Estratégia Militares

CURSO EXTENSIVO

ITA 2023

GEOMETRIA PLANA IV

AULA 10

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

APRESENTAÇÃO

Olá,

Vamos finalizar o estudo da geometria plana. Nessa aula, veremos os conceitos de polígonos e áreas de figuras planas. As provas militares adoram cobrar questões envolvendo áreas geométricas. Devido à alta taxa de incidência dos tópicos dessa aula, resolveremos muitos exercícios para fixar esse conteúdo.

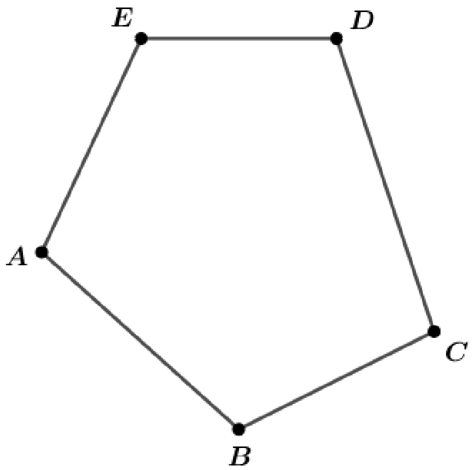
Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

/profvictorso

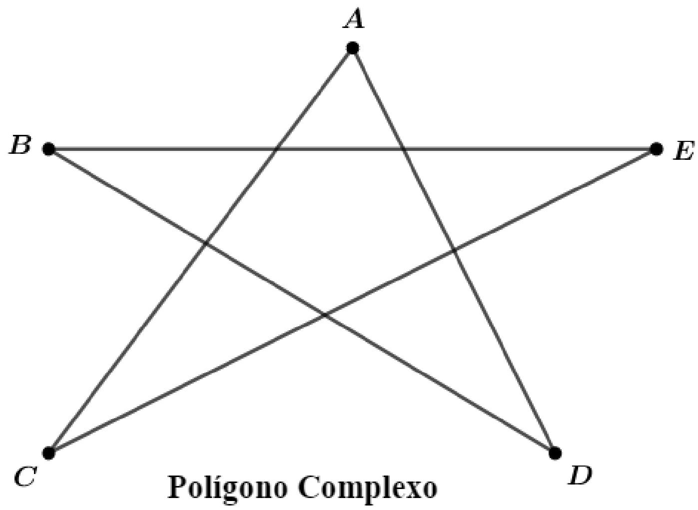
1. POLÍGONOS

Polígonos são figuras geométricas planas e fechadas que são formadas por segmentos de retas chamados de lados. A condição de um polígono é $n \geq 3$, sendo n seu número de lados.

Podemos ter polígonos simples ou complexos. Os polígonos são simples quando seus lados não se cruzam, caso contrário, eles são complexos. Veja:

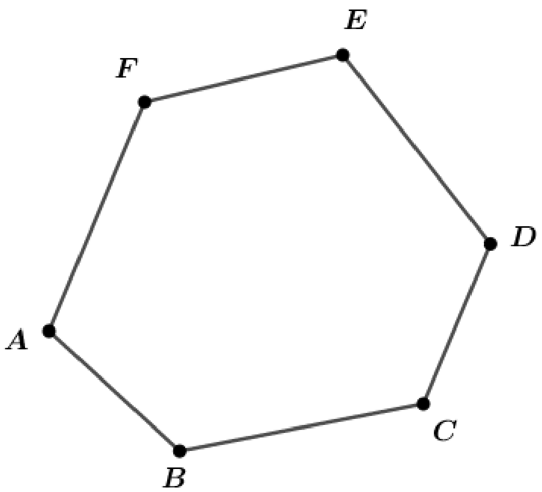


Polígono Simples

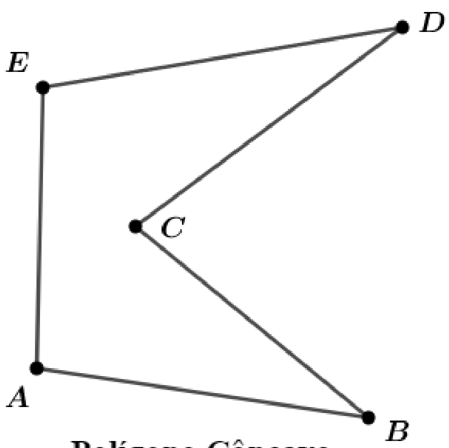


Polígono Complexo

Polígonos também podem ser convexos ou côncavos.



Polígono Convexo



Polígono Côncavo

1.1. POLÍGONOS SIMPLES CONVEXOS

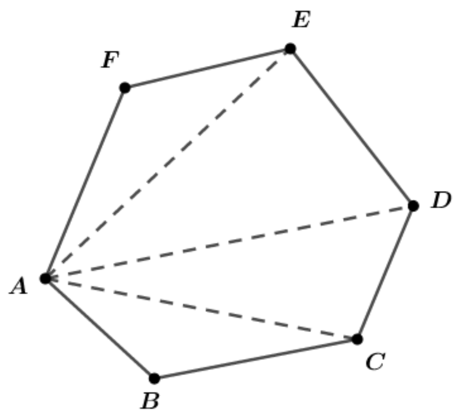
1.1.1. CLASSIFICAÇÃO

Um polígono recebe as seguintes denominações dependendo do seu número de lados:

Número de Lados	Nome do Polígono	Número de Lados	Nome do Polígono
3	Triângulo	**9**	Eneágono
4	Quadrado	**10**	Decágono
5	Pentágono	**11**	Undecágono
6	Hexágono	**12**	Dodecágono
7	Heptágono	**15**	Pentadecágono
8	Octógono	**20**	Icoságono

1.1.2. NÚMERO DE DIAGONAIS

A diagonal de um polígono convexo é o segmento de reta que liga dois vértices não adjacentes. Exemplo:



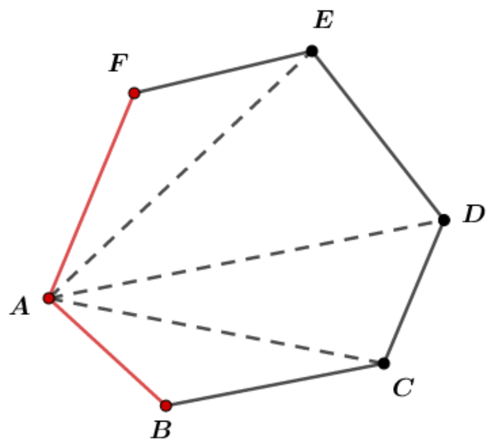
$\overline{AE}, \overline{AD}, \overline{AC}$ são as diagonais do polígono acima. Note que para o vértice A, os vértices B e F são adjacentes.

Podemos calcular o número de diagonais de um polígono de n lados. Seja d esse número, então, sua fórmula é dada por:

$$\boxed{\boldsymbol{d = \frac{n(n-3)}{2}}}$$

Demonstração:

Em um polígono de n lados, temos n vértices. Então, o número de diagonais que partem de um vértice é igual a $n - 3$, pois devemos descontar os vértices adjacentes e o próprio vértice, veja o exemplo:



Nesse caso, temos 6 lados e 6 vértices. O número de diagonais que partem do vértice A é igual a $6 - 3 = 3$ (nessa contagem, desconsideramos os vértices A, B e F).

Então, se queremos calcular o número total de diagonais de um polígono de n lados, devemos contar o número de diagonais que podem ser formados em cada vértice. Sabemos que cada vértice possui $n - 3$ diagonais, assim, considerando todos os vértices do polígono, temos $n(n - 3)$ diagonais. Mas, nesse número, estamos contando duas vezes as diagonais, no exemplo acima, temos a diagonal que parte do vértice A e termina no vértice E e a diagonal que parte de E e termina em A. Portanto, devemos dividir $n(n - 3)$ por 2:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

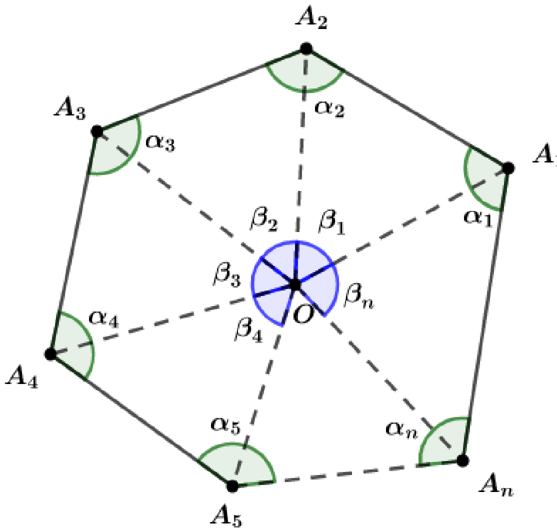
1.1.3. SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS E EXTERNOS

Seja P_n um polígono convexo de n lados, então, se S_i é a soma dos seus ângulos internos e S_e é a soma dos seus ângulos externos, temos:

$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{S_i = (n-2) \cdot 180°} \\ \boldsymbol{S_e = 360°} \end{array}}$$

Demonstração:

Vamos demonstrar a soma dos ângulos internos. Seja $A_1 A_2 A_3 \dots A_N$ um polígono convexo de n lados, tomando O o ponto no interior do polígono e ligando esse ponto a cada vértice:



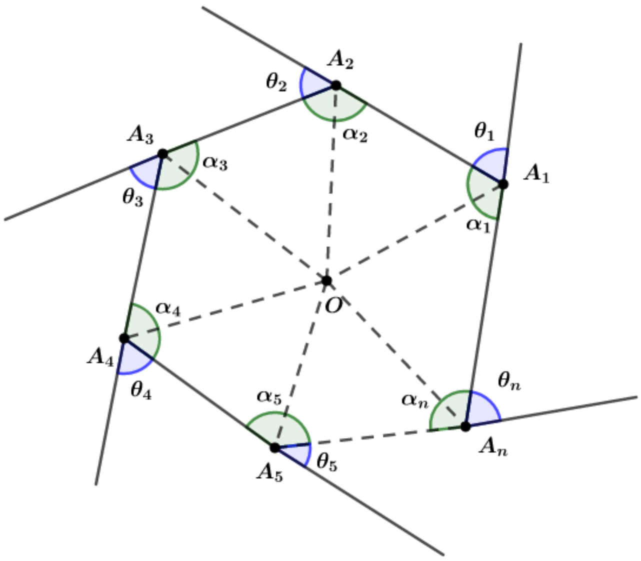
Perceba que temos n triângulos: $\Delta A_1A_2O, \Delta A_2A_3O, \Delta A_3A_4O, \Delta A_4A_5O, \dots, \Delta A_nA_1O$.

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, então, a soma dos ângulos internos do polígono é dada pela soma dos ângulos internos dos n triângulos subtraído do ângulo central:

$$\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}_{S_i} + \underbrace{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}_{360°} = n \cdot 180°$$

$$S_i = 180° \cdot n - 180° \cdot 2 \Rightarrow S_i = (n-2) \cdot 180°$$

Para provar a fórmula da soma dos ângulos externos, podemos usar a propriedade de ângulos suplementares. Então, para cada vértice, temos:



$$\alpha_1 + \theta_1 = 180°$$
$$\alpha_2 + \theta_2 = 180°$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n + \theta_n = 180°$$

Somando-se cada expressão acima:

$$\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}_{S_i} + \underbrace{\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n}_{S_e} = n \cdot 180°$$

$$S_i + S_e = n \cdot 180°$$

Substituindo S_i:

$$(n-2) \cdot 180° + S_e = n \cdot 180° \Rightarrow S_e = 360°$$

1.2. POLÍGONOS REGULARES

1.2.1. DEFINIÇÃO

Um polígono é considerado regular se ele for equilátero e equiângulo. Por exemplo, um triângulo equilátero possui todos os lados de mesma medida e todos os ângulos internos congruentes, logo, ele é um polígono regular.

1.2.2. FÓRMULA DOS ÂNGULOS INTERNOS E EXTERNOS

Podemos deduzir a fórmula dos ângulos internos e externos do polígono regular usando a fórmula de S_i e S_e. Seja α_i o ângulo interno do polígono regular, então:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \alpha \Rightarrow \underbrace{n \cdot \alpha}_{S_i} = (n-2) \cdot 180°$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180°}$$

Analogamente para o ângulo externo θ_i:

$$\theta_1 = \theta_2 = \cdots = \theta_n = \theta \Rightarrow \underbrace{n \cdot \theta}_{S_e} = 360°$$

$$\therefore \boldsymbol{\theta = \frac{360°}{n}}$$

1.2.3. PROPRIEDADES

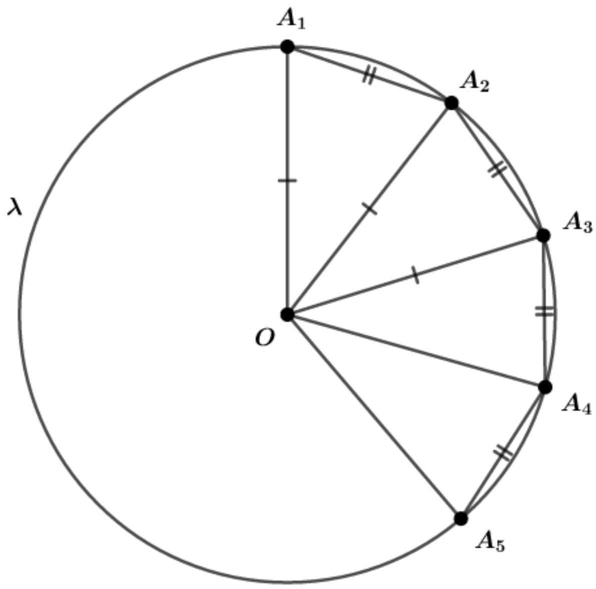
P1) Todo polígono regular é inscritível.

P2) Todo polígono regular é circunscritível.

P3) Ângulo Central

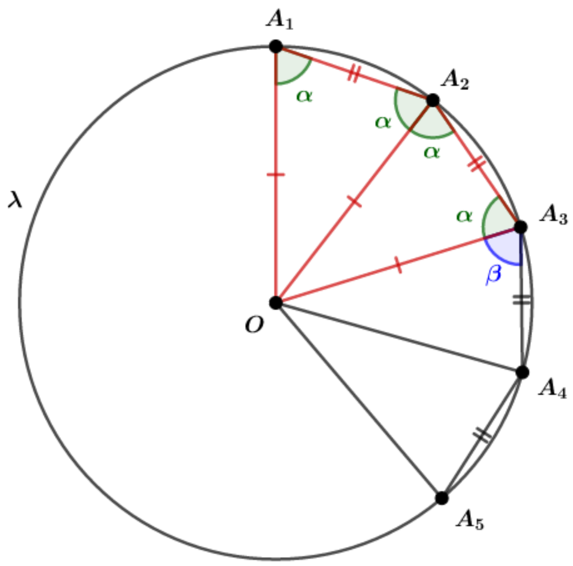
Demonstrações:

P1) Seja $A_1A_2A_3 \dots A_n$ um polígono convexo regular, então, tomando os pontos A_1, A_2, A_3, podemos desenhar uma circunferência λ que passa por esses pontos, vamos provar que $A_4 \in \lambda$:



Como $A_1, A_2, A_3 \in \lambda$, temos $OA_1 = OA_2 = OA_3$. O polígono é regular, então, $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$.

Sabemos que os ângulos internos de um polígono regular são congruentes, assim, analisando os triângulos isósceles A_1OA_2 e A_2OA_3, temos:

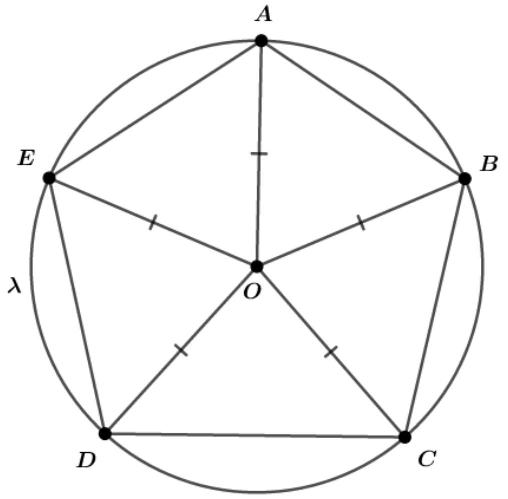


Como os ângulos internos do polígono são congruentes, temos $\alpha = \beta$. Observe os triângulos A_2OA_3 e A_3OA_4, note que $A_2A_3 = A_3A_4$, OA_3 é um lado comum e $\alpha = \beta$, logo, podemos aplicar o critério de congruência LAL:

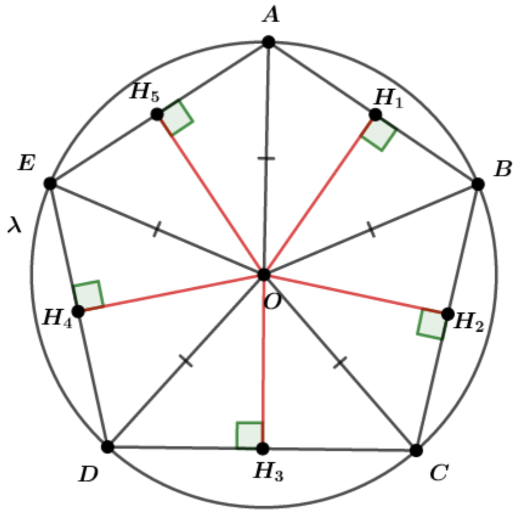
$$\Delta A_2OA_3 \equiv \Delta A_3OA_4$$

Dessa forma, temos $OA_2 = OA_4$. Logo, $A_4 \in \lambda$. De modo análogo, podemos provar para os outros vértices do polígono regular. Portanto, qualquer polígono convexo regular é inscritível.

