construa por A uma reta paralela a α e que forme ângulo reto com **r**.

VI.17) Considere uma pirâmide triangular VABC cuja aresta lateral $\overleftrightarrow{VA}$ é perpendicular ao plano da base ABC. Mostre que a reta determinada pelos ortocentros dos triângulos ABC e VBC é perpendicular ao plano da face lateral VBC.

VI.18) Seja uma pirâmide triangular VABC, cujas arestas laterais $\overleftrightarrow{VA}$, $\overleftrightarrow{VB}$ e $\overleftrightarrow{VC}$ determinam um triedro tri-retângulo. Mostre que a projeção ortogonal do vértice V desse triedro sobre a base ABC é o ortocentro do $\triangle$ABC.

VI.19) As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são ortogonais. Prove que $(BC)^2 - (BD)^2 = (AC)^2 - (AD)^2$.

VI.20) Dados dois triângulos ABC e ABD, retângulos em A, tais que $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$, mostre que $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

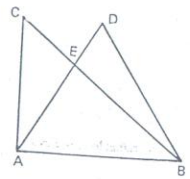
VI.21) Prove que as retas que contêm duas arestas opostas de uma pirâmide triangular regular são ortogonais.

VI.22) Mostre que a diagonal de um cubo é ortogonal à diagonal de face que não a intercepta.

VI.23) Pelo vértice A do ângulo reto de um triângulo retângulo ABC, toma-se uma reta $\overleftrightarrow{AM}$ perpendicular ao plano do triângulo. Construa uma reta por M, perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$.

VI.24) Mostre que a área de um trapézio é igual ao produto da medida de um lado lateral pela distância dele ao ponto médio do lado oposto.

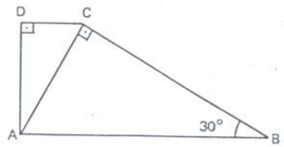
VI.25) O $\triangle$ABC é retângulo em A e AB = 4, AC = 3. O $\triangle$ABD é isósceles de base $\overleftrightarrow{AB}$ e tem a mesma área do $\triangle$ABC. Calcule a área do $\triangle$ABE.



VI.26) Calcule a razão entre os raios das circunferências circunscrita e inscrita em um triângulo de lados 7 cm, 8 cm e 9 cm.

VI.27) Um trapézio isósceles com ângulo agudo α é circunscrito a uma circunferência de raio **r**. Calcule a área do trapézio.

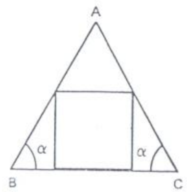
VI.28) Calcule o perímetro do trapézio retângulo da figura, sendo AC = d.



VI.29) A altura de um triângulo isósceles é 13 cm e a altura relativa ao lado lateral é 10 cm. Calcule a área do triângulo.

VI.30) Em um quadrado de lado **a**, inscreve-se um outro quadrado, de modo que o ângulo entre os lados desses quadrados tenha medida α. Qual é a razão entre as áreas dos dois quadrados?

VI.31) Calcule a área do quadrado assinalado, sabendo que BC = 14 cm e $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{3}{2}$.



VI.32) A bissetriz do ângulo reto de um triângulo retângulo divide a hipotenusa em segmentos de medidas 5 cm e 12 cm. Calcule a área do triângulo.

VI.33) O ponto D divide o lado $\overleftrightarrow{BC}$ do triângulo eqüilátero ABC em segmentos de medidas BD = = 4 cm e DC = 2 cm. Calcule AD.

VI.34) Dois lados de um triângulo de área 6 cm² medem 3 cm e 5 cm. Calcule a medida do terceiro lado.

VI.35) Dois lados de um triângulo medem **a** e **b** e a circunferência circunscrita tem raio R. Calcule a altura relativa ao terceiro lado.

VI.36) Calcule as medidas dos lados da base de um paralelepípedo reto-retângulo de altura $3\sqrt{6}$ cm, sabendo que a diagonal do paralelepípedo forma 30° com o plano da base e que a diagonal de uma face lateral forma 60° com esse plano.

VI.37) A aresta da base de um prisma quadrangular regular mede **a** e a diagonal do prisma forma 45° com o plano da base. Calcule a área da seção que contém a diagonal do prisma e os pontos médios de duas arestas laterais opostas.

VI.38) Em um prisma triangular regular, o segmento com extremidades no vértice de uma base e no ponto médio da aresta oposta da outra base tem medida **d** e forma ângulo de medida α com o plano da base. Calcule o volume desse prisma.

VI.39) Um prisma triangular regular tem aresta da base **a**. Um plano que contém a aresta da base e o ponto médio da aresta lateral oposta determina uma seção cuja área é igual a $\frac{a^2}{2}$. Calcule a altura do prisma.

VI.40) Um plano, que contém a aresta da base de um prisma triangular regular, forma um ângulo de medida α com o plano da base e determina uma seção triangular cujo perímetro é igual ao dobro do perímetro da base do prisma. Calcule $\cos\alpha$.

VI.41) A base de um prisma triangular reto é um triângulo isósceles, com ângulo de 120°. Pela base desse triângulo, toma-se um plano que determina uma seção em forma de triângulo retângulo. Se α é a medida do ângulo formado por esse plano com o plano da base, calcule $\cos\alpha$.

VI.42) Uma pirâmide quadrangular regular apresenta faces laterais com ângulo do vértice de medida α. Calcule $\cos\beta$, onde β é o ângulo que a face lateral forma com o plano da base.

VI.43) Resolva o exercício anterior, para o caso de uma pirâmide triangular regular.

VI.44) Em uma pirâmide quadrangular regular, a aresta lateral forma ângulo α com o plano da base. Calcule $\operatorname{tg}\beta$, onde β é a medida do ângulo que a face lateral forma com o plano da base.

VI.45) Resolva o exercício anterior, para o caso de uma pirâmide triangular regular.

VI.46) Seja α a medida do ângulo agudo formado por duas alturas de um tetraedro regular. Calcule $\cos\alpha$.

VI.47) Em uma pirâmide quadrangular regular, o ângulo entre duas arestas laterais opostas é α. Calcule $\cos\beta$, sendo β o ângulo do vértice de uma face lateral.

VI.48) Em uma pirâmide triangular regular, a aresta lateral mede **b** e forma com a aresta da base um ângulo α tal que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Calcule o volume da pirâmide.

VI.49) A aresta lateral de um tronco de pirâmide quadrangular regular forma com a aresta da base um ângulo α tal que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Sendo **a** e **7a** as medidas das arestas das bases, calcule o volume do tronco.

VI.50) A superfície lateral de um cilindro provém de um retângulo cuja diagonal mede **d** e forma ângulo de medida α com o lado. Calcule o raio da base do cilindro.

VI.51) Em um cilindro eqüilátero, toma-se um segmento com uma extremidade em cada circunferência das bases, de modo que os raios por esses pontos formem 120°. Seja α o ângulo que o segmento forma com o eixo do cilindro. Calcule $\operatorname{tg}\alpha$.

VI.52) Em um cilindro eqüilátero de raio 15 cm, toma-se um segmento com uma extremidade em cada circunferência das bases, distante 12 cm do eixo do cilindro. Seja α o ângulo que esse segmento forma com o plano da base. Calcule $\operatorname{tg}\alpha$.

VI.53) Um plano, paralelo ao eixo de um cilindro reto, corta na circunferência da base um arco de medida α ($\alpha < 180°$). O segmento que liga o centro de uma base ao ponto médio da corda correspondente ao arco α da outra base mede **m** e forma com o plano da base um ângulo de medida α. Calcule a área da seção.

VI.54) Um triângulo eqüilátero é construído em um cilindro reto, de modo que um lado seja o diâmetro da base inferior e o vértice oposto esteja na circunferência da base superior. Sendo **h** a altura do cilindro, calcule o raio da base.

VI.55) Um plano, paralelo ao eixo de um cilindro reto, à distância **d** desse eixo, determina uma seção quadrada. Esse plano corta na circunferência da base um arco de 120°. Calcule a área da seção.

VI.56) A base de um prisma reto de altura **h** é um triângulo retângulo com um ângulo agudo α e a altura relativa à hipotenusa igual a **h**. Calcule o volume do cilindro circunscrito a esse prisma.

VI.57) Toma-se no círculo da base de um cilindro uma corda $\overleftrightarrow{AB}$, correspondente a um arco de 90°. Sendo C o centro da outra base, obtém-se o triângulo ABC, de área S, cujo plano forma 60° com o plano da base. Calcule o raio da base do cilindro.

VI.58) Um cilindro é circunscrito a um tetraedro regular, de modo que a base do tetraedro é inscrita na base do cilindro. Calcule a razão entre os volumes dos dois sólidos.

VI.59) Calcule o volume de um cilindro de raio da base **r**, sabendo que o desenvolvimento da sua superfície lateral é um quadrado.

VI.60) Calcule o volume de um cilindro de altura 8 cm, inscrito em um prisma triangular reto cujas arestas da base medem 7 cm, 8 cm e 9 cm.

VI.61) Um cone circular reto é circunscrito a um tetraedro regular. Calcule a razão entre os volumes dos dois sólidos.

VI.62) O desenvolvimento da superfície lateral de um cone é um semicírculo de diâmetro 20 cm. Calcule o volume do cone.

VI.63) Calcule o volume de um cone reto cuja seção meridiana é um triângulo retângulo de área S.

VI.64) Um tronco de cone reto tem raios das bases 2 cm e 3 cm e altura 4 cm. Calcule a altura do cone eqüilátero que tem o mesmo volume desse tronco.

VI.65) O triângulo ABC é isósceles de base $\overleftrightarrow{AB}$. Os ângulos da base medem 30° e o lado lateral tem medida ℓ. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação desse triângulo em torno de um eixo que passa pelo vértice A e é paralelo ao lado $\overleftrightarrow{BC}$.

VI.66) A área lateral de um cone reto é igual a quatro vezes a área da base e a geratriz forma ângulo α com o plano da base. Calcule $\cos\alpha$.

VI.67) A seção meridiana de um cone é um triângulo eqüilátero. Calcule a razão entre a área total e a área lateral.

VI.68) Duas geratrizes de um cone reto e uma corda da circunferência da base formam um triângulo retângulo de área S. O plano do triângulo forma 60° com o plano da base. Calcule a altura do cone.

VI.69) Um cone reto de altura **h** tem como seção meridiana um triângulo retângulo. Calcule a área da seção determinada por um plano que contém o vértice do cone e forma 60° com o plano da base.

VI.70) A seção meridiana de um cone reto é um triângulo retângulo. Dê a medida em radianos do ângulo do setor que representa o desenvolvimento da superfície lateral desse cone.

VI.71) Uma esfera tem raio **r**. Calcule as distâncias polares correspondentes a uma seção plana cuja área seja igual à metade da área do círculo máximo.

VI.72) Um cilindro, inscrito em uma esfera de raio **r**, tem área lateral igual a 3/5 da área da superfície esférica. Determine o raio da base desse cilindro.

VI.73) Por um ponto de uma superfície esférica de raio **r**, conduz-se um plano que forma 60° com o plano tangente nesse ponto. Calcule a área da seção que esse plano determina na esfera.

VI.74) Uma pirâmide triangular regular tem aresta da base **a** e altura **a**. Calcule o raio da esfera circunscrita.

VI.75) Em uma esfera de raio **r** está inscrito um cilindro cuja área lateral é igual ao dobro da área do círculo máximo da esfera. Calcule o volume do cilindro.

VI.76) Em uma esfera de raio **r** está inscrito um cone reto cuja área lateral é igual à metade da área de um círculo que tem como raio a geratriz do cone. Calcule o volume do cone.

VI.77) Sobre um plano tangente a uma superfície esférica, toma-se um ponto cuja distância à superfície esférica é **a** e ao ponto de tangência é **2a**. Calcule o volume da esfera.

VI.78) Um cone reto está inscrito em uma esfera de raio **r** e a sua seção meridiana apresenta um ângulo do vértice de 45°. Calcule o volume do cone.

TESTES DE VESTIBULARES

RETAS E PLANOS NO ESPAÇO

1) (PUC-SP) A soma dos diedros de um triedro está compreendida entre:

a) 3 retos e 6 retos
b) 1 reto e 2 retos
c) 2 retos e 6 retos
d) 2 retos e 5 retos
e) 3 retos e 5 retos

2) (MACKENZIE-SP) Considere as afirmações:

I – Se uma reta é paralela a dois planos, então este planos são paralelos.
II – Se dois planos são paralelos, toda reta de um é paralela a uma reta do outro.
III – Se duas retas são reversas, então existe uma única perpendicular comum a elas.

Então:

a) todas são verdadeiras
b) somente a II é verdadeira
c) somente a III é verdadeira
d) somente a I é verdadeira
e) somente II e III são verdadeiras

3) (MACKENZIE-SP) O triângulo MNP, retângulo em N, e o paralelogramo NPQR situam-se em planos distintos. Então a afirmação "MN e QR são segmentos ortogonais":

a) é sempre verdadeira
b) não pode ser analisada por falta de dados
c) é verdadeira somente se MN = QR
d) nunca é verdadeira
e) é verdadeira somente se MN = 2QR

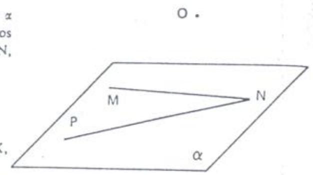
4) (F.M. SANTA CASA-SP) Esta questão deve ser respondida de acordo com o seguinte código:

a) se somente as proposições I e II estiverem corretas
b) se somente as proposições I e II estiverem corretas
c) se somente as proposições II e III estiverem corretas
d) se todas as proposições estiverem corretas
e) se nenhuma proposição estiver correta

I – Se duas retas distintas não são paralelas, elas são concorrentes.
II – Se uma reta é paralela à interseção de dois planos, ela é paralela a pelo menos um desses planos.
III – As interseções de um diedro com dois planos paralelos entre si e que interceptam a aresta, são ângulos congruentes.

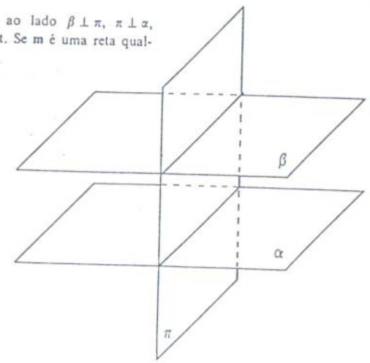
5) (U.F.BA) Seja O um ponto fora do plano α que contém o ângulo MNP. Se R e S são os pontos simétricos de O em relação a PN e MN, respectivamente, conclui-se que:

a) a reta RS é paralela a α
b) a reta RS é concorrente em α, em N
c) a reta RS intercepta α em Z, $Z \neq N$
d) as retas RS e PN são concorrentes em X, $X \neq N$
e) as retas RS e MN são concorrentes em Y, $Y \neq N$



6) (U.F.BA) Na figura ao lado $\beta \perp \pi$, $\pi \perp \alpha$, $\beta \cap \pi = r$ e $\alpha \cap \pi = t$. Se m é uma reta qualquer de β, então:

a) $m \parallel r$
b) $m \parallel t$
c) $m \perp \pi$
d) $m \parallel \alpha$
e) $m \perp \alpha$



7) (CESESP-PE) Seja r uma reta que é perpendicular a uma outra reta s contida em um plano P e seja O o ponto de interseção de r com s. Assinale, dentre as alternativas abaixo, aquela que é a verdadeira:

a) Toda reta do plano P que passa por O é perpendicular à reta r.
b) r é perpendicular a todas as retas de P se e somente se existir uma outra reta s' contida em P, diferente de s e passando por O, que seja perpendicular a r.
c) r é perpendicular a todas as retas do plano se e somente se existir uma outra reta s' diferente e paralela a s, que seja também perpendicular a r.
d) A reta r sendo perpendicular a s contida em P, jamais estará inclusa em P.
e) Uma tal reta r não existe.

Nota: Nesta questão, o examinador utiliza o termo *perpendiculares* para indicar retas ortogonais ou perpendiculares, indiferentemente.

8) (F.M. SANTA CASA-SP) Esta questão deve ser respondida de acordo com o seguinte código:

a) se somente as proposições I e II estiverem corretas
b) se somente as proposições I e III estiverem corretas
c) se somente as proposições II e III estiverem corretas
d) se todas as proposições estiverem corretas
e) se nenhuma proposição estiver correta

I – Dois ângulos não situados em um mesmo plano e de lados paralelos:
1.º) têm sempre medidas iguais;
2.º) determinam planos paralelos.

II – Se uma reta é paralela a um plano, todo plano conduzido pela reta e cortando o primeiro plano dá uma interseção paralela à reta dada.

III – De um ponto tomado no interior de um ângulo diedro, duas perpendiculares às faces formam um ângulo suplementar deste diedro.

9) (F.C. CHAGAS-SP) Sejam r a reta determinada pelos pontos A e B e s a reta determinada pelos pontos C e D, onde $r \cap s = \{A\}$ e A está entre C e D. Sejam X e Y, respectivamente, as projeções de C e D sobre a reta r. Então, necessariamente:

a) A está entre X e Y
b) o triângulo BCD é retângulo
c) ou X ou Y deve pertencer ao segmento AB
d) os triângulos AXC e AYD são congruentes
e) $r \perp s$

10) (F.C. CHAGAS-SP) Qual das afirmações é verdadeira?

a) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
b) Se as retas a e b são distintas e ambas paralelas a um plano α, então a e b são retas paralelas.
c) No espaço, se r e s são duas retas perpendiculares a uma reta t, então r e s são paralelas.
d) Se dois planos são paralelos, toda reta perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.
e) Três pontos distintos determinam um único plano.

11) (FATEC-SP) Se o plano α é paralelo a duas retas, r_1, r_2, do plano β, então:

a) α é paralelo a β
b) a projeção ortogonal de uma qualquer reta de α sobre β intercepta r_1 ou r_2
c) α e β se interceptam segundo uma reta paralela a r_1 e r_2, simultaneamente
d) r_1 é paralela a r_2
e) n.d.a.

12) (PUC-SP) Assinale a afirmação verdadeira.

a) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos entre si.
b) Dois planos perpendiculares a uma reta são perpendiculares entre si.
c) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas entre si.
d) Duas retas paralelas a um plano são paralelas entre si.
e) Dois planos perpendiculares a um terceiro são perpendiculares entre si.

13) (PUC-SP) Se r e s são retas reversas, então pode-se garantir que:

a) todo plano que contém r também contém s
b) existe um plano que contém r e é perpendicular a s
c) existe um único plano que contém r e s
d) existe um plano que contém r e é paralelo a s
e) toda reta que encontra r encontra s

14) (MOJI-SP) Das afirmações abaixo, apenas uma é verdadeira. Assinale-a.
a) Dois planos são perpendiculares quando têm uma reta comum.
b) Dois planos são perpendiculares quando um deles contém uma reta perpendicular ao outro.
c) Dois planos são perpendiculares quando toda reta de um é perpendicular ao outro.
d) Dois planos são perpendiculares quando são perpendiculares a uma reta.
e) Dois planos são perpendiculares quando têm um único ponto em comum.

15) (MOJI-SP) Dadas as afirmações:

I – Se dois planos têm um ponto P comum, então eles têm uma reta em comum que passa por P.
II – Dadas duas retas reversas, sempre existe reta que se apóia em ambas.
III – Uma reta é perpendicular a um plano quando ela é ortogonal ou perpendicular a todas as retas do plano.
IV – Se duas retas não têm ponto em comum, então elas são necessariamente paralelas.

a) Somente I, III e IV estão corretas.
b) Somente I, II e IV estão corretas.
c) Somente II e IV estão corretas.
d) Somente IV é incorreta.
e) Todas estão corretas.

16) (MOJI-SP) Dadas duas retas reversas **r** e **s**, então necessariamente:

a) existe plano paralelo a ambas
b) existe um e um só plano paralelo a ambas
c) existe um plano perpendicular a uma, que contém a outra
d) todo plano perpendicular a uma encontra a outra em um ponto
e) todo plano paralelo a uma encontra a outra em um ponto

17) (MOJI-SP) As projeções ortogonais de um conjunto S de retas sobre um plano π são retas paralelas entre si; então as retas de S necessariamente:

a) são paralelas entre si
b) são paralelas ao plano π
c) estão contidas em π
d) estão contidas em um plano que forma 45° com o plano π
e) estão contidas em planos paralelos

18) (FMU/FIAM-SP) Dados: um plano α e duas retas distintas **r** e **s** tais que $r \perp s$ e $s \perp \alpha$, podemos afirmar que:

a) $r \cap s = \varnothing$
b) **r** e **s** são retas reversas
c) $r /\!/ s$
d) **r** é paralela a α
e) é impossível encontrar as retas **r** e **s** nestas condições

19) (FMU/FIAM-SP) Das afirmações abaixo:

I – Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas entre si.
II – Duas retas paralelas a um plano são paralelas entre si.
III – Se um plano α é perpendicular à reta **r**, então α é perpendicular a todo plano que contém **r**.

a) todas são verdadeiras
b) I e II são verdadeiras
c) I e III são verdadeiras
d) II e III são falsas
e) todas são falsa

20) (MACKENZIE-SP) Considerando-se as afirmações abaixo, assinale a alternativa *correta*.

I – Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
II – Dadas duas retas reversas, sempre existe reta que se apóia em ambas.
III – Se um plano é perpendicular a dois planos secantes, então é perpendicular à interseção desses planos.

a) Somente a afirmação I é verdadeira.
b) Somente a afirmação II é verdadeira.
c) São verdadeiras as afirmações II e III, apenas.
d) Todas as afirmações são verdadeiras.
e) Nenhuma afirmação é verdadeira.

21) (MACKENZIE-SP) Quando dois planos paralelos são interceptados por um terceiro plano, as interseções são retas:

a) reversas
b) paralelas
c) concorrentes
d) coincidentes
e) faltam dados para responder

22) (FUVEST-SP) São dados cinco pontos não coplanares A, B, C, D, E. Sabe-se que ABCD é um retângulo, $AE \perp AB$ e $AE \perp AD$. Pode-se concluir que são perpendiculares as retas:

a) EA e EB
b) EC e CA
c) EB e BA
d) EA e AC
e) AC e BE

23) (FESP) Um ponto P não pertence nem à reta **a**, nem à reta **b**; **a** e **b** são reversas.

a) Por P passa uma única reta que se apóia em **a** e **b** simultaneamente.
b) Por P nem sempre passa reta que se apóia em **a** e **b** simultaneamente.
c) Por P passam infinitas retas que se apóiam em **a** e **b** simultaneamente.
d) Por P passam duas retas que se apóiam em **a** e **b** simultaneamente.
e) n.d.a.

24) (FATEC-SP) Três semi-retas, **a**, **b**, **c**, com mesma origem V, são não coplanares e tais que $\measuredangle(a, b) = 163°$ e $\measuredangle(b, c) = 104°$. Se $x = \measuredangle(a, c) < 180°$, então:

a) $79° < x < 103°$
b) $x < 93°$
c) $x > 93°$
d) $59° < x < 93°$
e) n.d.a.

25) (FATEC-SP) É falso que:

a) por um ponto fora de uma reta passa pelo menos um plano perpendicular a essa reta
b) se uma reta **r** é paralela a um plano α, então toda reta paralela a **r** e que passa por um ponto de α está contida em α
c) as interseções de dois planos paralelos, com um terceiro plano distinto dos anteriores, determinam retas paralelas
d) dois planos secantes determinam quatro diedros
e) uma das afirmações acima é falsa

26) (FASP) Considere as afirmações:

I – Se as projeções ortogonais de duas retas sobre um plano são paralelas, então as retas são paralelas.
II – A projeção ortogonal de um ângulo sobre um plano pode ser um segmento de reta.
III – A projeção ortogonal de um segmento oblíquo é congruente ao segmento.

a) Somente I é verdadeira.
b) I e III são verdadeiras.
c) I e II são falsas.
d) II e III são verdadeiras.

27) (FASP) Considere as afirmações:

I – Se uma reta **r** é paralela a um plano, que não a contém, **r** é paralela a uma reta contida nesse plano.
II – Se duas retas são ortogonais, então elas são perpendiculares.
III – Seja o ponto $P \in r$; pelo ponto P passam muitos planos perpendiculares à reta **r**.
IV – Uma reta perpendicular a um plano é ortogonal a qualquer reta desse plano.

A alternativa correta é:

a) apenas I
b) II e III
c) II e IV
d) I e III

28) (U.E. LONDRINA-PR) São dadas as afirmações:

I – Se dois planos têm um ponto comum, então eles têm uma reta comum que passa pelo ponto.
II – Dados uma reta e um plano, é sempre possível traçar no plano uma reta paralela à reta dada.
III – Duas retas reversas e uma reta concorrente com as duas determinam dois planos.

Pode-se afirmar que:

a) I, II e III são verdadeiras
b) I, II e III são falsas
c) apenas I é verdadeira
d) apenas I e II são verdadeiras
e) apenas I e III são verdadeiras

29) (PUC-SP) Dois planos β e γ se cortam na reta **r** e são perpendiculares a um plano α.

Então:

a) β e γ são perpendiculares
b) **r** é perpendicular a α
c) **r** é paralela a α
d) todo plano perpendicular a α encontra **r**
e) existe uma reta paralela a α e a **r**

30) (MACKENZIE-SP) Considere as afirmações:

I – Se dois planos são paralelos, toda reta paralela a um deles ou está contida no outro, ou é paralela a esse outro.
II – Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas ou coincidentes.
III – Um plano perpendicular a uma reta de um outro plano é perpendicular a este último plano.

Então:

a) todas são verdadeiras
b) somente a afirmação I é verdadeira
c) somente a afirmação II é verdadeira
d) somente as afirmações II e III são verdadeiras
e) nenhuma afirmação é verdadeira

31) (FATEC-SP) Assinale a afirmação *correta*.

a) Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a qualquer reta deste plano.
b) Se uma reta é paralela a um plano, ela é concorrente a uma reta deste plano.
c) Dadas duas retas reversas, qualquer reta que encontra uma, encontra a outra.
d) Por qualquer ponto é possível conduzir uma reta que intercepta duas retas reversas dadas.
e) n.d.a.

32) (FATEC-SP) Se **r** e **t** são duas retas reversas, então:

a) existe um plano que contém, simultaneamente, **r** e **t**
b) **r** é paralela a **t**
c) existe um ponto que pertence, simultaneamente, a **r** e **t**
d) existe uma única reta perpendicular, simultaneamente, a **r** e **t**
e) **r** e **t** são perpendiculares entre si

33) (U.F.PR) Dadas as afirmações abaixo:

I – Dois pontos determinam uma reta.
II – Uma reta que tenha um ponto sobre um plano está contida nesse plano.
III – Três pontos não alinhados determinam um plano.
IV – Uma reta **r** é perpendicular a um plano α se, e somente se, ela é perpendicular a uma reta de α que passe pelo ponto em que **r** intercepta α.

São verdadeiras:

a) I e III
b) I e IV
c) II e III
d) II e IV
e) III e IV

34) (CESESP-PE) Sejam r_1, r_2 e r_3 três retas concorrentes no espaço a três dimensões. Suponha que as retas r_1 e r_2 são perpendiculares à reta r_3. Assinale a alternativa que completa corretamente a sentença "r_1 e r_2 são obrigatoriamente . . .":

a) perpendiculares entre si
b) pertencentes a um plano perpendicular a r_3
c) coincidentes
d) paralelas
e) coincidentes com r_3

LUGARES GEOMÉTRICOS

35) (UnB-DF) Sejam **a**, **b** e **c** três pontos não alinhados pertencentes a um plano P. L é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de **a**, **b** e **c**. Então:

a) L é uma reta pertencente a P
b) L é uma circunferência à qual **a**, **b** e **c** pertencem
c) L é uma reta perpendicular a P
d) nenhuma dessas

36) (FESP) Por uma circunferência e um ponto fora do seu plano, passam:

a) infinitas superfícies esféricas
b) duas superfícies esféricas
c) três superfícies esféricas
d) quatro superfícies esféricas
e) n.d.a.

37) (FATEC-SP) Os pontos A, B, A ≢ B, de uma superfície esférica E estão diametralmente opostos, respectivamente, aos pontos A', B'. Então:

a) os quatro pontos, A, B, A' e B' não são, necessariamente, coplanares
b) o quadrilátero ABA'B' é um quadrado
c) o triângulo AB'A' é retângulo
d) a projeção ortogonal de B' sobre o segmento AA' é o centro de E
e) n.d.a.

38) (PUC-SP) O conjunto dos pontos que têm mesma distância aos lados de um triângulo é uma reta que é perpendicular ao plano do triângulo e passa pelo ponto comum:

a) às alturas do triângulo
b) às medianas do triângulo
c) às bissetrizes do triângulo
d) às mediatrizes dos lados do triângulo
e) aos três lados do triângulo

39) (UNESP) A distância entre os pontos A e B, distintos, é k. O lugar geométrico dos pontos P do espaço, tais que a soma dos quadrados das distâncias de P a A e de P a B é k^2, é:

a) um plano que passa por A e por B
b) um plano normal à reta que passa por A e por B
c) uma superfície esférica
d) a reta que passa por A e por B
e) duas retas paralelas à reta que passa por A e por B

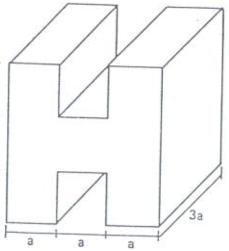
PRISMAS

40) (F.G.V.-SP) Um cubo tem 96 m² de área total. De quanto deve ser aumentada a sua aresta para que seu volume se torne igual a 216 m³?

a) 2 m b) 3 m c) 1 m d) 0,5 m e) 9 m

41) (CESGRANRIO) De um bloco cúbico de isopor de aresta 3a recorta-se o sólido em forma de "H", mostrado na figura. O volume do sólido é:

a) $27a^3$ b) $21a^3$ c) $18a^3$ d) $14a^3$ e) $9a^3$



42) (U.C.MG) Se um cubo tem 216 m³ de volume, a sua diagonal, em m, mede:

a) [illegible]$\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) $6\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $6\sqrt{3}$

43) (U.F.ES) A diagonal de um paralelepípedo retângulo mede 17 cm. A soma das três dimensões é 29 cm e a área de uma face é 72 cm². O produto das três dimensões mede, em cm³:

a) 864 b) 1 080 c) 1 530 d) 1 224 e) 2 720

44) (CEUB-DF) Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo sabendo que a área total é 180 m², a diagonal da base é 10 m e que a soma das arestas que concorrem em um mesmo vértice é 17 m.