P2) Sem perda de generalidade, vamos usar o pentágono regular $ABCDE$. Sendo regular, ele é inscritível, logo:



Os triângulos isósceles OAB, OBC, OCD, ODE, OEA são congruentes, então, a altura desses triângulos são congruentes:



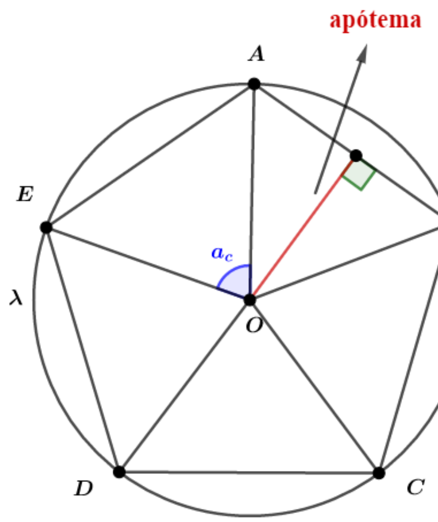
Como a medida dos segmentos são congruentes, temos $OH_1 = OH_2 = OH_3 = OH_4 = OH_5$, então, O é o centro de uma outra circunferência. Vamos chamá-la de λ'.

Sabendo que esses segmentos são perpendiculares às suas respectivas bases, temos que os lados do polígono tangenciam a circunferência λ', logo, ele é circunscritível.

P3) Vimos que qualquer polígono regular é inscritível e circunscritível. Um polígono regular de n lados possui n triângulos isósceles e seus vértices são o centro O das circunferências e os vértices consecutivos do polígono regular. Chamamos de ângulo central o ângulo do vértice O de cada triângulo isósceles e seu valor é igual a:

$$a_c = \frac{360°}{n}$$

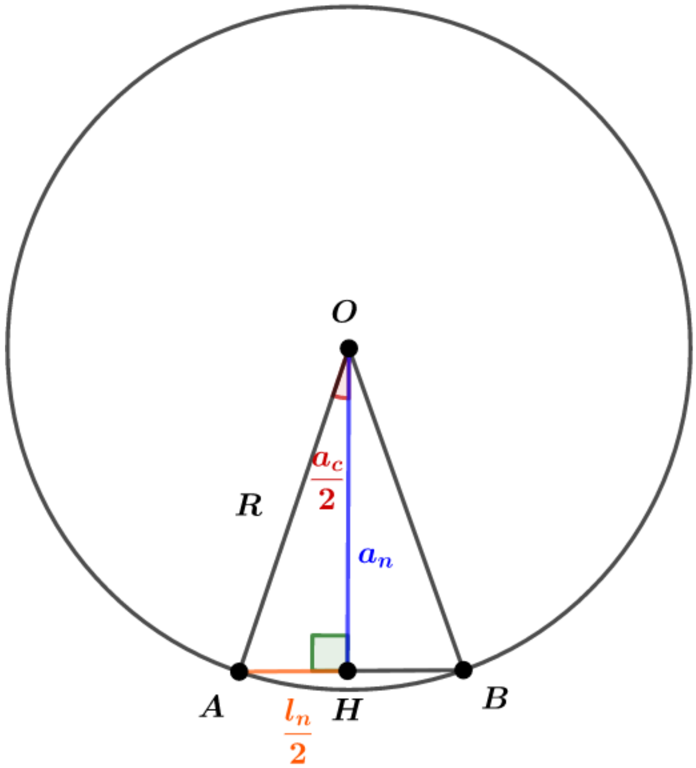
Chamamos de apótema de um polígono regular a altura de cada um desses triângulos isósceles:



1.2.4. CÁLCULO DO LADO E APÓTEMA DO POLÍGONO REGULAR

Vamos deduzir a fórmula geral do lado e apótema do polígono regular em função do raio da circunferência circunscrita e do ângulo central:

Para um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio R, sendo a_n o apótema e l_n o lado do polígono, temos:



$\overline{AB}$ é um dos lados do polígono regular de n lados.

Sabemos que o ângulo central é dado por:

$$a_c = \frac{360°}{n}$$

Usando as relações trigonométricas no triângulo retângulo OAH, temos:

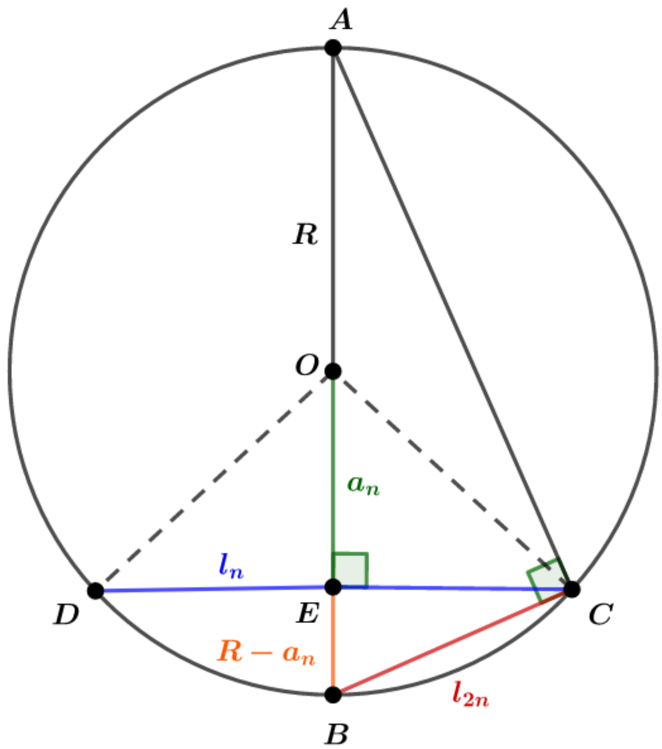
$$sen\left(\frac{a_c}{2}\right)=\frac{\frac{l_n}{2}}{R}\Rightarrow \boldsymbol{l_n=2Rsen\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

$$\cos\left(\frac{a_c}{2}\right)=\frac{a_n}{R}\Rightarrow \boldsymbol{a_n=R\cos\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

Podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo OAH e encontrar a_n em função de l_n e R:

$$R^2=a_n^2+\left(\frac{l_n}{2}\right)^2\Rightarrow \boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-l_n^2}}$$

Também é possível deduzir a fórmula do lado de um polígono regular de $2n$ lados em função do raio R e do lado l_n do polígono regular de n lados. Veja a figura:



l_n e a_n é o lado e o apótema do polígono regular de n lados, respectivamente. Note que $\Delta CEB\sim\Delta ACB$:

$$\Delta CEB\sim\Delta ACB\Rightarrow\frac{CB}{EB}=\frac{AB}{CB}\Rightarrow\frac{l_{2n}}{R-a_n}=\frac{2R}{l_{2n}}\Rightarrow(l_{2n})^2=2R(R-a_n)\ \ (I)$$

Escrevendo a_n em função de l_n e R, temos:

$$a_n=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-l_n^2}$$

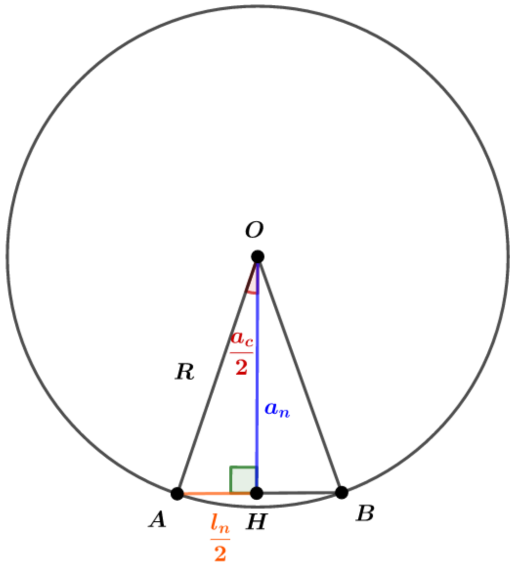
Substituindo em (I):

$$(l_{2n})^2=2R\left(R-\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-l_n^2}\right)$$

$$\therefore \boldsymbol{l_{2n} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - l_n^2}\right)}}$$

1.2.5. COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Vimos que o lado de um polígono regular de n lados é dado por:



$$l_n = 2Rsen\left(\frac{180°}{n}\right)$$

O perímetro desse polígono é igual a:

$$p_n = n \cdot 2R \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Se tomarmos n um número que tende ao infinito, o perímetro desse polígono se aproxima ao comprimento da circunferência circunscrita a ele. Então, aplicando o limite, temos:

$$C = \lim_{n \to \infty}\left(2R \cdot n \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right)\right) \Rightarrow C = 2R \underbrace{\lim_{n \to \infty}\left(n \cdot sen\left(\frac{180°}{n}\right)\right)}_{\pi} \Rightarrow C = 2\pi R$$

Assim, temos que o comprimento de uma circunferência é dado por:

$$\boxed{\boldsymbol{C = 2\pi R}}$$

HORA DE PRATICAR!

1. $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DE}$ são 4 lados consecutivos de um icoságono regular. Os prolongamentos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ cortam-se em I. Calcule o ângulo $B\hat{I}D$.

Resolução:

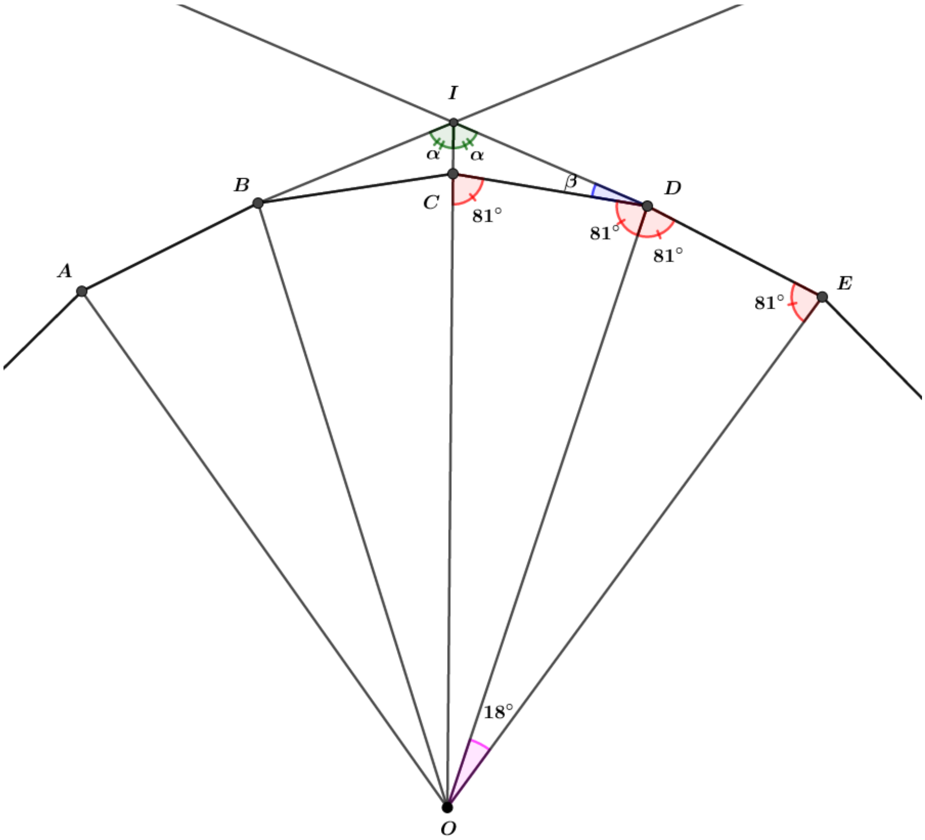
O ângulo central do icoságono regular é dado por:

$$a_c = \frac{360°}{20} = 18°$$

Assim, os ângulos das bases dos triângulos isósceles do icoságono regular são iguais a:

$$18° + 2\theta = 180° \Rightarrow \theta = 81°$$

Vamos desenhar a situação do problema:



Sendo regular, temos que I é o prolongamento do segmento OC. Como I também é o prolongamento do lado ED, temos que $\hat{D}$ é um ângulo raso:

$$\beta + 81° + 81° = 180° \Rightarrow \beta = 18°$$

OCD é ângulo externo do triângulo ICD, logo:

$$81° = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = 63°$$

O ângulo $B\hat{I}D$ é dado por:

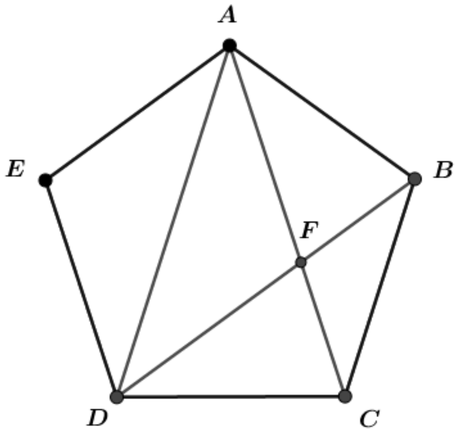
$$B\hat{I}D = 2\alpha = 126°$$

Gabarito: $126°$

---

2. Provar que num pentágono regular as diagonais são divididas em 2 segmentos que estão na razão áurea.

Resolução:

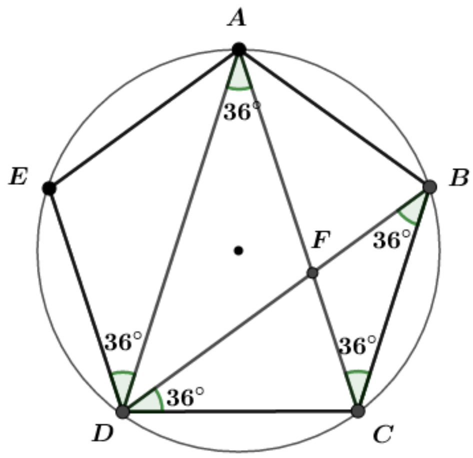


Sabemos que todo polígono regular é inscritível numa circunferência e o ângulo central do pentágono regular é igual a $\frac{360°}{5} = 72°$. O ângulo de $D\hat{A}C$ é igual à metade do ângulo central $D\hat{A}C = 36°$.

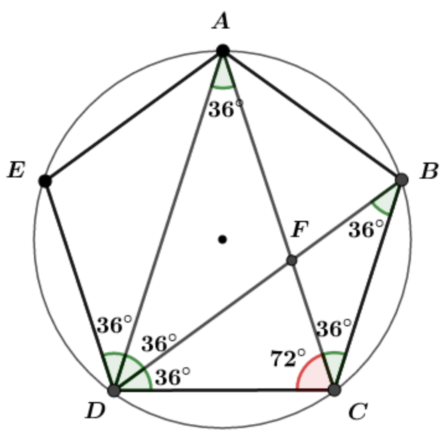
Vamos calcular o ângulo de cada vértice do pentágono:

$$a_i = \frac{n-2}{n} \cdot 180° \Rightarrow a_i = \frac{3}{5} \cdot 180° = 108°$$

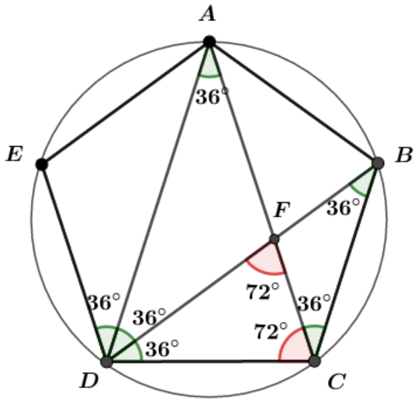
Como os lados do polígono possuem a mesma medida, temos:



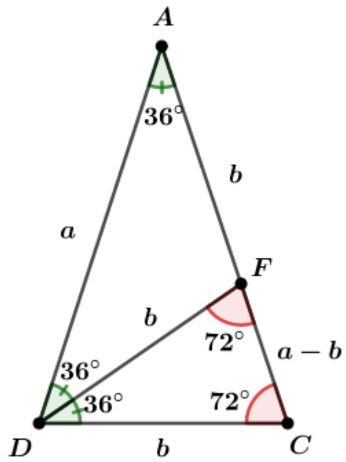
Sendo o ângulo interno do pentágono igual a $108°$, temos $A\hat{D}F = 36°$ e $A\hat{C}D = 72°$.