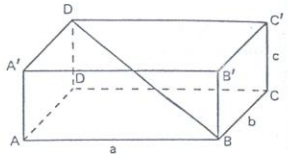
a) V = 120 m³ b) V = 144 m³ c) V = 169 m³ d) V = 196 m³

45) (U.C.MG) Um certo sólido tem volume V cm³ e altura 2 cm. Um outro sólido, semelhante ao primeiro, tem volume 8V cm³; então, a altura deste sólido, em cm, é:

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

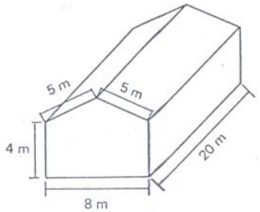
46) (PUC-SP) No paralelepípedo reto-retângulo de dimensões **a, b e c**, a diagonal BD' é dada pela fórmula:

a) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
b) $\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}$
c) $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$
d) $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$
e) $\sqrt{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}$



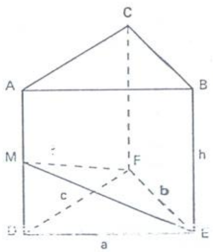
47) (U. FORTALEZA-CE) A figura ao lado representa um galpão com as medidas indicadas. O volume total desse galpão é:

a) 880 m³ b) 920 m³ c) 960 m³ d) 1 020 m³



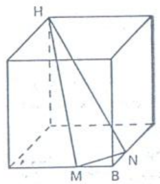
48) (UNIFICADO-RS) A figura representa um prisma reto de altura **h** e cuja base é um triângulo retângulo de medidas **a, b e c**, com a > b e a > c. Sendo M o ponto médio do segmento AD, o volume do sólido convexo de vértices A, B, C, E, F e M é:

a) $\frac{1}{6}$ b c h b) $\frac{1}{4}$ b c h c) $\frac{1}{3}$ b c h d) $\frac{5}{12}$ b c h e) $\frac{1}{6}$ a b h



49) (FATEC-SP) O comprimento da aresta do cubo abaixo representado é 4 cm e $\overline{BM}$ = = BN = 1 cm. Se **h** é a altura do triângulo HMN, relativa ao lado MN, então:

a) $h = \sqrt{123}$ cm
b) $h = \sqrt{39}$ cm
c) $h = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ cm
d) $h = \sqrt{10}$ cm
e) $h = \frac{\sqrt{190}}{2}$ cm



50) (FESP) Um paralelepípedo retângulo tem 142 cm^2 de superfície total e a soma dos comprimentos das arestas vale 60 cm. Considerando que seus lados estão em progressão aritmética, eles medem:

a) 12, 20, 28
b) 3, 5, 7
c) 1, 5, 9
d) 4, 6, 8
e) 2, 5, 8

51) (ITA-SP) Se as dimensões, em centímetro, de um paralelepípedo reto-retangular são dadas pelas raízes da equação

$$24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$$

então o comprimento da diagonal é igual a:

a) 7/12 cm b) 9/24 cm c) $\sqrt{24}/12$ cm d) $\sqrt{61}/12$ cm e) $\sqrt{73}/12$ cm

52) (FATEC-SP) As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo formam uma PG. Se a menor das arestas mede $\frac{1}{2}$ cm e o volume de tal paralelepípedo é 64 cm^3, então a soma das áreas de suas faces é:

a) 292 cm^2 b) 298 cm^2 c) 296 cm^2 d) 294 cm^2 e) 290 cm^2

53) (PUC-SP) Com uma lata de tinta é possível pintar 50 m^2 de parede. Para pintar as paredes de uma sala de 8 m de comprimento, 4 m de largura e 3 m de altura, gasta-se uma lata e mais uma parte da segunda lata. Qual a porcentagem de tinta que resta na segunda lata?

a) 22% b) 30% c) 48% d) 56% e) 72%

54) (F.M. ABC-SP) Sejam **a**, **b**, **c** as dimensões de um paralelepípedo retângulo; **p** a soma das dimensões, **d** a diagonal, k^2 a área total e V o volume. Temos:

a) $p^2 = d^2 + k^2$
b) $d^2 = p^2 + k^2$
c) $k^2 = p^2 + d^2$
d) $V = p\,d\,k$
e) $p^2 = d\,k$

55) (U.F.RS) Uma caixa tem 1 m de comprimento, 2 m de largura e 3 m de altura. Uma segunda caixa de mesmo volume tem comprimento **x** metros maior do que o da anterior, largura **x** metros maior do que a da anterior e altura **x** metros menor do que a da anterior. O valor de **x** é:

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6}$ e) $\sqrt{7}$

56) (CESESP-PE) Sabe-se que as medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo são diretamente proporcionais a 2, 3 e 4 e a soma dessas medidas é 18 m. Então o volume desse paralelepípedo é:

a) 24 m^3 b) 96 m^3 c) 129 m^3 d) 80 m^3 e) 192 m^3

57) (CESESP-PE) Seja **c** um cubo de aresta **a** e volume **s**. Seja **c'** um cubo cuja aresta tem comprimento igual à metade de **a**. Assinale a alternativa que nos dá o volume **s'** de **c'**.

a) $s' = (1/2)\,s$
b) $s' = (1/4)\,s$
c) $s' = (1/8)\,s$
d) $s' = (\sqrt[3]{a})\,s$
e) $s' = (1/\sqrt[3]{a})\,s$

58) (MACKENZIE-SP) Uma pirâmide cuja base é um quadrado de lado **2a** tem o mesmo volume que um prisma cuja base é um quadrado de lado **a**. A razão entre as alturas da pirâmide e do prisma, nessa ordem, é:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{a}{3}$ e) 3a

59) (U.F.PA) Uma pirâmide regular, cuja base é um quadrado de diagonal $6\sqrt{6}$ cm, e a altura igual a $\frac{2}{3}$ do lado da base, tem área total igual a:

a) $96\sqrt{3}$ cm^2 b) 252 cm^2 c) 288 cm^2 d) $84\sqrt{3}$ cm^2 e) 576 cm^2

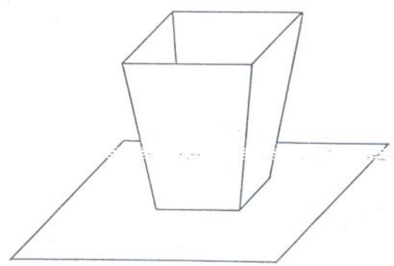
60) (F.M. SANTA CASA-SP) Considere uma pirâmide regular de base quadrada cujo lado é **2a**. Sabendo-se que a área lateral é $\frac{3}{4}$ da área lateral de um prisma reto de base e altura iguais às da pirâmide, então a altura da pirâmide mede:

a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$ b) $\frac{3}{4}a$ c) $4\sqrt{5}\,a$ d) $\frac{4\sqrt{5}}{5}a$ e) $\frac{3}{2}a$

61) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) A área lateral da pirâmide hexagonal regular, cuja altura é $h = \sqrt{33}$ cm e o lado do hexágono da base $\ell_6 = 2$ cm, vale:

a) 36 cm^2 b) 40 cm^2 c) 20 cm^2 d) 60 cm^2 e) 70 cm^2

62) (CESGRANRIO) Uma cesta de lixo (figura I) tem por faces laterais trapézios isósceles (figura II) e por fundo um quadrado de 19 cm de lado (estamos desprezando a espessura do material de que é feita a cesta). A altura da cesta, em cm, é:



(I)

(II)

a) $30 \times \frac{19}{25}$ b) $9\sqrt{11}$ c) $7\sqrt{19}$ d) $8\sqrt{13}$ e) $30\sqrt{\frac{19}{25}}$

63) (U.F.PR) Calculando a distância de um ponto do espaço ao plano de um triângulo eqüilátero de 6 unidades de comprimento de lado, sabendo que o ponto eqüidista 4 unidades dos vértices do triângulo, obtém-se:

a) 6 unidades
b) 5 unidades
c) 4 unidades
d) 3 unidades
e) 2 unidades

64) (U.F.ES) A área lateral e a área total de uma pirâmide quadrangular regular cuja altura é 3 m e a aresta da base é 8 m, medem, respectivamente:

a) 25 m² e 144 m²
b) 64 m² e 89 m²
c) 80 m² e 105 m²
d) 80 m² e 144 m²
e) 25 m² e 64 m²

65) (PUC-RS) Se "ℓ" é a medida da aresta de um tetraedro regular, então sua altura é:

a) $\frac{\ell\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\ell\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{\ell\sqrt{6}}{3}$ e) $\frac{\ell\sqrt{6}}{9}$

66) (U.F.RS) Uma pirâmide de altura 6 e área da base 27 é interceptada por um plano cuja distância ao vértice é 2 e que é paralelo ao plano da base. O volume do tronco de pirâmide assim determinado é:

a) 44 b) 46 c) 48 d) 50 e) 52

67) (U.F.MG) A altura de uma pirâmide é 3 m e sua base é um quadrado de lado 3 m. O volume do tronco obtido pela seção por um plano paralelo à base, distante 1 m desta, é:

a) $\frac{8}{3}$ m³ b) $\frac{15}{3}$ m³ c) $\frac{19}{3}$ m³ d) 7 m³ e) 9 m³

68) (U.C.MG) A área total de uma pirâmide regular, de altura 30 mm e base quadrada de lado 80 mm, mede, em mm²:

a) 44 000 b) 56 000 c) 60 000 d) 65 000 e) 14 400

69) (F.M. SANTA CASA-SP) Sejam dados um tetraedro regular e um ponto interno qualquer. Sejam x, y, z e t as distâncias desse ponto às quatro faces do tetraedro. Podemos então afirmar que:

a) seu volume $V = \frac{1}{3} S (x + y - z + t)^2$ (com S = área de uma face)
b) sua altura $h = x + y + z + t$
c) sua área total $A = h^2 (x + y - t + z)$
d) a área de uma face

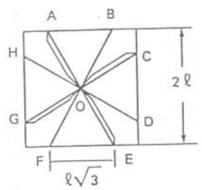
$$S = \frac{1}{3} (x + y) (x - t) + x$$

e) n.d.a.

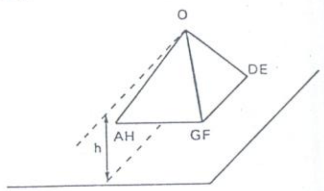
70) (F.M. SANTOS-SP) Seja um tetraedro regular de aresta **a** e volume V. Então:

a) $2\sqrt{2} = 2a^3\sqrt{3}$
b) $5V - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}a^3$
c) $12V - \sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$
d) $12\sqrt{2}V = 2a^3$
e) n.d.a.

71) (CESGRANRIO) Para fazer o telhado de uma casa de cartolina, um quadrado de centro O e lado 2 ℓ é recortado, como mostra a figura I. Os lados AB = CD = EF = GH medem $\ell\sqrt{3}$. Montando o telhado (figura II), sua altura **h** é:



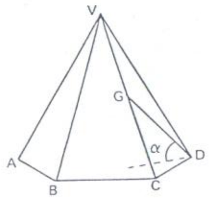
(I)



(II)

a) $\frac{\ell}{2}$ b) $\frac{2\ell}{5}$ c) $\frac{3\ell}{10}$ d) $(2 - \sqrt{3})\ell$ e) $\frac{\ell\sqrt{3}}{5}$

72) (CESGRANRIO) Considere uma pirâmide hexagonal regular de altura **h** e lado da base ℓ, como mostrada na figura. Traça-se o segmento GD ligando o vértice D ao ponto G que divide a aresta VC ao meio. Se α é o ângulo agudo formado por GD e sua projeção na base da pirâmide, então tg α é:

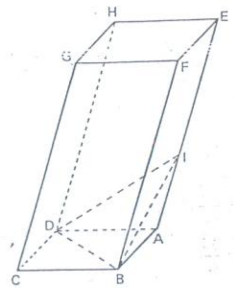


a) $\frac{h\sqrt{3}}{3\ell}$ b) $\frac{h}{2\ell}$ c) $\frac{h\sqrt{2}}{\ell}$ d) $\frac{h\sqrt{3}}{2\ell}$ e) $\frac{h\sqrt{3}}{\ell}$

73) (U.C.MG) Se a área de uma face da pirâmide pentagonal regular é 6 m² e seu apótema 4 cm, então o perímetro de sua base mede, em cm:

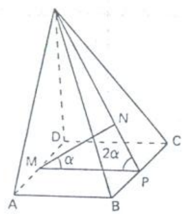
a) 10 b) 15 c) 20 d) 25 e) 30

74) (OSEC-SP) São dados: um prisma quadrangular, cuja base ABCD é um quadrado, e uma pirâmide triangular com base ABD e vértice I, situado sobre a aresta do prisma, sendo a aresta AI a quarta parte da aresta AE (ver figura). Se V é o volume da pirâmide, então o volume do prisma será:



a) 6 V
b) 12 V
c) 18 V
d) 24 V
e) 30 V

75) (FATEC-SP) Na figura ao lado, a base da pirâmide é um quadrado com lado de comprimento ℓ; se $\overline{BP} = \overline{PC} = \overline{AM} = \overline{MD}$ e $\alpha = 30°$, então:



a) $\overline{MN} = \frac{2\ell}{3}$

b) $\overline{MN} = \frac{3\ell}{2}$

c) $\overline{MN} = \ell\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\overline{MN} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$

e) n.d.a.

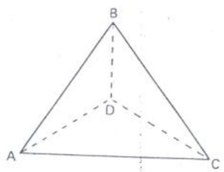
76) (PUC-SP) Os triângulos eqüiláteros ABC e DEF possuem lado igual a 2 e estão em planos paralelos, cuja distância é 2. As retas AD, BE e CF são paralelas entre si. O volume do tetraedro ACDE é:

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ c) $\frac{6}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

77) (FASP) Uma pirâmide regular hexagonal tem área da base 100 m² e altura 10 m. A que distância do vértice devemos seccioná-la de modo que a área da seção seja 75 m²?

a) $\sqrt{10}$ m b) $\frac{10}{\sqrt{75}}$ m c) $\frac{10}{\sqrt{15}}$ m d) $\sqrt{75}$ m

78) (F.M. SANTA CASA-SP) No tetraedro representado na figura ao lado, tem-se $\overline{AD} \perp \overline{BD}$, $\overline{AD} \perp \overline{DC}$, $\sphericalangle(B\hat{A}D) = \sphericalangle(C\hat{A}D)$. Então, pode-se concluir que:

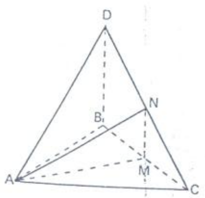


a) BD = DC
b) AD = DC
c) AB < BC
d) AC < BD
e) AD < DB

79) (MACKENZIE-SP) Duas pirâmides têm a mesma altura, 15 m. A primeira tem por base um quadrado de 9 m de lado e a segunda um hexágono regular de mesma área. A área da seção paralela à base, traçada a 10 m de distância do vértice, na segunda pirâmide, vale:

a) 36 b) 27 c) 54 d) 45 e) $10\sqrt{3}$

80) (FATEC-SP) Todas as arestas do tetraedro ABCD, indicado ao lado, medem **a**. Se M é ponto médio de BC e N é ponto médio de CD, então o volume do tetraedro AMCN é:



a) $\frac{a^3}{32}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{12}a^3$

c) $\frac{\sqrt{2}}{48}a^3$

d) $\frac{\sqrt{30}}{72}a^3$

e) $\frac{3a^3}{32}$

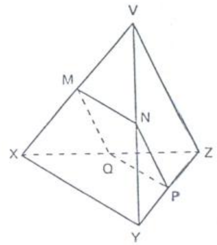
81) (UNESP) É dada uma pirâmide de altura H, H = 9 cm, e volume V, V = 108 cm³. Um plano paralelo à base dessa pirâmide corta-a determinando um tronco de pirâmide de altura **h**, h = 3 cm. O volume do tronco de pirâmide resultante é:

a) 36 cm³ b) 38 cm³ c) 54 cm³ d) 72 cm³ e) 76 cm³

82) (U.F.RS) Uma barraca piramidal é sustentada por seis hastes metálicas de 4 m de comprimento, cujas extremidades são o vértice da pirâmide e os seis vértices da base, respectivamente. A base é um polígono horizontal, inscritível, cujos lados têm todos o mesmo comprimento, 2,4 m. A altura da barraca, em metros, é:

a) 2,2 b) 2,5 c) 2,7 d) 3,0 e) 3,2

83) (CESGRANRIO) Num tetraedro regular VXYZ de aresta 12 cm, M, N, P e Q são os pontos médios das arestas VX, VY, YZ e XZ, respectivamente. A área do quadrilátero MNPQ é:



a) 72 cm²
b) 36 cm²
c) $12\sqrt{3}$ cm²
d) $12\sqrt{2}$ cm²
e) igual à área de uma face do tetraedro

84) (U.F.PR) O volume de um tetraedro regular de altura 10 cm é:

a) $125\sqrt{2}$ cm³ b) $125\sqrt{3}$ cm³ c) $250\sqrt{3}$ cm³ d) $375\sqrt{2}$ cm³ e) $375\sqrt{3}$ cm³

85) (F.M. SANTOS-SP) Sejam um tetraedro regular e um cubo de arestas iguais. Podemos dizer que a relação entre os volumes do tetraedro e do cubo vale:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ e) n.d.a.

86) (FUVEST-SP) O segmento AB é um diâmetro de uma circunferência e C um ponto dela, distinto de A e de B. A reta VA, V ≠ A, é perpendicular ao plano da circunferência. O número de faces do tetraedro VABC que são triângulos retângulos é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

87) (PUC-SP) O volume de um tronco de pirâmide de bases paralelas e altura **h** é dado por $V = \frac{h}{3}(S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$, onde S e S' são as áreas das bases. Se as bases de um tronco de pirâmide são quadrados de lados 3 e 4 e se a altura é 5, então o seu volume é:

a) $\frac{175\sqrt{3}}{3}$ b) 73 c) $\sqrt{12}$ d) $25 + \sqrt{3}$ e) $\frac{185}{3}$

88) (MACKENZIE-SP) Sabe-se que um poliedro convexo tem oito faces e que o número de vértices é maior que 6 e menor que 14. Então o número A de arestas é tal que:

a) $14 \leq A \leq 20$
b) $14 < A < 20$
c) $13 < A < 19$
d) $13 \leq A \leq 19$
e) $12 \leq A \leq 20$

(Teorema de Euler: $A + 2 = V + F$)

89) (CEUB-DF) O tetraexaedro é um sólido limitado por quatro faces triangulares e seis hexagonais, todas regulares. Calcular o número de faces e de vértices desse poliedro.

a) $F = 10$ e $V = 8$
b) $F = 10$ e $V = 11$
c) $F = 10$ e $V = 16$
d) $F = 10$ e $V = 18$

90) (CESESP-PE) Sabendo-se que num poliedro convexo o número de arestas é igual ao número de vértices somado com 12, assinale a alternativa que nos dá o número de faces deste poliedro:

a) 12 b) 11 c) 14 d) 13 e) 10

91) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) O número de diagonais do icosaedro regular é igual a:

a) 190 b) 40 c) 36 d) 32 e) 102

92) (FATEC-SP) Um poliedro P convexo tem 3 faces com 4 lados, 2 faces com 3 lados e 4 faces com 5 lados. Se V é o número de vértices de P, então:

a) $V = 9$ b) $V = 12$ c) $V = 11$ d) $V = 14$ e) n.d.a.

93) (PUC-SP) Qual é o poliedro regular que tem 12 vértices e 30 arestas?

a) hexaedro
b) octaedro
c) dodecaedro
d) icosaedro
e) tridecaedro

94) (FMU/FIAM-SP) O hexaedro regular é um poliedro com:

a) 4 faces triangulares, 6 arestas e 4 vértices
b) 3 faces quadradas, 4 arestas e 6 vértices
c) 6 faces triangulares, 12 arestas e 8 vértices
d) 4 faces quadradas, 8 arestas e 8 vértices
e) 6 faces quadradas, 12 arestas e 8 vértices

95) (FASP) O número de vértices de um poliedro convexo que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma face pentagonal e duas faces hexagonais é:

a) 8 b) 10 c) 12 d) 7

96) (MACKENZIE-SP) Um poliedro convexo tem 15 faces. De dois de seus vértices partem cinco arestas, de quatro outros partem quatro arestas e dos restantes partem três arestas. O número de arestas do poliedro é:

(Teorema de Euler: $A + 2 = V + F$)

a) 75 b) 53 c) 31 d) 45 e) 25

97) (PUC-SP) Quantas diagonais possui um prisma pentagonal?

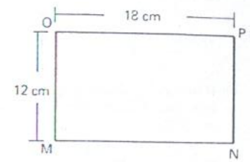
a) 5 b) 10 c) 15 d) 18 e) 24

98) (UNIFICADO-RS) A área total de um cilindro reto de revolução é 128π e sua altura é 12. A área lateral do sólido é:

a) 192π b) 96π c) 64π d) 48π e) 36π

99) (U.F.BA) Considerem-se os cilindros C_1 e C_2, obtidos pela rotação do retângulo OMNP em torno de $\overline{OM}$ e $\overline{OP}$, respectivamente. A razão entre as áreas totais de C_1 e C_2 é:

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2 d) 3 e) $\frac{3}{2}$



100) (U.F.ES) Um prisma hexagonal regular está inscrito num cilindro eqüilátero. A razão entre as áreas laterais do prisma e do cilindro é:

a) $\frac{7}{\pi}$ b) $\frac{6}{\pi}$ c) $\frac{5}{\pi}$ d) $\frac{4}{\pi}$ e) $\frac{3}{\pi}$.

101) (U.F.GO) Para encher de água um reservatório que tem a forma de um cilindro circular reto são necessárias cinco horas. Se o raio da base é 3 m e a altura 10 m, o reservatório recebe água à razão de:

a) 18π m³ por hora
b) 30π m³ por hora
c) 6π m³ por hora
d) 20π m³ por hora
e) 10π m³ por hora

102) (UnB-DF) Um retângulo de papel de altura **h** é transformado num cilindro oco juntando-se dois de seus lados opostos. Sabendo-se que a área deste cilindro é equivalente à área de uma esfera de raio $\frac{h}{\sqrt{4\pi}}$, pode-se afirmar que a base do retângulo vale:

a) 1 b) h c) 2h d) $\frac{h}{\pi}$

103) (PUC-RS) Dois cilindros, um de altura 4 e outro de altura 6, têm para perímetro de suas bases 6 e 4, respectivamente. Se V_1 é o volume do primeiro e V_2 o volume do segundo, então:

a) $V_1 = V_2$ b) $V_1 = 2V_2$ c) $V_1 = 3V_2$ d) $2V_1 = 3V_2$ e) $2V_1 = V_2$

104) (U.C.MG) Um pedaço de cano cilíndrico circular reto tem espessura igual a 50 mm. Se o volume interno do cano é igual ao volume do material gasto para construí-lo, então o seu raio interno, em mm, é igual a:

a) $50\sqrt{2}$ b) $50(\sqrt{2} - 1)$ c) $50(2 - \sqrt{2})$ d) $50(1 + \sqrt{3})$ e) $50(\sqrt{2} + 1)$

105) (U. FORTALEZA-CE) O raio de um cilindro circular reto é aumentado de 20% e sua altura é diminuída de 25%. O volume desse cilindro sofrerá um aumento de:

a) 2% b) 4% c) 6% d) 8%

106) (F.M. SANTA CASA-SP) Um cilindro com eixo horizontal de 15 m de comprimento e diâmetro interno de 8 m contém álcool. A superfície livre do álcool determina um retângulo de área 90 m². Qual é o desnível entre essa superfície e a geratriz de apoio do cilindro?

a) 6 m b) $\sqrt{7}$ m c) $4 - \sqrt{7}$ m d) $4 + \sqrt{7}$ m e) $(4 - \sqrt{7})$ m ou $(4 + \sqrt{7})$ m

107) (FATEC-SP) Um cilindro circular reto com raio da base igual a r, $r = \dfrac{4}{\sqrt{16 - \pi^2}}$ cm e altura 2r, é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo e a uma distância x desse eixo. Se a área de seção do plano com o cilindro é igual à área da base do cilindro, então:

a) x = 1 cm b) x = 2 cm c) x = 3 cm d) x = 4 cm e) n.d.a.

108) (FATEC-SP) Um octaedro regular está inscrito num cilindro circular reto de raio $\sqrt{2}$ cm; se um dos vértices do octaedro situa-se no centro da base do cilindro e se V é o volume do cilindro, então:

a) $V = 4\sqrt{2}\,\pi$ cm³
b) $V = 8\,\pi$ cm³
c) $V = 16\sqrt{2}\,\pi$ cm³
d) $V = 4\,\pi$ cm³
e) $2\,\pi$ cm³

109) (MOJI-SP) O raio e a altura de um cilindro circular reto, cujo volume é igual ao volume de um cubo cuja aresta mede a e cuja área da superfície lateral é igual à área da superfície do mesmo cubo, valem respectivamente:

a) $r = \dfrac{a}{3}$ e $h = 9a\pi$
b) $r = \dfrac{a}{3}$ e $h = \dfrac{9a}{\pi}$
c) $r = \dfrac{a}{3}$ e $h = \dfrac{9\pi}{a}$
d) $r = 3a$ e $h = 9\pi a$
e) $r = 3a$ e $h = \dfrac{9a}{\pi}$

110) (MACKENZIE-SP) A razão entre a área total e a área lateral de um cilindro eqüilátero é:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) 1 c) $\dfrac{3}{2}$ d) 2 e) 3

111) (PUC-SP) Quantos mililitros de tinta podem ser acondicionados no reservatório cilíndrico de uma caneta esferográfica, sabendo que seu diâmetro é 2 mm e seu comprimento é 12 cm?

a) 0,3768 b) 3,768 c) 0,03768 d) 37,68 e) 0,003768

112) (PUC-SP) As projeções ortogonais de um cilindro sobre dois planos perpendiculares são, respectivamente, um círculo e um quadrado. Se o lado do quadrado é 10, qual é o volume do cilindro?

a) 1 000 π b) 750 π c) 500 π d) 250 π e) 100 π

113) (OSEC-SP) Se a altura de um cilindro circular reto é igual ao diâmetro da base, então a razão entre a área total e a área lateral do cilindro é igual a:

a) 3 b) $\dfrac{3}{2}$ c) $2\pi r^2$ d) 2 e) 1

114) (U.F.RS) Uma panela cilíndrica de 20 cm de diâmetro está completamente cheia de massa para doce, sem exceder a sua altura de 16 cm. O número de doces em formato de bolinhas de 2 cm de raio que se podem obter com toda a massa é:

a) 300 b) 250 c) 200 d) 150 e) 100

115) (ITA-SP) Considere um ângulo reto AÔB e P um ponto interior deste ângulo que dista de seus lados 3 cm. Passe por P uma reta que intercepte o lado OA num ponto M (M ≠ O) e o lado OB num ponto N; forme o retângulo de lados OM e ON. A razão do volume para a superfície total do sólido gerado pela rotação deste retângulo em torno do lado OA é:

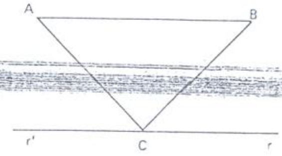
a) $\dfrac{3}{2}$ b) 1 c) $\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{1}{3}$ e) $\dfrac{4}{3}$

CONES CIRCULARES

116) (MACKENZIE-SP) A área da seção meridiana de um cone reto é igual à área de sua base. Se o raio da base é 1, então a altura do cone é:

a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) $\dfrac{3\pi}{2}$ c) 2π d) π e) $\sqrt{\pi}$

117) (U.F.SC) O triângulo ABC é retângulo em C e isósceles. O lado AB é paralelo à reta rr′ e mede 8 cm. O volume do sólido gerado pela revolução do triângulo ABC em torno da reta rr′, em cm³, é:



a) $\dfrac{64\pi}{3}$
b) $\dfrac{256\pi}{3}$
c) $\dfrac{128\pi}{3}$
d) $\dfrac{512\pi}{3}$
e) $\dfrac{32\pi}{3}$

118) (U.F.PA) A base de um cilindro de revolução está circunscrita a um hexágono regular de 18 cm de perímetro, e a sua altura é o dobro do raio da base. Então, o volume do cone de revolução inscrito neste cilindro é:

a) 169,56 cm³
b) 5,652 cm³
c) 18,84 cm³
d) 0,5652 cm³
e) 56,52 cm³

119) (U.C.MG) Se um cone tem 10 dm de altura e a circunferência de sua base mede 9π dm, então seu volume, em dm³, é:

a) 67,5π b) 30π c) 6,75π d) 675π³ e) 30π³

120) (FATEC-SP) Considere um cone circular reto onde a altura é o triplo do diâmetro da base. Se R é o raio da base e V é o volume desse cone, então:

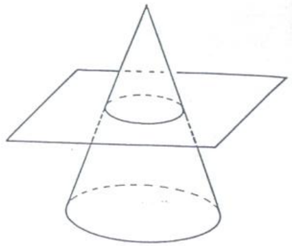
a) $V = 2\pi R^3$ b) $V = \pi R^3$ c) $V = 3\pi R^3$ d) $V = 6\pi R^3$ e) n.d.a.

121) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) Desenvolvendo a superfície lateral de um cone circular reto de raio 4 e altura 3, obtêm-se um setor circular, cujo ângulo central mede:

a) 216° b) 240° c) 270° d) 288° e) 180°

122) (U.F.BA) O cone representado ao lado tem 12 cm de raio e 16 cm de altura, sendo **d** a distância do vértice a um plano α paralelo à base. Para que as duas partes do cone separadas pelo plano α tenham volumes iguais, **d** deve ser igual a:

a) $8\sqrt[3]{4}$ cm
b) $8\sqrt{2}$ cm
c) 8 cm
d) 10 cm
e) 12 cm



123) (U.F.BA) Um cone e um cilindro têm a mesma base; o raio do cone é a metade de sua altura. Sabendo-se que a altura do cilindro mede 18 cm e que os volumes dos sólidos são iguais, a altura do cone é igual a:

a) 6 cm   b) 13,5 cm   c) 18 cm   d) 27 cm   e) 54 cm

124) (U.F.ES) Desenvolvendo-se a superfície lateral de um cone reto, obtém-se um setor circular de raio 9 cm e ângulo central 200°. A área lateral deste cone mede:

a) 50π cm²   b) 45π cm²   c) 31π cm²   d) 14π cm²   e) 9π cm²

125) (U.F. AL) Um cilindro e um cone são equivalentes e estão colocados de tal maneira que suas bases coincidem. Então, a altura do cone é:

a) o dobro da altura do cilindro
b) a terça parte da altura do cilindro
c) o triplo da altura do cilindro
d) metade da altura do cilindro
e) igual à altura do cilindro

126) (U.F.GO) O volume de um tronco de cone circular reto com base de raio R, cuja altura é a quarta parte da altura **h** do cone correspondente, é:

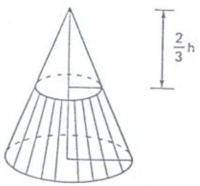
a) $\frac{\pi R^2 h}{4}$ b) $\frac{\pi R^2 h}{12}$ c) $\frac{55\pi R^2 h}{192}$ d) $\frac{37\pi R^2 h}{192}$ e) $\frac{3\pi R^2 h}{4}$

127) (U.F.UBERLÂNDIA-MG) A área da base de um cone reto é igual à área da seção meridiana. Se o raio da base vale R, a altura do cone valerá:

a) πR b) $2\pi R$ c) $\frac{3\pi R}{2}$ d) $\frac{2\pi R}{3}$ e) $\frac{\pi R}{2}$

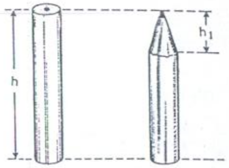
128) (UnB-DF) Um cone circular reto é seccionado por um plano paralelo à sua base a $\frac{2}{3}$ de seu vértice. Se chamarmos V o volume do cone, então o volume do tronco do cone resultante vale:

a) $\frac{8}{27}$ V
b) $\frac{2}{3}$ V
c) $\frac{4}{9}$ V
d) $\frac{19}{27}$ V



129) (UnB-DF) Um lápis novo de altura **h** é apontado. Se a altura h_1 da ponta (veja figura) for igual a $\frac{1}{10}$ da altura do lápis, então a porcentagem de material desperdiçado (raspas de madeira e grafite) é:

a) 4%   b) 10%   c) 5%   d) 6,6%



130) (U.F.PR) A geratriz de um cone mede 13 cm e o diâmetro da sua base 10 cm. O volume do cone é:

a) 100π cm³   b) 200π cm³   c) 400π cm³   d) $\frac{325\pi}{3}$ cm³   e) $\frac{1\,300}{3}\pi$ cm³

131) (PUC-RS) Num cone de revolução, a medida da altura é **h** e a da geratriz é g. Se a altura e a geratriz formam um ângulo de medida α, a relação entre **h** e **g** é:

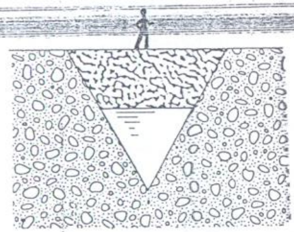
a) $h = g \operatorname{sen} \alpha$ b) $h = g \operatorname{tg} \alpha$ c) $h = g \cos \alpha$ d) $h = \frac{g}{\operatorname{sen} \alpha}$ e) $h = \frac{g}{\cos \alpha}$

132) (U.F.RS) O volume do sólido gerado pela revolução de um triângulo eqüilátero de lado **a** em torno de um de seus lados é:

a) $\frac{1}{4}\pi a^3$ b) $\frac{1}{3}\pi a^3$ c) $\frac{1}{2}\pi a^3$ d) $\frac{3}{4}\pi a^3$ e) $\frac{4}{3}\pi a^3$

133) (PUC-RJ) Um tanque subterrâneo tem a forma de um cone circular reto invertido, de eixo vertical, e está cheio até a boca (nível do solo) com 27 000 litros de água e 37 000 litros de petróleo (o qual é menos denso que a água). Sabendo que a profundidade total do tanque é 8 metros e que os dois líquidos não são miscíveis, a altura da camada de petróleo é:

a) 6 metros
b) 2 metros
c) $\frac{3\sqrt{37}}{\pi}$ metros
d) $\frac{27}{16}$ metros
e) $\frac{37}{16}$ metros



134) (U.F.MG) A altura de um reservatório cônico de volume 9π m³ e raio da base 3 m é:

a) 1 m   b) 3 m   c) $3\sqrt{2}$ m   d) $3\sqrt{3}$ m   e) 3π m

135) (U.C.MG) Um cone de papel de 40 cm de altura e raio da base 30 cm é feito de uma folha de papel na forma de um setor circular. O ângulo deste setor circular é igual a:

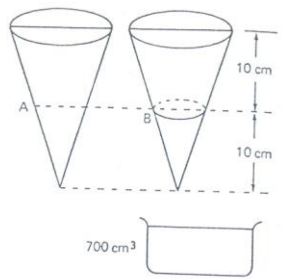
a) 180°   b) 216°   c) 230°   d) 265°   e) 304°

136) (PUC-SP) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 2 e um dos ângulos mede 60°. Girando-se o triângulo em torno do cateto menor, obtém-se um cone cujo volume é igual a:

a) π b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

137) (F. OSWALDO CRUZ-SP) Um funil cônico está cheio de um líquido, conforme a figura A. Deixa-se escoar parte do líquido para um reservatório graduado, conforme mostra a figura B. O volume do líquido no reservatório é 700 cm³. O volume do líquido que resta no funil é, em cm³:

a) 100 b) 200 c) 350 d) 700



138) (MACKENZIE-SP) Um cone e um prisma quadrangular regular retos têm bases de mesma área. O prisma tem altura 12 e volume igual ao dobro do volume do cone. Então, a altura do cone vale:

a) 18 b) $\frac{16\pi}{3}$ c) 36 d) 24 e) 8π

139) (FASP) O raio da base, a altura e o apótema de um cone reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determinar esses elementos sendo 37,68 cm³ o volume do cone (adotar $\pi = 3,14$).

a) 1 cm, 2 cm, 3 cm
b) 3 cm, 6 cm, 9 cm
c) 3 cm, 4 cm, 5 cm
d) 2 cm, 4 cm, 6 cm

140) (U.E. LONDRINA-PR) Se o volume de um cone circular reto é 512π cm³ e o raio da base é a terça parte da altura, então a área da base desse cone é, em cm²:

a) 24π b) 36π c) 48π d) 64π e) 128π

141) (F.M. SANTA CASA-SP) Se o raio da base, a altura e a geratriz de um cone circular reto constituem, nessa ordem, uma PA de razão igual a 1, o volume desse cone é, em unidades de volume:

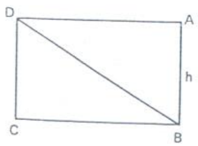
a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $(\sqrt{3}+1)\pi$ c) 12π d) 16π e) $\frac{80\pi}{3}$

142) (ITA-SP) Qual o volume de um cone circular reto, se a área de sua superfície lateral é de 24π cm² e o raio de sua base é 4 cm?

a) $\frac{16}{3}\sqrt{20}\,\pi$ cm³
b) $\frac{\sqrt{24}}{4}\,\pi$ cm³
c) $\frac{\sqrt{24}}{3}\,\pi$ cm³
d) $\frac{8}{3}\sqrt{24}\,\pi$ cm³
e) $\frac{1}{3}\sqrt{20}\,\pi$ cm³

143) (MACKENZIE-SP) Na figura ao lado o retângulo ABCD faz uma rotação completa em torno de $\overline{AB}$. A razão entre os volumes gerados pelos triângulos ABD e BCD é:

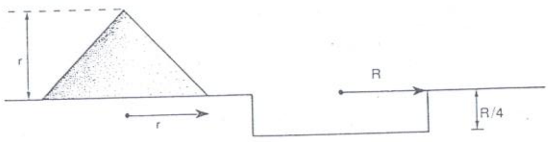
a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 3 d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{4}$



144) (OSEC-SP) O volume de um sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa igual a 1, em torno de um eixo que contém a hipotenusa, é igual a:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{12}$ d) $\frac{\pi}{24}$ e) $\frac{2\pi}{3}$

145) (CESGRANRIO) Para construir uma piscina cilíndrica, com fundo circular, cava-se num terreno plano um buraco, com raio R e profundidade $\frac{R}{4}$. A terra fofa, retirada do buraco, ocupa um volume 20% maior do que o do buraco cavado e é amontoada na forma de um cone de revolução. Supondo que o raio r da base do cone é igual à sua altura, então a melhor aproximação de $\frac{r}{R}$ é:



a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 1,2 d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\sqrt{3}$

146) (PUC-CAMPINAS-SP) Um triângulo retângulo tem catetos medindo 2 cm e $2\sqrt{3}$ cm. Lembrando que o volume do cone é dado pela fórmula $V = \frac{1}{3} \cdot$ (área da base) $\cdot$ (altura), concluímos que o sólido gerado pela rotação completa desse triângulo em torno de sua hipotenusa tem o volume de:

a) 6π cm³ b) $3\sqrt{2}\,\pi$ cm³ c) 4π cm³ d) $2\sqrt{3}\,\pi$ cm³ e) n.d.a.

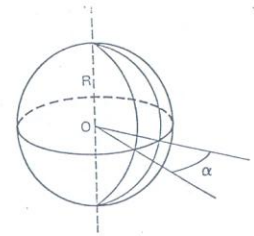
147) (PUC-SP) Um quebra-luz é um cone de geratriz 17 cm e altura 15 cm. Uma lâmpada acesa no vértice do cone projeta no chão um círculo de 2 m de diâmetro. A que altura do chão se encontra a lâmpada?

a) 1,50 m b) 1,87 m c) 1,90 m d) 1,97 m e) 2,00 m

ESFERA

148) (PUC-SP) A área do fuso esférico, com o ângulo α medido em radianos, é:

a) αR^2
b) $3\alpha R^2$
c) $4\alpha R^2$
d) $2\alpha R^2$
e) $\frac{1}{2}\alpha R^2$



149) (PUC-SP) A soma de todas as arestas de um cubo mede 24 m. O volume da esfera inscrita no cubo é:

a) $\frac{2}{3}\pi\ m^3$ b) $\frac{3}{4}\pi\ m^3$ c) $\frac{1}{2}\pi\ m^3$ d) $\frac{3}{2}\pi\ m^3$ e) $\frac{4}{3}\pi\ m^3$

150) (UnB-DF) A superfície de uma esfera de centro O e raio **r** é o conjunto de todos os pontos do espaço que têm distância a O igual a **r**. Dizemos que S é uma superfície esférica (de centro O) quando S é a superfície de alguma esfera (de centro O). Resolva agora o seguinte problema:

Sejam E_1, E_2, E_3 e E_4 quatro pontos não coplanares (isto é, não existe nenhum plano que os contenha ao mesmo tempo). Então:

a) existe uma única superfície esférica contendo E_1, E_2, E_3, E_4
b) existem infinitas superfícies esféricas tendo seus centros sobre uma mesma reta e cada uma delas contém E_1, E_2, E_3, E_4
c) existem infinitas superfícies esféricas cujos centros não precisam estar sobre uma mesma reta e cada uma delas contém E_1, E_2, E_3, E_4
d) n.d.a.

151) (UnB-DF) A área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$ e o volume da mesma esfera é $\frac{4}{3}\pi r^3$. Se S_1 e S_2 são duas esferas e o volume de S_2 é o dobro do de S_1, então o quociente

$$\frac{\text{área da superfície de } S_2}{\text{área da superfície de } S_1}$$

é:

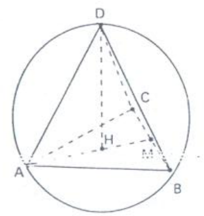
a) 2 b) $\pi\sqrt[3]{4}$ c) $3\sqrt[3]{4}$ d) n.d.a.

152) (UNIFICADO-RS) A razão entre o volume de uma esfera e o volume do cubo nela inscrito é:

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\pi\sqrt[3]{3}}{2}$ c) $4\pi\sqrt{3}$ d) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$ e) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

153) (ITA-SP) Considere o tetraedro regular (figura) inscrito em uma esfera de raio R, onde R mede 3 cm. A soma das medidas de todas as arestas do tetraedro é dada por

a) $16\sqrt{3}$ cm d) $8\sqrt{3}$ cm
b) $13\sqrt{6}$ cm e) $6\sqrt{3}$ cm
c) $12\sqrt{6}$ cm



154) (ITA-SP) Considere o problema anterior, isto é, o tetraedro regular inscrito em uma esfera de raio R, onde R mede 3 cm, sendo HD sua altura (veja a figura). A diferença entre o volume do tetraedro e o volume do sólido gerado pela rotação do triângulo DHM em torno de HD é dada por:

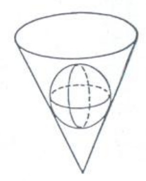
a) $(8\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi)\ cm^3$ c) $(4\sqrt{2} - \frac{4}{5}\sqrt{3}\pi)\ cm^3$ e) $(7\sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{3}\pi)\ cm^3$

b) $(5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\pi)\ cm^3$ d) $(3\sqrt{3} - \frac{3}{5}\sqrt{3}\pi)\ cm^3$

155) (MACKENZIE-SP) Vinte e sete esferas maciças de chumbo, de raio 1 metro, devem ser acondicionadas em uma única caixa, após o que, todo o "espaço" restante da caixa deve ser completado com água. Dispondo-se somente de cinco caixas cúbicas distintas, aquela na qual o volume de água adicionada é mínimo é a de capacidade, em metros cúbicos, igual a:

a) 108 b) 27π c) 36π d) 72π e) 81π

156) (U.F.BA) Uma esfera colocada no interior de um vaso cônico com 26 cm de geratriz e 24 cm de altura tangencia-o a 12 cm do vértice. O diâmetro da esfera é igual a:



a) 8 cm d) 13 cm
b) 10 cm e) 20 cm
c) 12 cm

157) (U.F.ES) Sejam duas esferas, uma inscrita e outra circunscrita num cubo de aresta a = 6 cm. O raio destas duas esferas medem, respectivamente:

a) 6 cm e $3\sqrt{2}$ cm c) 3 cm e $3\sqrt{2}$ cm e) 6 cm e $6\sqrt{2}$ cm
b) 6 cm e $3\sqrt{3}$ cm d) 3 cm e $3\sqrt{3}$ cm

158) (PUC-RS) O volume do cubo inscrito numa esfera de raio 3 é:

a) $24\sqrt{3}$ b) $12\sqrt{3}$ c) $8\sqrt{3}$ d) $6\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3}$

159) (U.F.RS) Um plano secciona uma esfera, determinando um círculo de raio igual à distância do plano ao centro da esfera. Sendo 36π a área do círculo, o volume da esfera é:

a) $192\sqrt{2}\pi$ b) [illegible] c) $576\sqrt{2}\pi$ d) 1296π e) [illegible]

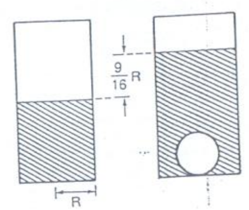
160) (U.F.MG) Uma esfera está inscrita em um cilindro circular reto de altura 6 cm. O volume do sólido entre as duas superfícies é:

a) $36\pi\ cm^3$ c) $9\pi\ cm^3$ e) $4\pi\ cm^3$
b) $18\pi\ cm^3$ d) $6\pi\ cm^3$

161) (F.C. CHAGAS-SP) Seja T um triângulo cujos lados medem 6 m, 8 m e 10 m. Seja C uma circunferência circunscrita a T. A área da superfície esférica que tem C como circunferência máxima é, em metros quadrados:

a) 36π b) 64π c) 100π d) $\frac{500\pi}{3}$ e) 400π

162) (CESGRANRIO) Um tanque cilíndrico com água tem raio R. Mergulha-se nesse tanque uma esfera de aço e o nível da água sobre $\frac{9}{16}$ R (veja a figura). O raio da esfera é:



a) $\frac{3R}{4}$ d) $\frac{R}{2}$
b) $\frac{9R}{16}$ e) $\frac{2R}{3}$
c) $\frac{3R}{5}$

163) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) A área de uma esfera, a área total do cilindro eqüilátero circunscrito a ela e a área total do cone eqüilátero também circunscrito a essa esfera são proporcionais aos números:

a) 1, 2, 3 b) 4, 6, 9 c) 2, 4, 7 d) 3, 4, 5 e) 1, 2, 4

164) (MOJI-SP) Um plano intercepta uma esfera de raio R, determinando um círculo de raio r ($R \geq r$). A distância do centro do círculo ao centro da esfera é:

a) $x = \sqrt{2R^2 - r^2}$
b) $x = \sqrt{R^2 - 2r^2}$
c) $x = \sqrt{4R^2 - r^2}$
d) $x = \sqrt{R^2 - 4r^2}$
e) $x = \sqrt{R^2 - r^2}$

165) (ITA-SP) Considere uma esfera inscrita num cone circular reto tal que a área da superfície total do cone é n vezes a área da superfície da esfera, $n > 1$. Se o volume da esfera é r cm³ e se a área da base do cone é s cm², o comprimento em centímetros da altura do cone é dado por:

a) $\frac{r}{s}$ b) $\frac{nr}{s}$ c) $\frac{2nr}{s}$ d) $\frac{3nr}{s}$ e) $\frac{4nr}{s}$

166) (FESP) De uma esfera de raio r foi retirada uma cunha de 90°. Qual a área total do sólido restante?

a) $3\pi r^2$ b) $4\pi r^2$ c) $5\pi r^2$ d) $6\pi r^2$ e) n.d.a.

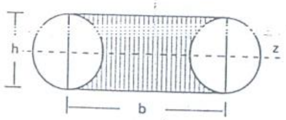
167) (FATEC-SP) Se uma esfera de raio R está inscrita num cilindro circular reto de volume V, então:

a) $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$
b) $R = \sqrt{\frac{2V}{3\pi}}$
c) $R = \sqrt{\frac{V}{3\pi}}$
d) $R = \sqrt{\frac{V}{2\pi}}$
e) n.d.a.

168) (FIUBE-MG) Um sólido S é gerado pela rotação completa de um círculo em torno do seu diâmetro. Se o volume de S é 36π m³, a medida do raio do círculo, em metros, é:

a) 1,5 b) 3 c) 4,5 d) 6 e) 9

169) (ITA-SP) Considere um retângulo de altura **h** e base **b** e duas circunferências com diâmetro **h** e centros nos lados do retângulo, conforme a figura ao lado. Seja **z** um eixo que passa pelos centros destas circunferências. Calcule a superfície total do sólido gerado pela rotação da área hachurada da figura em torno do eixo z.



a) $\pi h(b - h)$ b) $\pi h(b + h)$ c) $\pi b(b - h)$ d) $\pi b(b + h)$ e) n.d.a.

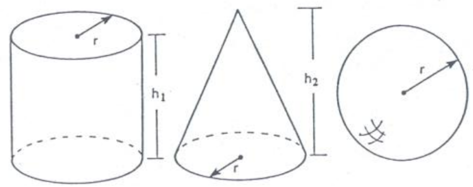
170) (FATEC-SP) Um cubo de aresta $2\sqrt{3}$ é inscrito numa esfera de raio r, então:

a) $r = 3$ b) $r = 2$ c) $r = \frac{5}{2}$ d) $r = 3\sqrt{3}$ e) $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

171) (CESESP-PE) Considere um tanque em forma de um cone invertido de raio da base 6 m e altura 8 m. Deixa-se cair dentro do tanque uma esfera de raio 3 m. Assinale a alternativa correspondente à distância do centro da esfera ao vértice do cone.

a) 4 m b) 2 m c) 5 m d) 10 m e) 6 m

172) (FATEC-SP) Os volumes do cilindro reto, do cone reto e da esfera, abaixo indicados, formam, nesta ordem, uma PG; então:



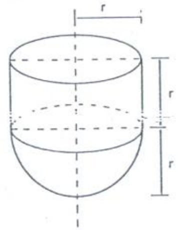
a) $(h_2)^2 = 12rh_1$
b) $h_2 = 4h_1$
c) $h_1 = 12(h_2)^2$
d) $h_1h_2 = 4r$
e) n.d.a.

173) (PUC-SP) Qual é o raio de uma esfera 1 milhão de vezes maior (em volume) que uma esfera de raio 1?

a) 100 000 b) 10 c) 10 000 d) 1 000 e) 100

174) (F. OSWALDO CRUZ-SP) Um reservatório tem a forma de um hemisfério acoplado a um cilindro de raio r e altura r, conforme a figura. O volume de um líquido que o ocupe completamente será:

a) $\frac{5}{3}\pi r^3$ b) $\frac{4}{3}\pi r^3$ c) πr^3 d) $5\pi r^3$



175) (ITA-SP) Seja $\widehat{AB}$ um arco de uma circunferência de raio r e centro O. A área da superfície da calota gerada pela rotação de $\widehat{AB}$ em torno de $\overline{OB}$ é de 7π cm². Qual o comprimento da corda $\overline{AB}$ do arco $\widehat{AB}$?

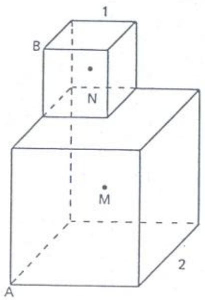
a) $\sqrt{7}$ cm b) $\frac{\sqrt{7}}{2}\pi$ cm c) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ cm d) $\sqrt{5}$ cm e) $\sqrt{5}\pi$ cm

VESTIBULARES — QUESTÕES DISCURSIVAS

PRISMAS — PIRÂMIDES — POLIEDROS CONVEXOS

176) (FEI-SP) O sólido abaixo é composto de dois cubos de arestas 2 cm e 1 cm e centros M e N.

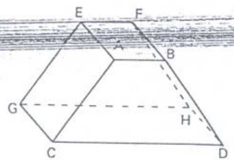
a) Achar a distância AB.
b) Achar a distância MN.



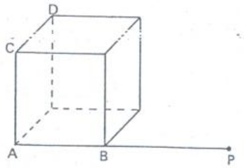
177) (FUVEST-SP) Na figura ao lado:

a) ABCD e EFGH são trapézios de lados 2, 8, 5 e 5;
b) os trapézios estão em planos paralelos cuja distância é 3;
c) as retas AE, BF, CG e DH são paralelas.

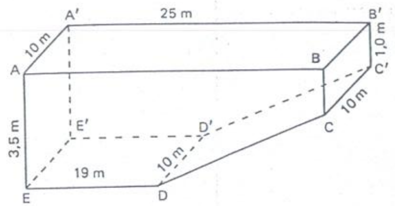
Calcule o volume do sólido.



178) (FUVEST-SP) A aresta do cubo abaixo mede 2 e BP = 3. Calcule PC e PD.



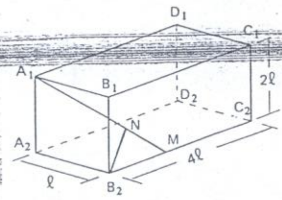
179) (CESGRANRIO) Uma piscina tem a forma e as dimensões indicadas na figura. As três arestas que convergem em cada um dos pontos A, B, E, A', B' e E' são mutuamente ortogonais e as arestas AE, BC, B'C' e A'E' são verticais.
Então solucione e responda:



a) Quantos m² tem a área da superfície interna da piscina?
b) Qual a capacidade da piscina em litros? (1 litro ↔ 10^{-3} m³)
c) Seja V(x) o volume, em m³, da água contida na piscina em função da altura x (em metros) do nível da água medida a partir do fundo DEE'D'. Determine a expressão analítica de V(x) no intervalo $0 \leq x \leq 2,5$.

180) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) O volume de um cubo é 216 cm³. O ponto P é o centro de uma face e AB, uma aresta da face oposta. Determinar a área do triângulo APB.

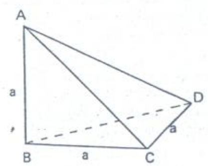
181) (E.E. MAUÁ-SP) No paralelepípedo retângulo ao lado, calcule a distância do vértice B_2 ao segmento A_1M, sendo M o ponto médio de B_1C_2.



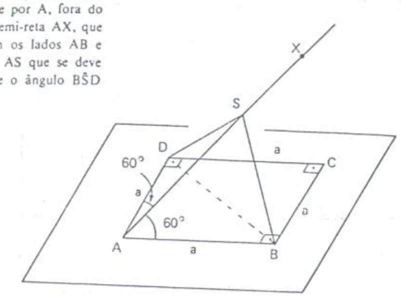
182) (IME-RJ) Dá-se um paralelogramo ABCD num plano π e um outro EFGH num plano π' de modo que se obtém um paralelepípedo (P) de vértices A, B, C, D, E, F, G e H, oblíquo, com todas as arestas de comprimento a. O plano que contém os pontos A, E e F forma com π um ângulo de 60° e $A\hat{E}F = 120°$. Calcular em função de a e do ângulo $F\hat{E}H = \theta$ o volume de (P).

183) (FEI-SP) Sendo a reta AB perpendicular ao plano BCD e a reta BC perpendicular à reta CD; e sendo a medida de cada segmento AB, BC e CD:

a) Achar o volume da pirâmide ABCD.
b) Achar a área total dessa pirâmide.



184) (F.E. FAAP-SP) Em um quadrado ABCD, de lado AB = **a**, conduz-se por A, fora do plano do quadrado, uma semi-reta AX, que forma ângulos de 60° com os lados AB e AD. Qual o comprimento AS que se deve tomar sobre AX, para que o ângulo BŜD seja reto?



185) (PUC-RJ) Calcule o volume de um tetraedro regular, em função da distância **d** entre duas arestas opostas.

186) (PUC-RJ) Considere um tetraedro de vértices A, B, C, D. São dados os ângulos, em radianos:

$$A\hat{D}B = \frac{\pi}{3} \quad e \quad C\hat{D}B = A\hat{D}C = \frac{\pi}{2}$$

e os comprimentos de três arestas, em metros:

$$DC = 3 \quad e \quad DA = DB = 4$$

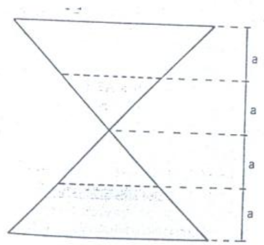
a) Determine o comprimento da aresta AB.
b) Calcule o volume do sólido.

187) (F.E. FAAP-SP) Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices de 6 unidades. Calcular o número de faces.

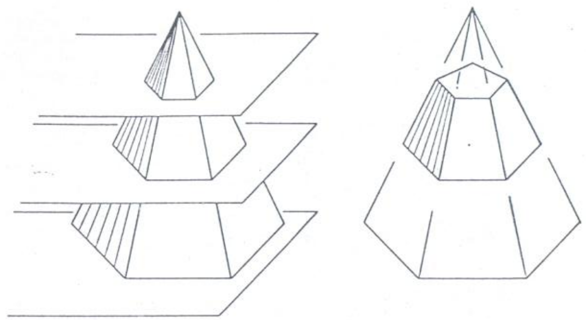
188) (U.F.MG) A área total de uma pirâmide regular, cuja base é um triângulo eqüilátero de lado **a**, é cinco vezes a área da base. Calcular o volume desta pirâmide.

CILINDROS — CONES — ESFERA

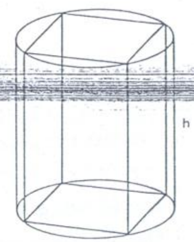
189) (F. OSWALDO CRUZ-SP) Uma ampulheta é fabricada a partir da junção de dois recipientes de vidro idênticos, ambos com a forma de um cone, comunicando-se através de um orifício de área desprezível, conforme a figura. Em certo instante, a areia fina, que passa do recipiente superior para o inferior, atinge a mesma altura nos dois recipientes, como mostra a figura. O volume de areia no recipiente inferior é quantas vezes maior que no recipiente superior?



190) (E.E. MAUÁ/LINS-SP) A altura **h** de uma pirâmide é dividida em três partes iguais por dois planos secantes paralelos à base. Sendo **B** a área da base, determinar o volume do tronco limitado pelas duas seções paralelas, em função de **B** e **h**.

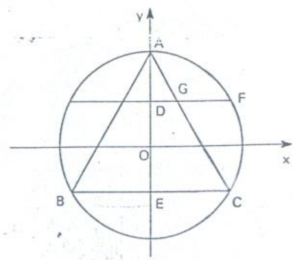


191) (F.E. FAAP-SP) Em um cilindro reto de 4 m de altura e 0,50 m de raio, foi inscrito um prisma quadrangular regular. Qual a relação entre os volumes?



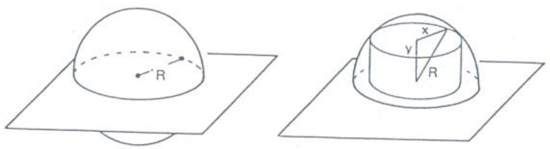
192) (FEI-SP) Na figura ao lado, o triângulo ABC é eqüilátero; os segmentos AD, DO e OE têm a mesma medida. Sabendo que o raio da circunferência é R, calcular:

a) o volume do cone gerado pela rotação do triângulo ABC em torno do eixo OY;
b) a área da coroa circular de raios DG e DF gerada pela rotação do segmento GF em torno do eixo OY.