Note que $D\hat{F}C = 72°$ (soma dos ângulos internos igual a $180°$). Portanto, os triângulos ADC e DCF são isósceles e semelhantes.



Vamos analisar o triângulo isósceles ACD, chamando as diagonais AD e AC de a e AF de b, temos ($AF = DF = DC$ resultado dos triângulos isósceles):



Fazendo a semelhança de triângulos:

$$\Delta ADC \sim \Delta DCF \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$$

Encontrando as raízes na variável a:

$$a = \frac{b \pm \sqrt{5b^2}}{2}$$

Como o resultado negativo não convém, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Essa é a razão áurea.

Gabarito: Demonstração

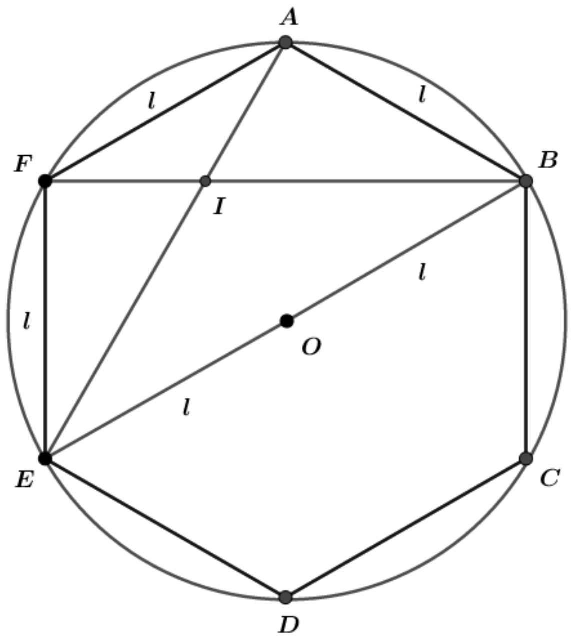
3. $ABCDEF$ é um hexágono regular cujas diagonais $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ se cortam em I. Mostrar que $2IF = IB$.

Resolução:

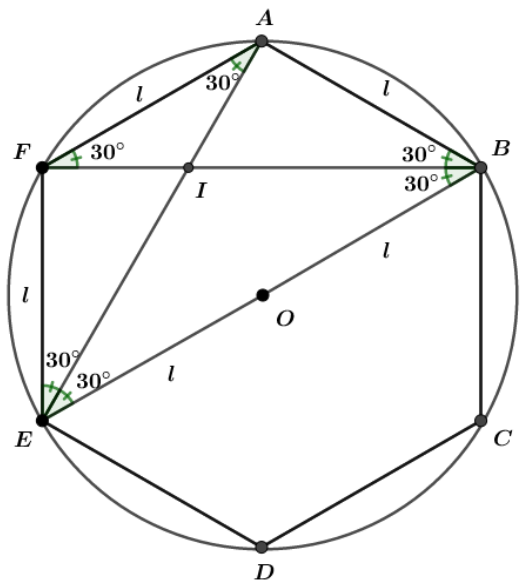
O hexágono regular é formado por 6 triângulos equiláteros e o seu ângulo interno é igual a:

$$a_i = \frac{n-2}{n} \cdot 180° = \frac{4}{6} \cdot 180° = 120°$$

Vamos desenhar esse polígono:



Note que os triângulos AFE e FAB são isósceles. Como o ângulo de seus vértices são iguais a $120°$, temos que os ângulos de suas bases são iguais a $30°$. Sendo $A\hat{B}O$ e $F\hat{E}O$ os ângulos de triângulos equiláteros, temos:



Os triângulos IAF e IBE são semelhantes, logo:

$$\Delta IAF \sim \Delta IBE \Rightarrow \frac{IF}{IB} = \frac{l}{2l}$$

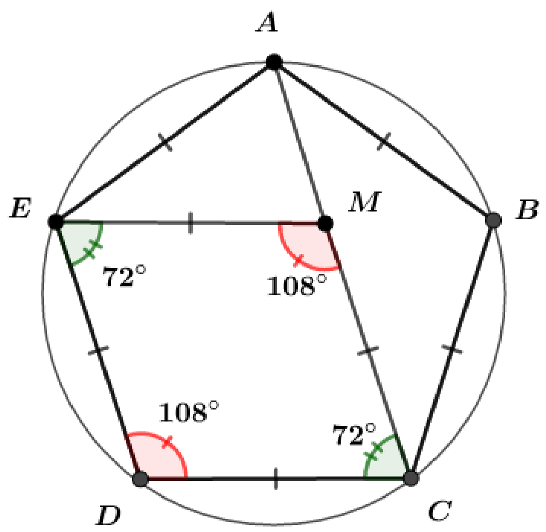
$$\therefore 2IF = IB$$

Gabarito: Demonstração

4. $ABCDE$ é um pentágono regular e $EDCM$ é um paralelogramo interno ao pentágono. Calcular os ângulos do triângulo AME.

Resolução:

Sabendo que $EDCM$ é um paralelogramo e $DE = CD$ (lados do pentágono regular), temos que $EM = CD$ e $DE = CM$, logo, $EDCM$ é um losango. Vamos desenhar a figura:



Sendo E o vértice do pentágono, temos $A\hat{E}M = 36°$. Como $AE = ME$, o triângulo AME é isósceles, logo:

$$E\hat{A}M = E\widehat{M}A = 72°$$

Portanto, os ângulos internos do ΔAME são:

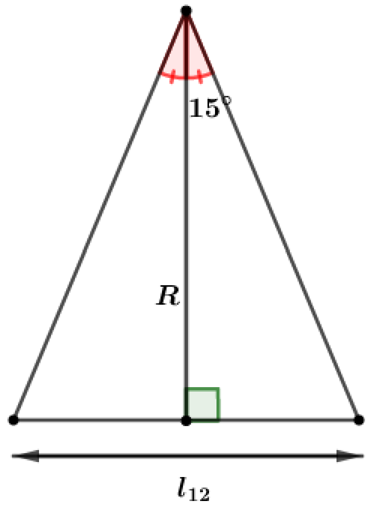
$$36°, 72° \text{ e } 72°$$

Gabarito: $36°, 72°$ e $72°$

5. Determinar o lado do dodecágono regular circunscrito a um círculo de raio R.

Resolução:

Sabendo que o apótema de um dodecágono regular circunscrito é igual a R e seu ângulo central é $30°$, para encontrar o seu lado, podemos usar o seguinte triângulo isósceles:



$$tg(15°) = \frac{\frac{l_{12}}{2}}{R} \Rightarrow l_{12} = 2Rtg(15°)$$

Lembrando que:

$$tg\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A}$$

$$tg(15°) = \frac{1 - cos30°}{sen30°} \Rightarrow tg(15°) = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow tg(15°) = 2 - \sqrt{3}$$

Substituindo o valor da tangente na equação, encontramos:

$$l_{12} = 2R\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

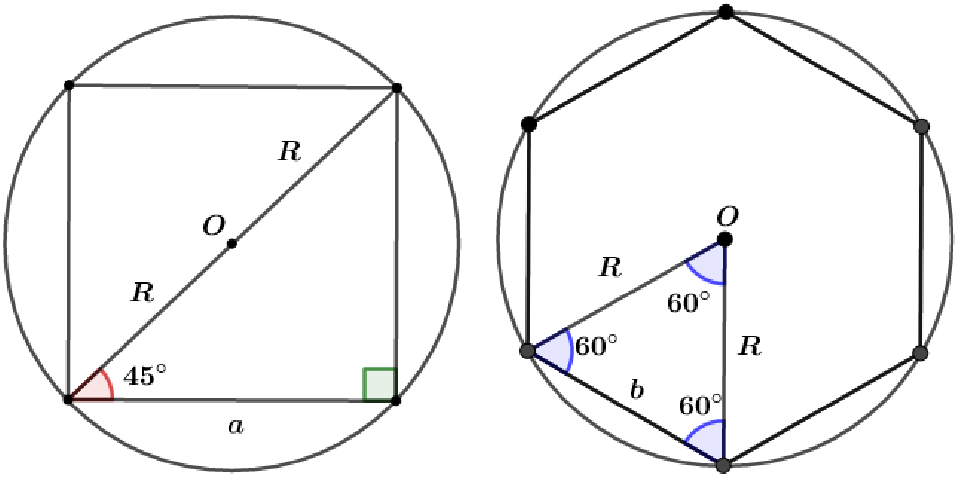
Gabarito: $\boldsymbol{l_{12} = 2R\left(2 - \sqrt{3}\right)}$

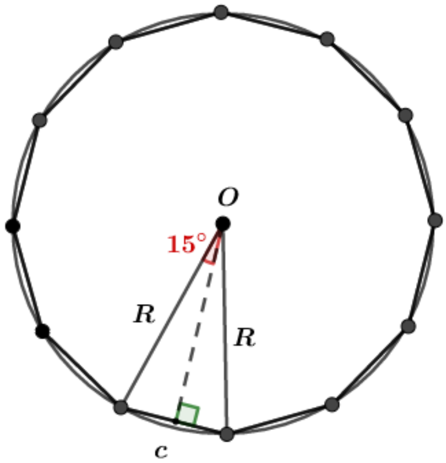
---

6. Calcular o ângulo $\hat{A}$ de um triângulo ABC, sabendo que os lados a, b e c são respectivamente iguais aos lados do quadrado, hexágono regular e dodecágono regular inscritos numa mesma circunferência.

Resolução:

Se a, b, c são os lados do quadrado, hexágono regular e dodecágono regular, respectivamente, para calcular o ângulo Â, devemos colocar esses lados em função de uma mesma variável. Vamos usar uma circunferência circunscrita a esses polígonos de raio R:





Calculando o valor dos lados do triângulo em função do raio R:

Quadrado:

$$a = 2R \cdot \cos 45° \Rightarrow a = R\sqrt{2}$$

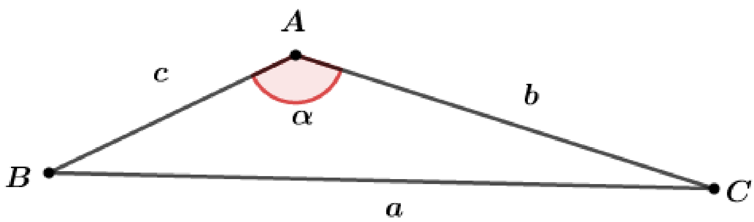
Hexágono:

$$b = R$$

Dodecágono:

$$sen(15°) = \frac{\frac{c}{2}}{R} \Rightarrow c = 2R \cdot \underbrace{sen(15°)}_{\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}} \Rightarrow c = 2R \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{2} \Rightarrow c = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Vamos calcular o valor do ângulo do vértice A, usando a lei dos cossenos:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha = \frac{R^2 + \left(R\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 - \left(R\sqrt{2}\right)^2}{2R \cdot R\sqrt{2-\sqrt{3}}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1 + \left(2-\sqrt{3}\right) - 2}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Note que o valor do cosseno é negativo $\left(1-\sqrt{3}\right) < 0$, logo, o ângulo deve ser maior que $90°$.

Vamos simplificar a expressão, como o cosseno é negativo, temos:

$$\cos\alpha = \frac{-\left(-1+\sqrt{3}\right)}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-\sqrt{\left(-1+\sqrt{3}\right)^2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-\sqrt{\left(-1+\sqrt{3}\right)^2\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-\sqrt{\left(4-2\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-\sqrt{8+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}-6}}{2} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 135°$$

Gabarito: $\hat{A} = \mathbf{135°}$

---

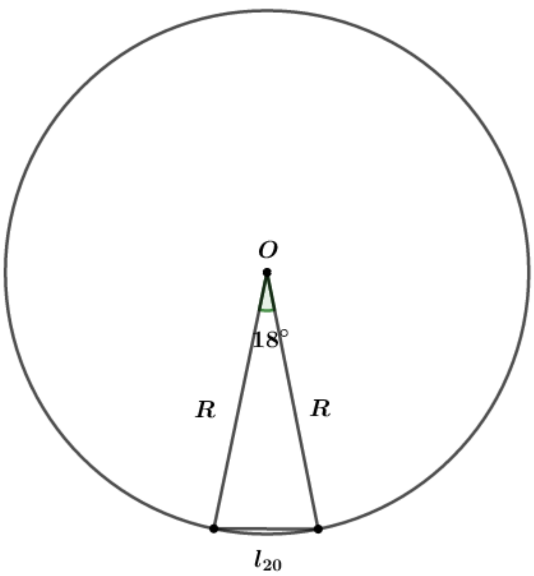
7. Calcular o lado do icoságono regular inscrito no círculo de raio R.

Resolução:

Um icoságono regular é um polígono de 20 lados. Vamos calcular seu ângulo central:

$$a_c = \frac{360°}{20} \Rightarrow a_c = 18°$$

Podemos usar o seguinte triângulo isósceles, para calcular o lado desse polígono:



Aplicando a lei dos cossenos:

$$l_{20}^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos 18°$$

$$l_{20} = R\sqrt{2 - 2\cos 18°}$$

Devemos calcular o valor do cosseno de $18°$, podemos usar o cosseno de $36°$ do triângulo áureo (a explicação de como encontrar o cosseno desse ângulo está na aula 09):

$$\cos(36°) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Lembrando que o cosseno do arco metade é:

$$\cos(18°) = \sqrt{\frac{1+\cos 36°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Substituindo na equação:

$$l_{20} = R\sqrt{2-2\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)} \Rightarrow l_{20} = R\sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}$$

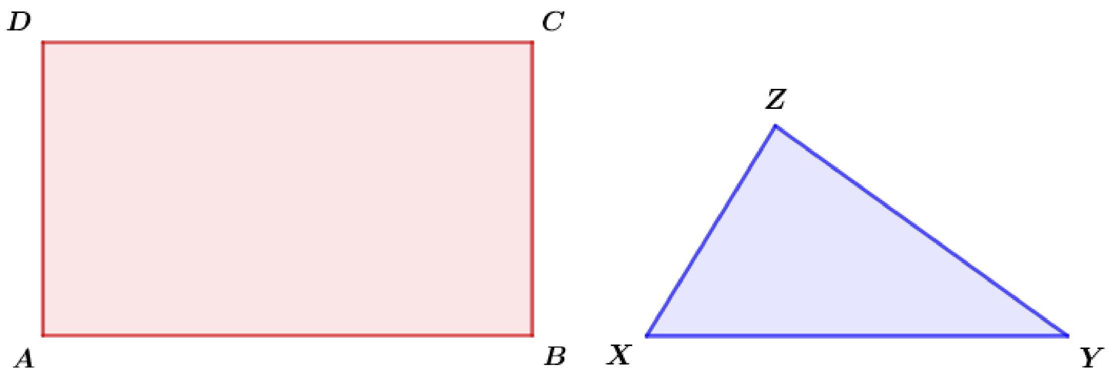
Gabarito: $\boldsymbol{l_{20} = R\sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}}}$

2. ÁREA DE FIGURAS PLANAS

2.1. DEFINIÇÃO

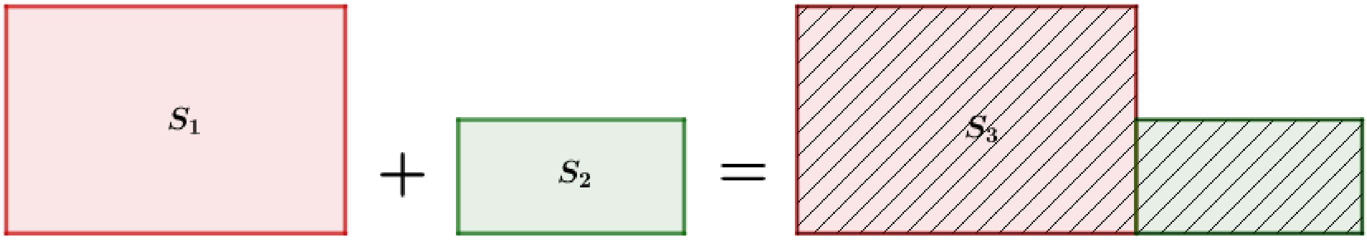
LEITURA OBRIGATÓRIA

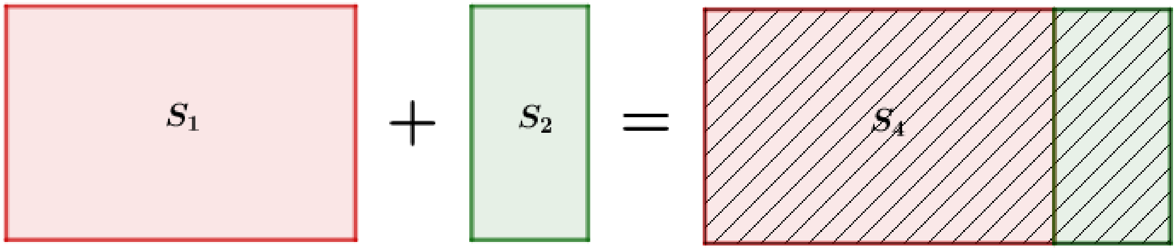
Vamos estudar um dos temas mais explorados em geometria plana pelas provas militares, o cálculo de áreas de figuras planas. Estudamos até agora as formas geométricas, as medidas dos ângulos e os comprimentos dos segmentos das figuras planas. O estudo da área dessas figuras envolve o conceito de extensão. Compare as figuras abaixo e diga qual possui maior extensão.



Supondo que as duas figuras possuem as mesmas unidades de medida, podemos dizer que o quadrilátero $ABCD$ possui maior extensão que o triângulo XYZ. Quando fazemos esse tipo de comparação, estamos comparando as áreas dessas figuras.

Duas figuras são ditas equivalentes quando possuem a mesma extensão, independentemente de suas formas. Se juntarmos dois quadriláteros de áreas A_1 e A_2 para formar uma outra figura de área A_3, podemos afirmar que esta possui área igual à soma das duas primeiras:





Usualmente, usamos as letras maiúsculas S ou A para simbolizar a área das figuras. Nos exemplos acima, perceba que $S_3 = S_1 + S_2$ e $S_4 = S_1 + S_2$, logo, podemos afirmar que as figuras de áreas S_3 e S_4 são equivalentes.

Dizemos que área é um número real positivo associado a uma superfície limitada. A unidade de medida usual da área é o m^2 (metro quadrado).

Vamos estudar dois teoremas importantes para formar nossa base no estudo da área de figuras planas. Esses teoremas serão usados para deduzir todas as fórmulas das áreas que podem ser cobradas na prova.

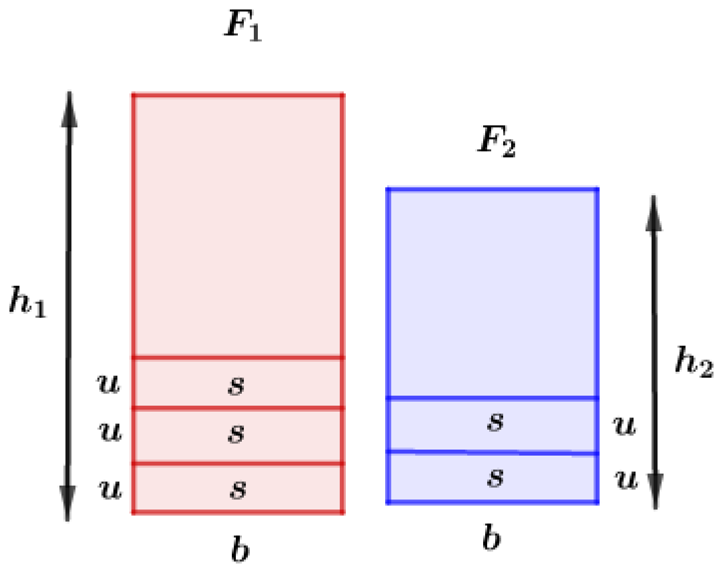
2.2. TEOREMAS

2.2.1. TEOREMA 1

A razão entre as áreas de dois retângulos que possuem uma dimensão congruente é igual à razão entre as dimensões não congruentes.

Demonstração:

Considere os dois retângulos abaixo de bases congruentes:



O teorema afirma que:

$$\boldsymbol{\frac{A_1}{A_2} = \frac{h_1}{h_2}}$$

Onde A_1 e A_2 são as áreas dos retângulos F_1 e F_2, respectivamente. Para demonstrar essa propriedade, devemos considerar dois casos possíveis:

Caso 1) h_1 e h_2 são comensuráveis

Como h_1 e h_2 são comensuráveis, então, existe um número $u \in \mathbb{R}_+^*$ que cabe um número inteiro de vezes em h_1 e h_2. Sejam $m, n \in \mathbb{N}^*$ múltiplos de h_1 e h_2, respectivamente, então, podemos escrever:

$$\begin{matrix} h_1 = mu \\ h_2 = nu \end{matrix} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{m}{n} \quad (I)$$

Seja s a área dos pequenos retângulos de cada retângulo de base b e altura u dos retângulos acima. Para o retângulo F_1, temos que m retângulos de área s cabem em F_1, logo:

$$A_1 = ms$$

Analogamente para F_2:

$$A_2 = ns$$

A razão entre as áreas é dada por:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{ms}{ns} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{m}{n} \quad (II)$$

Assim, das relações (I) e (II), encontramos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

Caso 2) h_1 e h_2 não são comensuráveis

Nesse caso, não podemos escrever h_1 e h_2 como múltiplos de uma mesma unidade de medida u. Tomando $u \in \mathbb{R}_+^*$ tal que:

$$h_2 = nu$$

Sendo h_1 e h_2 incomensuráveis, temos para $m \in \mathbb{N}^*$:

$$mu < h_1 < (m+1)u$$

Dividindo a desigualdade acima por nu:

$$\frac{mu}{nu} < \frac{h_1}{nu} < \frac{(m+1)u}{nu} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{m+1}{n}$$

Como u é um submúltiplo arbitrário de h_2, podemos escolher u tão pequeno quanto se queira tal que m será um número tão grande que mu e $(m+1)u$ convergem para h_1. Dessa forma, encontramos:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{m}{n}$$

Procedendo de modo análogo para a área, encontramos:

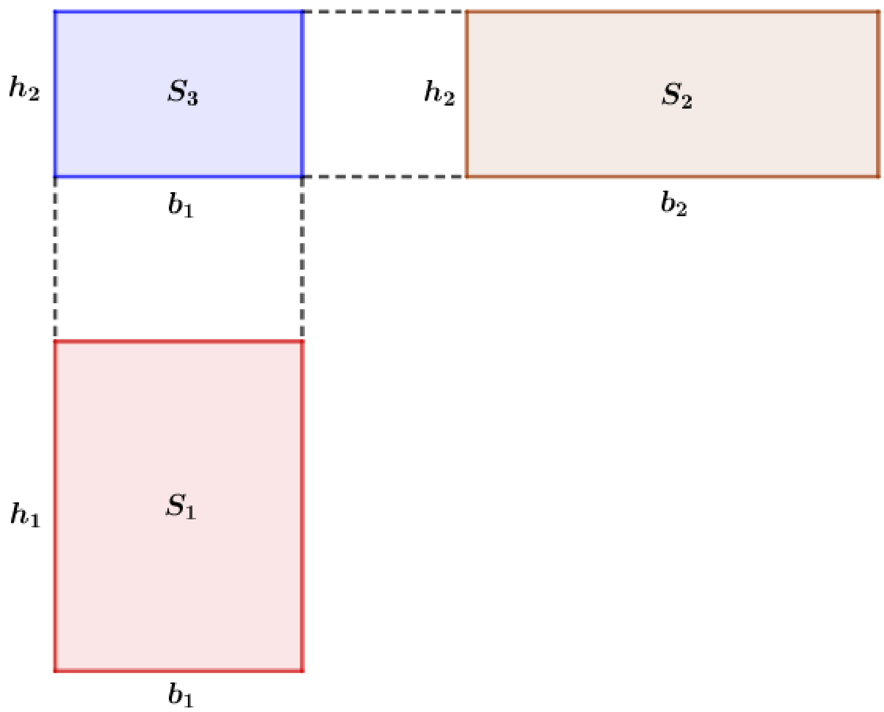
$$\begin{matrix} ms < A_1 < (m+1)s \\ A_2 = ns \end{matrix} \Rightarrow \frac{m}{n} < \frac{A_1}{A_2} < \frac{m+1}{n} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

2.2.2. TEOREMA 2

A razão entre a área de dois retângulos é igual à razão entre os produtos de suas dimensões.

Demonstração:

Considere os três retângulos abaixo:



Usando o teorema 1, podemos escrever:

$$\frac{S_1}{S_3} = \frac{h_1}{h_2} \quad (I)$$

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad (II)$$

Multiplicando as razões (I) e (II), temos:

$$\frac{S_1}{\cancel{S_3}} \cdot \frac{\cancel{S_3}}{S_2} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{b_1}{b_2}$$

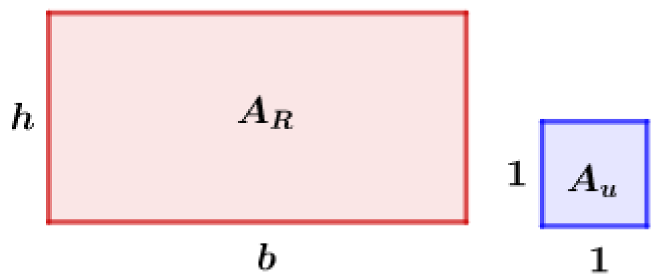
$$\therefore \boldsymbol{\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1 b_1}{h_2 b_2}}$$

2.3. ÁREA DE POLÍGONOS

Com base no teorema 2, vamos deduzir as fórmulas das áreas dos principais polígonos.

2.3.1. RETÂNGULO

Para calcular a área do retângulo, vamos adotar como área unitária um quadrado de lado 1. Seja A_u a área desse quadrado e A_R a área do retângulo de base b e altura h, sabendo que $A_u = 1$, temos:



Aplicando o teorema 2:

$$\frac{A_R}{A_u} = \frac{b \cdot h}{1 \cdot 1} \Rightarrow \frac{A_R}{1} = b \cdot h$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_R = b \cdot h}}$$

Portanto, a área de um retângulo é dada pelo produto entre sua base e sua altura.

FIQUE ATENTO!

Ao calcular área de figuras planas, precisamos nos atentar a um detalhe. Veja a questão abaixo:
Calcule a área de um retângulo de base e altura medindo $5\ cm$ e $10\ cm$, respectivamente.

Essa questão nos fornece a unidade de medida em centímetros. Quando calculamos a área dessa figura, precisamos também incluir a unidade de medida:

$$A_R = b \cdot h \Rightarrow A_R = (5\ cm) \cdot (10\ cm) \Rightarrow A_R = 50\ cm^2$$

Caso a questão forneça os dados em diferentes unidades de medida, temos que convertê-los na mesma unidade. Veja:

Calcule a área do retângulo de base e altura medindo $5\ cm$ e $10\ km$, respectivamente.

Nessa questão, não podemos multiplicar diretamente a base a altura, pois ambas estão em diferentes unidades de medida (cm e km). Antes, devemos igualar as unidades. Vamos converter o quilômetro em centímetro:

$$10\ km = 10 \cdot 10^3\ m = 10 \cdot 10^3 \cdot 10^2\ cm = 10^6\ cm$$

Agora, podemos calcular a área:

$$A_R = (5\ cm) \cdot (10^6\ cm) \Rightarrow A_R = 5 \cdot 10^6\ cm^2$$

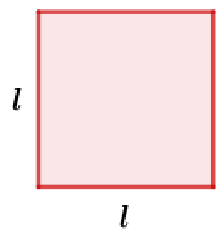
Esse detalhe pode tirar alguns pontos da sua prova, então, atenção na hora de ler a questão!

A tabela abaixo fornece as principais conversões de unidades de medida, vamos adotar como unidade padrão o metro:

Unidade de medida	Símbolo	Unidade equivalente
Milímetro	mm	10^{-3} m
Centímetro	cm	10^{-2} m
Quilômetro	km	10^3 m

2.3.2. QUADRADO

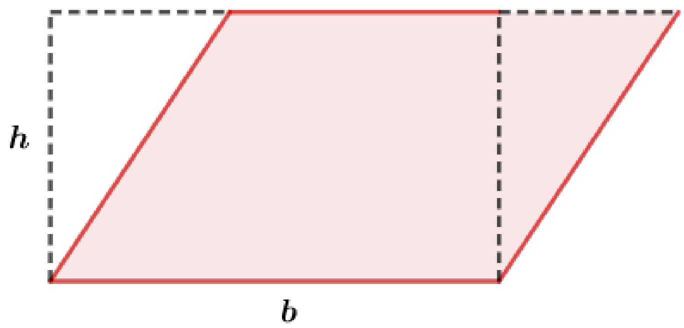
Esse é um caso particular de retângulo. Como o quadrado possui lados congruentes, a sua altura e base possuem as mesmas medidas. Para um quadrado de lado l:



$$\boxed{A_Q = l^2}$$

2.3.3. PARALELOGRAMO

O paralelogramo pode ser visto como um retângulo inclinado, veja:

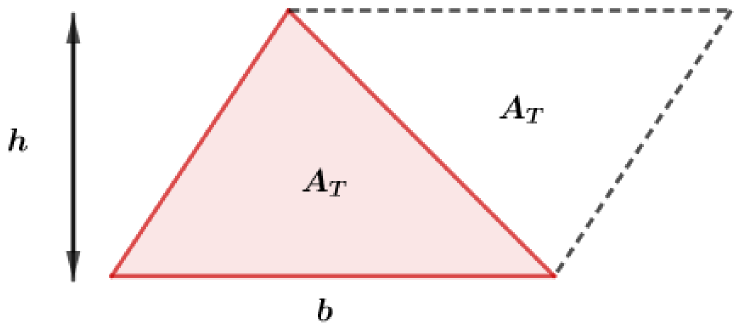


A área do paralelogramo de altura h e base b é equivalente à área de um retângulo de altura h e base b, logo:

$$\boxed{\boldsymbol{A_P = b \cdot h}}$$

2.3.4. TRIÂNGULO

A área de um triângulo é igual à metade da área de um paralelogramo de altura h e base b. Seja A_T a área de um triângulo de base b e altura h:



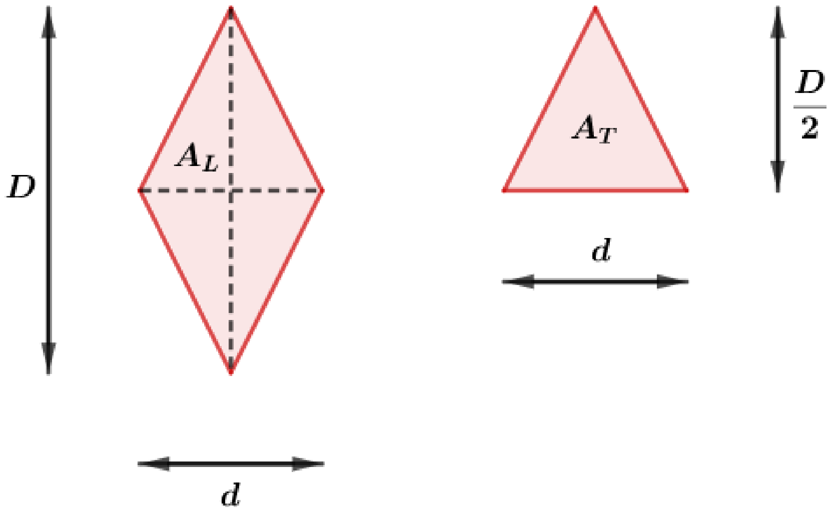
Analisando a figura, podemos ver que:

$$2A_T = b \cdot h$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_T = \frac{b \cdot h}{2}}}$$

2.3.5. LOSANGO

A área de um losango de diagonal maior D e diagonal menor d é igual à 2 vezes a área de um triângulo de base d e altura $D/2$:

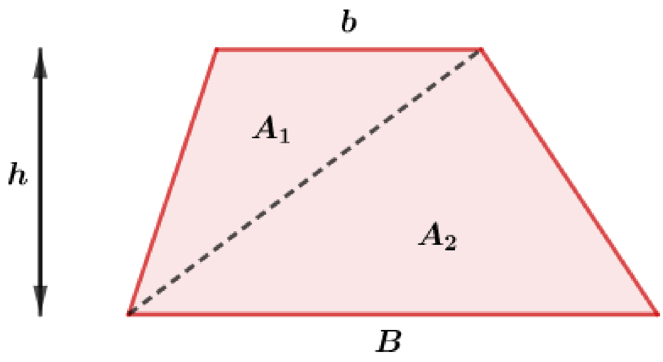


$$A_L = 2A_T \Rightarrow A_L = 2 \cdot \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_L = \frac{d \cdot D}{2}}}$$