193) (U.F.CE) Considere um cone circular reto cujo raio da base é $r = 2\sqrt{2}$ cm e geratriz $g = 4\sqrt{2}$ cm. Se A e B são pontos diametralmente opostos situados sobre a circunferência da base deste cone, determine, em cm, o comprimento do menor caminho, traçado sobre a superfície lateral do cone, ligando A a B.

194) (E.E. MAUÁ/LINS-SP) Um plano passando pelo centro de uma esfera seciona-a em dois hemisférios. Num deles inscreve-se um cilindro circular reto, com uma base apoiada no plano secante enquanto a outra tem seu contorno apoiado na superfície do hemisfério. Dado o raio R da esfera, determinar o raio x e a altura y do cilindro para que a área de sua superfície lateral seja metade da área da superfície hemisférica.



195) (U.F.CE) Calcule, em cm³, $\frac{2}{3}$ do volume da região compreendida pela interseção de duas esferas de mesmo raio $R = \frac{9}{\sqrt[3]{\pi}}$ cm, sabendo-se que a distância entre seus centros é $d = \frac{12}{\sqrt[3]{\pi}}$ cm.

Obs.: O volume V da calota de altura h, obtida de uma esfera de raio r é:

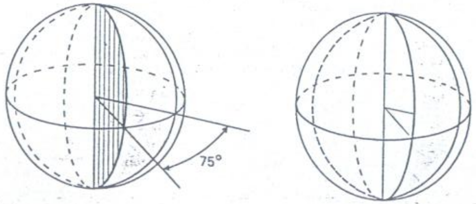
$$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$$

196) (F. ITAJUBÁ-MG) A área S e o volume V de uma superfície esférica de raio r são dados por: $S = 4\pi r^2$ e $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; expressar, simplificando:

a) V como função de S;

b) S como função de V.

197) (E.E. MAUÁ-SP) Uma cunha esférica correspondente a um diedro de 75°, tem volume igual a $V = \frac{15}{2}\pi$ m³. Determine a área do fuso esférico correspondente (superfície da esfera que corresponde à cunha).



198) (F. OSWALDO CRUZ-SP) Calcule o volume do cone circular reto, inscrito numa esfera de raio 1, sabendo que a razão entre sua altura e o raio da base é 2 $\left(\frac{h}{r} = 2\right)$.

199) (FUVEST-SP) Num cubo de aresta a um ponto P se situa numa das arestas e dista $\frac{a}{4}$ de um dos vértices. Qual a distância de P à superfície esférica inscrita no cubo?

200) (U.F.CE) Calcule, em cm³, o volume de um dado fabricado a partir de um cubo de aresta igual a 4 cm, levando em conta que os buracos representativos dos números, presentes em suas faces, são semi-esferas de raio igual a $\frac{1}{\sqrt[3]{7\pi}}$ cm.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE VESTIBULARES

TESTES

1	c	26	c	51	d	76	a	101	a	126	d	151	d
2	e	27	a	52	a	77	d	102	b	127	a	152	a
3	a	28	e	53	d	78	a	103	d	128	d	153	c
4	c	29	b	54	a	79	a	104	e	129	d	154	a
5	a	30	a	55	e	80	c	105	d	130	a	155	d
6	d	31	e	56	e	81	e	106	e	131	c	156	b
7	c	32	d	57	c	82	e	107	a	132	a	157	d
8	c	33	a	58	a	83	b	108	a	133	b	158	a
9	a	34	b	59	c	84	b	109	b	134	b	159	c
10	d	35	c	60	a	85	d	110	c	135	b	160	b
11	e	36	e	61	a	86	e	111	a	136	a	161	c
12	c	37	c	62	b	87	e	112	d	137	a	162	a
13	d	38	c	63	e	88	d	113	b	138	a	163	b
14	b	39	c	64	d	89	c	114	d	139	c	164	e
15	d	40	a	65	d	90	c	115	a	140	d	165	d
16	a	41	b	66	e	91	c	116	d	141	c	166	b
17	e	42	e	67	c	92	b	117	b	142	a	167	a
18	d	43	a	68	e	93	d	118	e	143	b	168	b
19	c	44	b	69	b	94	e	119	a	144	c	169	b
20	c	45	a	70	d	95	b	120	a	145	b	170	a
21	b	46	a	71	a	96	c	121	a	146	c	171	c
22	d	47	a	72	a	97	b	122	a	147	b	172	a
23	b	48	d	73	b	98	b	123	d	148	d	173	e
24	d	49	c	74	b	99	e	124	b	149	e	174	a
25	d	50	b	75	c	100	e	125	c	150	a	175	a

QUESTÕES DISCURSIVAS

176) a) $AB = \sqrt{10}$ cm b) $MN = \frac{\sqrt{17}}{2}$

177) 60

178) $PC = \sqrt{29}$ e $PD = \sqrt{33}$

179) a) 460 m² b) 800 000 ℓ c) $V(x) = 12x^2 + 190x$

180) $9\sqrt{5}$ cm²

181) $\frac{2\sqrt{5}\,\ell}{3}$

182) $\frac{3a^3 \operatorname{sen}\theta}{4}$

183) a) $\frac{a^3}{6}$ b) $a^2(\sqrt{2}+1)$

184) AS = a ou AS = o

185) $\frac{d^3}{3}$

186) a) 4 m b) $4\sqrt{3}$ m³

187) 8

188) $\frac{a^2\sqrt{15}}{24}$

189) 7 vezes

190) $\frac{7Bh}{81}$

191) $V_{cilindro} = \frac{\pi}{2} \cdot V_{prisma}$

192) a) $V = \frac{3\pi R^3}{8}$ b) $\frac{2\pi R^2}{3}$

193) 8 cm

194) $x = y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

195) 96 cm³

196) a) $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$ b) $V = \frac{S\sqrt{\pi S}}{6\pi}$

197) $\frac{15\pi}{2}$ m²

198) $\frac{128\pi}{375}$

199) $\frac{a}{4}$

200) 62 cm³

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1.9) a) F b) V c) F d) V e) F f) V

1.10) a) F b) F c) V d) F e) V f) F g) F h) V i) V j) F k) V
l) F m) F n) V o) V p) F q) V r) F s) V t) F u) F v) V

1.11) três retas 1.12) seis retas 1.13) quatro planos

1.14) Como A e B pertencem a α e também a β, é claro que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ está contida em ambos os planos (conforme o P6). Assim, $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha \cap \beta$. Resta provar que os pontos de $\overleftrightarrow{AB}$ são os únicos que pertencem a $\alpha \cap \beta$. De fato, se existisse um ponto C, fora de $\overleftrightarrow{AB}$, tal que $C \in \alpha \cap \beta$, então teríamos $\alpha = pl(ABC)$ e $\beta = pl(ABC)$, o que é um absurdo, pois $\alpha \neq \beta$. Portanto $\overleftrightarrow{AB} = \alpha \cap \beta$.

2.15) a) V b) V c) F

2.16) $\alpha = \beta$

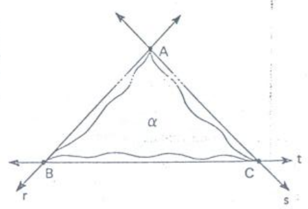
2.17) a) F b) F c) V d) V

2.18) Seja $\alpha = pl\,(r, A)$. Como $r /\!/ s$, existe um único plano $\beta = pl\,(r, s)$. Mas $A \in s$, logo

$$\beta = pl\,(r, s) = pl\,(r, A) = \alpha$$

e, assim, $s \subset \alpha$.

2.19) Indiquemos as retas por r, s, t e as interseções por A, B e C (como a figura indica). É claro que os pontos A, B e C não são colineares (pois em caso contrário as retas coincidiriam). Seja então $\alpha = pl\,(A, B, C)$. Temos:



$(A \in r,\ B \in r,\ A \neq B) \Rightarrow r \subset \alpha$
$(A \in s,\ C \in s,\ A \neq C) \Rightarrow s \subset \alpha$
$(B \in t,\ C \in t,\ B \neq C) \Rightarrow t \subset \alpha$

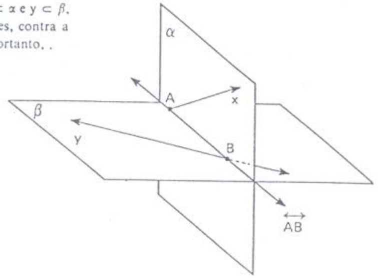
Assim, r, s e t são coplanares.

2.20) a) F b) F c) F d) V e) V f) F g) V h) V i) F j) F k) F l) V m) F

2.21) É claro que $r \neq s$, pois se fosse $r = s$, as retas concorrentes **a** e **b** seriam paralelas a uma mesma reta, contra o postulado P7.
Por outro lado, se fosse $r \parallel s$, então como $a \parallel r$, seria também $a \parallel s$ (veja exercício 2.7) e como $b \parallel s$ seria $a \parallel b$ (absurdo).
Logo, **r** e **s** só podem ser concorrentes.

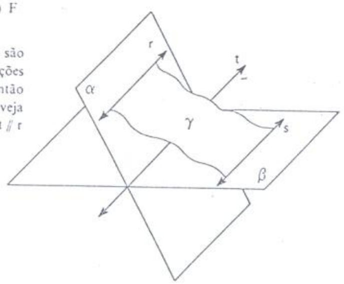
2.22) Se fosse $\alpha = \beta$, então como $x \subset \alpha$ e $y \subset \beta$, as retas **x** e **y** seriam coplanares, contra a hipótese de serem reversas. Portanto,

$$\alpha \neq \beta$$



2.23) a) F b) V c) F d) V e) F

2.24) Seja $\gamma = pl\,(r, s)$. Os planos α, β e γ são secantes dois a dois e as suas interseções são as retas **distintas r, s e t**. Podemos então aplicar o **teorema das três interseções** (veja exercício 2.6). Como $r \parallel s$, tem-se $t \parallel r$ e $t \parallel s$.



3.11) a) F b) F c) F d) V e) V f) F g) F h) F i) [illegible] j) F k) V l) V m) F
n) F o) F

3.12) paralela ou contida

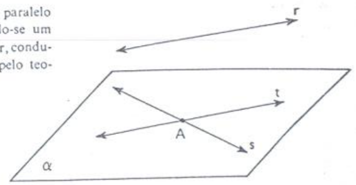
3.13) Basta notar que $r \cap s = \varnothing$

3.14) Aplique duas vezes o teorema T6:

$$\left.\begin{array}{l} r \not\subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ r \parallel s \end{array}\right\} \Rightarrow r \parallel \alpha \quad \text{e} \quad \left.\begin{array}{l} r \not\subset \beta \\ s \subset \beta \\ r \parallel s \end{array}\right\} \Rightarrow r \parallel \beta$$

3.15) a) V b) F c) F d) F

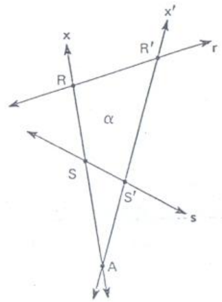
3.16) Seja α o plano que contém **s** e é paralelo a **r** (veja exercício 3.7). Tomando-se um ponto A qualquer de **s**, a reta $t \parallel r$, conduzida por A, está contida em α (pelo teorema T7).



3.17) Basta considerar por **r** o plano $\alpha \parallel t$ e por **s** o plano $\beta \parallel t$. Assim, $x = \alpha \cap \beta$. Se $\alpha \cap \beta = \varnothing$, o problema não tem solução.

3.18) Basta tomar $A \in t$ e aplicar o exercício 3.10.

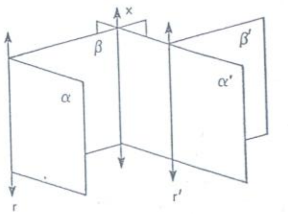
3.19) Observe a figura. Havendo duas retas distintas, **x** e **x'**, ficaria determinado o plano $\alpha = pl\,(x, x')$. Isto é absurdo, pois α conteria as retas **r** e **s**, que são reversas.



3.27) a) V b) F c) F d) V e) F f) F g) F h) V i) V j) F k) V
l) V m) V n) V o) V

3.28) Se $r \cap \beta = \varnothing$, tem-se $r \parallel \beta$.
Se $r \cap \beta \neq \varnothing$, então $r \cap \beta = \{A\}$ ou $r \subset \beta$. Mas se fosse $r \cap \beta = \{A\}$, pelo teorema do exercício 3.25, r furaria α, o que é absurdo, pois $r \parallel \alpha$. Assim, $r \subset \beta$.

3.29) Pelo teorema do exercício 3.26 o plano α' corta β segundo uma reta $x \parallel r'$ e o plano β corta α' segundo uma reta $x \parallel r$ (que é a mesma anterior, logicamente). Assim, pelo teorema T5, $r \parallel r'$.



3.30) Sendo **r** e **s** reversas, considere por **r** o plano $\alpha \parallel s$ e por **s** o plano $\beta \parallel r$ (veja exercícios 3.7 e 3.8). Os planos α e β são os únicos nessas condições. Resta provar que $\alpha \parallel \beta$. Mas supondo $\alpha \cap \beta = x$, como $r \parallel \beta$ vem $r \parallel x$ e como $s \parallel \alpha$ vem $s \parallel x$ (exercício 3.1). Então tem-se $r \parallel s$ pelo T5 (absurdo).

3.31) Considere por P o plano $\beta \parallel \alpha$ e seja $r \cap \beta = \{A\}$. A reta $\overleftrightarrow{AP}$ é a resposta.

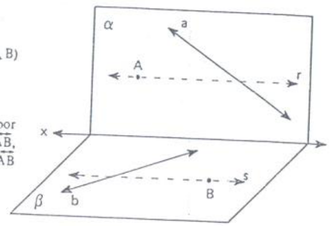
3.32) Situam-se no plano $\beta \parallel \alpha$ conduzido por A.

3.33) Considere dois casos:

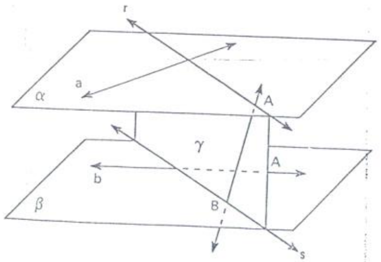
1.º) Os planos $\alpha = \text{pl}\,(a, A)$ e $\beta = \text{pl}\,(b, B)$ são **secantes**. Neste caso, sendo

$$x = \alpha \cap \beta$$

basta tomar por A a reta $r \parallel x$ e por B a reta $s \parallel x$. Note que se for $x = \overleftrightarrow{AB}$, o problema não terá solução. Se $x \neq \overleftrightarrow{AB}$ tem-se sempre uma solução.



2.º) Se $\alpha \parallel \beta$, basta considerar um plano γ contendo a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Temos $r = \alpha \cap \gamma$ e $s = \beta \cap \gamma$. O problema neste caso admite infinitas soluções.



4.17) a, d, g, j

4.18) a) V b) F c) F d) F e) V f) F g) V h) F i) V j) F k) V
l) F m) F n) V o) F p) F q) V

4.19) Basta notar que $\overleftrightarrow{PB}$ não corta $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{PD}$ não corta $\overleftrightarrow{AC}$. Logo, B e P pertencem ao mesmo semiplano e também D e P pertencem ao mesmo semiplano. Portanto, B e D pertencem ao mesmo semiplano.

4.20) Se $\overleftrightarrow{AB}$ corta **r** em P, então A e B estão em semiplanos opostos em relação a **r**. Quanto a C, ocorre um e somente um dos dois casos seguintes:

1.º) $C \in$ semipl (r, A). Neste caso, $\overleftrightarrow{BC}$ corta a reta **r**.
2.º) $C \in$ semipl (r, B). Neste caso, $\overleftrightarrow{AC}$ corta a reta **r**.

4.21) $\left.\begin{array}{l} P \in \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow P \in \alpha \\ P \in \overleftrightarrow{A'B'} \Rightarrow P \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow P \in \alpha \cap \beta$

Do mesmo modo, $Q \in \alpha \cap \beta$ e $R \in \alpha \cap \beta$, logo, P, Q e R são colineares.

5.5) AC = AB + BC = CD + BC = BD 5.6) AB = AC − BC = BD − BC = CD

5.7) $MN = MB + BN = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} = AB$ 5.8) 64 5.9) 45

5.10) Seja Q' o ponto médio de $\overleftrightarrow{MN}$ e mostremos que AQ' = AQ. Indiquemos **AB** = **b** e **AC** = **c**.
Temos $AM = \frac{b}{2}$ e $AN = \frac{c}{2}$ donde:

$$AQ' = AM + MQ' = AM + \frac{MN}{2} =$$

$$= AM + \frac{AN - AM}{2} = \frac{b}{2} + \frac{\frac{c}{2} - \frac{b}{2}}{2} = \frac{b+c}{4}$$

$$AQ = \frac{AP}{2} = \frac{AB + \frac{BC}{2}}{2} = \frac{AB + \frac{AC - AB}{2}}{2} =$$

$$= \frac{b + \frac{c-b}{2}}{2} = \frac{b+c}{4}$$

5.23) a) $B\hat{A}D$ b) $C\hat{A}E$ c) $B\hat{A}E$ d) $A\hat{D}E$ e) $D\hat{F}C$ ou $E\hat{F}A$ f) $E\hat{F}D$ ou $A\hat{F}C$

5.24) $a = 57$ $b = 28$ $c = 57$ $d = 95$ 5.25) a) 145° b) 28° c) 137° 32'25"

5.26) a) 37° b) 60° 48' c) 51° 17'45"

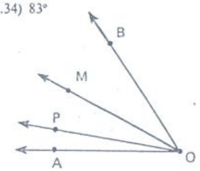
5.27) Se $\hat{A}'$ e $\hat{B}'$ são os suplementos de $\hat{A}$ e $\hat{B}$, respectivamente, temos med $(\hat{A}')$ = 180° − med $(\hat{A})$ = = 180° − med $(\hat{B})$ = med $(\hat{B}')$, donde $\hat{A}' \equiv \hat{B}'$.

5.28) Se $\hat{A}$ é reto, então med $(\hat{A})$ = 90°. Assim, med $(\hat{A})$ + med $(\hat{A})$ = 90° + 90° = 180°, isto é, $\hat{A}$ é suplementar a $\hat{A}$.

5.29) Sejam **a** e **b** as medidas dos dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ complementares. Temos $a > 0°$ e $b > 0°$. Como $a = 90° - b$, então $90° - b > 0$, donde $0° < b < 90°$, logo $\hat{B}$ é agudo. Analogamente, $\hat{A}$ é agudo.

5.30) 21° e 35° 5.31) 67° 30' 5.32) 18° 5.33) 45° 5.34) 83°

5.35) med $(P\hat{O}M)$ = med $(A\hat{O}M)$ − med $(P\hat{O}A)$ =
$= \frac{1}{2}$ med $(A\hat{O}B)$ − med $(P\hat{O}A)$ =
$= \frac{1}{2}$ [med $(P\hat{O}B)$ + med $(P\hat{O}A)$] − med $(P\hat{O}A)$ =
$= \frac{1}{2}$ [med $(P\hat{O}B)$ − med $(P\hat{O}A)$]



5.36) $\text{med}(B\hat{A}C) + \text{med}(C\hat{A}D) + \text{med}(D\hat{A}E) = 180°$
$\text{med}(B\hat{A}C) + 90° + \text{med}(D\hat{A}E) = 180°$
$\text{med}(B\hat{A}C) + \text{med}(D\hat{A}E) = 90°$

5.37) $\begin{cases} \text{med}(C\hat{A}D) + \text{med}(D\hat{A}E) = 90° \\ \text{med}(B\hat{A}C) + \text{med}(C\hat{A}D) = 90° \end{cases}$

Somando:

$$\text{med}(C\hat{A}D) + [\text{med}(B\hat{A}C) + \text{med}(C\hat{A}D) + \text{med}(D\hat{A}E)] = 180°$$

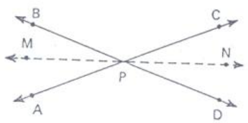
donde

$$\text{med}(C\hat{A}D) + \text{med}(B\hat{A}E) = 180°$$

5.38) $\text{med}(M\hat{O}N) = \text{med}(M\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C) + \text{med}(C\hat{O}N) =$
$= \frac{1}{2}\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C) + \frac{1}{2}\text{med}(C\hat{O}D) =$
$= \frac{1}{2}\text{med}(A\hat{O}B) + \frac{1}{2}\text{med}(B\hat{O}C) + \frac{1}{2}\text{med}(B\hat{O}C) + \frac{1}{2}\text{med}(C\hat{O}D) =$
$= \frac{1}{2}[\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C)] + \frac{1}{2}[\text{med}(B\hat{O}C) + \text{med}(C\hat{O}D)] =$
$= \frac{1}{2}\text{med}(A\hat{O}C) + \frac{1}{2}\text{med}(B\hat{O}D) = 45° + 45° = 90°$

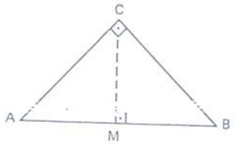
5.39) $\text{med}(B\hat{O}C) = 180° - \text{med}(A\hat{O}C) = 180° - \text{med}(A\hat{O}D) = \text{med}(B\hat{O}D)$

5.40) $\text{med}(M\hat{P}B) + \text{med}(B\hat{P}C) + \text{med}(C\hat{P}N) =$
$= \frac{1}{2}\text{med}(A\hat{P}B) + \text{med}(B\hat{P}C) + \frac{1}{2}\text{med}(C\hat{P}D) =$
$= \frac{1}{2}[\text{med}(A\hat{P}B) + \text{med}(C\hat{P}D)] + \text{med}(B\hat{P}C) =$
$= \frac{1}{2}[\text{med}(A\hat{P}B) + \text{med}(A\hat{P}B)] + \text{med}(B\hat{P}C) =$
$= \text{med}(A\hat{P}B) + \text{med}(B\hat{P}C) = 180°$



5.41) 120° 5.42) $\text{med}(A\hat{O}B) = 90° - \text{med}(B\hat{O}M) = 90° - \text{med}(M\hat{O}C) = \text{med}(C\hat{O}D)$

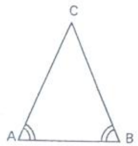
6.22) Basta notar que $\overleftrightarrow{CM}$ é mediatriz de $\overline{AB}$, portanto C é eqüidistante de A e de B.



6.23) Estabelecendo a correspondência $A \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow A$, $C \leftrightarrow C$, resulta que os triângulos ABC e BAC são congruentes, pois (L A L):

$$\text{no } \triangle ABC \left\{ \begin{matrix} \hat{A} \equiv \hat{B} \\ \overline{AB} \equiv \overline{BA} \\ \hat{B} \equiv \hat{A} \end{matrix} \right\} \text{no } \triangle BAC$$

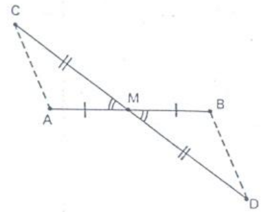
Assim $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$.



6.24) Se $A\hat{C}D \equiv A\hat{D}C$, então $\triangle ACD$ é isósceles, isto é, $\overline{AC} \equiv \overline{AD}$. Então $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$ (L A L). Portanto, $A\hat{C}B \equiv A\hat{D}B$.

6.25) Basta mostrar que

$\triangle AMC \equiv \triangle BMD$ (L A L)

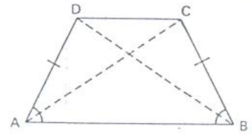


6.26) Pelo L A L temos

$\triangle ABC \equiv \triangle BAD$

donde $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$. Então, pelo L L L, temos $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$, donde

$\hat{C} \equiv \hat{D}$

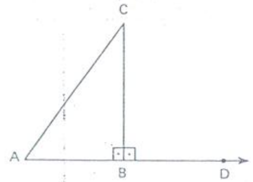


6.27) Basta notar que $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$ (L L L).

6.28) Se $\hat{B}$ é reto, o ângulo externo $C\hat{B}D$ também é reto. Pelo exercício 6.14, as medidas de $\hat{A}$ e de $\hat{C}$ são menores do que

$\text{med}(C\hat{B}D) = 90°$

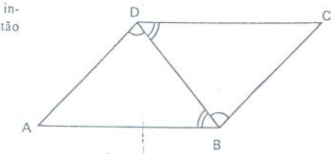
Logo, $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são agudos.



6.29) Pelo exercício 6.13, se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são os ângulos da base, então $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) < 180°$. Mas $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{B})$, logo $2\,\text{med}(\hat{A}) < 180°$ e então

$\text{med}(\hat{A}) < 90°$

6.33) $A\hat{B}D \equiv C\hat{D}B$ e $A\hat{D}B \equiv C\hat{B}D$ (alternos internos). Logo, $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$, e então $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.



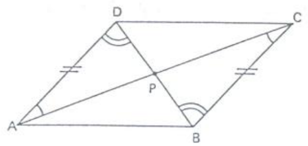
6.34) Com o mesmo raciocínio do exercício anterior, concluímos que $\hat{A} \equiv \hat{C}$. Analogamente, $\hat{B} \equiv \hat{D}$.

6.35) Basta mostrar que

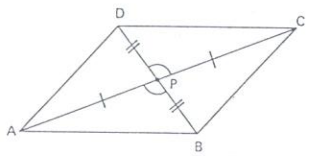
$\triangle APD \equiv \triangle CPB$ (A L A)

Logo,

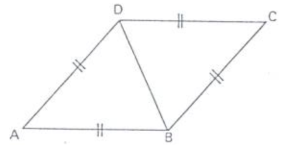
$\overline{AP} \equiv \overline{CP}$ e $\overline{PD} \equiv \overline{PB}$



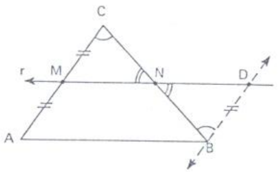
6.36) Tem-se $\triangle ABP \equiv \triangle CDP$ (L A L), logo $P\hat{A}B \equiv P\hat{C}D$ e portanto $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (veja exercício 6.30). Analogamente, $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.



6.37) Como $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$ (L L L), então $A\hat{B}D \equiv C\hat{B}D$. Como $\triangle ABD$ é isósceles, $A\hat{B}D \equiv A\hat{D}B$. Assim, $A\hat{D}B \equiv C\hat{B}D$, logo $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ (veja exercício 6.30). Analogamente, $AB \parallel CD$.



6.38) Conduza por B a reta $s \parallel \overleftrightarrow{AC}$, a qual encontra r em D. O quadrilátero ABDM é um paralelogramo, logo $\overline{AM} \equiv \overline{BD}$, donde $\overline{MC} \equiv \overline{BD}$. Além disso, $M\hat{C}N \equiv D\hat{B}N$ (alternos internos). Assim, $\triangle MNC \equiv \triangle DNB$ (A A L), donde $\overline{NC} \equiv \overline{NB}$.

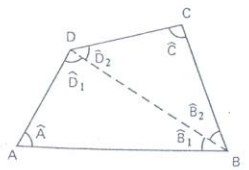


6.39) Como $\triangle MNC \equiv \triangle DNB$, temos $\overline{MN} \equiv \overline{DN}$, logo $MN = \frac{1}{2} MD$, e como $\overline{MD} \equiv \overline{AB}$, vem

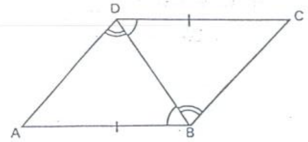
$MN = \frac{1}{2} AB$.

6.40) No $\triangle ABD$: $\hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{D}_1 = 180°$.
No $\triangle BCD$: $\hat{C} + \hat{B}_2 + \hat{D}_2 = 180°$.
Então:

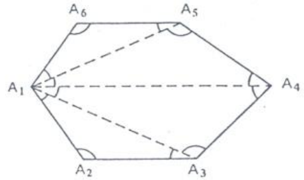
$\hat{A} + (\hat{B}_1 + \hat{B}_2) + \hat{C} + (\hat{D}_1 + \hat{D}_2) =$
$= \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$



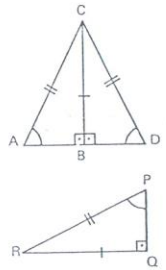
6.41) Sejam $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ os lados que são paralelos e congruentes. Então $A\hat{B}D \equiv C\hat{D}B$ (alternos internos e $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ (L A L). Sendo assim, $A\hat{D}B \equiv C\hat{B}D$, logo $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ também são paralelos. Como há dois pares de lados paralelos, o quadrilátero é um paralelogramo.



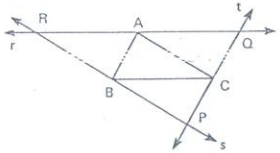
6.42) Ligando-se o vértice A_1 aos demais (com exceção de A_2 e A_n), o polígono fica dividido em $n - 2$ triângulos. A soma das medidas dos ângulos internos do polígono é igual à soma das medidas dos ângulos internos de todos esses triângulos, logo vale $(n - 2) \cdot 180°$.



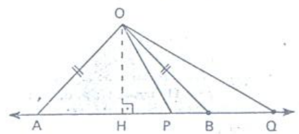
6.43) Construindo-se sobre o lado $\overleftrightarrow{BC}$ um triângulo $\triangle DBC$ congruente ao $\triangle PQR$, obtemos o $\triangle ADC$, isósceles. Logo, $\hat{A} \equiv \hat{D}$, isto é, $\hat{A} \equiv \hat{P}$. Assim, $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$ (critério A A L).



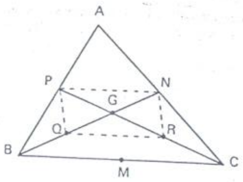
6.44) Como $\overleftrightarrow{AR} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BR} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, o quadrilátero ARBC é paralelogramo, donde $AR = BC$. Do mesmo modo, ABCQ é paralelogramo, donde $AQ = BC$. Assim, $AR = AQ$. Analogamente provamos que B e C são pontos médios.