2.3.6. TRAPÉZIO

Para calcular a área de um trapézio de base menor b e base maior B e altura h, podemos dividi-lo em 2 triângulos de altura h e bases b e B:



$$A_{Tr} = A_1 + A_2 \Rightarrow A_{Tr} = \frac{b \cdot h}{2} + \frac{B \cdot h}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_{Tr} = \frac{(b + B) \cdot h}{2}}}$$

2.3.7. POLÍGONO REGULAR

Dado um polígono regular de n lados, sendo:

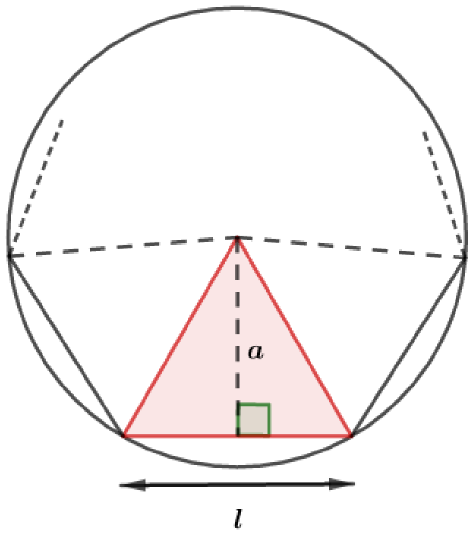
a — medida do apótema

l — medida do lado

n — número de lados

p — semiperímetro do polígono

Esse polígono pode ser dividido em n triângulos congruentes de base l e altura a:



A área desse polígono é dada por:

$$A_{Pol} = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}$$

O perímetro desse polígono é igual a:

$$2p = n \cdot l$$

Assim, substituindo a identidade acima na expressão da área do polígono, encontramos:

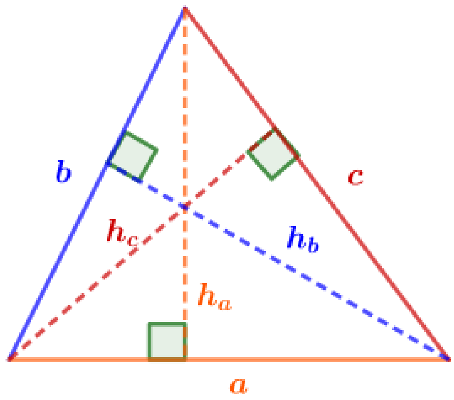
$$A_{Pol} = \frac{2p \cdot a}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A_{Pol} = p \cdot a}}$$

2.3.8. OUTRAS EXPRESSÕES PARA ÁREA DO TRIÂNGULO

Dependendo dos dados da questão, podemos calcular a área do triângulo de outras formas. Vamos explorar as possibilidades:

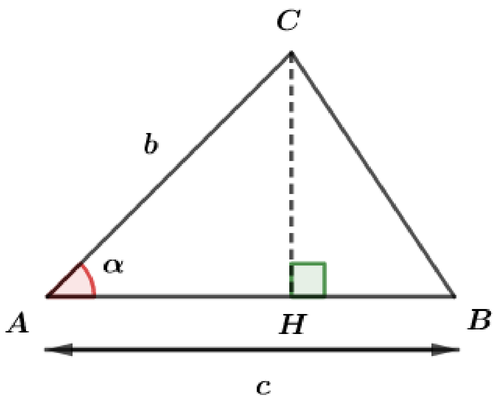
1) Dados um dos lados e a respectiva altura



Seja S a área do triângulo, como vimos anteriormente, a área do triângulo em função do lado e da respectiva altura é dada por:

$$\boldsymbol{S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}}$$

2) Dados dois lados e um ângulo compreendido entre eles



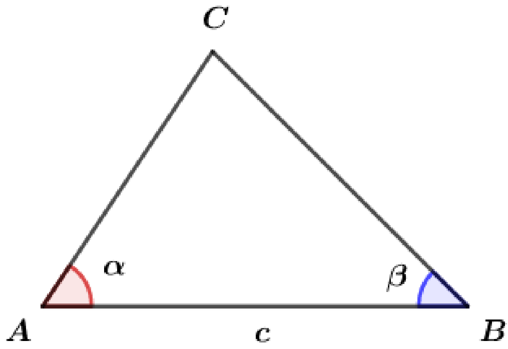
Temos a base do triângulo, precisamos calcular a altura CH:

$$CH = b \cdot sen\alpha$$

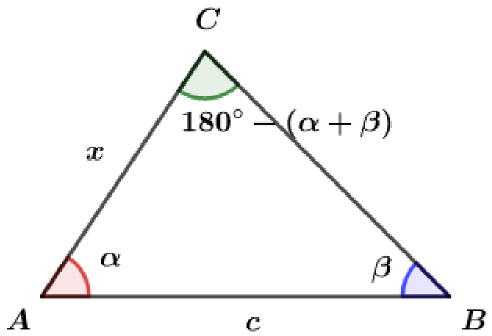
A área é dada por:

$$\boldsymbol{S = \frac{b \cdot c \cdot sen\alpha}{2}}$$

3) Dados um lado e dois ângulos adjacentes



Nesse caso, procedemos chamando um lado de x, escolhendo o lado AC, temos:



A área desse triângulo é dada por:

$$S = \frac{x \cdot c \cdot sen\alpha}{2}$$

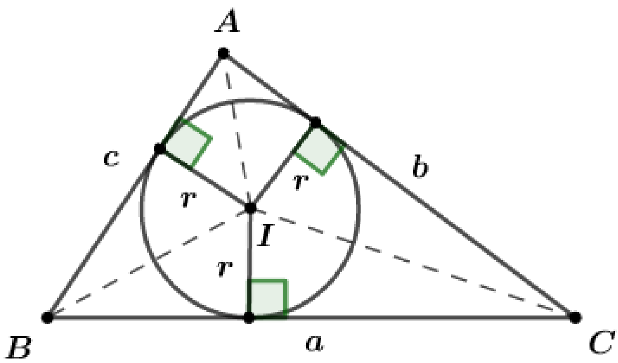
Podemos encontrar o valor de x usando a lei dos senos:

$$\frac{x}{sen\beta} = \frac{c}{sen\left(180° - (\alpha + \beta)\right)} \Rightarrow \frac{x}{sen\beta} = \frac{c}{sen(\alpha + \beta)} \Rightarrow x = \frac{c \cdot sen\beta}{sen(\alpha + \beta)}$$

Substituindo na expressão da área, encontramos:

$$\boldsymbol{S = \frac{c^2 \cdot sen\alpha \cdot sen\beta}{2 \cdot sen(\alpha + \beta)}}$$

4) Dados os lados e o raio da circunferência inscrita

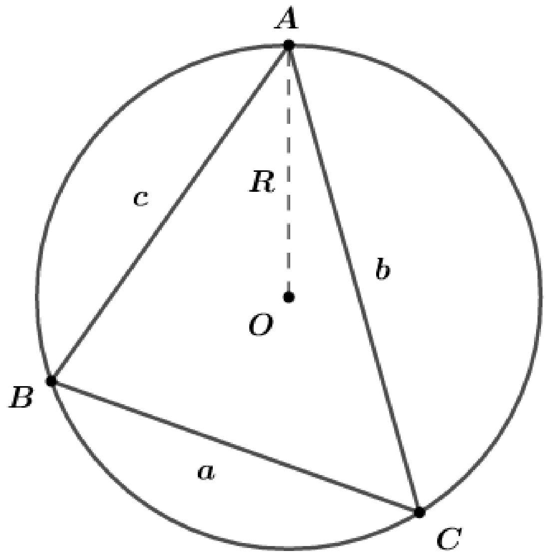


No triângulo acima, temos três triângulos cujas bases são os lados do triângulo ABC e a altura é r:

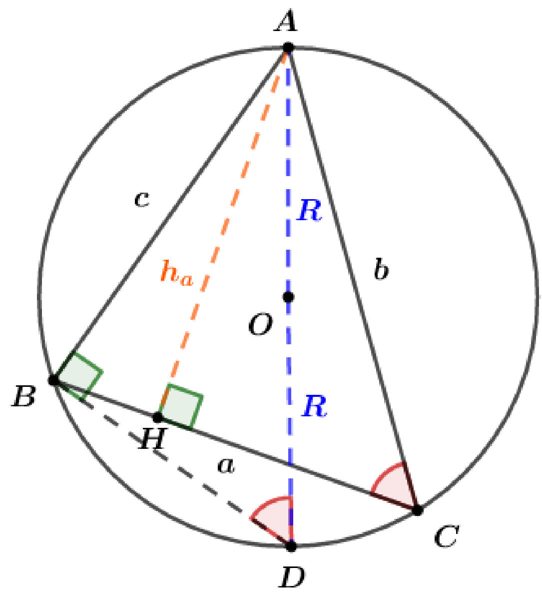
$$S = S_{ABI} + S_{ACI} + S_{BCI} \Rightarrow S = \frac{c \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} \Rightarrow S = \underbrace{\frac{(a+b+c)}{2}}_{p} \cdot r$$

$$\boldsymbol{S = p \cdot r}$$

5) Dados os lados e o raio da circunferência circunscrita



Vamos usar a propriedade do arco capaz e tomar o lado BC como base, então, temos:



Note que os triângulos AHC e ABD são semelhantes, pois ambos são retângulos e $\widehat{D} \equiv \hat{C}$. Assim, podemos escrever:

$$\Delta AHC \sim \Delta ABD \Rightarrow \frac{AC}{AH} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{b}{h_a} = \frac{2R}{c} \Rightarrow h_a = \frac{bc}{2R}$$

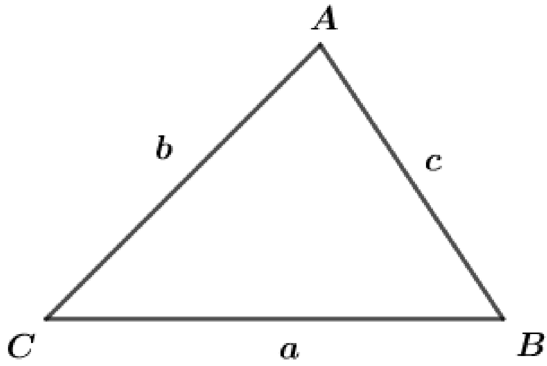
A área é dada por:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$\boldsymbol{S = \frac{abc}{4R}}$$

6) Fórmula de Heron

A fórmula de Heron é útil quando a questão nos dá apenas os lados do triângulo.



Sabemos que a área do triângulo pode ser dada por:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Vimos no capítulo de cálculo de cevianas do triângulo que h_a pode ser escrita em função dos lados e do semiperímetro do triângulo:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

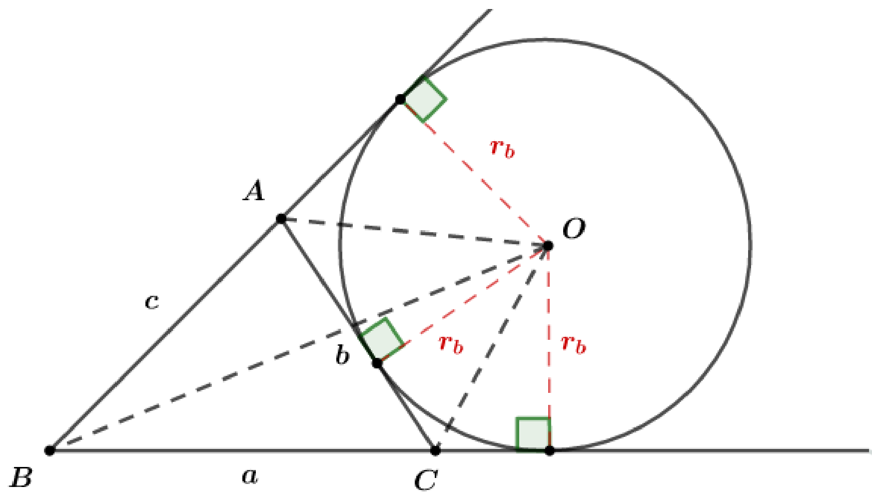
Substituindo essa identidade na expressão da área, encontramos:

$$S = \frac{a \cdot \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2}$$

$$\boldsymbol{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Essa fórmula é conhecida como fórmula de Heron.

7) Dados um lado e o raio da circunferência ex-inscrita ao mesmo lado



Podemos calcular a área do triângulo ABC através do quadrilátero $ABCO$, veja:

$$S_{ABCO}=S_{ABO}+S_{CBO}\Rightarrow S_{ABCO}=\frac{c\cdot r_b}{2}+\frac{a\cdot r_b}{2}$$

$$S_{ABCO}=S_{ABC}+S_{AOC}\Rightarrow S_{ABCO}=S+\frac{b\cdot r_b}{2}$$

Igualando as duas identidades, encontramos:

$$\frac{c\cdot r_b}{2}+\frac{a\cdot r_b}{2}=S+\frac{b\cdot r_b}{2}\Rightarrow S=\frac{1}{2}\underbrace{(a-b+c)}_{2p-2b}\cdot r_b$$

$$\boldsymbol{S=(p-b)\cdot r_b}$$

Para as circunferências ex-inscritas aos outros lados, podemos provar analogamente que:

$$\boldsymbol{S=(p-a)\cdot r_a}$$

$$\boldsymbol{S=(p-c)\cdot r_c}$$

8) Dados o raio da circunferência inscrita e os raios das circunferências ex-inscritas a cada lado

Nesse caso, a questão dá apenas os raios r, r_a, r_b, r_c. Vimos nos itens anteriores que a área do triângulo pode ser dada pelas seguintes fórmulas abaixo:

$$S=p\cdot r\Rightarrow p=\frac{S}{r}$$

$$S=(p-a)\cdot r_a\Rightarrow p-a=\frac{S}{r_a}$$

$$S=(p-b)\cdot r_b\Rightarrow p-b=\frac{S}{r_b}$$

$$S=(p-c)\cdot r_c\Rightarrow p-c=\frac{S}{r_c}$$

Substituindo esses valores na fórmula de Heron, encontramos:

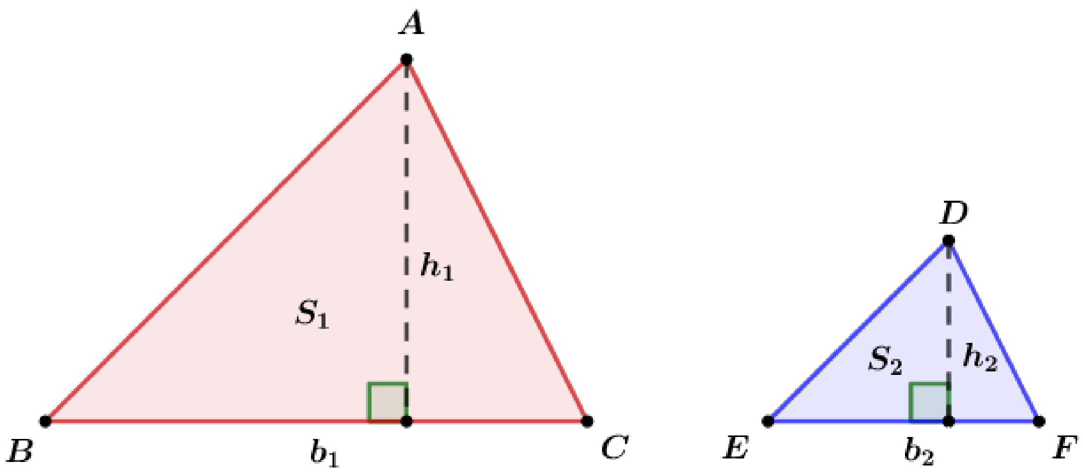
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S=\sqrt{\frac{S}{r}\cdot\frac{S}{r_a}\cdot\frac{S}{r_b}\cdot\frac{S}{r_c}}\Rightarrow S\cdot\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}=\underbrace{\sqrt{S^4}}_{S^2}$$

$$\boldsymbol{S=\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}}$$

2.3.9. RELAÇÃO MÉTRICA ENTRE ÁREAS

Para figuras geométricas semelhantes, podemos encontrar uma relação para suas áreas. Considere os triângulos ABC e DEF semelhantes abaixo:



Como $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, temos:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{b_1}{b_2} = K \ (razão\ de\ proporção)$$

A área de cada triângulo é dada por:

$$S_1 = \frac{b_1 \cdot h_1}{2}$$

$$S_2 = \frac{b_2 \cdot h_2}{2}$$

Dividindo as áreas, encontramos:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{b_1 \cdot h_1}{2}}{\frac{b_2 \cdot h_2}{2}} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = K \cdot K$$

$$\boldsymbol{\frac{S_1}{S_2} = K^2}$$

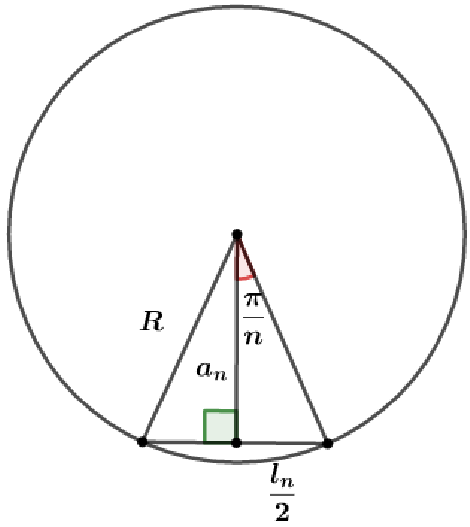
Portanto, a razão entre as áreas de figuras semelhantes é o valor da razão de proporção elevado ao quadrado.