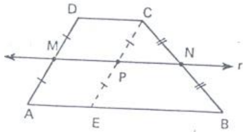
6.45) Sendo $\overleftrightarrow{OH}$ a altura, se $P = H$, é claro que $PO < BO$, pois, no $\triangle OHB$, $\overline{BO}$ é a hipotenusa. Se $P \neq H$, suponhamos que ambos, P e Q, estão na semi-reta $\overrightarrow{HB}$. O ângulo $B\hat{P}O$ é externo ao $\triangle OHP$, logo é obtuso. Assim, no $\triangle OPB$ tem-se $PO < BO$. O ângulo $Q\hat{B}O$ é externo ao $\triangle OHQ$, logo é obtuso. Assim, no $\triangle OBQ$ tem-se $QO > BO$.



6.46) Seja G a interseção das medianas $\overleftrightarrow{BN}$ e $\overleftrightarrow{CP}$. Sejam Q o ponto médio de $\overline{BG}$ e R o ponto médio de $\overline{CG}$. Então $\overline{PN}$ e $\overline{QR}$ são paralelos e congruentes, pois são paralelos a $\overline{BC}$ e $PN = QR = \frac{1}{2}$ BC. Assim, PQRN é paralelogramo, logo QG = GN e RG = GP. Portanto, BG = 2GN e CG = 2GP. A terceira mediana $\overline{AM}$ passa também por G, pois deve cortar a mediana $\overline{BN}$ no ponto que a divide em dois segmentos, um sendo o dobro do outro, o qual só pode ser G (basta fazer o mesmo raciocínio com $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$).

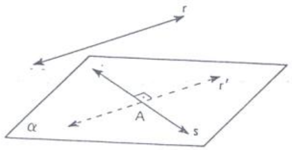


6.47) Se $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$, então AEPM e PCDM são paralelogramos, donde PC = MD e PE = = MA, logo P é ponto médio de $\overline{CE}$. No $\triangle$ CEB, pelo exercício 6.38, N é ponto médio de $\overline{BC}$.



6.48) Sendo $\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$, então $B\hat{A}D \equiv B\hat{E}C$. Como $\triangle$ CEB é isósceles (pois $\overline{BC} \equiv \overline{CE} \equiv \overline{AD}$), tem-se $A\hat{B}C \equiv B\hat{E}C$, logo $B\hat{A}D \equiv A\hat{B}C$.

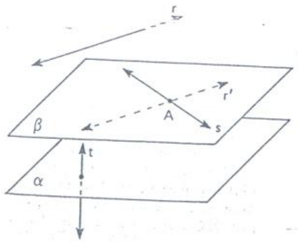
7.10) Por A toma-se r' // r. Pelo teorema T7, r' $\subset \alpha$. (Veja exercício 3.2.) Seja em α a reta s $\perp$ r'. Temos s $\perp$ r, pela definição de retas ortogonais.



7.11) a) V b) F c) F d) V e) V f) V g) F h) F i) V j) V k) F
l) F m) F

7.12) Como $B\hat{A}C$ é reto, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$. Como $\overleftrightarrow{AD} \perp \alpha$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Logo, $\overleftrightarrow{AB} \perp$ pl $(\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AD})$ = pl (A, C, D).

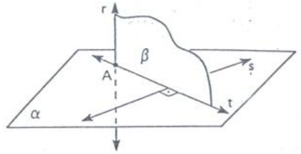
7.13) Seja t uma reta que forma ângulo reto com r e com s. Por A $\in$ s tome r' // r e seja β = pl (s, r'). Temos t $\perp \beta$ pois t forma também ângulo reto com r' (veja exercícios 7.1 e 7.2). Além disso, $\beta \parallel \alpha$ (exercício 3.20). Assim, pelo teorema T17, tem-se t $\perp \alpha$.



7.14) Siga a figura do exercício anterior. Como $\beta \parallel \alpha$, pelo T17 tem-se t $\perp \beta$, donde t forma ângulo reto com s. Mesmo raciocínio para r.

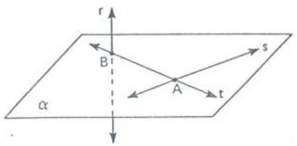
7.15) Como r $\perp \alpha$ e $\alpha \parallel \beta$ (pelo T17) tem-se r $\perp \beta$. Como r $\perp \beta$, s $\perp \beta$ e r $\neq$ s (pelo T18) tem-se r // s.

7.16) Pelo ponto A, interseção de r e α, conduz-se a reta t $\perp$ s. O plano β = pl (r, t) é o plano procurado, pois a reta s forma ângulo reto com r e com t. (Veja exercício 7.3.) Pelo teorema T19, esse plano é único.

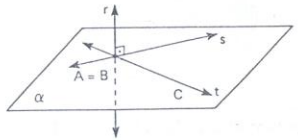


7.17) Seja B a interseção de r e α.

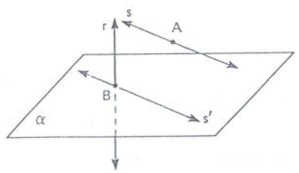
a) Se A $\neq$ B, seja t = $\overleftrightarrow{AB}$.
Se t = s, é imediato que s $\subset \alpha$. Supondo t $\neq$ s, então r $\perp$ pl (t, s). Mas, pelo T19, esse plano só pode ser o próprio α, logo s $\subset \alpha$.



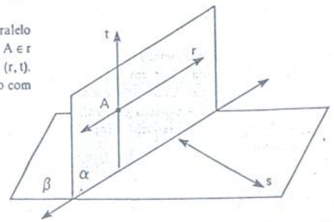
b) Se A = B, seja C $\in \alpha$ um ponto distinto de A. Se C $\in$ s, é imediato que s $\subset \alpha$. Supondo que C $\notin$ s, seja t = $\overleftrightarrow{AC}$. Nesse caso, r $\perp$ pl (t, s). Mas, pelo T19, esse plano só pode ser o próprio α, logo s $\subset \alpha$.



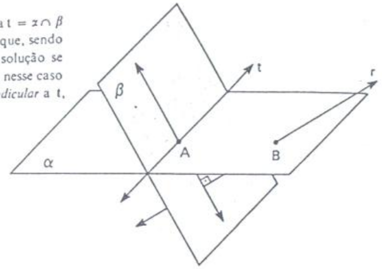
7.18) Seja B a interseção de r e α. Tome por B a reta s' // s. Logo, r $\perp$ s' (veja exercícios 7.1 e 7.2). Pelo exercício anterior, s' $\subset \alpha$. Então, pelo teorema T6, s // α.



7.19) Seja β o plano que contém s e é paralelo a r (veja exercícios 3.7 e 3.8). Por A $\in$ r tome t $\perp \beta$ (teorema T20). Seja α = pl (r, t). Temos s $\perp \alpha$, pois s forma ângulo reto com r e com t.



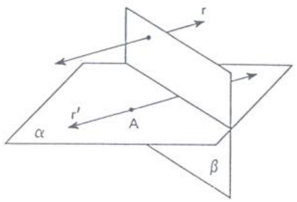
7.20) Tome por A o plano $\beta \perp r$. A reta $t = \alpha \cap \beta$ é a reta procurada: $r \perp t$. Note que, sendo $B = r \cap \alpha$, o problema só tem solução se $\overleftrightarrow{AB}$ não é perpendicular a r, pois nesse caso teríamos $t = \overleftrightarrow{AB}$ e r seria *perpendicular* a t, e não ortogonal.



7.25) Como $t \perp \gamma$ e $a \subset \gamma$, então $t \perp a$. Assim, pelo teorema T21, temos $a \perp \beta$. Como $b \subset \beta$, resulta $a \perp b$.

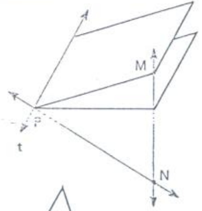
7.26) a) V b) V c) F d) V e) F f) F g) V h) F i) F

7.27) Seja $\beta \perp r$. Por $A \in \alpha$ conduz $r' \parallel r$. Temos $r' \subset \alpha$ (veja exercício 3.2). Pelo teorema T17, $r' \perp \beta$. Logo, α contém uma reta perpendicular a β, isto é, $\alpha \perp \beta$.

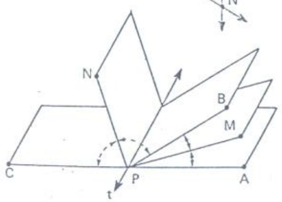


7.28) Basta tomar o plano γ que passa por P e é perpendicular à interseção de α e β. Temos $\alpha \perp \gamma$ e $\beta \perp \gamma$ porque ambos contêm uma reta que é perpendicular a γ.

8.25) Temos $\overleftrightarrow{MN} \perp t$ e $\overleftrightarrow{NP} \perp t$, logo, pelo teorema das três perpendiculares (veja exercício 7.5), resulta que $\overleftrightarrow{MP} \perp t$. Se o diedro fosse reto, a tese seria imediata.

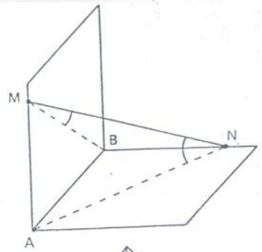


8.26) Basta considerar as semi-retas obtidas cortando-se a aresta t por um plano que lhe seja perpendicular. Como $\overrightarrow{PM}$ é a bissetriz de $A\hat{P}B$ e $\overrightarrow{PN}$ é a bissetriz de $B\hat{P}C$, então $M\hat{P}N$ é reto (veja exercício 5.18). Então, o diedro $M\hat{t}N$ é reto.

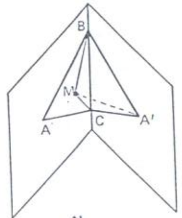


8.27) Sendo t a aresta do diedro $P\hat{t}Q$, como $r \perp pl(t, P)$ e $S \perp pl(t, Q)$, então t forma ângulo reto com r e s, que são retas concorrentes. Então (veja exercício 7.4) $t \perp pl(r, s)$.

8.28) Como $\overleftrightarrow{MA}$ é perpendicular à face $(\overleftrightarrow{AB}, N)$, o $\triangle MAN$ é retângulo em A. Como $\overleftrightarrow{NB}$ é perpendicular à face $(\overleftrightarrow{AB}, M)$, o $\triangle NBM$ é retângulo em B. Como NB = MA, tem-se $\triangle MAN \equiv \triangle NBM$ (veja exercício 6.43). Assim, $M\hat{N}A \equiv N\hat{M}B$.

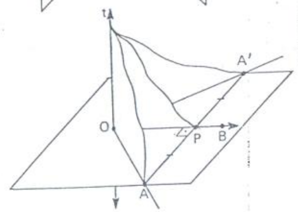


8.29) Os triângulos $\triangle MCB$ e $\triangle MCA'$ são congruentes, pois são ambos retângulos e têm as hipotenusas congruentes e o cateto $\overline{MC}$ em comum (veja exercício 6.43). Então, A'M = BM.



8.30) Seja $A\hat{O}A'$ uma seção reta do diedro $A\hat{t}A'$. O $\triangle AOA'$ é isósceles, pois $\overleftrightarrow{OP}$ é altura e mediana. Logo, $\overleftrightarrow{OP}$ é também bissetriz, donde (t, P) é o semiplano bissetor de $A\hat{t}A'$:

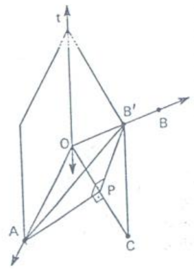
$$\text{med}(A\hat{t}A') = 2\,\text{med}(A\hat{t}B)$$



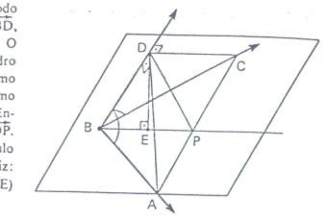
8.31) Seja $A\hat{O}C$ a seção reta do diedro. $\overleftrightarrow{AP}$ é perpendicular a [illegible], logo é perpendicular à face (t, C). Seja $B' \in \overrightarrow{OB}$ tal que OB' = OP. Como $\triangle AB'P$ é retângulo em P, temos AB' > AP. Comparando os triângulos OAB' e OAP, temos que $\overleftrightarrow{OA}$ é comum, OB' = OP e AB' > AP, logo

$$\text{med}(A\hat{O}B') > \text{med}(A\hat{O}P)$$

Como o diedro é agudo, med $(A\hat{O}P)$ é a própria medida do diedro, donde a tese.



8.32) Escolhendo-se os pontos A e C de modo que $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ sejam perpendiculares a $\overleftrightarrow{BD}$, temos que $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$ (ALA). O ângulo $A\hat{D}C$ é a seção reta do diedro (A, $\overleftrightarrow{BD}$, C). Temos $AD = CD$. Como $\overleftrightarrow{DE} \perp$ pl (A, B, C), tem-se $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DE}$. Como $\overleftrightarrow{BD} \perp$ pl (A, D, C), tem-se $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$. Então, $\overleftrightarrow{AC} \perp$ pl (B, E, D), logo $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DP}$. Isto mostra que $\overline{DP}$ é altura do triângulo isósceles ADC, logo é também bissetriz: $A\hat{D}P \equiv C\hat{D}P$. Assim, o semiplano ($\overleftrightarrow{BD}$, E) é o bissetor do diedro (A, $\overleftrightarrow{BD}$, C).

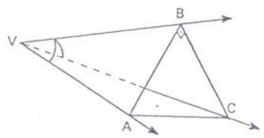


8.33) oito triedros 8.34) b) e c): **sim**; a), d), e), f): **não**

8.35) a) $13° < x < 157°$ b) $27° < x < 163°$ 8.36) $10° < x < 110°$

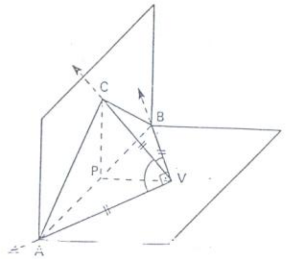
8.37) Seja $A\hat{B}C$ a seção reta do diedro reto. Como $A\hat{V}B$ e $C\hat{V}B$ medem 45°, os triângulos $\triangle AVB$ e $\triangle CVB$ são retângulos isósceles, logo $AB = VB = CB$ e também $VA = VC$. Mas então o $\triangle ABC$ é também retângulo isósceles e congruente aos dois anteriores. Logo, $AC = VA = VC$. Como $\triangle AVC$ é eqüilátero, temos

$$\text{med}\,(A\hat{V}C) = 60°$$



8.38) $\triangle APV \equiv \triangle CPV$, pois são ambos retângulos isósceles, com um cateto comum e hipotenusas congruentes. Assim, $AP = CP = PV$. Então, $\triangle APC \equiv \triangle APV$, donde $AC = AV$. Logo, $\triangle ACV$ é eqüilátero e assim

$$\text{med}\,(C\hat{V}A) = 60°$$

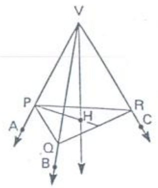


8.39) a) e c): **sim**; b) e d): **não**

8.40) a) três faces; b) cinco faces; c) sete faces; d) onze faces

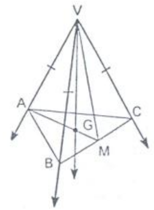
9.11) a) Se P pertence à união dos dois planos, P deve pertencer a um dos semiplanos bissetores, logo P é eqüidistante de α e de β.

b) Se P eqüidista de α e de β (e P pertence certamente a um dos quatro diedros), então P pertence ao semiplano bissetor correspondente. Assim, P pertence à união dos dois planos considerados.

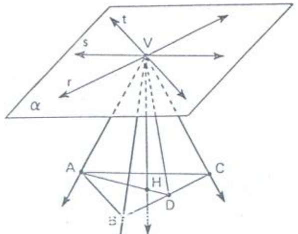


9.12) Os planos que contêm $\overleftrightarrow{VA}$ e $\overleftrightarrow{VB}$ e são perpendiculares às faces opostas cortam-se segundo a reta $\overleftrightarrow{VH}$, sendo H um ponto qualquer dessa reta. O $\triangle PQR$ é a interseção do triedro com o plano que passa por H e é perpendicular a $\overleftrightarrow{VH}$. Provemos que H é o ortocentro do $\triangle PQR$. Temos pl(V, P, H) $\perp$ pl(P, Q, R) por construção e também pl(V, P, H) $\perp$ pl(V, Q, R) por hipótese. Logo, a interseção $\overleftrightarrow{QR}$ é também perpendicular ao pl (V, P, H). Assim, $\overleftrightarrow{QR} \perp \overleftrightarrow{PH}$, logo $\overleftrightarrow{PH}$ contém a altura do $\triangle PQR$. Do mesmo modo prova-se que $\overleftrightarrow{QH}$ contém outra altura. Logo, H é o ortocentro. Assim, $\overleftrightarrow{RH}$ contém a terceira altura, o que prova que o plano pl (VRH) é perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ e à face $A\hat{V}B$. Assim, os três planos têm em comum a reta $\overleftrightarrow{VH}$.

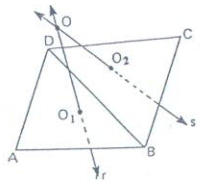
9.13) Pondo $VA = VB = VC$, como $\triangle VBC$ é isósceles, a bissetriz $\overleftrightarrow{VM}$ é também mediana. Logo, $\overleftrightarrow{AM}$ é mediana do $\triangle ABC$. Portanto o pl (V, A, M) contém a reta $\overleftrightarrow{VG}$ que passa pelo baricentro do $\triangle ABC$. Da mesma forma, os outros dois planos contêm essa reta.



9.14) Os planos que contêm as arestas e são perpendiculares às faces opostas cortam-se segundo a reta $\overleftrightarrow{VH}$ (veja o exerc. 9.12). Seja $\alpha \perp \overleftrightarrow{VH}$, por V, e seja, por H, o plano (A, B, C) paralelo a α. Como os planos (A, B, C) e (V, B, C) são perpendiculares ao plano (V, A, D), a sua interseção $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular ao plano (V, A, D). Seja $r = \alpha \cap$ pl (V, B, C). Como $r \parallel \overleftrightarrow{BC}$, tem-se $r \perp$ pl (V, A, D), logo $r \perp \overleftrightarrow{VA}$. Da mesma forma, as retas $s = \alpha \cap$ pl (V, A, C) e $t = \alpha \cap$ pl (V, A, B) são perpendiculares a $\overleftrightarrow{VB}$ e $\overleftrightarrow{VC}$, respectivamente. As três retas r, s, t estão contidas no plano α.

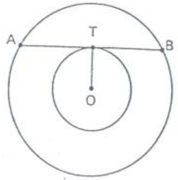


9.15) Sejam O_1 e O_2 os circuncentros dos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$. As retas **r** e **s** passam por O_1 e O_2 e são perpendiculares aos planos desses triângulos. Elas são coplanares, pois estão no plano mediador de $\overline{BD}$ e não são paralelas, pois os pontos A, B, C e D não são coplanares. Assim, elas são concorrentes num ponto O, que é eqüidistante dos pontos A, B, C e D (veja exercício 9.9).



9.27) Basta notar que as duas diagonais desse quadrilátero cortam-se ao meio, no centro da circunferência (veja exercício 6.36).

9.28) Como $\overleftrightarrow{AB}$ tangencia a circunferência menor, então $\overleftrightarrow{OT} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Então, pelo exerc. 9.17, T é o ponto médio de $\overline{AB}$.



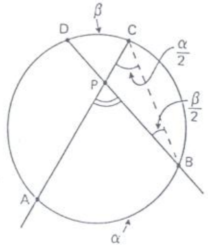
9.29) Como r é tangente, temos $\overleftrightarrow{OT} \perp r$, logo $\overleftrightarrow{OT} \parallel \overleftrightarrow{BQ}$. Como O é ponto médio de $\overline{AB}$, pelo exerc. 6.47, T é ponto médio de $\overline{PQ}$. Assim, $\overleftrightarrow{OT}$ é mediatriz de $\overline{PQ}$, donde OP = OQ.

9.30) $\alpha = 30°$ 9.31) $\beta = 110°$

9.32) Como $A\hat{P}B$ é externo ao $\triangle$ BCP,

med $(A\hat{P}B)$ = med $(A\hat{C}B)$ + med $(C\hat{B}D)$ =

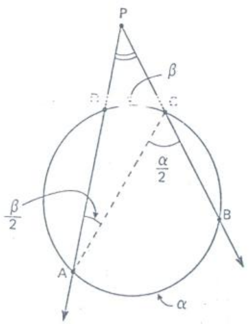
$$= \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$



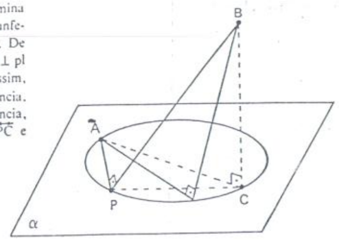
9.33) Como $A\hat{C}B$ é externo ao $\triangle$ ACP,

med $(A\hat{P}B)$ = med $(A\hat{C}B)$ − med $(C\hat{A}P)$ =

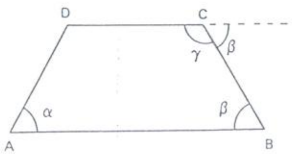
$$= \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}$$



9.34) A perpendicular a α por B determina C ≠ A. O lugar geométrico é a circunferência de diâmetro $\overline{AC}$ contida em α. De fato, se P pertence ao lugar, então $\overleftrightarrow{AP} \perp$ pl (P, B, C) pois $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{PB}$ e $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{BC}$. Assim, $A\hat{P}C$ é reto, donde P está na circunferência. Inversamente, se P está na circunferência, então $\overleftrightarrow{AP} \triangle$ pl (P, B, C) pois $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{PC}$ e $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{BC}$. Assim, $A\hat{P}B$ é reto.



9.35) Temos $\beta + \gamma = 180°$. Se o trapézio é inscritível, então $\alpha + \gamma = 180°$, donde $\alpha = \beta$ e assim o trapézio é isósceles. Inversamente, se o trapézio é isósceles, então $\alpha = \beta$, donde $\alpha + \gamma = 180°$, logo o trapézio é inscritível.



9.36) Se α e β são as medidas de dois ângulos opostos do paralelogramo, temos $\alpha = \beta$ e, como ele é inscritível, temos $\alpha + \beta = 180°$, logo $\alpha = \beta = 90°$.

9.37) Indiquemos med $(\widehat{ACB})$ por 2α, de modo que med $(\widehat{AC})$ = med $(\widehat{CB}) = \alpha$. O ângulo $A\hat{G}E$ é excêntrico interior (veja exercício 9.32). Temos então

$$\text{med}\,(A\hat{G}E) = \frac{1}{2}[\text{med}\,(\widehat{ADE}) + \alpha] \qquad (1)$$

$$\text{med}\,(C\hat{D}E) = \frac{1}{2}[\text{med}\,(\widehat{CBE})] = \frac{1}{2}[\text{med}\,(\widehat{ABE}) - \alpha] \qquad (2)$$

Somando (1) e (2):

$$\text{med}\,(A\hat{G}E) + \text{med}\,(C\hat{D}E) = \frac{1}{2}[\text{med}\,(\widehat{ADE}) + \text{med}\,(\widehat{ABE})] =$$

$$= \frac{1}{2}[360°] = 180°$$

9.38) O centro da circunferência circunscrita pertence às quatro mediatrizes, por ser eqüidistante dos quatro vértices. Esse é o único ponto comum, pois se houvesse outro, as quatro mediatrizes seriam coincidentes.

9.39) O ponto comum às quatro bissetrizes é interno ao quadrilátero e eqüidistante dos quatro lados. Se por ele tomamos perpendiculares aos lados, obtemos os pontos de tangência.

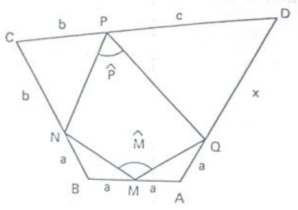
9.40) a) Seja $QD = x$. Temos

$$AB + CD = AD + BC$$

donde

$$(a + a) + (b + c) = (a + x) + (a + b)$$

e daí, $x = c$.



b) $\triangle AMQ$ e $\triangle BMN$ são isósceles. Então

$$\text{med}(Q\hat{M}A) = 90° - \frac{\text{med}(\hat{A})}{2}$$

e

$$\text{med}(N\hat{M}B) = 90° - \frac{\text{med}(\hat{B})}{2}$$

Assim,

$$\text{med}(\hat{M}) = 180° - \text{med}(Q\hat{M}A) - \text{med}(N\hat{M}B) =$$
$$= 180° - \left(90° - \frac{\text{med}(\hat{A})}{2}\right) - \left(90° - \frac{\text{med}(\hat{B})}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}[\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B})]$$

Do mesmo modo,

$$\text{med}(\hat{P}) = \frac{1}{2}[\text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{D})]$$

Logo,

$$\text{med}(\hat{M}) + \text{med}(\hat{P}) = \frac{1}{2}[\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{D})] =$$
$$= \frac{1}{2}[360°] = 180°$$

Portanto, pelo exercício 9.21, MNPQ é inscritível em uma circunferência.

c) Seja O o centro da circunferência circunscrita ao quadrilátero MNPQ. Então (exercício 9.38) O é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados. Mas essas mediatrizes contêm as bissetrizes internas do quadrilátero ABCD (triângulos isósceles). Logo, pelo exercício 9.39, existe uma circunferência de centro O à qual o quadrilátero ABCD é circunscrito.

9.41) O centro da superfície esférica é eqüidistante dos quatro pontos dados. Pelo exercício 9.15, existe um único ponto nessas condições.

9.42) É o plano mediador do segmento $\overleftrightarrow{AB}$ (veja exercício 9.2).

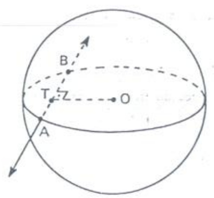
9.43) É a reta perpendicular ao plano do triângulo e que passa pelo circuncentro deste (veja exercício 9.9).

9.44) Se α é o plano perpendicular a **r** por A, então o lugar geométrico é $\alpha - \{A\}$.

9.45) Se **r** é a reta perpendicular a α por A, então o lugar geométrico é $r - \{A\}$.

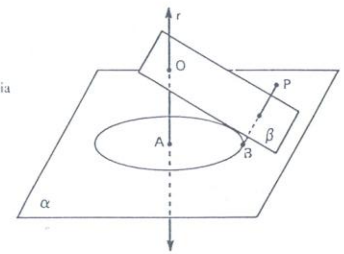
9.46) Se γ e γ' são os planos que contêm os bissetores dos diedros determinados por α e β, então o lugar geométrico é $\gamma \cup \gamma' - r$, sendo **r** a reta interseção de α e β.

9.47) O plano pl (A, B, O) intercepta a superfície esférica segundo uma circunferência (veja exercício 9.23), na qual o raio perpendicular à corda divide-a ao meio (exercício 9.17).



9.48) α = plano da circunferência
A = centro da circunferência
B = ponto qualquer da circunferência
β = plano bissetor de $\overline{BP}$
O = interseção de **r** e β

O ponto O é o centro procurado.



9.49) Basta ver que ambos são perpendiculares à reta que contém o diâmetro.

9.50) Se P vê $\overleftrightarrow{AB}$ sob ângulo reto, então P pertence à circunferência de diâmetro $\overleftrightarrow{AB}$ contida no plano pl (A, B, P) (note que se $P \neq A$ e $P \neq B$, P não poderia estar alinhado com A e B). Se O e **r** são o centro e o raio dessa circunferência, então $PO = r$, logo P pertence à superfície esférica de centro O e raio **r**.

9.51) Basta notar que os pés dessas perpendiculares são os pontos que vêem AB sob ângulo reto e em seguida usar os exercícios 9.26 e 9.50.

9.52) a) $\left.\begin{array}{l} r \perp \overleftrightarrow{AB} \\ r \perp s \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp \text{pl}(A, B, N) \Rightarrow M\hat{A}N$ é reto

b) $\left.\begin{array}{l} s \perp \overleftrightarrow{AB} \\ s \perp r \end{array}\right\} \Rightarrow s \perp \text{pl}(A, B, M) \Rightarrow M\hat{B}N$ é reto

c) $\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{PN} \perp \overleftrightarrow{AP} \\ \overleftrightarrow{PN} \perp r \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{PN} \perp \text{pl}(A, M, P) \Rightarrow M\hat{P}N$ é reto

Assim, A, B e P vêem $\overleftrightarrow{MN}$ sob ângulo reto (veja exercício 9.50).

9.53) Se um plano $\gamma \perp r$ é conduzido por A, então $\gamma \perp \alpha$ e $\gamma \perp \beta$. Seja $s \perp \alpha$ por A ($s \subset \gamma$). Seja $t \perp \beta$ por T ($t \subset \gamma$). As retas **s** e **t** cortam-se em O, que é o centro procurado.

9.54) $\overleftrightarrow{RQ} \perp \text{pl}(A, B, P) \Rightarrow \overleftrightarrow{RQ} \perp \overleftrightarrow{BP}$. Como $A\hat{P}B$ é reto, $\overleftrightarrow{BP} \perp \overleftrightarrow{AP}$. Assim, $\overleftrightarrow{BP} \perp \text{pl}(A, R, P)$, logo $\overleftrightarrow{BP} \perp \overleftrightarrow{AR}$. Por outro lado, $A\hat{R}B$ é reto, logo $\overleftrightarrow{AR} \perp \overleftrightarrow{BR}$. Então, $\overleftrightarrow{AR} \perp \text{pl}(R, P, B)$.

10.13) Sendo **a** o lado, temos $d^2 = 2a^2 = 2S$, logo

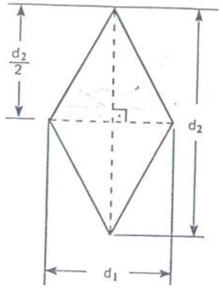
$$S = \frac{d^2}{2}$$

10.14) A área do triângulo sombreado é

$$\frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 d_2}{4}$$

A área do losango é o dobro desta:

$$S = 2 \cdot \frac{d_1 d_2}{4} = \frac{d_1 d_2}{2}$$



10.15) a) BD = 15 m b) $(BD)^2 + (CD)^2 = 15^2 + 8^2 = 289 = (17)^2 = (BC)^2$ c) 114 m^2

10.16) $(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 + (BD)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 + (HC)^2$
$(AE)^2 = (AC)^2 + (CE)^2 = (AH)^2 + (HC)^2 + (CE)^2 = (AH)^2 + (HC)^2 + (BH)^2$
Logo, AD = AE.

10.17) a) $DA = DB = DC = 2\sqrt{34}$ b) S = 60 c) h = 10

10.18) a) $BC = 8\sqrt{2}$; b) $AH = 2\sqrt{2}$ c) S = 16

10.19) $40 + 12\sqrt{2}$ 10.20) $3\sqrt{5}$ 10.21) 13

10.22) $PB = PF = 3\sqrt{7}$ cm; $PC = PE = 3\sqrt{19}$ cm; PD = 15 cm

10.23) 24 cm^2 10.24) $\frac{1}{3}\sqrt{96^2 - 3a^2}$ 10.25) 10 cm e $\sqrt{73}$ cm

10.26) 12 cm 10.27) 5 m

11.23) $AB = \frac{a(3 + \sqrt{6})}{3}$; $BC = a(2 + \sqrt{6})$ 11.24) 11,25 cm e 29,25 cm

11.25) $x = \frac{ah}{b - a}$; $y = \frac{bh}{a + b}$; $\frac{AP}{PC} = \frac{BP}{PD} = \frac{b}{a}$ 11.26) $h = \sqrt{abk} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

11.27) $h = \sqrt{ab}$; $AC = \sqrt{a(a + b)}$; $BD = \sqrt{b(a + b)}$

11.28) Como $\triangle PCD \sim \triangle PAB$, $\frac{AP}{AC} = \frac{BP}{BD}$.

Então, $\frac{EP}{DC} = \frac{AP}{AC} = \frac{BP}{BD} = \frac{PF}{DC}$, donde EP = PF.

11.29) Como $\triangle PBM \sim \triangle PAN$, $\frac{BM}{AN} = \frac{PM}{PN}$.

Como $\triangle QMC \sim \triangle QNA$, $\frac{MC}{NA} = \frac{QM}{QN}$.

Mas BM = MC, logo $\frac{PM}{PN} = \frac{QM}{QN}$

11.30) Têm-se $\frac{BD}{QS} = \frac{DC}{SR} = \frac{BD + DC}{QS + SR} = \frac{BC}{QR} = \frac{AB}{PQ}$, e como $\hat{B} = \hat{Q}$, por LAL temos

$$\triangle ABD \sim \triangle PQS$$

Logo, $\frac{AD}{PS} = \frac{AB}{PQ}$.

11.31) $\triangle PED \sim \triangle PCB \Rightarrow \frac{PE}{PC} = \frac{PD}{PB}$.

$\triangle PFC \sim \triangle PDA \Rightarrow \frac{PF}{PC} = \frac{PD}{PA}$.

Dividindo: $\frac{PE}{PF} = \frac{PA}{PB}$, logo $\overleftrightarrow{EF} /\!/ \overleftrightarrow{AB}$ (veja exercício 11.2).

11.32) (Veja exercício 6.46.) $PN = \frac{a}{2}$; $SR = \frac{2a}{3}$; $PS = \frac{c}{6}$; $NR = \frac{b}{6}$

11.33) $S = \frac{126a^2}{25}$ 11.34) AD = 4 11.35) AB = 9 m

11.36) MC = 25 cm 11.37) AD = 8 cm 11.38) $x = \frac{ab}{b + c}$; $y = \frac{ac}{b + c}$

11.39) a) $\triangle ABF \sim \triangle DAE$, logo $E\hat{A}M + M\hat{E}A = 90°$ donde $E\hat{M}A = 90°$

b) $\frac{4a^2}{39}$

11.40) (Veja exercício 11.22). Temos

$$\frac{DE}{EB} = \frac{AD}{AB} \text{ e } \frac{AF}{FC} = \frac{AD}{CD}$$

e como AB = CD, tem-se $\frac{DE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

donde $\frac{DE + EB}{EB} = \frac{AF + FC}{FC}$

$$\frac{BD}{EB} = \frac{AC}{FC}$$

e dividindo por 2: $\frac{PB}{EB} = \frac{PC}{FC}$.

Portanto, $\overleftrightarrow{EF} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$ (veja exercício 11.2).

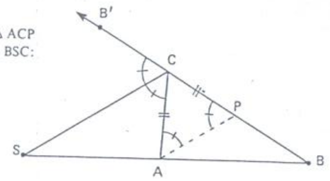
11.41) $\frac{3}{2}$ 11.42) AC = 25

11.43) Tomando $\overleftrightarrow{AP} /\!/ \overleftrightarrow{SC}$, prova-se que o $\triangle$ ACP é isósceles, donde AC = PC. No $\triangle$ BSC:

$$\frac{AS}{SB} = \frac{PC}{BC}$$

logo

$$\frac{AS}{SB} = \frac{AC}{BC}$$



11.50)

	a	b	c	m	n	h
a	25	20	15	16	9	12
b	169	156	65	144	25	60
c	289	255	136	225	64	120
d	625	600	175	576	49	168
e	841	609	580	441	400	420
f	25	20	15	16	9	12
g	169	156	65	144	25	60
h	289	255	136	225	64	120
i	625	600	175	576	49	168
j	841	609	580	441	400	420
k	25	20	15	16	9	12
l	169	156	65	144	25	60
m	289	225	136	225	64	120
n	625	600	175	576	49	168
o	841	609	580	441	400	420
p	65	56	33	48,2	16,8	28,4

11.51) $\frac{b^2}{c^2} = \frac{am}{an} = \frac{m}{n}$ 11.52) 10 cm

11.53) a) $AC = b\sqrt{2}$; $BD = b\sqrt{5}$

b) $AI = \frac{2b\sqrt{2}}{3}$; $BI = \frac{2b\sqrt{5}}{3}$; $CI = \frac{b\sqrt{2}}{3}$; $DI = \frac{b\sqrt{5}}{3}$

11.54) AB = 4 cm; AC = $4\sqrt{3}$ cm; BC = 8 cm 11.55) BS = $9\sqrt{5}$ cm

12.7) $S = \frac{C^2}{4\pi}$ 12.8) $S = \frac{\pi}{2 + \sqrt{\pi}}$ 12.9) $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

12.10) $\frac{a^2}{4}(4 - \pi)$ 12.11) $a^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ 12.12) $a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

12.13) $\frac{\pi r^2}{4}$ 12.14) $\frac{4\pi r^2}{9}$ 12.15) $\frac{a^2}{12}(5\pi + 3\sqrt{3})$

12.16) $\frac{r^2}{24}(9\sqrt{3} - 4\pi)$ 12.17) $\frac{bc}{4} \cdot \left(2 - \frac{\pi bc}{b^2 + c^2}\right)$

12.18) Pondo AC = 2r e CB = 2r', a área vale

$$S = \frac{\pi}{2}(r + r')^2 - \frac{\pi}{2}r^2 - \frac{\pi}{2}(r')^2 = \pi r r'$$

Por outro lado, tem-se $(CD)^2 = (AC) \cdot (CB) = 4rr'$. Assim, o círculo de diâmetro $\overleftrightarrow{CD}$ tem área igual a

$$S' = \pi\left(\frac{CD}{2}\right)^2 = \frac{\pi (CD)^2}{4} = \frac{\pi \cdot 4rr'}{4} = \pi r r' = S$$

13.7) $(n - 1) \cdot 720°$ 13.8) cinco faces 13.9) sete faces

13.10) onze faces 13.11) 7 920° 13.12) 3 600°

13.13) seis faces 13.14) 3n 13.15) sete faces

13.16) cinco lados 13.17) 1 080° 13.18) $S_t = 222$; $d = \sqrt{178}$

13.19) h = 13; $d = \sqrt{221}$ 13.20) 2, 3 e 4

13.21) $\cos\alpha = \frac{23}{49}$ ou $\frac{31}{49}$ ou $\frac{41}{49}$ 13.22) 6 cm, 8 cm e 24 cm

13.23) Tomando sobre $\overrightarrow{OP}$ o ponto M tal que $\overline{OM} = 1$, este segmento $\overline{OM}$ pode ser visto como a diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo cujas faces (aquelas que contêm O) estão contidas nas faces do triedro. As dimensões do paralelepípedo são

$OM_1 = a = \cos\alpha$, $OM_2 = b = \cos\beta$

e

$OM_3 = c = \cos\gamma$

e como

$$(OM)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

obtemos

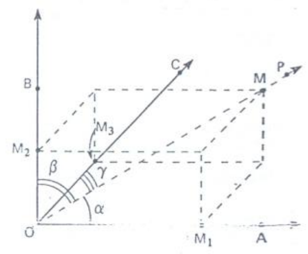
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

donde

$$(1 - \operatorname{sen}^2\alpha) + (1 - \operatorname{sen}^2\beta) + (1 - \operatorname{sen}^2\gamma) = 1$$

e então

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma = 2$$



13.24) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ 13.25) 192 cm² 13.26) 2 cm, 6 cm e 10 cm

13.27) três recipientes 13.28) Elas são iguais. 13.29) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

13.30) $6\sqrt{2}$ cm 13.31) 3a 13.32) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

13.33) $\frac{x\sqrt{2}}{2}$ 13.34) $x\sqrt{2}$ 13.35) $d = \frac{\sqrt{2S}}{2}$

13.36) $a(\sqrt{2} - 1)$ 13.37) $6x(2d + x)$ 13.38) k^2S

13.39) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ 13.40) $\frac{23}{17}$

13.41) a) $d = 7\sqrt{2}$ cm b) $S_t = 158\ cm^2$ c) $V = 120\ cm^3$

13.42) 4 cm, 6 cm e 9 cm 13.43) $V = 15\ cm^3$ 13.44) $a^3\sqrt{6}$

13.45) $S_t = 3d^2$; $V = \frac{d^3\sqrt{3}}{9}$ 13.46) $V = 48(3 - \sqrt{3})\ cm^3$

13.47) a) $d = 5\sqrt{3}$ cm b) $S_b = 25\ cm^2$ c) $S_\ell = 100\ cm^2$ d) $S_t = 150\ cm^2$ e) $V = 125\ cm^3$

13.48) a) $a = 4\sqrt{3}$ cm b) $S_b = 48\ cm^2$ c) $S_\ell = 192\ cm^2$ d) $S_t = 288\ cm^2$ e) $V = 192\sqrt{3}\ cm^3$

13.49) $V = 16\sqrt{2}\ cm^3$ 13.50) $V = 3\sqrt{3}\ cm^3$ 13.51) $V = \frac{1}{8}$

13.52) a) $a = 6$ cm b) $d = 6\sqrt{3}$ cm c) $S_\ell = 144\ cm^2$ d) $S_b = 36\ cm^2$ e) $V = 216\ cm^3$

13.53) 2 cm 13.54) $V = 3\sqrt{3}\ cm^3$ 13.55) $a = 36$

13.56) $d = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm; $S_t = \frac{27}{2}\ cm^2$; $V = \frac{27}{8}\ cm^3$

13.57) $d = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$; $S_t = 3\ell^2$; $V = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{4}$

13.58) $S_t = 2(d - x\sqrt{3})^2$; $V = \frac{\sqrt{3}}{9}(d - x\sqrt{3})^3$ 13.59) $V = 16\sqrt{2}\ cm^3$

13.60) $a = 6$ 13.61) $a = 12$ cm

13.62) $1\,000\ cm^3$, $\frac{64\,000}{27}\ cm^3$ e $\frac{125\,000}{27}\ cm^3$ 13.63) $216\ cm^2$

13.64) $1\,000\ cm^3$ 13.65) $1\,104\ cm^2$ 13.66) 13

13.67) $S_\ell = 150$ 13.68) 6 cm 13.69) $a = \frac{d\sqrt{3}}{2}$

13.70) $a = \frac{d\sqrt{6}}{4}$ 13.71) $10\sqrt{2}$ cm 13.72) $d = 50$ cm

13.73) $d = 29$ cm 13.74) $2a\sqrt{2}$, $tg\,\alpha = 1$ e $a\sqrt{7}$, $tg\,\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

13.75) $\sqrt{m^2 + n^2 + mn}$ e $\sqrt{m^2 + n^2 + 3mn}$ 13.76) $S = (p + q + r)a$

13.77) 4,5 cm 13.78) 2a e $a\sqrt{5}$ 13.79) 20 cm e $12\sqrt{2}$ cm

13.80) $2\sqrt{122}$ e $2\sqrt{197}$ 13.81) a; $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{a^2\sqrt{39}}{6}$; $\frac{a^2\sqrt{39}}{6}$

13.82) 13 cm e $3\sqrt{97}$ cm 13.83) $a = 6$ cm 13.84) $3a^2\sqrt{2}$

13.85) $a = 16$ cm 13.86) $4a^2\sqrt{2}$ 13.87) $15a^2\sqrt{3}$

13.88) $1\,560\sqrt{3}\ cm^2$ 13.89) $\frac{64R^2\sqrt{3}}{3}$

13.90) (perímetro = 30 e altura = 2) ou (perímetro = 10 e altura = 6) 13.91) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$

13.92) a) $a = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$ b) $S_\ell = 4S\sqrt{3}$ c) $S_t = 2S(1 + 2\sqrt{3})$ d) $V = \frac{2S\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$

13.93) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

13.94) a) $S_b = \frac{h^2\sqrt{3}}{4}$ b) $S_\ell = 3h^2$ c) $S_t = \frac{h^2(6 + \sqrt{3})}{2}$ d) $V = \frac{h^3\sqrt{3}}{4}$

13.95) $h = \frac{13(2 - \sqrt{2})}{7}$ cm; $V = \frac{117(2 - \sqrt{2})}{14}\ cm^3$ 13.96) $a = \sqrt[3]{6}$

13.97) a) $S_b = 5\ cm^2$ b) $S_\ell = 50\ cm^2$ c) $S_t = 60\ cm^2$ d) $V = 25\ cm^3$

13.98) a) $S_b = 3a^2$ b) $S_\ell = a^2(5 + \sqrt{5})$ c) $S_t = a^2(11 + \sqrt{5})$ d) $V = 3a^3$

13.99) $S_t = (220 + 72\sqrt{3})\ cm^2$; $V = 100\sqrt{3}\ cm^3$ 13.100) $\frac{1}{6}$

13.101) $V = \frac{2h^3}{5}$ 13.102) $V = 5\,760\ cm^3$ 13.103) $V = 32\sqrt{3}\ cm^3$

13.104) $V = a^3\sqrt{3}$ 13.105) $V = 4a^3\sqrt{3}$ 13.106) $V = 4\,500\ cm^3$

13.107) a) $\frac{a^2b\sqrt{3}}{4}$ b) a^2b c) $\frac{3a^2b\sqrt{3}}{2}$

13.108) $1\,625\ m^3$ 13.109) $V = \frac{a^3}{8}$ 13.110) $h = \frac{10\sqrt{3}}{9}$ cm

13.111) $V = 1\,137\,000\ cm^3$ 13.112) $V = 6\,090\ cm^3$

13.113) 2 cm, 2 cm, 2 cm, 4 cm 13.114) $2\,520\ cm^2$

13.115) $V = 1\,440\ cm^3$ 13.116) $\frac{2V}{S}$

13.117) a) $2a$ e $a\sqrt{5}$ b) $\frac{3a^2\sqrt{7}}{4}$ c) $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ e $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$

13.118) $a = 4$ cm; $d_{base} = 4\sqrt{2}$ cm, $d = 4\sqrt{3}$ cm 13.119) $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$

13.120) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ 13.121) $144\ cm^2$ 13.122) $2a^2$

13.123) $36\sqrt{2}\ m^2$ 13.124) $V = \frac{S^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{a}$

13.125) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 13.126) 30° 13.127) $\frac{a\sqrt{13}}{2}$

13.128) 120° 13.129) $15\sqrt{2}$ cm; $\frac{25\sqrt{3}}{2}\ cm^2$

13.130) $\frac{a}{8} \cdot (2\sqrt{17} + 5\sqrt{5} + \sqrt{65})$

13.131) $2\,378\ cm^2$ 13.132) $150\ cm^2$ 13.133) 3Q 13.134) $16\ m^2$ e $8\sqrt{3}\ m^2$

13.135) $300\ cm^2$ 13.136) $a^2(2\sqrt{2} + \sqrt{3})$ 13.137) $\frac{4Q\sqrt{3}}{3}$

13.138) $200\ cm^2$ 13.139) $V = 672\ cm^3$ 13.140) $V = 480\ cm^3$

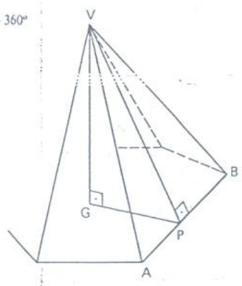
14.9) a) 720° b) 1 080° c) 1 440° d) $(n - 1) \cdot 360°$

14.10) onze lados

14.11) Se $\overleftrightarrow{VG}$ é a altura da pirâmide, então $\overleftrightarrow{VG}$ é perpendicular ao plano da base, logo

$$\overleftrightarrow{VG} \perp \overleftrightarrow{AB}$$

Por outro lado, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{VP}$, pois $\overleftrightarrow{VP}$ é a altura da face lateral. Assim, $\overleftrightarrow{AB} \perp$ pl (VGP). Portanto, pl (VAB) $\perp$ pl (VGP), pois o pl (VAB) contém uma reta que é perpendicular ao pl (VGP).



14.12) $x = \frac{ah}{a + h}$

14.13) a) aresta lateral $= \frac{\sqrt{9h^2 + 3a^2}}{3}$

altura $= \frac{\sqrt{36h^2 + 3a^2}}{6}$

b) aresta lateral $= \frac{\sqrt{4h^2 + 2a^2}}{2}$

altura $= \frac{\sqrt{4h^2 + a^2}}{2}$

14.14) a) $\frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}$ c) $\sqrt{b^2 - a^2}$

14.15) 20 cm 14.16) 48 cm 14.17) $2\sqrt{3}$

14.18) 6 cm e $4\sqrt{5}$ cm 14.19) 90°

14.20) a) 4 b) 10 c) $n(n - 3)$ 14.21) $9\sqrt{2}$ cm

14.22) $a(\sqrt{6} - 2)$ 14.23) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ 14.24) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

14.25) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4}$ 14.26) $\cos(B\hat{A}C) = \sqrt{2} - \sqrt{3}$

14.27) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ 14.28) $\operatorname{sen} \beta = \frac{c}{b} \operatorname{sen} \alpha$

14.29) $\cos \varphi = \frac{\cos \gamma - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}$ 14.30) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

14.31) $\frac{a\sqrt{26}}{6}$ 14.32) 6 cm 14.33) $\frac{2\sqrt{6A}}{3\sqrt[4]{3}}$

14.34) 8 cm ou 6 cm 14.35) $S_\ell = (1 + \sqrt{2})\ cm^2$

14.36) $S_\ell = \sqrt{[illegible]}\ cm^2$ 14.37) $81\ cm^2$

14.38) VB = VC = 17 cm; $S = 120\ cm^2$ 14.39) $90\ cm^2$ e $18\sqrt{34}\ cm^2$

14.40) a) $\frac{9\sqrt{67}}{4}$ b) $3\sqrt{73}$ c) $\frac{9\sqrt{91}}{2}$

14.41) a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ b) $2a^2$ c) $3a^2\sqrt{3}$

14.42) a) $\frac{\sqrt{153}}{3}$ cm e $\frac{\sqrt{141}}{3}$ cm b) $\sqrt{10}$ cm e $2\sqrt{2}$ cm c) $\sqrt{5}$ cm e 1 cm

14.43) a) $\frac{a}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{3a}{2}$

14.44) $3a^2$ 14.45) $192\sqrt{3}\,cm^2$ 14.46) $720\,cm^2$

14.47) $432\,cm^2$ 14.48) $4a^2\sqrt{5}$ 14.49) $\frac{a^2}{2}(2+\sqrt{3})$

14.50) a) $\frac{a^2}{4}(4+\sqrt{7})$ b) $a^2(1+\sqrt{2})$ c) $\frac{a^2}{2}(6+\sqrt{7})$

14.51) $100(2+\sqrt{3})\,cm^2$ 14.52) $\frac{m^2}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{39})$ 14.53) $2a^2$

14.54) $\frac{a}{6}$ 14.55) $\frac{26}{19}$ 14.56) $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$ 14.57) 4 cm 14.58) $\frac{2h}{3}$ 14.59) $a\sqrt{2}$

14.60) $\frac{9h^2}{2}$ 14.61) $\frac{1}{16}$ 14.62) 10 cm 14.63) $\frac{13}{15}$ 14.64) $h\sqrt{\frac{b}{B}}$

14.65) $x = \frac{h\sqrt{2}}{2}$ (h = altura da pirâmide)

14.66) 7,5 cm ou 1,5 cm 14.67) $\sqrt{3} : (\sqrt{7}-\sqrt{3}) : (2\sqrt{3}-\sqrt{7})$

14.68) a) $S_b = 25\,cm^2$ b) $S_\ell = 5\sqrt{281}\,cm^2$ c) $S_t = (25 + 5\sqrt{281})\,cm^2$ d) $V = \frac{200}{3}\,cm^3$

14.69) a) $S_b = 8\,cm^2$ b) $S_\ell = (16 + 8\sqrt{3})\,cm^2$ c) $S_t = (24 + 8\sqrt{3})\,cm^2$ d) $V = \frac{32}{3}\,cm^3$

14.70) $V = 125\sqrt{3}\,cm^3$

14.71) a) $S_b = 4\sqrt{3}\,cm^2$ b) $S_\ell = 28\sqrt{3}\,cm^2$ c) $S_t = 32\sqrt{3}\,cm^2$ d) $V = \frac{32\sqrt{3}}{3}\,cm^3$

14.72) a) $S_b = 6\,cm^2$ b) $S_\ell = 21\,cm^2$ c) $S_t = 27\,cm^2$ d) $V = 6\,cm^3$

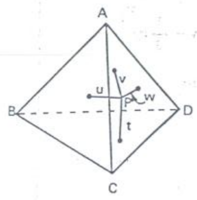
14.73) $V = 16\sqrt{6}\,cm^3$ 14.74) 2 cm 14.75) $V = \frac{125\sqrt{2}}{12}\,cm^3$

14.76) 4,5 cm 14.77) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

14.78) a) $V = \frac{\sqrt{6S}}{3\sqrt[4]{3}}$ b) $V = \frac{S\sqrt{6S}}{36\sqrt[4]{3}}$

14.79) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 14.80) $h = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,cm$

14.81) O ponto P divide o tetraedro regular em quatro pirâmides, com vértice em P e bases em cada face do tetraedro. As distâncias **u, v, w e t** de P às faces são as alturas destas pirâmides. A soma dos volumes das quatro pirâmides é igual ao volume do tetraedro. Se S é a área de uma face do tetraedro, temos



$$\frac{1}{3}S\cdot u + \frac{1}{3}S\cdot v + \frac{1}{3}S\cdot w + \frac{1}{3}S\cdot t = \frac{1}{3}S\cdot h$$

onde **h** é a altura do tetraedro. Daí, vem:

$$u + v + w + t = h$$

14.82) $V = \frac{a^3}{3}$ 14.83) $V = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$ 14.84) $V = \frac{a^3\sqrt{14}}{6}$

14.85) $V = \frac{3a^3}{2}$ 14.86) $V = \frac{3h^3\sqrt{3}}{4}$ 14.87) $V = \frac{3h^3\sqrt{3}}{2}$

14.88) $V = 2h^3$ 14.89) $V = \frac{a^3\sqrt{47}}{24}$ 14.90) $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$

14.91) $V = \frac{a^3\sqrt{39}}{4}$ 14.92) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{72}$ 14.93) $V = \frac{a^3}{6}$

14.94) $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ 14.95) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ 14.96) $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

14.97) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ 14.98) $V = \frac{\sqrt{5}}{3}\,cm^3$ 14.99) 12 : 1

14.100) 6 : 1 14.101) 4 : 1 14.102) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

14.103) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ 14.104) a) $\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$ b) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

14.105) $V = \frac{4S\sqrt{6S}}{9}$ 14.106) $V = \frac{3\sqrt{6}}{2}\,cm^3$ 14.107) $V = 6\,cm^3$

14.108) 6,5 cm 14.109) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$ 14.110) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

14.111) $864\,cm^2$ 14.112) $V = 2\,560\sqrt{3}\,cm^3$ 14.113) $V = 216\,cm^3$

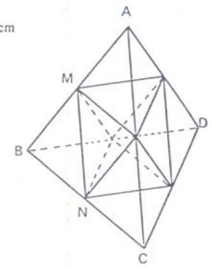
14.114) $V = \frac{1}{3}\,m^3$ 14.115) $V = \frac{\sqrt{6}}{2}\,cm^3$ 14.116) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

14.117) $\frac{100}{9}\,cm^2$ 14.118) 3 : 1 14.119) $V = \frac{4\ell^3\sqrt{15}}{75}$

14.120) $S_r = \frac{3\ell^2\sqrt{6}}{5}$; $V = \frac{\ell^3\sqrt{15}}{25}$

14.121) $V = 1\,125\sqrt{2}\,cm^3$ 14.122) $a = 2\sqrt[3]{3}\,cm$

14.123) Se MN = a é a aresta do octaedro, então AC = 2MN = 2a é a aresta do tetraedro.
Para o octaedro regular, temos $V_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ (veja item 14.3) e para o tetraedro, temos $V_2 = \frac{(2a)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{8a^3\sqrt{2}}{12}$ (veja exercício 14.1).
Assim, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$.