Vimos para o caso de triângulos semelhantes. Saiba que essa razão é válida para quaisquer figuras planas semelhantes.

2.4. ÁREA DE CÍRCULOS

2.4.1. DEDUÇÃO DA FÓRMULA

Para calcular a área do círculo, podemos usar a área do polígono regular de n lados:



l_n é o lado do polígono de n lados e a_n é seu apótema. A área do polígono é dada por:

$$S_n = \frac{n \cdot a_n \cdot l_n}{2}$$

Podemos escrever $l_n/2$ em função do ângulo central:

$$tg\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\frac{l_n}{2}}{a_n} \Rightarrow \frac{l_n}{2} = a_n \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Substituindo na fórmula de S_n:

$$S_n = n \cdot a_n^2 \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Note que se n tender ao infinito, a área do polígono de n lados se aproxima da área da circunferência circunscrita a ele e o apótema se aproxima do raio dessa circunferência. Se S_C é a área da circunferência de raio R, podemos escrever:

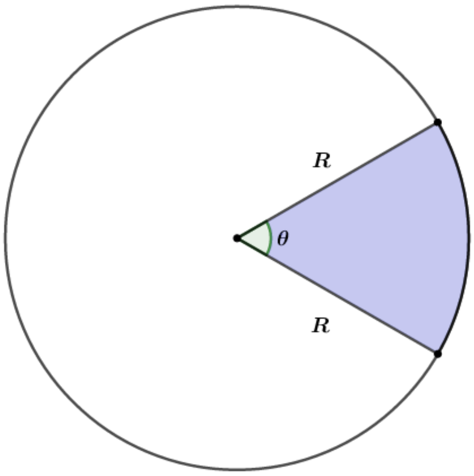
$$S_n = n \cdot a_n^2 \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow S_C = \lim_{n\to\infty} n \cdot R^2 \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right) \Rightarrow S_C = R^2 \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} n \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}_{\pi}$$

$$\boldsymbol{S_C = \pi \cdot R^2}$$

2.4.2. PARTES DO CÍRCULO

Para finalizar o assunto de áreas de círculos, vamos aprender alguns termos que podem ser cobrados na prova a respeito das áreas das partes dos círculos:

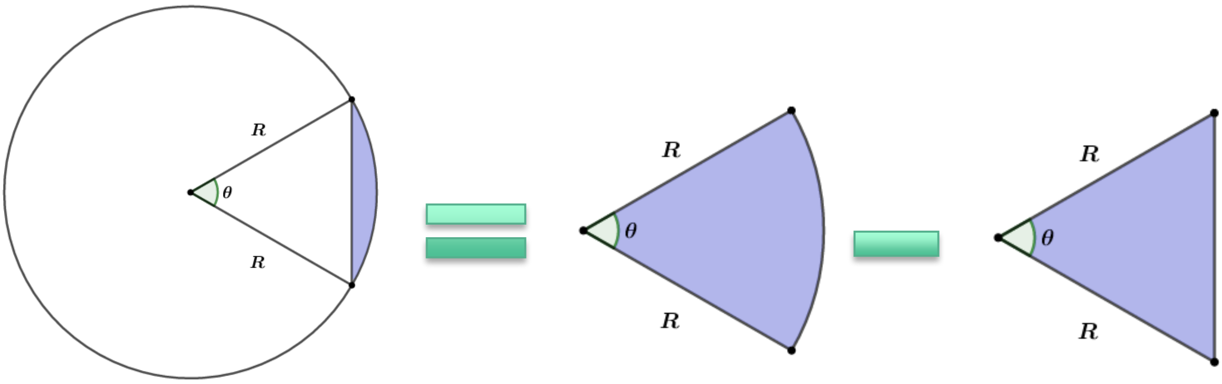
1) Setor circular



Setor circular é uma fatia do círculo. Sua área é dada pela proporção:

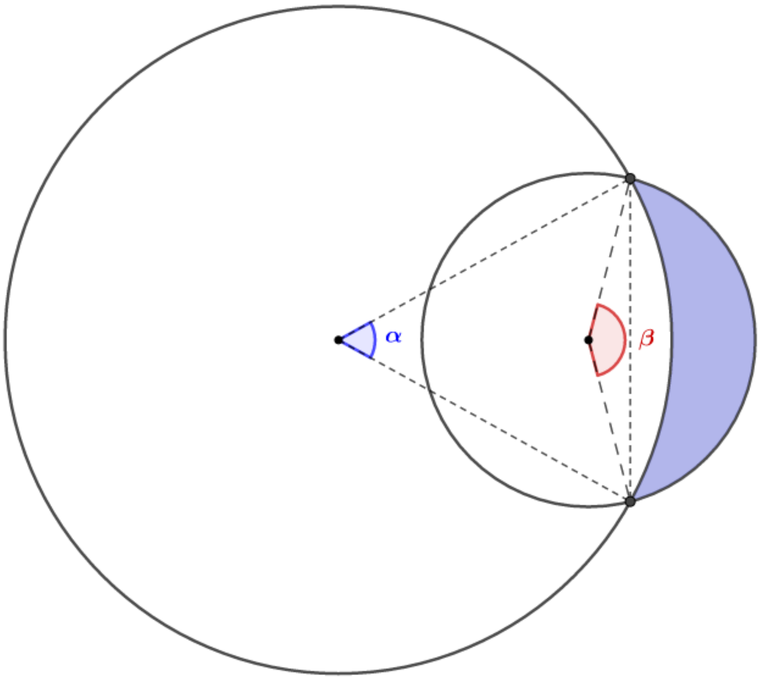
$$S = \underbrace{\frac{\theta}{2\pi}}_{fatia\ do\ círculo} \cdot \pi R^2 \Rightarrow S = \frac{\theta R^2}{2}$$

2) Segmento circular



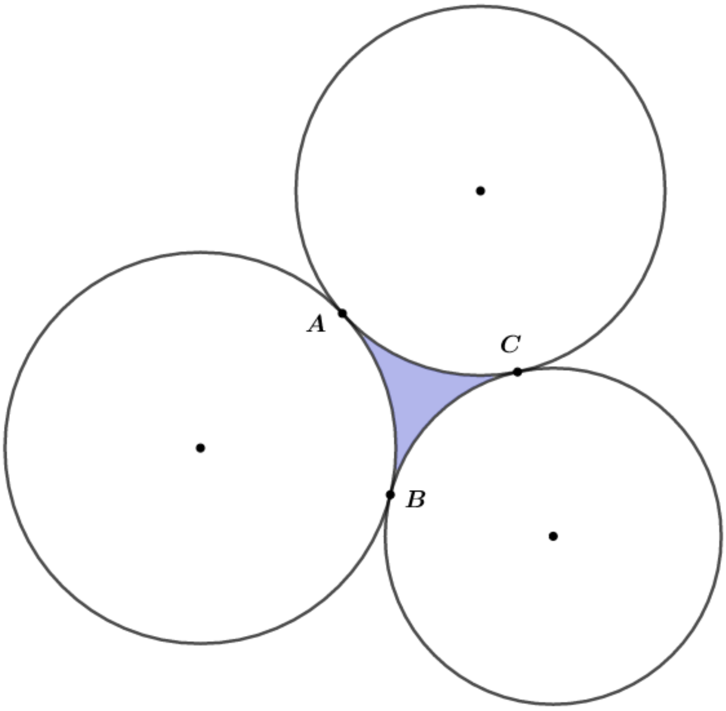
Segmento circular é a região delimitada pelo círculo e pelo triângulo isósceles cujo vértice é o centro do círculo e seu ângulo é θ. Dessa forma, a área é dada pela diferença entre a área do setor circular e a área do triângulo isósceles.

3) Lúnula



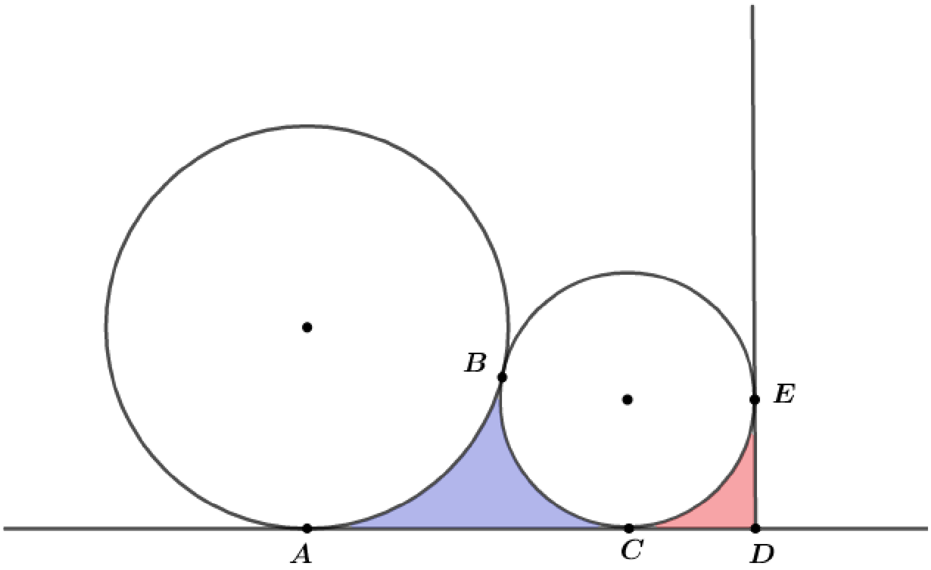
Lúnula é a região do círculo menor localizada na parte externa do círculo maior.

4) Triângulo Curvilíneo



Triângulo curvilíneo é o triângulo ABC cujos lados são todos curvos.

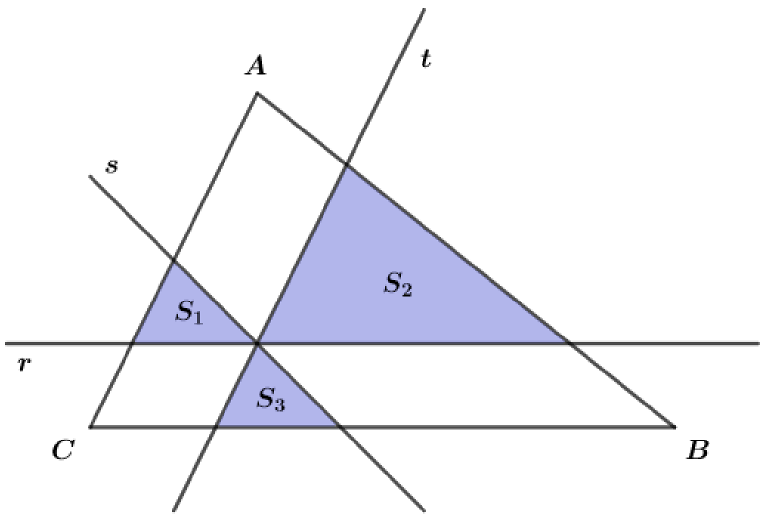
5) Triângulo Mistilíneo



Um triângulo é mistilíneo quando possui um ou dois lados curvos. Os triângulos ABC e CDE representados acima são mistilíneos.

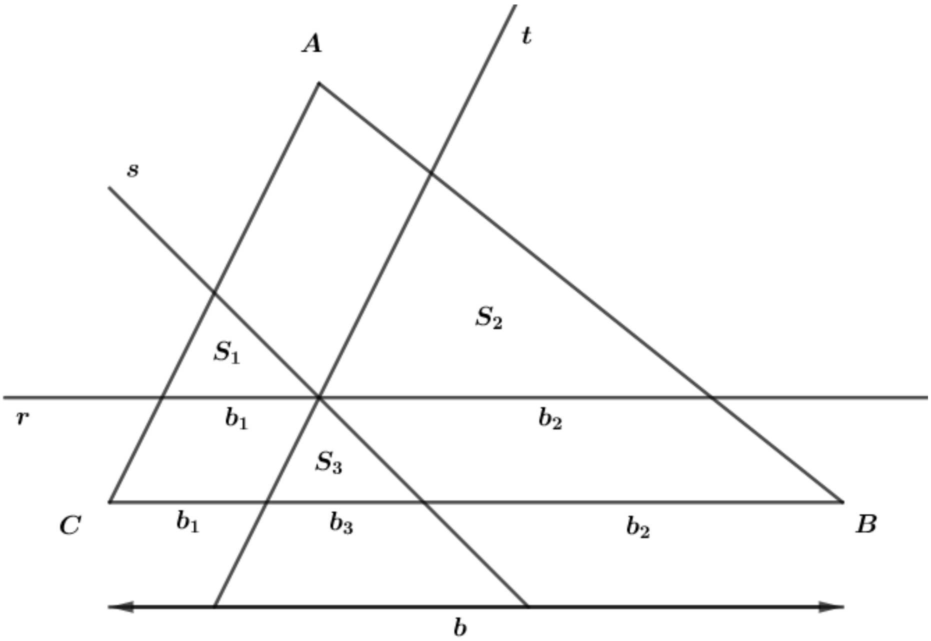
HORA DE PRATICAR!

8. Calcular a área do triângulo ABC em função de S_1, S_2 e S_3 sabendo-se que as retas r, s e t são paralelas aos lados do triângulo.



Resolução:

O bizu para essa questão é usar razão de proporção. Note que como as retas r,s,t são paralelas aos lados do triângulo, temos que todos os triângulos são semelhantes. Então, seja S a área do triângulo maior e k_1, k_2, k_3 as razões de proporção entre os triângulos de áreas S_1, S_2, S_3, respectivamente. Então, podemos escrever:



$$\frac{b_1}{b} = k_1 \Rightarrow b_1 = bk_1 \Rightarrow \frac{S_1}{S} = k_1^2 \Rightarrow k_1 = \sqrt{\frac{S_1}{S}}$$

$$\frac{b_2}{b} = k_2 \Rightarrow b_2 = bk_2 \Rightarrow \frac{S_2}{S} = k_2^2 \Rightarrow k_2 = \sqrt{\frac{S_2}{S}}$$

$$\frac{b_3}{b} = k_3 \Rightarrow b_3 = bk_3 \Rightarrow \frac{S_3}{S} = k_3^2 \Rightarrow k_3 = \sqrt{\frac{S_3}{S}}$$

Podemos ver pela figura que:

$$b = b_1 + b_2 + b_3$$

Vamos escrever tudo em função de b:

$$b = bk_1 + bk_2 + bk_3 \Rightarrow k_1 + k_2 + k_3 = 1$$

Substituindo os valores das razões, temos:

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} = 1 \Rightarrow \sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$$

$$\therefore S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$$

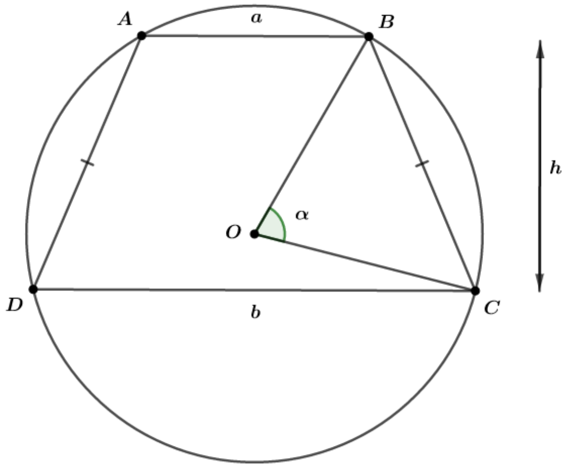
Gabarito: $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$

---

9. Calcular a área de um trapézio isósceles, se a sua altura é igual a h e o seu lado lateral se vê desde o centro da circunferência circunscrita sob ângulo α.