14.124) $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ 14.125) $b = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ 14.126) $a(2 - \sqrt{2})$

14.127) $2a^2\sqrt{3}$ 14.128) $\sqrt{2}\,m$ 14.129) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$

14.130) $\frac{18}{\sqrt[3]{4}}\,cm^2$ 14.131) $\frac{1}{26}$ 14.132) $\frac{7}{19}$

14.133) 1 : 7 : 19 14.134) $1 : (\sqrt[3]{2} - 1) : (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$

14.135) $x = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$ (h = altura da pirâmide) 14.136) $\frac{h}{\sqrt[3]{9}}$

14.137) 2 cm 14.138) $4\sqrt{3}\,cm$ e $20\sqrt{3}\,cm$; $\sqrt{481}\,cm$

14.139) $9\sqrt{3}\,cm$; $6\sqrt{3}\,cm$ 14.140) $\sqrt{3}\,cm$; 15 cm

14.141) 10 cm 14.142) $\frac{(a-b)\sqrt{6}}{6}$

14.143) $\frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}$; a − b; 45°; $\frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}$

14.144) $15\sqrt{2}\,cm$; $10\sqrt{5}\,cm$; $5\sqrt{19}\,cm$

14.145) a) $360 + 34\sqrt{3}\,cm^2$ b) $616\,cm^2$ c) $720 + 204\sqrt{3}\,cm^2$

14.146) $1\,260\,cm^2$ 14.147) a) $2a^2\sqrt{39}$ b) $8a^2\sqrt{5}$ c) $12a^2\sqrt{7}$

14.148) $3\,480\,cm^2$ 14.149) $23\sqrt{3}\,cm^2$ 14.150) $180\sqrt{3}\,cm^2$

14.151) $45\sqrt{15}\,cm^2$ 14.152) $392\,cm^2$ 14.153) $8\sqrt{97}\,cm^2$

14.154) $405\sqrt{7}\,cm^2$ 14.155) $\left(8 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)cm$ e $\left(8 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)cm$

14.156) $162\sqrt{7}\,cm^2$ 14.157) $\frac{a\sqrt{35}}{10}$ 14.158) $70\,cm^2$

14.159) $\frac{ab}{a+b}$ 14.160) 6 cm 14.161) 2 cm e 10 cm

14.162) $\frac{56}{9}\,cm$ 14.163) 2 cm 14.164) $12\,cm^2$

14.165) $\frac{Q-q}{2}$ 14.166) $24\,m^2$ 14.167) 39 m e 51 m

14.168) $32\,m^2$ 14.169) $\frac{3h}{5}$ 14.170) 3 cm

14.171) a) $S_1 = 36\,m^2$ e $S_2 = 16\,m^2$ b) $V_T = \frac{380}{3}\,m^3$

14.172) $V = 140\,cm^3$ 14.173) $V = 1\,072\,cm^3$ 14.174) $V = 436\sqrt{3}\,m^3$

14.175) $V = \frac{35\sqrt{3}}{3}\,cm^3$ 14.176) $V = \frac{140}{3}\,cm^3$ 14.177) $V = 70\sqrt{3}\,cm^3$

14.178) $V = \frac{152\sqrt{3}}{3}\,cm^3$ 14.179) $V = \frac{608}{3}\,cm^3$ 14.180) $114\sqrt{3}\,cm^3$

14.181) $V = \frac{112\sqrt{3}}{9}\,cm^3$ 14.182) $V = \frac{224\sqrt{2}}{3}\,cm^3$ 14.183) $V = 672\,cm^3$

14.184) $V = \frac{38\sqrt{2}}{3}\,m^3$ 14.185) $V = \frac{76\sqrt{2}}{3}\,m^3$

14.186) Não existe o tronco. 14.187) $V = 78\sqrt{3}\,cm^3$

14.188) $V = 52\sqrt{30}\,cm^3$ 14.189) $V = 468\,cm^3$ 14.190) $V = \frac{117\sqrt{3}}{4}\,cm^3$

14.191) $V = \frac{21\,R^3}{32}$ 14.192) $V = 19\,cm^3$ 14.193) $V = 2\,688\,cm^3$

14.194) $V = 13\,584\ cm^3$ 14.195) 5 cm e 7 cm

14.196) $\frac{832\sqrt{3}}{3}\ cm^2$ 14.197) $V = 1\,140\ m^3$ 14.198) $V = 216\ m^3$

14.199) $V = 1\,029\ m^3$ 14.200) 3 cm e 5 cm; 15 cm

15.3) $A = 15;\ V = 9$ 15.4) $A = 21;\ V = 12$ 15.5) $V = 20$

15.6) $F = 5$ 15.7) $A = 23;\ V = 14$ 15.8) $V = 12$

15.9) 14π rad 15.10) triângulo 15.11) pentágono

15.12) hexágono 15.13) $F = 4$

15.14) dez faces triangulares e duas pentagonais

15.15) três faces quadrangulares e cinco hexagonais

15.16) 12π 15.17) $V = 10$ 15.18) $V = 5;\ A = 9;\ F = 6$

15.19) Tem se $V = F$, donde $A = V + F - 2 = 2(V - 1)$. 15.20) não

15.21) $V = \frac{a(n-2) + b(m-2) + c(r-2)}{2} + 2$

15.22) cinco quadriláteros e dois pentágonos 15.23) $V = n + 1$

15.24) $A = \frac{n}{2} + 1$ 15.25) $V = 21;\ A = 35$ 15.26) $V = 19$

15.27) $F = 8$ 15.28) $A = 117$ 15.29) $F = 23$

15.30) par 15.31) par 15.32) $A = 5;\ V = 4;\ F = 2$

15.33) $A = 10;\ V = 6;\ F = S$ 15.34) $A = 28;\ V = 12;\ F = 17$

15.35) $A = 9;\ V = 7;\ F = 3$ 15.36) $A = 27;\ V = 19;\ F = 9$

15.37) $h = \frac{3V}{a^2}$ 15.38) $\frac{2S}{5a}$ 15.39) $\frac{3V}{7a^2}$ 15.40) $\frac{4V\sqrt{3}}{7a^2}$ 15.41) $a^2\sqrt{3}$

15.42) $6a^2\sqrt{3}$ 15.43) $2\sqrt{3}$ 15.44) $\frac{a^3}{3}$ 15.45) $1:1$ 15.46) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

15.47) $4:1$ 15.48) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 15.49) $6:1$ 15.50) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ 15.51) $8\sqrt{3}\ cm^2$

15.52) 18 15.53) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ 15.54) $F = 5$

15.55) $6a^2$ 15.56) $A = 15$ 15.57) $V = 16$ 15.58) 5 760°

16.2) a) $r = \frac{\sqrt{3}}{2}\ cm$ b) $S_b = \frac{3\pi}{4}\ cm^2$ c) $S_\ell = 4\pi\sqrt{3}\ cm^2$ d) $S_t = \frac{\pi}{2}(3 + 8\sqrt{3})\ cm^2$

16.3) a) $r = \sqrt{10}\ cm$ b) $h = \frac{3}{2}\ cm$ c) $S_\ell = 3\pi\sqrt{10}\ cm^2$ d) $S_t = \pi(20 + 3\sqrt{10})\ cm^2$

16.4) $V = 16\pi\sqrt{2}\ cm^3$ 16.5) $r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}\ cm \cong 5{,}4\ cm$

16.6) a) $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}\ cm$ b) $V = \frac{32\pi\sqrt{6}}{9}\ cm^3$

16.7) a) $V = 5\pi$ b) $V = 6\sqrt{3} + \frac{5\pi}{4}$ c) $V = 6\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}$

16.8) $h = 2\ cm$ 16.9) $\frac{1}{2}$

16.10) a) $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ b) $S_\ell = \frac{4\pi\sqrt[3]{V^2}}{\sqrt[3]{4\pi^2}}$ 16.11) $r = 6\ cm$

16.12) a) $r = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\pi}}$ b) $V = \frac{A\sqrt{A}}{4\sqrt{\pi}}$ 16.13) $\frac{r}{R}$

16.14) $V = 6{,}9\pi\ cm^3$ 16.15) a) $r = a\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ b) a embalagem cilíndrica

16.16) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$ 16.17) $V = \frac{\pi a^3}{4}$ 16.18) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$

16.19) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ 16.20) $V = \frac{PRh}{2}$ 16.21) $S = 25\pi\sqrt{3}\ cm^2$

16.22) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$ 16.23) $\frac{\pi S}{4}$ 16.24) 8 cm

16.25) $336\ cm^2$ 16.26) $2\sqrt{7}\ cm$ 16.27) $1\,920\ cm^2$

16.28) $r = 5\sqrt{3}\ cm;\ h = 15\ cm$ 16.29) 6 cm 16.30) $1:2$

16.31) $\frac{a^2}{4\pi}$ 16.32) 90° 16.33) $\frac{\ell\sqrt{5}}{2}$ 16.34) $20\sqrt{3}\ cm^2$

16.35) $a^2\sqrt{2}$ 16.36) $\frac{5\sqrt{3}}{3}\ cm$ 16.37) $256\sqrt{3}\ cm^2$ 16.38) $\frac{d\sqrt{10}}{4}$

16.39) $640\ cm^2$ 16.40) $4\,968\ cm^2$ 16.41) $120\ cm^2$ 16.42) $9\pi\ cm^2$

16.43) $25\sqrt{2}$ cm   16.44) $a\sqrt{6}$ 16.45) $2a^2\sqrt{6}$

16.46) $2S\sqrt{3}$ 16.47) $180\sqrt{3}$ cm²   16.48) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ cm; $\frac{25}{2}$ cm

16.49) $\pi\ell^2$ 16.50) $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ 16.51) 4 : 1   16.52) πS 16.53) $\frac{\pi\ell^2\sqrt{3}}{4}$ 16.54) 8 : 1

16.55) $\frac{h}{r} = 4 \pm 2\sqrt{3}$ 16.56) $2\pi : 3$ 16.57) $\frac{3r^2\sqrt{51}}{4}$ 16.58) $\frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$

16.59) $\frac{3r}{\pi}$ 16.60) 2 : 1   16.61) $\pi a^2 (4 + \sqrt{6})$

16.62) $2\sqrt{2} : \pi$ 16.63) $6 : \pi$ 16.64) 1 : 1

16.65) b : a   16.66) $\frac{2\pi S\sqrt{3}}{3}$ 16.67) $\pi S\sqrt{2}$ 16.68) $\frac{d^2(3 + 2\pi\sqrt{3})}{8\pi}$

16.69) $\frac{2a}{\sqrt{\pi}}$ 16.70) 200π cm²   16.71) $\frac{25(8\pi + 3\sqrt{3})}{3}$ 16.72) $\frac{10}{\pi}$ m²

16.73) $1\,380\pi$ cm²   16.74) $1\,400\pi$ cm² ou $1\,050\pi$ cm²

16.75) $16\pi(4 + 3\sqrt{2})$ cm²   16.76) 1 : 1   16.77) 2 : 9

16.78) 1 : 3   16.79) $V = 500\pi$ cm³   16.80) $V = \frac{\pi S\sqrt{S}}{4}$

16.81) $V = 90\pi$ cm³   16.82) $V = 252\pi$ cm³   16.83) $\frac{15}{\pi}$ cm

16.84) $V = 252\pi$ cm³ ou 294π cm³   16.85) $V = \frac{3\pi\ell^3}{32}$ 16.86) $V = 108\pi$ cm³

16.87) $V = 343\pi$ cm³   16.88) $V = \frac{a^3}{4\pi}$ 16.89) $V = 6 \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$

16.90) $\sqrt[3]{\frac{16\,V^2}{\pi^2}}$ 16.91) $\frac{2a}{\sqrt[3]{2\pi}}$ 16.92) $\sqrt[3]{9\pi}$

16.93) 4 : 1   16.94) 2 : 1   16.95) 4 : 3

16.96) $V = \frac{2V}{\pi}$ 16.97) $V = \frac{4V}{\pi}$ 16.98) $V = \frac{3V\sqrt{3}}{4\pi}$

16.99) $V = \frac{\pi\ell^3\sqrt{3}}{16}$ 16.100) $V = 48\pi\sqrt{3}$ cm³   16.101) $V = \frac{\pi a^3}{2}$

16.102) $V = 375\pi$ cm³   16.103) $V = 6\pi$ cm³   16.104) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

16.105) 54π 16.106) 24π 16.107) $V = 24\pi$ cm³

16.108) $V = \frac{2\pi^2 r^3\sqrt{3}}{3}$ 16.109) $V = 12$ cm³   16.110) $V = \frac{3\pi h^3}{16}$

16.111) $V = \frac{3\pi a^3}{4}$ 16.112) $V = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³   16.113) $V = \frac{4a^3\sqrt{6}}{9}$

16.114) $V = 54\pi$ cm³   16.115) $12\pi\sqrt{2} : 1$

17.4) a) $g = 5$ m   b) $S_b = 9\pi$ m²   c) $S_\ell = 15\pi$ m²   d) $S_t = 24\pi$ m²   e) $V = 12\pi$ m³

17.5) a) $r = \sqrt{5}$ cm   b) $h = \sqrt{31}$ cm   c) $S_\ell = 6\pi\sqrt{5}$ cm²   d) $S_t = \pi(5 + 6\sqrt{5})$ cm²
e) $V = \frac{5\pi\sqrt{31}}{3}$ cm³

17.6) a) $r = \frac{7\sqrt{5}}{5}$ cm   b) $h = \frac{14\sqrt{5}}{5}$ cm   c) $S_b = \frac{49\pi}{5}$ cm²   d) $S_\ell = \frac{49\pi\sqrt{5}}{5}$ cm²
e) $S_t = \frac{49\pi}{5}(1 + \sqrt{5})$ cm²   f) $V = \frac{686\pi\sqrt{5}}{75}$ cm³

17.7) $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³   17.8) $g = \sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{10}$ cm   17.9) $S_t = 108\pi$ cm²

17.10) $h = 3\sqrt{2}$ cm   17.11) $V = \frac{8\pi}{3}(9 - \sqrt{17})$ 17.12) $V = 24\pi$ m³

17.13) $r = \frac{72}{5\pi}$ cm   17.14) $r = 2\sqrt{3}$ cm   17.15) $V = \frac{125\pi}{9}$ cm³

17.16) $h = \pi\sqrt{3}$ cm   17.17) $S_\ell = \frac{\pi\sqrt{5}}{4}$ cm²   17.18) $V = \frac{8}{3}\pi r^3$

17.22) 36π cm²   17.23) 9π cm²   17.24) 55 m

17.25) a) $S_1 = 36\pi$ cm²; $S_2 = 16\pi$ cm²   b) $V_T = \frac{380\pi}{3}$ cm³   17.26) $V_T = 420\pi$ cm³

17.27) $V_T = 63\pi\sqrt{3}$ cm³   17.28) 6 cm   17.29) $\frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}}$

17.30) $50\pi\sqrt[3]{2}$ cm²   17.31) $\frac{\pi}{2}$ 17.32) $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{108}$

17.33) $\frac{8}{3}$ V   17.34) $5\sqrt{2}$ cm; 25π cm²   17.35) 30°

17.36) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 17.37) 45° 17.38) $\frac{\ell^2}{2}$ 17.39) $\frac{h^2\sqrt{3}}{3}$ 17.40) 48 cm² 17.41) $\frac{2r^2}{3}$

17.42) 216 m² 17.43) π 17.44) $\sqrt{2}$ 17.45) 12 cm 17.46) 10 cm 17.47) $h\sqrt{2}$

17.48) $2\sqrt{2}$ 17.49) $\frac{a(2+\sqrt{6})}{3}$ 17.50) $\frac{a^2\sqrt{3}(7+4\sqrt{3})}{12}$ 17.51) $\frac{a^2\sqrt{3}(11+4\sqrt{6})}{6}$

17.52) S 17.53) 2r 17.54) $\sqrt{\frac{3S}{2\pi}}$ 17.55) 15π cm² 17.56) 120°

17.57) 1 : 1 17.58) 30° 17.59) $\frac{\pi P^2}{4}(\sqrt{2}-1)$ 17.60) $\frac{4\,080\pi}{13}$ cm²

17.61) $\frac{8\pi a^2\sqrt{3}}{2}$ 17.62) $\frac{2\pi S\sqrt{6}}{3}$ 17.63) 10 cm

17.64) $360° \cdot \frac{r}{g}$ 17.65) $\frac{405\pi}{4}$ cm² 17.66) $\frac{5S}{4}$ 17.67) 60° 17.68) 24 cm²

17.69) $\frac{7+4\sqrt{3}}{6}$ 17.70) $312\pi\sqrt{2}$ cm² 17.71) $\frac{32}{7}$ cm e $\frac{80}{7}$ cm

17.72) $\frac{13\pi\ell^2}{8}$ 17.73) $\frac{3\pi\ell^2}{2}$ 17.74) $\frac{11\pi R^2}{4}$

17.75) 16 cm 17.76) $10\sqrt{15}$ cm 17.77) 260π cm²

17.78) 9 cm 17.79) $\pi\ell^2$ 17.80) $100\pi\sqrt{6}$ cm²

17.81) $36\sqrt{247}$ cm² 17.82) $\frac{H^2}{2}$ 17.83) $\frac{R^2-r^2}{2}$

17.84) $\frac{r^2\sqrt{7}}{4}$ 17.85) $\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$ 17.86) 500 cm²

17.87) $\frac{2H}{3}$ e $\frac{H}{3}$ 17.88) 4 cm 17.89) $d = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

17.90) $r_2 = 10\sqrt{3}$ cm 17.91) $V = \frac{2\pi}{3}$ 17.92) $\frac{9}{2}V$

17.93) reduzido à metade 17.94) $V = \frac{dS}{3}$ 17.95) $V = \frac{\ell S}{6}$

17.96) $V = \frac{\ell^2}{24\pi^2} \cdot \sqrt{(2\pi g)^2 - \ell^2}$ 17.97) $V = 16\pi$ cm³ 17.98) $V = 12\pi$ cm³

17.99) $V = 600\pi$ cm³ ou 320π cm³ 17.100) $h = \frac{3r}{\sqrt{r^2-9}}$

17.101) $h = \frac{6r^2}{r^2-9}$ 17.102) h = 3 17.103) 240°

17.104) 1 : 4 17.105) 144π cm³; 192π cm³

17.106) $\frac{\pi}{72}(2+\sqrt{6})^3$ 17.107) $V = \frac{10\pi h^3}{9}$ 17.108) $\frac{\pi}{12}$ 17.109) $\frac{\pi}{12}$ 17.110) $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$

17.111) $V_T = 504\pi$ cm³ 17.112) 24 cm; 25 cm 17.113) 75π m²

17.114) $V_T = \frac{7\pi\ell^3\sqrt{3}}{24}$ 17.115) $V_T = \frac{\pi a^3(3+\sqrt{2})}{12}$ 17.116) 256π cm²

17.117) $V_T = \frac{5\pi\ell^3\sqrt{3}}{48}$ 17.118) $V_T = \frac{37\pi d^3}{72}$ 17.119) $V_T = 1\,480\pi$ cm³

17.120) $V_T = \frac{7\pi R^3}{3}$ 17.121) $V_T = \frac{7\pi a^3\sqrt{2}}{6}$ 17.122) $3r_1 = 2r_2$

17.123) $r_2 = \frac{r_1(\sqrt{5}+1)}{2}$ 17.124) $V_T = \frac{7\pi a^3\sqrt{6}}{27}$ 17.125) 7 cm

17.126) $V = 28\pi r^3$ (r = raio da base menor) 17.127) $\frac{4r}{5}$

17.128) $V = \frac{36\pi r^3}{5}$ 17.129) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ 17.130) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

17.131) $\frac{\pi V\sqrt{3}}{3}$ 17.132) $V_T = \frac{7\pi V\sqrt{3}}{27}$ 17.133) $\frac{(7+\sqrt{6})\pi a^3}{36}$

17.134) $\frac{1\,024\pi}{25}$ cm² ou $\frac{2\,304\pi}{25}$ cm² 17.135) 8 cm

17.136) $\frac{7V}{27}$ 17.137) 1 : 26 ou 8 : 19 17.138) 19 : 37 : 61 17.139) $\frac{R^3-r^3}{R^3}$

17.140) $\frac{7}{19}$ 17.141) $1 : (2\sqrt{2}-1) : (3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

17.142) a) $2\pi c$ b) πc^2 c) πbc d) $\frac{\pi ac^2}{3}$

17.143) a) $(11+\sqrt{2})\pi a^2$ b) $\frac{11\pi a^3}{3}$

17.144) a) $\frac{3\pi a^2\sqrt{3}}{16}$ b) $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$

17.145) a) $4\pi a^2\sqrt{3}$ b) $\frac{3\pi a^3}{2}$

17.146) a) $6(2+\sqrt{2})\pi a^2$ b) $6\pi a^3$

17.147) a) $1\,344\pi$ cm² b) $5\,376\pi$ cm³

17.148) a) $\frac{\pi a^2(3+5\sqrt{3})}{2}$ b) πa^3

17.149) a) $2\pi a^2\sqrt{3}$ b) πa^3

17.150) a) $\pi a^2(6+\sqrt{3})$ ou $\pi a^2(6-\sqrt{3})$ b) $\frac{\pi a^3}{4}(2\sqrt{3}+1)$ ou $\frac{\pi a^3}{4}(2\sqrt{3}-1)$

17.151) a) $6\pi a^2\sqrt{3}$ b) $\frac{9\pi a^3}{2}$ 17.152) a) $6\pi a^2$ b) $\frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{4}$

17.153) a) 510π cm² b) 720π cm³

17.154) $V = \frac{4\,800\pi}{13}$ cm³ 17.155) $V = \frac{\ell S}{3}$ 17.156) $V = 3\,525\pi$ cm³

17.157) $V = \frac{4\pi S^2}{3a}$ 17.158) $V = 378\pi$ cm³

18.10) a) $V = \frac{9\pi}{2}$ m³ b) $S = 9\pi$ m² c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m d) $p = \frac{\sqrt{6}}{2}$ m, $p' = \frac{\sqrt{30}}{2}$ m

18.11) a) $r = 3$ cm b) $S = 36\pi$ cm² 18.12) $V = \frac{\pi a^3}{6}$

18.13) a) $r = 2\sqrt{3}$ cm b) $V = 32\pi\sqrt{3}$ cm³ c) $S = 48\pi$ cm²

18.14) $d = 3\sqrt{2}$ cm 18.15) $d = 5$ cm 18.16) $V = \frac{\pi a^3}{6}$

18.17) 1 18.18) $\frac{9}{32}$ 18.19) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$ 18.20) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ 18.21) $\frac{4}{9}$ 18.22) $2\sqrt{2}$

18.23) $\sqrt[3]{4}$ 18.24) 48π 18.25) $d = 14$ cm ou $d = 2$ cm

18.26) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ cm 18.27) 9 cm 18.28) 1 : 2 : 3

18.29) $\frac{3\pi r^2}{4}$ 18.30) $\frac{\pi r^2}{2}$ 18.31) 30°

18.32) 12 cm 18.33) 24 cm 18.34) 33,8 cm

18.35) 12π cm 18.36) $\pi r\sqrt{3}$ 18.37) $\frac{S}{2}$

18.38) 2,4 cm 18.39) 0,25 cm 18.40) 3,5 cm

18.41) $\frac{a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}$ 18.42) $V = \frac{8r^3\sqrt{3}}{27}$ 18.43) $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$, $S = \frac{3\pi a^2}{2}$

18.44) $V = \frac{250\sqrt{6}}{9}$ cm³ 18.45) $\frac{a\sqrt{6}}{8}$ 18.46) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

18.47) $\frac{9}{16}$ 18.48) $\frac{16}{9}$ 18.49) $V = \frac{3\pi r^3}{8}$ 18.50) $\pi h\sqrt{2R(2R-h)}$

18.51) $\frac{4\pi r R^2}{2R-r}$ 18.52) $\frac{4}{21}$ 18.53) $H = 3R$ ou $H = 4R$

18.54) $V = \frac{26\pi R^3}{9}$ 18.55) S 18.56) $\frac{S}{2}$

18.57) S 18.58) 576π cm² 18.59) $\frac{2S}{3}$

18.60) $\sqrt{\frac{\pi S}{3}}$ 18.61) $\frac{100\pi}{3}$ cm² 18.62) $1\,100\pi$ cm² e 400π cm²

18.63) $2\,500\pi$ cm² 18.64) 25% 18.65) $\frac{\pi r^2}{2}(5-2\sqrt{2})$

18.66) $\frac{21\pi S}{4\pi-3\sqrt{3}}$ 18.67) 60° 18.68) $r(\sqrt{3}-1)$

18.69) V 18.70) 4d 18.71) 36π

18.72) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ 18.73) $\frac{125}{27}$ cm 18.74) $\frac{512\pi(16-9\sqrt{3})}{3}$

18.75) $\frac{37\,532\pi}{3}$ cm³ e $\frac{11\,968\pi}{3}$ cm³ 18.76) $V = \frac{5\pi r^3}{12}$

18.77) $V = \frac{2\pi R^3(9-4\sqrt{3})}{27}$ 18.78) $\frac{5\pi R^3}{24}$ e $\frac{11\pi R^3}{24}$

18.79) $\frac{5V}{72}$ e $\frac{3V}{8}$ 18.80) $V = 4\,500\pi$ cm³

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

I.1) Ela tem dois pontos distintos que pertencem ao plano (postulado P6).

I.2) Mesma justificativa do exercício anterior.

I.3) a) infinitos b) infinitos c) um d) um ou quatro

I.4) um ou quatro ou seis

I.5) a) Se $\overleftrightarrow{AB} \cap r = \{P\}$, então $\alpha \cap \text{pl}(A, B, C) = \overleftrightarrow{CP}$.

b) Se $\overleftrightarrow{AB} \parallel r$, então $\alpha \cap \text{pl}(A, B, C)$ é a reta por C, paralela à reta r (teorema T4).

I.6) a) Se $r \parallel \alpha$, então $r \cap \alpha = \varnothing$.

b) Se r fura α, tome $A \in \alpha$. Se $A \in r$, então $r \cap \alpha = \{A\}$. Se $A \notin r$, seja $\beta = \text{pl}(r, A)$. Pelo postulado P8, $\alpha \cap \beta = s$. Seja $r \cap s = \{P\}$. Então, $r \cap \alpha = \{P\}$.

I.7) a) Se $\alpha \parallel \text{pl}(A, B, C) = \beta$, então $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

b) Se α não é paralelo a $\beta = \text{pl}(A, B, C)$, é claro que, das retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, *no máximo uma* poderia ser paralela a α. Assim, duas delas furam α em pontos distintos P e Q. Então, $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{PQ}$.

I.8) a) Se $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, então $\overleftrightarrow{DE} \cap \alpha = \varnothing$.

b) Se $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ são concorrentes, $\overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{P\}$, então $\overleftrightarrow{DE} \cap \alpha = \{P\}$.

I.9) É a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

I.10) Tome o plano β por r e considere a reta $t = \alpha \cap \beta$.

I.11) O plano $\beta = \text{pl}(A, E, F)$ intercepta α segundo uma reta s que passa por A. Se $\overleftrightarrow{EF} \parallel s$, então $\overleftrightarrow{EF} \cap \alpha = \varnothing$. Se $\overleftrightarrow{EF} \cap s = \{P\}$, então $\overleftrightarrow{EF} \cap \alpha = \{P\}$.

I.12) um, dois ou três planos I.13) reversa ou concorrente I.14) reversa, concorrente, paralela ou coincidente I.15) reversa, concorrente ou paralela I.16) paralela ou coincidente

I.17) reversa ou concorrente I.18) reversa ou concorrente I.19) reversa ou concorrente

I.20) reversa, concorrente ou paralela I.21) reversa, concorrente, paralela ou coincidente

I.22) Se r e s são concorrentes, a reta t, concorrente com ambas, ou passa pela interseção delas, ou está contida em pl (r, s) (veja exercício I.2). O mesmo deverá ocorrer com as outras sete retas

I.23) Se a figura tem menos de quatro pontos, ela é plana. Se há mais de quatro pontos, tomemos os pontos A, B e C. Qualquer outro ponto forma com A, B e C um conjunto coplanar. Assim, todos os pontos da figura pertencem ao plano pl (A, B, C).

I.24) Todas estão contidas no plano paralelo ao plano dado, conduzido pelo ponto dado.

I.25) reversa ou paralela I.26) reversa ou concorrente I.27) reversa, concorrente, paralela ou coincidente I.28) reversa ou concorrente I.29) paralelo ou secante I.30) paralelo, secante ou α contém a reta I.31) paralelo ou α contém a reta

I.32) Se r não está contida em β e é paralela a uma reta de β, então $r \parallel \beta$, logo $r \parallel \alpha \cap \beta$. Se $r \subset \beta$, então $r = \alpha \cap \beta$ e, neste caso, $s \parallel \alpha \cap \beta$. I.33) Basta tomar retas paralelas à interseção.

I.34) É a reta $\alpha \cap \text{pl}(A, r)$.

I.35) Se β é o plano paralelo a α conduzido por A, e P é o ponto onde r fura β, então a reta pedida é $\overleftrightarrow{AP}$. Se $A \in r$, qualquer reta por A, contida em β, satisfaz.

II.1) Se dois lados opostos fossem paralelos, haveria um plano contendo os quatro vértices, o que é absurdo.

II.2) Se as diagonais fossem coplanares, todos os vértices pertenceriam a um mesmo plano.

II.3) a) F b) V c) V d) F e) V

II.4) Temos $\text{med}(A\hat{P}B) = \text{med}(C\hat{P}D)$, logo

$$\text{med}(A\hat{P}C) = \text{med}(A\hat{P}B) + \text{med}(B\hat{P}C) =$$
$$= \text{med}(C\hat{P}D) + \text{med}(B\hat{P}C) = \text{med}(B\hat{P}D)$$

II.5) $\text{med}(A\hat{P}B) = \text{med}(A\hat{P}C) - \text{med}(B\hat{P}C) = 90° - \text{med}(B\hat{P}C)$ e

$\text{med}(C\hat{P}D) = \text{med}(B\hat{P}D) - \text{med}(B\hat{P}C) = 90° - \text{med}(B\hat{P}C)$

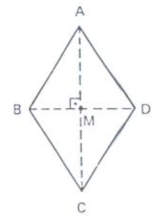
Assim, $\text{med}(A\hat{P}B) = \text{med}(C\hat{P}D)$

II.6) $\text{med}(B\hat{O}D) = \text{med}(B\hat{O}N) + \text{med}(N\hat{O}D) = \text{med}(B\hat{O}N) + \text{med}(C\hat{O}N)$

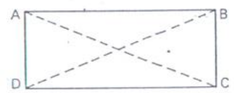
$\text{med}(A\hat{O}C) = \text{med}(A\hat{O}M) + \text{med}(M\hat{O}C) = \text{med}(M\hat{O}B) + \text{med}(M\hat{O}C)$

$$\text{med}(B\hat{O}D) + \text{med}(A\hat{O}C) = [\text{med}(M\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}N)] + [\text{med}(M\hat{O}C) + \text{med}(C\hat{O}N)] =$$
$$= \text{med}(M\hat{O}N) + \text{med}(M\hat{O}N) = 2\,\text{med}(M\hat{O}N) = 180°$$

II.7) Basta notar que o ponto M, interseção das diagonais, é ponto médio de $\overleftrightarrow{BD}$, logo $\overleftrightarrow{AM}$ é altura e mediana do $\triangle ABD$. Assim, este triângulo é isósceles: $\overleftrightarrow{AB} \equiv \overleftrightarrow{AD}$.



II.8) Se $AC = BD$, então, pelo L L L, $\triangle ADC \equiv \triangle BCD$, logo $A\hat{D}C \equiv B\hat{C}D$.
Mas $\text{med}(A\hat{D}C) + \text{med}(B\hat{C}D) = 180°$, portanto $A\hat{D}C$ e $B\hat{C}D$ são retos.



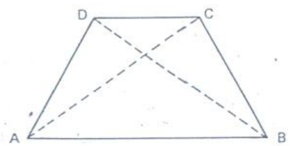
II.9) Veja a figura do exercício II.7. Como ABCD é losango, suas diagonais se cortam ao meio (exercícios 6.37 e 6.35). Assim, no $\triangle ABD$, $\overleftrightarrow{AM}$ é mediana. Como esse triângulo é isósceles, resulta que $\overleftrightarrow{AM}$ é também altura, logo $\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BD}$ (exercício 6.11).

II.10) Veja a figura do exercício II.7. No $\triangle ABD$, $\overleftrightarrow{AM}$ é mediana, logo é também bissetriz interna (veja exercício 6.12).

II.11) Pelo exercício 6.48, $B\hat{A}D \equiv A\hat{B}C$, logo

$\triangle ABD \equiv \triangle BAC$ (L A L). Assim,

$$\overleftrightarrow{BD} \equiv \overleftrightarrow{AC}$$

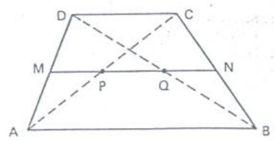


II.12) Veja exercícios 6.38 e 6.39. Temos

$$MP = \frac{1}{2} CD \quad e \quad PN = \frac{1}{2} AB$$

donde

$$MN = MP + PN = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

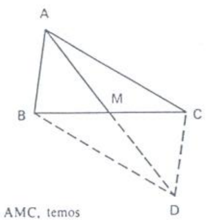


II.13) $\frac{b-a}{2}$

II.14) 24 cm

II.15) Prolongando a mediana até o ponto D tal que MD = AM, obtém-se o paralelogramo ABDC. No $\triangle ABD$, temos $AD < AB + BD$. Como $AD = 2AM$ e $AC = BD$, vem $2AM < AB + AC$ e, assim

$$AM < \frac{AB + AC}{2}$$



II.16) Veja a figura anterior. Nos triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle AMC$, temos

$$AM + \frac{BC}{2} > AB \quad e \quad AM + \frac{BC}{2} > AC$$

Somando, vem: $2AM + BC > AB + AC$, donde

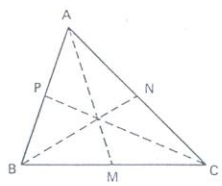
$$AM > \frac{AB + AC - BC}{2}$$

II.17) Aplicando o exercício II.15, temos:

$$AM < \frac{AB + AC}{2}$$

$$BN < \frac{AB + BC}{2}$$

$$CP < \frac{AC + BC}{2}$$



Somando:

$$AM + BN + CP < AB + AC + BC$$

II.18) Aplicando o exercício II.16 (veja a figura anterior) temos:

$$AM > \frac{AB + AC - BC}{2}$$

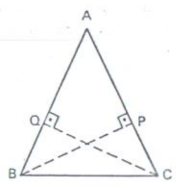
$$BN > \frac{AB + BC - AC}{2}$$

$$CP > \frac{AC + BC - AB}{2}$$

Somando:

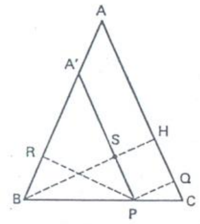
$$AM + BN + CP > \frac{AB + AC + BC}{2}$$

II.19) Se o $\triangle ABC$ é isósceles, então $\hat{B} \equiv \hat{C}$ e assim, $\triangle BCQ \equiv \triangle CBP$ (A.A L). Portanto, $BP = CQ$.



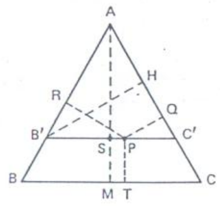
II.20) Sendo $\overleftrightarrow{PA'} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, o $\triangle A'BP$ é isósceles de base $\overline{BP}$. Assim, suas alturas relativas aos vértices da base são congruentes: $PR = BS$. PSHQ é um retângulo, logo $PQ = SH$. Assim

$$PR + PQ = BS + SH = BH$$

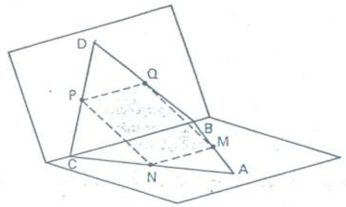


II.21) Sendo $\overleftrightarrow{B'C'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, podemos aplicar o exercício anterior ao $\triangle AB'C'$. Temos $PQ + PR = B'H = AS$. Como $PT = SM$, vem

$$PQ + PR + PT = AS + SM = AM$$



II.22) No $\triangle ABC$, temos $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e $MN = \frac{1}{2} BC$. No $\triangle BCD$, temos $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e $PQ = \frac{1}{2} BC$. Assim, $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{NM}$ e $PQ = NM$, o que significa que MNPQ é um paralelogramo (veja exercício 6.41).



III.1) Considere o plano α que contém A e é perpendicular à reta **r**. Pelo exercício 7.17, toda reta que passa por A e forma ângulo reto com **r** está contida em α.

III.2) Se a reta **r** passa por P e forma ângulo reto com as retas concorrentes **s** e **t**, então ela é perpendicular ao plano determinado por **s** e **t**. Pelo teorema T20, essa perpendicular existe e é única.

III.3) Tome por A a reta **s**, $s \perp \alpha$, e a reta **t**, $t \parallel r$. Se **r** e α são oblíquos, é claro que **s** e **t** são concorrentes. O plano $\beta = pl\ (s, t)$ é perpendicular a α (pois contém **s**) e paralelo a **r** (pois contém **t**).

III.4) $r \subset \alpha$

III.5) A reta **r** não está contida em α, podendo ser paralela, perpendicular ou oblíqua a α.

III.6) $\overleftrightarrow{BD} \perp pl\ (A, B, C)$; $\overleftrightarrow{BC} \perp pl\ (A, B, D)$

III.7) Se $s \perp \alpha$, $r \subset \alpha$, seja A a interseção de **s** e α. Tome em α a reta **t** que passa por A e é perpendicular a **r**. O plano $\beta = pl\ (s, t)$ contém **s** e é perpendicular a **r**.

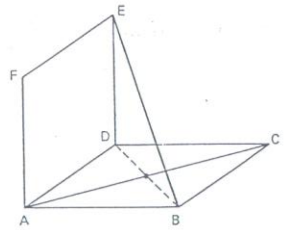
III.8) Como $\overleftrightarrow{BC}$ forma ângulo reto com duas retas concorrentes do pl (r, s), tem-se $\overleftrightarrow{BC} \perp pl\ (r, s)$, logo $\alpha \perp pl\ (r, s)$, pois α contém $\overleftrightarrow{BC}$.

III.9) Sendo M a interseção das diagonais do losango, e sendo isósceles o $\triangle$ BDP, tem-se $\overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{BD}$. Além disso, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$. Assim, $\overleftrightarrow{BD}$ é perpendicular a duas retas concorrentes do pl (A, C, P): $\overleftrightarrow{BD} \perp pl\ (A, C, P)$.

III.10) Como $\overleftrightarrow{ED} \perp \alpha$ e $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$, a reta $\overleftrightarrow{AC}$ forma ângulo reto com $\overleftrightarrow{ED}$ e $\overleftrightarrow{BD}$, logo

$$\overleftrightarrow{AC} \perp pl\ (B, D, E)$$

e assim, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BE}$.



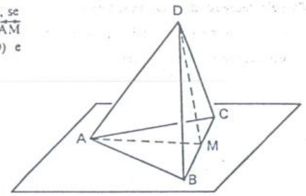
III.11) Como $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{MC}$ e $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{PM}$, então $\overleftrightarrow{BD} \perp pl\ (M, C, P)$. Assim, $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{PC}$.

III.12) Seja β o plano que contém **r** e é perpendicular a α. Se $t = \alpha \cap \beta$, tome por A a reta $s \perp t$. Como $s \perp \beta$, tem-se que **s** forma ângulo reto com a reta **r**.

III.13) Como $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AP}$, então $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular ao plano pl (A, P, M), logo $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AM}$. Assim, $\overleftrightarrow{AM}$ é altura do $\triangle$ ABC e como este triângulo é isósceles, $\overleftrightarrow{AM}$ é mediana. Assim, M é o ponto médio de $\overline{BC}$.

III.14) Se M é o ponto médio de $\overline{AB}$, temos $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CM}$ e $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DM}$, logo $\overleftrightarrow{AB} \perp pl\ (C, D, M)$. Assim, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

III.15) Como $\triangle$ABC e $\triangle$BCD são eqüiláteros, se M é o ponto médio de $\overline{BC}$, tem-se $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AM}$ e $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{DM}$, logo $\overleftrightarrow{BC} \perp pl\ (A, M, D)$ e assim, $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AD}$.



III.16) $180° - 2\alpha$ III.17) $180° - 2\alpha$ III.18) $360° - 4\alpha$ III.19) $0° < \alpha < 15°$
III.20) $\alpha < x < 360° - 3\alpha$

IV.1) Se O centro da superfície esférica dada é O e o ponto de tangência é A, então o lugar geométrico é $\overleftrightarrow{OA} - \{O, A\}$.

IV.2) Se $\alpha = pl\ (r, s)$, então o lugar geométrico é o plano $\beta \perp \alpha$ e eqüidistante das duas retas dadas.

IV.3) É a união dos dois planos paralelos ao plano dado, e à distância **r** dele.

IV.4) É a superfície esférica de diâmetro $\overline{AB}$.

IV.5) No plano do trapézio, as mediatrizes dos lados encontram-se num ponto O. O lugar geométrico é a reta por O, perpendicular ao plano do trapézio (o ponto O é o centro da circunferência circunscrita ao trapézio).

IV.6) É a reta perpendicular ao plano do triângulo, passando pelo seu incentro.

IV.7) É uma circunferência contida no plano dado, cujo centro é a projeção ortogonal de P nesse plano.

IV.8) Sejam A, B e C as interseções das três retas com um plano perpendicular a elas. O lugar geométrico é a reta paralela às retas dadas, passando pelo circuncentro do $\triangle$ ABC.

IV.9) É a união dos dois planos paralelos ao plano dado, à distância **a** dele.

IV.10) 60° IV.11) 160° IV.12) 40°, 80° e 60°

IV.13) É a circunferência de diâmetro $\overline{PO}$.

IV.14) É a interseção do círculo com a circunferência de diâmetro $\overline{PO}$.

IV.15) 105° IV.16) 32 cm² IV.17) $\dfrac{3ad}{4}$ IV.18) 65 cm

IV.19) a) 48 cm² b) 3 cm c) 4 cm

IV.20) 4 cm IV.21) 68 cm, 40 cm e 36 cm IV.22) 576 cm²

IV.23) 336 cm² IV.24) 3 cm IV.25) 6a IV.26) 17 cm IV.27) 3 : 2

IV.28) 5 cm; 19 cm IV.29) a) $\sqrt{ab}$; b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ IV.30) $a = \sqrt{b^2 + bc}$ IV.31) $\dfrac{bc\sqrt{2}}{b + c}$

IV.32) $\dfrac{4}{9}$ IV.33) $\dfrac{bc}{a}$ IV.34) $a\sqrt{2}$ IV.35) $2\sqrt{5}$ cm e $4\sqrt{5}$ cm IV.36) $\dfrac{xy}{z}$ IV.37) 6a

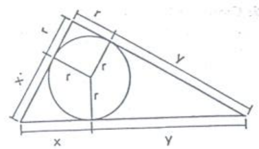
IV.38) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ IV.39) $\dfrac{3r\sqrt{7}}{4}$

IV.40) Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$(x + r)^2 + (y + r)^2 = (x + y)^2$$

donde, simplificando, vem

$$r(x + y + r) = xy$$



IV.41) $S = pr = \frac{(2x + 2y + 2r)}{2} \cdot r = r(x + y + r) = xy$ IV.42) $\frac{3\ell}{2}$ IV.43) $3\sqrt{3}$ cm

IV.44) $2\sqrt{2}$ cm   IV.45) $\frac{4}{13}$ IV.46) 60°   IV.47) $2R^2 \operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} \hat{B} \cdot \operatorname{sen}(\hat{A} + \hat{B})$

IV.48) A área é dada por $S = pr = \frac{abc}{4R}$. Assim, $abc = 4pRr$ (veja exercício 12.2).

IV.49) $\frac{441\pi}{20}$ IV.50) $3\pi + \sqrt{6}$ cm²

V.1) 12a, 15a, 16a

V.2) $\left(\text{aresta da base} = \frac{a}{2}, \text{ altura} = \frac{3a}{4}\right)$ ou $\left(\text{aresta da base} = \frac{2a}{3}, \text{ altura} = \frac{5a}{12}\right)$

V.3) (12 cm, 4 cm e 3 cm) ou (5 cm, $7 + \sqrt{23}$ cm e $7 - \sqrt{23}$ cm)   V.4) 56 cm²

V.5) 2 cm, $2 + \sqrt{3}$ cm e $2 - \sqrt{3}$ cm   V.6) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ V.7) 60 cm   V.8) 8 cm³

V.9) 6 cm, 10 cm e 15 cm   V.10) 3 cm e 6 cm   V.11) k metros   V.12) $4(\sqrt{2} + 2\sqrt{10})$ cm

V.13) $\frac{56\sqrt{11}}{3}$ cm²   V.14) $\frac{a^2}{2}$ V.15) 240 cm³   V.16) 32 cm²   V.17) $4\sqrt{61}$ cm²

V.18) 30 cm²   V.19) 250 cm²   V.20) 50 cm²   V.21) 5 cm   V.22) a^2 e $a^2\sqrt{2}$

V.23) $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ V.24) $720\sqrt{3}$ cm²   V.25) 540 cm²   V.26) 2 cm   V.27) 270 cm²

V.28) 240 cm²   V.29) $ab(\sqrt{3} + 1)$ V.30) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ V.31) $\frac{S^2}{2a}$ V.32) $\frac{S^2\sqrt{3}}{d}$

V.33) 1 680 cm³   V.34) $\frac{S\sqrt{6S}}{2\sqrt[4]{6}}$ V.35) $\frac{\ell^3\sqrt{2}}{8}$ V.36) 96 cm³   V.37) $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$

V.38) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ V.39) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ V.40) $\frac{3h}{2}$ V.41) $\frac{h}{2}$ V.42) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ V.43) $\frac{4a^3}{27}$

V.44) $\frac{132\sqrt{5}}{5}$ cm²   V.45) 3 : 1   V.46) $\frac{a^2(\sqrt{7} + 1)}{2}$ V.47) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ V.48) 400 cm³

V.49) 400 cm² e 100 cm²   V.50) $\frac{40}{21}$ cm²   V.51) $1 : (\sqrt{2} - 1)$ V.52) $\sqrt{m} : (\sqrt{n} - \sqrt{m})$

V.53) 36 cm   V.54) a) $d^2 = a^2 + c^2 - b^2$; b) $x^2 + z^2 - y^2$ V.55) $25\sqrt{2}$ cm²

V.56) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ V.57) $24\sqrt{3}$ cm²   V.58) 4S   V.59) 225 cm³   V.60) 560 cm³

V.61) $\frac{\ell^3}{24}$ V.62) 8 : 19   V.63) $\frac{Hk}{k - 1}$

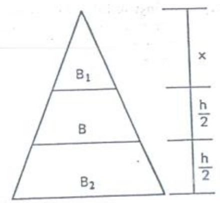
V.64) $\frac{4\sqrt{3} - 5}{2}$ cm e $\frac{4\sqrt{3} + 5}{2}$ cm

V.65) $2(\sqrt{3} - 1)$ m

V.66) $\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B_1}} = \frac{x + \frac{h}{2}}{x}$, donde

$$\frac{\sqrt{B} - \sqrt{B_1}}{\sqrt{B_1}} = \frac{h}{2x}$$

$$\frac{\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}} = \frac{x + h}{x}, \text{ donde } \frac{\sqrt{B_2} - \sqrt{B_1}}{\sqrt{B_1}} = \frac{h}{x}$$



Assim, $\sqrt{B_2} - \sqrt{B_1} = 2(\sqrt{B} - \sqrt{B_1})$, donde $2\sqrt{B} = \sqrt{B_2} + \sqrt{B_1}$. Elevando ao quadrado:

$$4B = B_1 + B_2 + 2\sqrt{B_1B_2}$$

donde

$$\sqrt{B_1B_2} = \frac{4B - B_1 - B_2}{2}$$

Sabemos que o volume do tronco é

$$V = \frac{h}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1B_2})$$

Assim,

$$V = \frac{h}{3}\left(B_1 + B_2 + \frac{4B - B_1 - B_2}{2}\right) = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4B)$$

V.67) 8 cm   V.68) 22 cm   V.69) $75\sqrt{7}$ cm²   V.70) 81 cm e 17 cm   V.71) $3\sqrt{53}$ cm
V.72) $18\sqrt{118}$ cm²   V.73) 17 cm, $4\sqrt{29}$ cm e $\sqrt{689}$ cm   V.74) 19,5 m³   V.75) $40\sqrt{6}$ cm²

VI.1) (Veja exercício 2.12.) A reta $\gamma \cap \delta$ passa por O e é paralela ao plano α. Pelo exercício 3.28, $\gamma \cup \delta \subset \beta$.

VI.2) Tome por O o plano $\beta \parallel \alpha$. A reta r fura β em A (exercício 3.25). A reta procurada é $\overleftrightarrow{OA}$.

VI.3) (Veja exercício II.22.) Os dois segmentos são as diagonais de um paralelogramo.

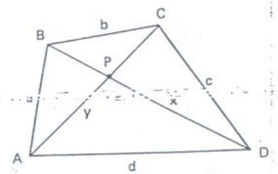
VI.4) No $\triangle$ABD: $x < a + d$
No $\triangle$BCD: $x < b + c$
No $\triangle$ABC: $y < a + b$
No $\triangle$ACD: $y < c + d$

Somando:

$$2x + 2y < 2a + 2b + 2c + 2d$$

donde

$$x + y < a + b + c + d$$



VI.5) No $\triangle$ABP: $a < AP + BP$
No $\triangle$BCP: $b < BP + CP$
No $\triangle$CDP: $c < CP + DP$
No $\triangle$DAP: $d < DP + AP$

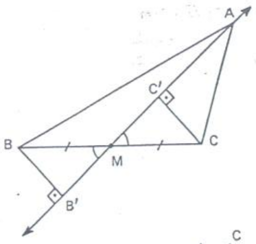
Somando:

$$a + b + c + d < 2(AP + BP + CP + DP)$$

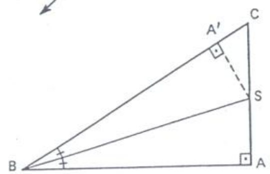
donde

$$a + b + c + d < 2(x + y)$$

VI.6) Os triângulos BB'M e CC'M são congruentes, pois são retângulos, têm hipotenusas congruentes e um ângulo agudo congruente. Assim, BB' = CC'.



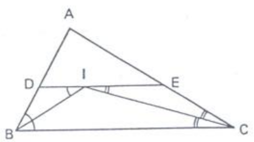
VI.7) Sendo $\overleftrightarrow{SA'} \perp \overleftrightarrow{BC}$, os triângulos ABS e A'BS são congruentes (AAL). Assim, AS = A'S. Mas $\overline{A'S}$ e $\overline{SC}$ são cateto e hipotenusa do △ A'SC, logo A'S < SC e então AS < SC.



VI.8) P é o pé da bissetriz interna relativa ao vértice C.

VI.9) O △ BID é isósceles, pois $B\hat{I}D \equiv I\hat{B}C \equiv I\hat{B}D$. Assim, BD = DI. Da mesma forma, CE = EI. Então,

$$BD + CE = DI + EI = DE$$



VI.10) Basta notar que AE = DF = BF e que ED = FA = CE. Assim,

$$AE + ED + DF + FA = BF + FA + BF + FA = 2\,(BF + FA) = 2\,(AB)$$

VI.11) a VI.12) $90° + \frac{\alpha}{2}$ VI.13) $\frac{\beta - \gamma}{2}$

VI.14) Temos: $e_1 = 180° - i_1$

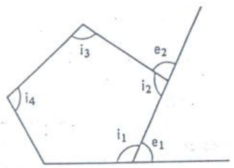
$e_2 = 180° - i_2$

....

$e_n = 180° - i_n$

Somando: $S_e = n \cdot 180° - S_i$.

Como $S_i = (n-2)\,180°$ (veja exercício 6.42), vem $S_e = n \cdot 180° - (n-2)\,180° = 360°$.



VI.15) quadrilátero

VI.16) Tome por A o plano $\beta \perp r$ e a reta $s \,/\!/\, \alpha \cap \beta$. A reta s é a reta procurada, pois $s \,/\!/\, \alpha$ e forma ângulo reto com r.

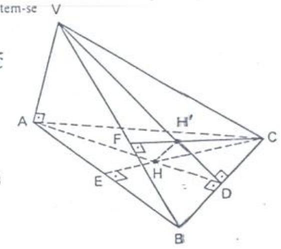
VI.17) Observe a figura. Como $\overleftrightarrow{VA} \perp pl\,(A, B, C)$, tem-se $\overleftrightarrow{VA} \perp \overleftrightarrow{CE}$.

$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{VA}\\ \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{VD}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp pl\,(V, A, D) \Rightarrow \overleftrightarrow{HH'} \perp \overleftrightarrow{BC}$

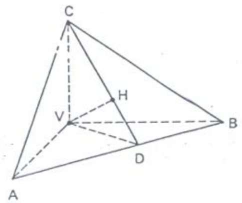
$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AB}\\ \overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{VA}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CE} \perp pl\,(V, A, B) \Rightarrow \overleftrightarrow{VB} \perp \overleftrightarrow{CE}$

$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{VB} \perp \overleftrightarrow{CE}\\ \overleftrightarrow{VB} \perp \overleftrightarrow{CF}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{VB} \perp pl\,(C, E, F) \Rightarrow \overleftrightarrow{HH'} \perp \overleftrightarrow{VB}$

$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{HH'} \perp \overleftrightarrow{BC}\\ \overleftrightarrow{HH'} \perp \overleftrightarrow{VB}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{HH'} \perp pl\,(V, B, C)$



VI.18) Como $\overleftrightarrow{VC} \perp pl\,(V, A, B)$, tem-se $\overleftrightarrow{VC} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Como $\overleftrightarrow{VH} \perp pl\,(A, B, C)$, tem-se $\overleftrightarrow{VH} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Assim, $\overleftrightarrow{AB} \perp pl\,(V, C, H)$, logo $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CH}$. Portanto, $\overline{CD}$ é altura do △ ABC. Analogamente, H pertence às outras duas alturas.



VI.19) Seja α o plano que contém $\overleftrightarrow{CD}$ e é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e seja P o traço de $\overleftrightarrow{AB}$ em α. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

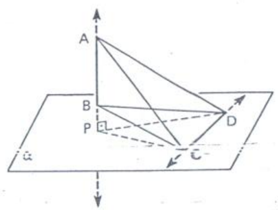
$$(BC)^2 = (BP)^2 + (PC)^2$$
$$(BD)^2 = (BP)^2 + (PD)^2$$

donde

$$(BC)^2 - (BD)^2 = (PC)^2 - (PD)^2$$

Analogamente,

$$(AC)^2 - (AD)^2 = (PC)^2 - (PD)^2$$

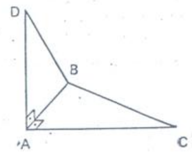


VI.20) $\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}\\ \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AC} \perp pl\,(A, B, D)$

Logo, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC}$.

$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC}\\ \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AD} \perp pl\,(A, B, C)$

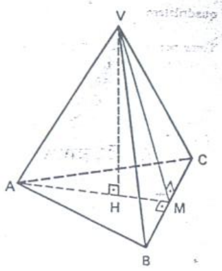
Logo, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$.



VI.21) H é o centro do $\triangle ABC$ e $\overleftrightarrow{VH}$ é perpendicular ao pl (A, B, C). Assim,

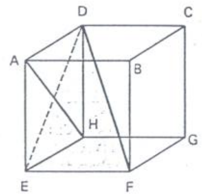
$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{VH} \perp \overleftrightarrow{BC}\\ \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \text{pl}\,(A, M, V)$$

Logo, $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AV}$.



VI.22) $\overleftrightarrow{EF} \perp \text{pl}\,(A, D, E) \Rightarrow \overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{AH}$

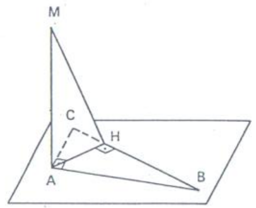
$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{AH}\\ \overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AH}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AH} \perp \text{pl}\,(D, E, F) \Rightarrow \overleftrightarrow{AH} \perp \overleftrightarrow{DF}$$



VI.23) Sendo $\overleftrightarrow{AH}$ a altura do $\triangle ABC$, a reta procurada é $\overleftrightarrow{MH}$. De fato,

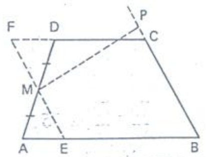
$$\overleftrightarrow{AM} \perp \text{pl}\,(A, B, C) \Rightarrow \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}\\ \overleftrightarrow{AH} \perp \overleftrightarrow{BC}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \text{pl}\,(A, M, H) \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{MH}$$



VI.24) Sendo $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, tem-se que $\triangle AEM \equiv \triangle DFM$ (A L A). Assim, a área do trapézio é igual à área do paralelogramo EFCB:

área = (EF) · (MP) = (BC) · (MP)



VI.25) 4 VI.26) $\dfrac{21}{10}$ VI.27) $\dfrac{4r^2}{\text{sen}\,\alpha}$ VI.28) $\dfrac{d}{2}(5 + 3\sqrt{3})$ VI.29) $\dfrac{845}{12}$ cm²

VI.30) $\dfrac{(1 + \text{tg}\,\alpha)^2}{1 + \text{tg}^2\,\alpha} = 1 + \text{sen}\,2\alpha$ VI.31) 36 cm² VI.32) $\dfrac{8\,670}{169}$ cm²

VI.33) $2\sqrt{7}$ cm VI.34) $2\sqrt{13}$ cm ou 4 cm VI.35) $\dfrac{ab}{2R}$

VI.36) $3\sqrt{2}$ cm e 12 cm VI.37) $a^2\sqrt{2}$ VI.38) $\dfrac{d^3\sqrt{3}\,\text{sen}\,\alpha\cos^2\alpha}{3}$

VI.39) a VI.40) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ VI.41) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ VI.42) $\cos\beta = \text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$ VI.43) $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,\text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$

VI.44) $\text{tg}\,\beta = \sqrt{2}\,\text{tg}\,\alpha$ VI.45) $\text{tg}\,\beta = 2\,\text{tg}\,\alpha$ VI.46) $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ VI.47) $\cos\beta = \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

VI.48) $\dfrac{b^3\sqrt{23}}{81}$ VI.49) $57a^3\sqrt{7}$ VI.50) $\dfrac{d\cos\alpha}{2\pi}$ ou $\dfrac{d\,\text{sen}\,\alpha}{2\pi}$ VI.51) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ VI.52) $\dfrac{5}{3}$

VI.53) $m^2\,\text{sen}\,2\alpha\,\text{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$ VI.54) $\dfrac{h\sqrt{2}}{2}$ VI.55) $12d^2$ VI.56) $\dfrac{\pi h^3}{\text{sen}^2\,2\alpha}$ VI.57) $\sqrt{S}$

VI.58) $4\pi\sqrt{3}$ VI.59) $2\pi^2 r^3$ VI.60) 40π cm³ VI.61) $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}$ VI.62) $\dfrac{125\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³

VI.63) $\dfrac{\pi S\sqrt{2S}}{12}$ VI.64) $2\sqrt[3]{38}$ cm VI.65) $\dfrac{\pi\ell^3}{2}$ VI.66) $\cos\alpha = \dfrac{1}{4}$ VI.67) $\dfrac{3}{2}$

VI.68) $\dfrac{\sqrt{3S}}{2}$ VI.69) $\dfrac{2h^2\sqrt{2}}{3}$ VI.70) $\pi\sqrt{2}$ VI.71) $r\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$ VI.72) $\dfrac{r\sqrt{10}}{5}$

VI.73) $\dfrac{3\pi r^2}{4}$ VI.74) $\dfrac{2a}{3}$ VI.75) $\dfrac{\pi r^3\sqrt{2}}{2}$ VI.76) $\dfrac{\pi r^3\sqrt{3}}{4}$ VI.77) $\dfrac{9\pi a^3}{2}$

VI.78) $\dfrac{r^3(2 + \sqrt{2})}{12}$

g°	sen	tg	cotg	cos	
0	0,000 0	0,000		1,000 0	90
1	0,017 5	0,017 5	57,29	0,999 8	89
2	0,034 9	0,034 9	28,64	0,999 4	88
3	0,052 3	0,052 4	19,08	0,998 6	87
4	0,069 8	0,069 9	14,30	0,997 6	86
5	0,087 2	0,087 5	11,43	0,996 2	85
6	0,104 5	0,105 1	9,514	0,994 5	84
7	0,121 9	0,122 8	8,144	0,992 5	83
8	0,139 2	0,140 5	7,115	0,990 3	82
9	0,156 4	0,158 4	6,314	0,987 7	81
10	0,173 6	0,176 3	5,671	0,984 8	80
11	0,190 8	0,194 4	5,145	0,981 6	79
12	0,207 9	0,212 6	4,705	0,978 1	78
13	0,225 0	0,230 9	4,331	0,974 4	77
14	0,241 9	0,249 3	4,011	0,970 3	76
15	0,258 8	0,267 9	3,732	0,965 9	75
16	0,275 6	0,286 7	3,487	0,961 3	74
17	0,292 4	0,305 7	3,271	0,956 3	73
18	0,309 0	0,324 9	3,078	0,951 1	72
19	0,325 6	0,344 3	2,904	0,945 5	71
20	0,342 0	0,364 0	2,747	0,939 7	70
21	0,358 4	0,383 9	2,605	0,933 6	69
22	0,374 6	0,404 0	2,475	0,927 2	68
23	0,390 7	0,424 5	2,356	0,920 5	67
24	0,406 7	0,445 2	2,246	0,913 5	66
25	0,422 6	0,466 3	2,145	0,906 3	65
26	0,438 4	0,487 7	2,050	0,898 8	64
27	0,454 0	0,509 5	1,963	0,891 0	63
28	0,469 5	0,531 7	1,881	0,882 9	62
29	0,484 8	0,554 3	1,804	0,874 6	61
30	0,500 0	0,577 4	1,732	0,866 0	60
31	0,515 0	0,600 9	1,664	0,857 2	59
32	0,529 9	0,624 9	1,600	0,848 0	58
33	0,544 6	0,649 4	1,540	0,838 7	57
34	0,559 2	0,674 5	1,483	0,829 0	56
35	0,573 6	0,700 2	1,428	0,819 2	55
36	0,587 8	0,726 5	1,376	0,809 0	54
37	0,601 8	0,753 6	1,327	0,798 6	53
38	0,615 7	0,781 3	1,280	0,788 0	52
39	0,629 3	0,809 8	1,235	0,777 1	51
40	0,642 8	0,839 1	1,192	0,766 0	50
41	0,656 1	0,869 3	1,150	0,754 7	49
42	0,669 1	0,900 4	1,111	0,743 1	48
43	0,682 0	0,932 5	1,072	0,731 4	47
44	0,694 7	0,965 7	1,036	0,719 3	46
45	0,707 1	1,000 0	1,000	0,707 1	45
	cos	cotg	tg	sen	g°

Impresso em off-set por
GRÁFICA EDITORA HAMBURG LTDA.
Rua Apeninos, 294 — São Paulo — Brasil
Fones: 278-2648 278-1620 279-2765
com filmes fornecidos pelo editor