Resolução:

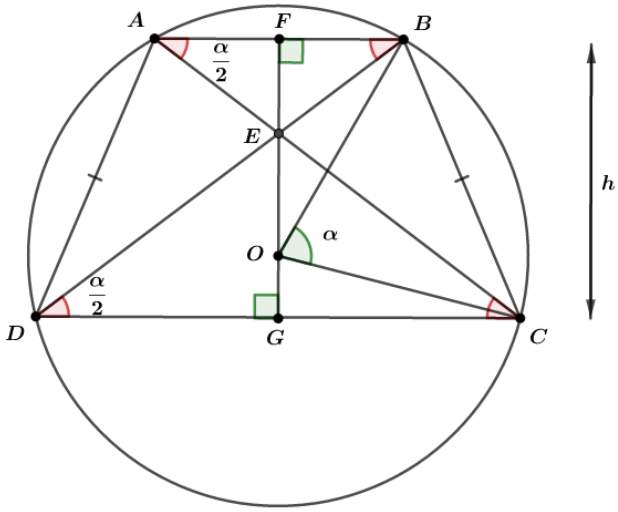
Para ilustrar o problema, vamos desenhar o trapézio isósceles inscritível:



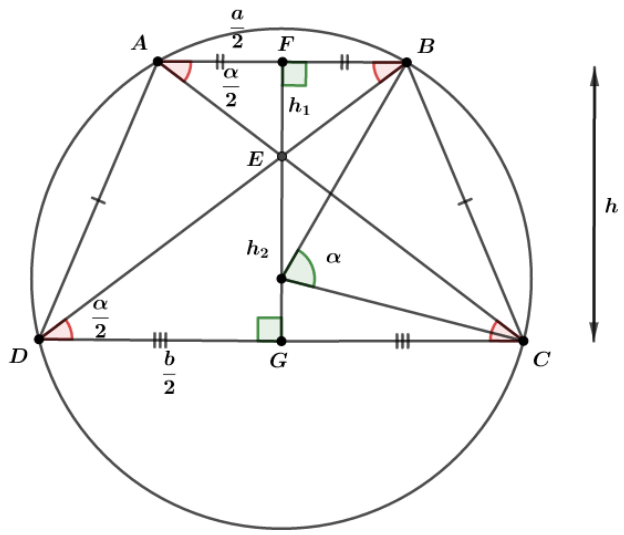
Sabemos que a área de um trapézio é dada por:

$$S = (a + b) \cdot \frac{h}{2}$$

Precisamos encontra a e b em função de h e α dados. Podemos usar a propriedade do arco capaz, traçando as diagonais AC e BD, temos:



Note que $\Delta AEF \equiv \Delta BEF$ e $\Delta EDG \equiv \Delta ECG$, pois as alturas de cada par desses triângulos são congruentes e temos dois ângulos internos congruentes. Assim, F e G são os pontos médios das respectivas bases. Vamos definir $EF = h_1$ e $EG = h_2$:



Assim, podemos escrever:

$$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h_1}{\frac{a}{2}} \Rightarrow h_1 = \frac{a}{2} \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$h_2 = \frac{b}{2} \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

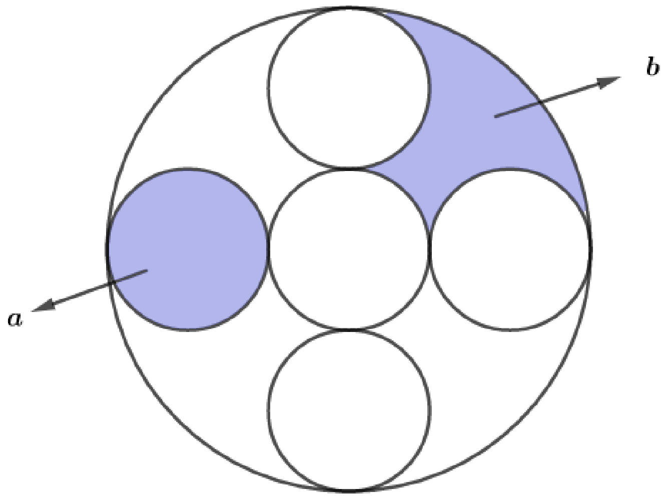
$$\Rightarrow h = h_1 + h_2 \Rightarrow h = \frac{a+b}{2} \cdot tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow a + b = \frac{2h}{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Substituindo as variáveis na equação da área, encontramos:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h \Rightarrow S = \frac{h}{2} \cdot \frac{2h}{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Rightarrow S = h^2 \cdot cotg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

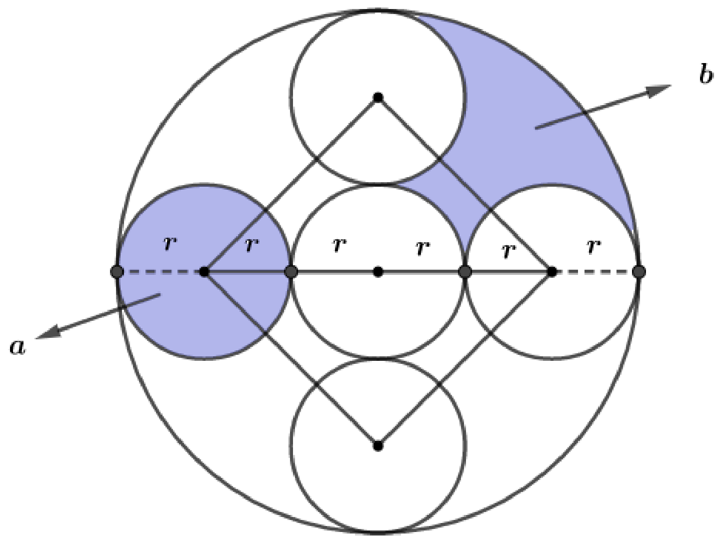
Gabarito: $\boldsymbol{S = h^2 \cdot cotg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

10. (OBM/2005) Na figura, todas as circunferências menores têm o mesmo raio r e os centros das circunferências que tocam a circunferência maior são vértices de um quadrado. Sejam a e b as áreas hachuradas. Calcule a/b.



Resolução:

Vamos inserir as variáveis do problema:



Seja S a área do círculo maior, assim, temos:

$$S = 5a + 4b$$

Mas, $S = \pi(3r)^2$:

$$9\pi r^2 = 5a + 4b$$

Podemos escrever a e b em função de r:

$$a = \pi r^2$$

$$9\pi r^2 = 5a + 4b \Rightarrow b = \frac{9\pi r^2 - 5\pi r^2}{4} = \pi r^2$$

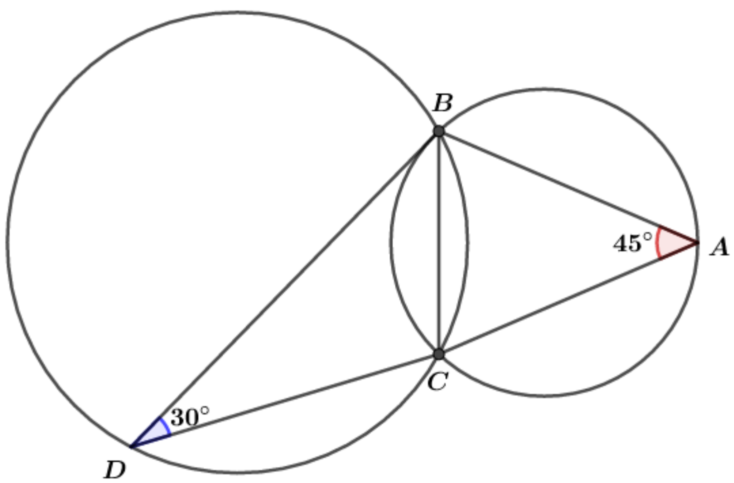
A razão é dada por:

$$\frac{a}{b} = \frac{\pi r^2}{\pi r^2} = 1$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{a}{b} = 1}$

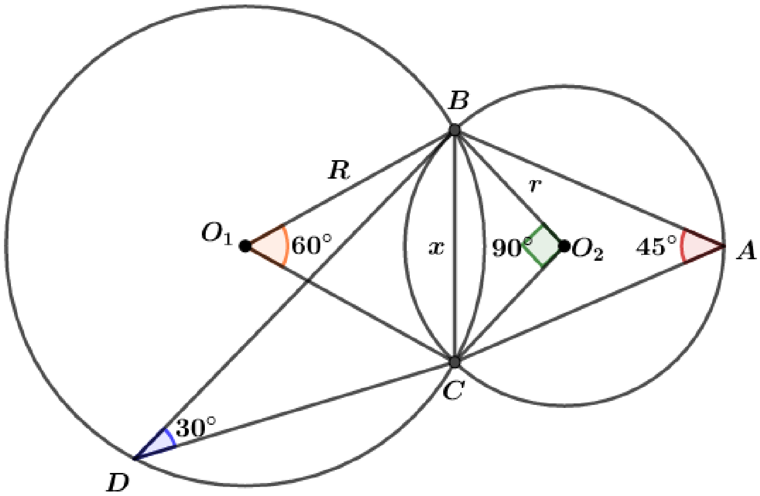
---

11. Determine a razão da área do círculo maior para a área do círculo menor.



Resolução:

Sendo os ângulos inscritos nos círculos, temos:



Seja S_1 a área do círculo maior e S_2 a área do círculo menor, desse modo, podemos escrever:

$$S_1 = \pi R^2$$
$$S_2 = \pi r^2$$
$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

Vamos encontrar uma relação entre R e r. Note que o triângulo O_1BC é equilátero (triângulo isósceles cujo vértice possui ângulo de 60°) e o triângulo O_2BC é retângulo isósceles. Assim, temos:

$$R = x \Rightarrow R^2 = x^2$$
$$r = \frac{x\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r^2 = \frac{x^2}{2}$$

Substituindo essas variáveis na razão das áreas:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$$

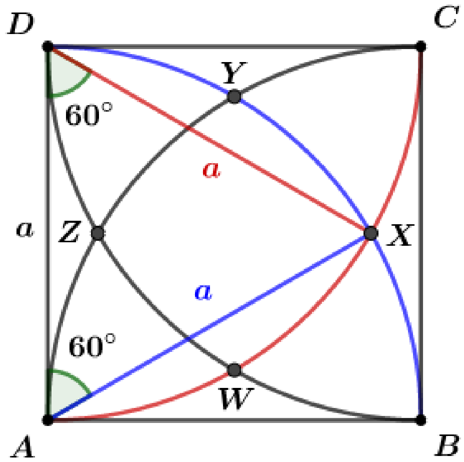
Gabarito: 2

---

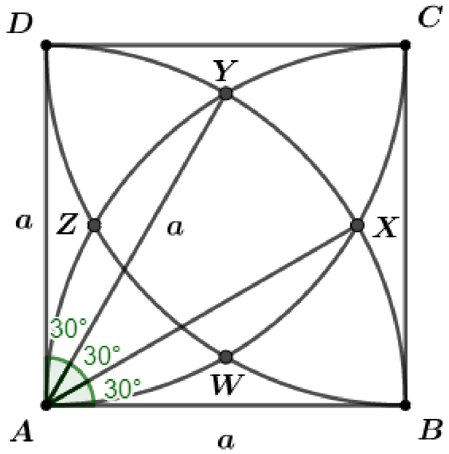
12. $ABCD$ é um quadrado cujo lado é a. De cada um dos vértices desse quadrado como centro e com raio a descreve-se internamente um arco. Calcular a área do quadrilátero curvilíneo cujos vértices são os pontos de intersecção desses arcos.

Resolução:

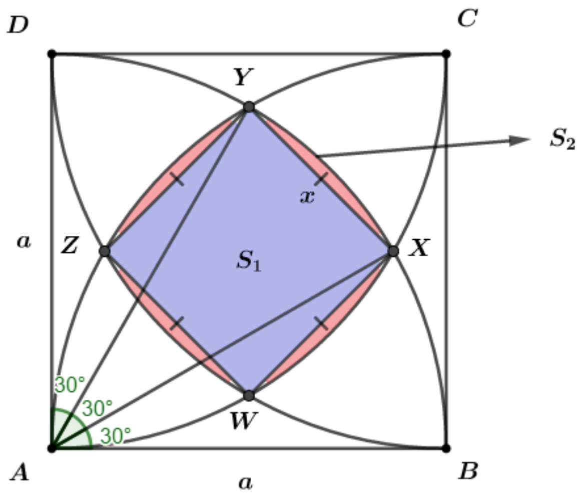
Devemos notar que os vértices do quadrilátero curvilíneo formam um quadrado, veja:



Os segmentos $\overline{DX}$ e $\overline{AX}$ são raios de circunferências e medem a. Desse modo, AXD é um triângulo equilátero, logo, $X\hat{A}B = C\widehat{D}X = 30°$. Dessa forma, podemos ver que a figura fica da seguinte maneira:



Como os arcos XY, YZ, ZW, WX possuem mesma medida e o quadrilátero é equilátero, temos que o quadrilátero é um quadrado. Assim, temos:



S_1 é a área do quadrado e S_2 é a área do segmento circular:

$$S_1 = x^2$$

Vamos calcular o valor de x e a área S_1, aplicando a lei dos cossenos:

$$x^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 30° \Rightarrow x = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_1 = a^2\left(2-\sqrt{3}\right)$$

Agora, vamos calcular a área S_2, ela é a diferença da área do setor circular e a área do triângulo AXY:

$$S_{setor} = \frac{30°}{360°} \cdot \pi a^2 = \frac{\pi a^2}{12}$$

$$S_{AXY} = \frac{1}{2} \cdot (a\ sen\ 30°) \cdot a = \frac{a^2}{4}$$

$$S_2 = \frac{\pi a^2}{12} - \frac{a^2}{4}$$

A área do quadrilátero curvilíneo é dada por:

$$S = S_1 + 4S_2 \Rightarrow S = a^2\left(2-\sqrt{3}\right) + 4\left(\frac{\pi a^2}{12} - \frac{a^2}{4}\right) \Rightarrow S = \frac{\pi a^2}{3} + a^2 - a^2\sqrt{3}$$

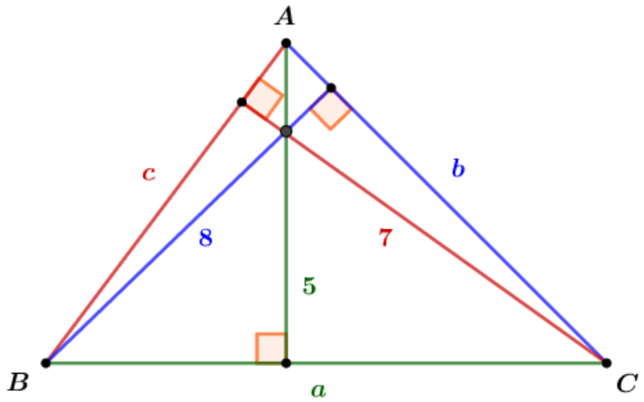
$$\therefore S = a^2\left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = a^2\left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right)}$

---

13. Calcular a área do triângulo cujas alturas medem 5, 7 e 8 cm.

Resolução:



Para calcular a área do triângulo, precisamos encontrar o valor de um dos seus lados. Para isso, podemos encontrar uma relação entre os lados. Usando a definição de área, temos:

$$S = \frac{5a}{2} = \frac{8b}{2} = \frac{7c}{2}$$

Escrevendo b e c em função de a:

$$b = \frac{5a}{8} \text{ e } c = \frac{5a}{7}$$

Vamos usar a fórmula de Heron para encontrar a medida de a:

$$S = \frac{5a}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\frac{25a^2}{4} = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}$$

Substituindo b e c:

$$\frac{25a^2}{4} = \left(\frac{1}{16}\right) \cdot \left(a + \frac{5a}{8} + \frac{5a}{7}\right) \cdot \left(-a + \frac{5a}{8} + \frac{5a}{7}\right) \cdot \left(a - \frac{5a}{8} + \frac{5a}{7}\right) \cdot \left(a + \frac{5a}{8} - \frac{5a}{7}\right)$$

$$100a^2 = a^4 \cdot \frac{(56+35+40)}{56} \cdot \frac{(-56+35+40)}{56} \cdot \frac{(56-35+40)}{56} \cdot \frac{(56+35-40)}{56}$$

$$100 \cdot 56^4 = a^2 \cdot 131 \cdot 19 \cdot 61 \cdot 51$$

$$a = \frac{10 \cdot 56^2}{\sqrt{131 \cdot 19 \cdot 61 \cdot 51}}\ cm$$

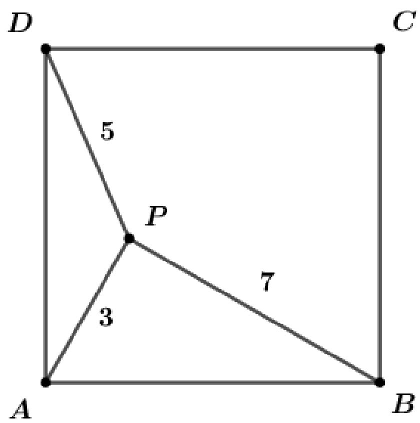
Assim, a área do triângulo é dada por:

$$S = \frac{5a}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{10 \cdot 56^2}{\sqrt{131 \cdot 19 \cdot 61 \cdot 51}} \cong 28{,}17\ cm^2$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = 28,17\ cm^2}$

---

14. Encontre a área do quadrado $ABCD$ na figura abaixo tal que $PA = 3, PB = 7$ e $PD = 5$.

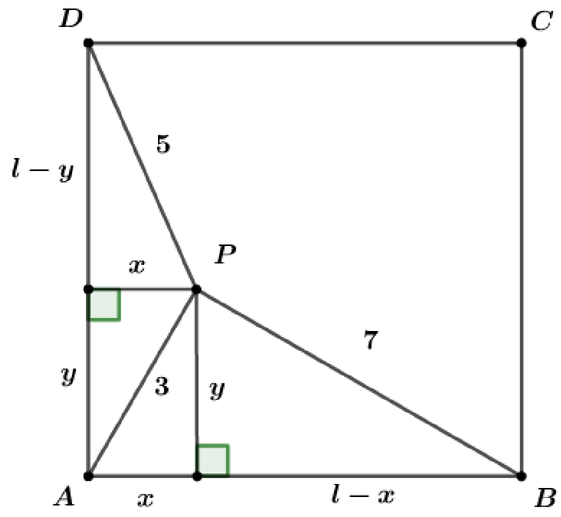


Resolução:

Seja l o lado do quadrado e A sua área, então:

$$A = l^2$$

Vamos inserir as variáveis na figura:



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos da figura, temos:

$$9 = x^2 + y^2 \quad (I)$$

$$25 = x^2 + (l - y)^2 \Rightarrow 25 = \underbrace{x^2 + y^2}_{9} - 2ly + l^2 \Rightarrow y = \frac{l^2 - 16}{2l} \quad (II)$$

$$49 = y^2 + (l - x)^2 \Rightarrow 49 = \underbrace{y^2 + x^2}_{9} - 2lx + l^2 \Rightarrow x = \frac{l^2 - 40}{2l} \quad (III)$$

Substituindo (II) e (III) em (I):

$$\left(\frac{l^2 - 40}{2l}\right)^2 + \left(\frac{l^2 - 16}{2l}\right)^2 = 9$$

$$l^4 - 80l^2 + 1600 + l^4 - 32l^2 + 256 = 36l^2$$

$$2l^4 - 148l^2 + 1856 = 0 \Rightarrow l^4 - 74l^2 + 928 = 0$$

Vamos substituir a variável $l^2 = A$:

$$A^2 - 74A + 928 = 0$$

Encontrando a raiz:

$$A = 37 \pm \sqrt{37^2 - 928} \Rightarrow A = 37 \pm 21$$

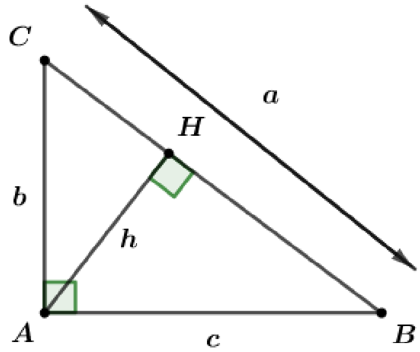
$$\therefore A = 58$$

Gabarito: $A = 58$

15. Calcular a área de um triângulo retângulo conhecendo o seu perímetro $2p$ e a altura h relativa à hipotenusa.

Resolução:

Temos o perímetro e a altura do triângulo retângulo, vamos encontrar sua área em função dessas variáveis:



A área do triângulo retângulo é dada por:

$$S = \frac{bc}{2} = \frac{ah}{2}$$

Usando o teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - 2bc \Rightarrow a^2 = (b + c)^2 - 2bc$$

$$\Rightarrow (b + c)^2 - a^2 = 2bc \Rightarrow \underbrace{(b + c - a)}_{2p-2a}\underbrace{(b + c + a)}_{2p} = \underbrace{2bc}_{4S}$$

$$(2p - 2a) \cdot 2p = 4S \Rightarrow 2p - 2a = \frac{2S}{p} \Rightarrow a = p - \frac{S}{p}$$

Substituindo o valor de a na equação da área:

$$S = \frac{ah}{2} \Rightarrow S = \frac{\left(p - \frac{S}{p}\right)h}{2} \Rightarrow 2Sp = p^2h - Sh \Rightarrow S(2p + h) = p^2h$$

$$S = \frac{p^2h}{2p + h}$$

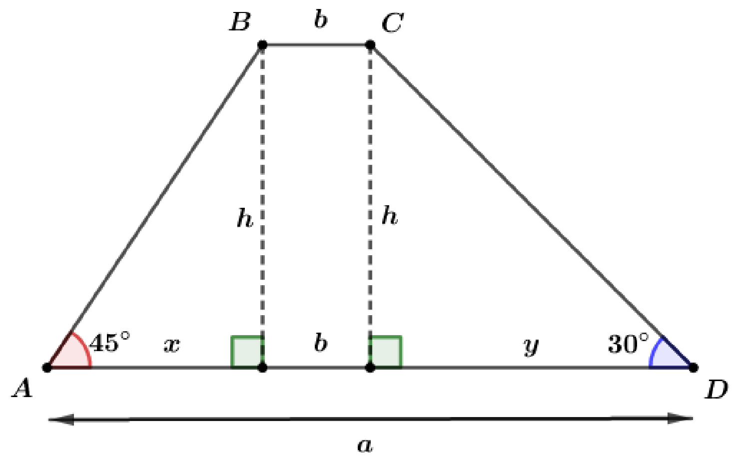
Gabarito: $\boldsymbol{S = \frac{p^2h}{2p+h}}$

---

16. Determinar a área do trapézio $ABCD$, cujas bases são $AD = a$ e $BC = b$ $(a > b)$, e no qual $\hat{A} = 45°$ e $\hat{D} = 30°$.

Resolução:

Vamos desenhar a figura da questão e inserir as variáveis:



Usando a razão tangente, temos:

$$tg45° = \frac{h}{x} \Rightarrow x = h$$

$$tg30° = \frac{h}{y} \Rightarrow y = h\sqrt{3}$$

De acordo com a figura, podemos inferir:

$$x + b + y = a \Rightarrow x + y = a - b \Rightarrow h + h\sqrt{3} = a - b \Rightarrow h = \frac{a - b}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\Rightarrow h = \frac{(a - b)\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2}$$

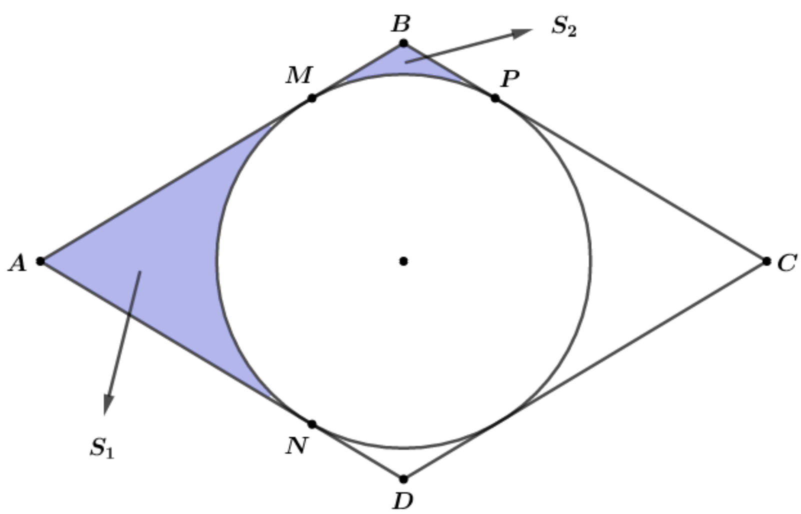
A área do trapézio é dada por:

$$S = (a + b) \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow S = \frac{(a + b)}{2} \cdot \frac{(a - b)\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)(a^2 - b^2)$$

Gabarito: $\boldsymbol{A = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)(a^2 - b^2)}$

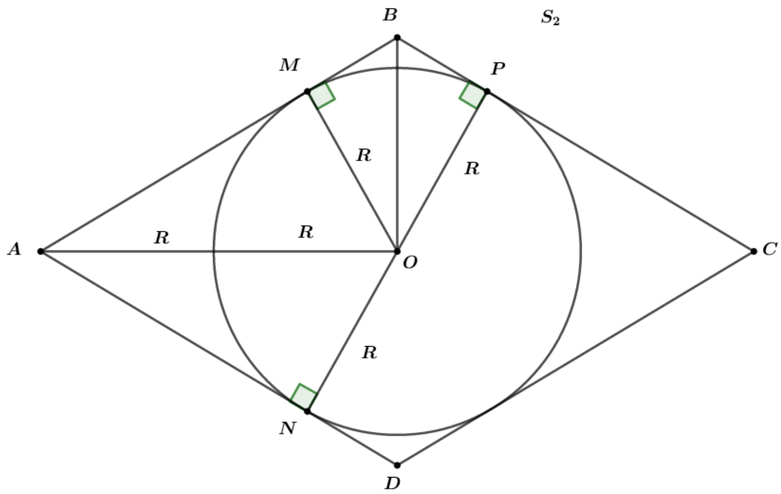
---

17. Uma circunferência de raio R está inscrita num losango $ABCD$ cuja maior diagonal $AC = 4R$. Calcular as áreas dos triângulos mistilíneos AMN e MBP.



Resolução:

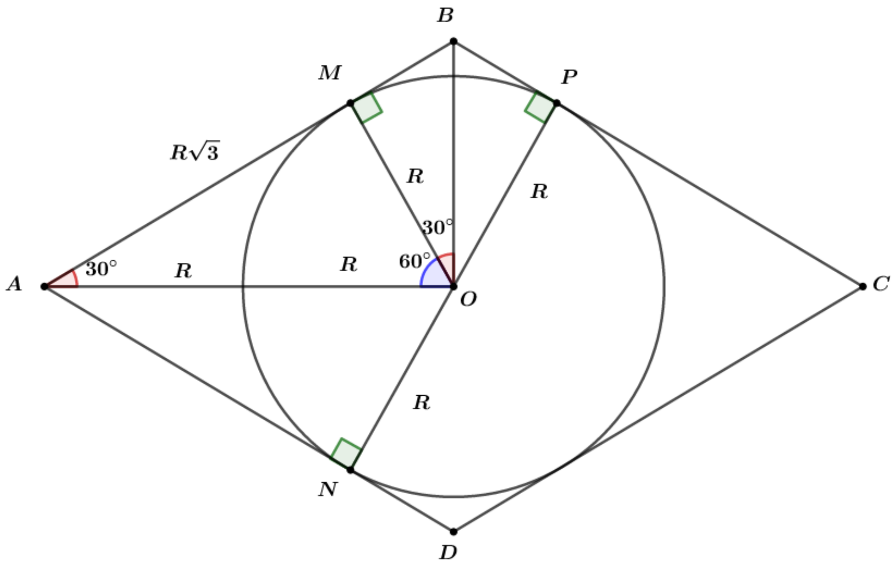
Usando os dados do enunciado, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AOM:

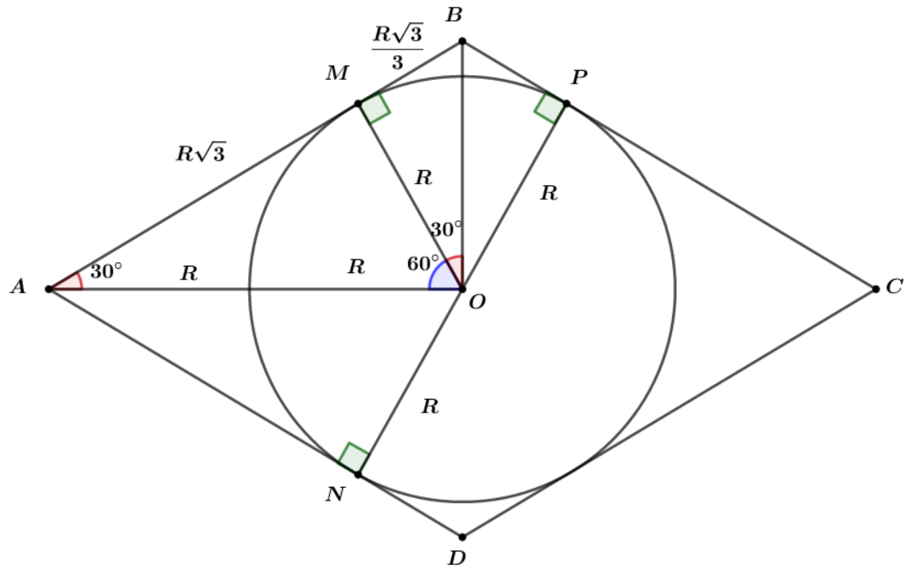
$$(2R)^2 = R^2 + AM^2 \Rightarrow AM = R\sqrt{3}$$

Note que os lados desse triângulo permitem inferir que $O\hat{A}M = 30°$ e $A\hat{O}M = 60°$. Sabendo que as diagonais de um losango formam um ângulo reto, temos:



Podemos encontrar a medida de MB:

$$tg30° = \frac{MB}{R} \Rightarrow MB = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$



Vamos calcular o valor da área do triângulo mistilíneo AMN, temos 2 triângulos retângulos e 1 setor circular de ângulo 120°:

$$S_{AOM} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} R^2$$

$$S_{\widehat{MON}} = \frac{120°}{360°} \cdot \pi R^2 = \frac{\pi R^2}{3}$$

$$\Rightarrow S_1 = 2S_{AOM} - S_{\widehat{MON}} = \sqrt{3}R^2 - \frac{\pi R^2}{3} = \frac{R^2}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right)$$

Cálculo de S_2:

$$S_{BOM} = \frac{R^2\sqrt{3}}{6}$$

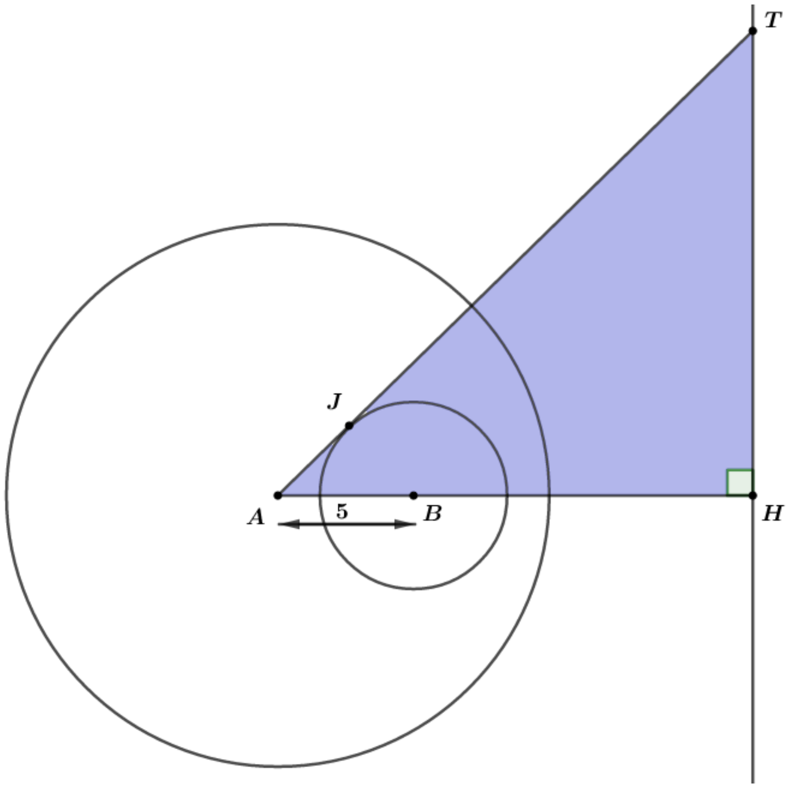
$$S_{\widehat{MOP}} = \frac{60°}{360°} \cdot \pi R^2 = \frac{\pi R^2}{6}$$

$$\Rightarrow S_2 = 2S_{BOM} - S_{\widehat{MOP}} = \frac{R^2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi R^2}{6} = \frac{R^2}{6}\left(2\sqrt{3} - \pi\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{S_1 = \frac{R^2}{3}\left(3\sqrt{3} - \pi\right); S_2 = \frac{R^2}{6}\left(2\sqrt{3} - \pi\right)}$

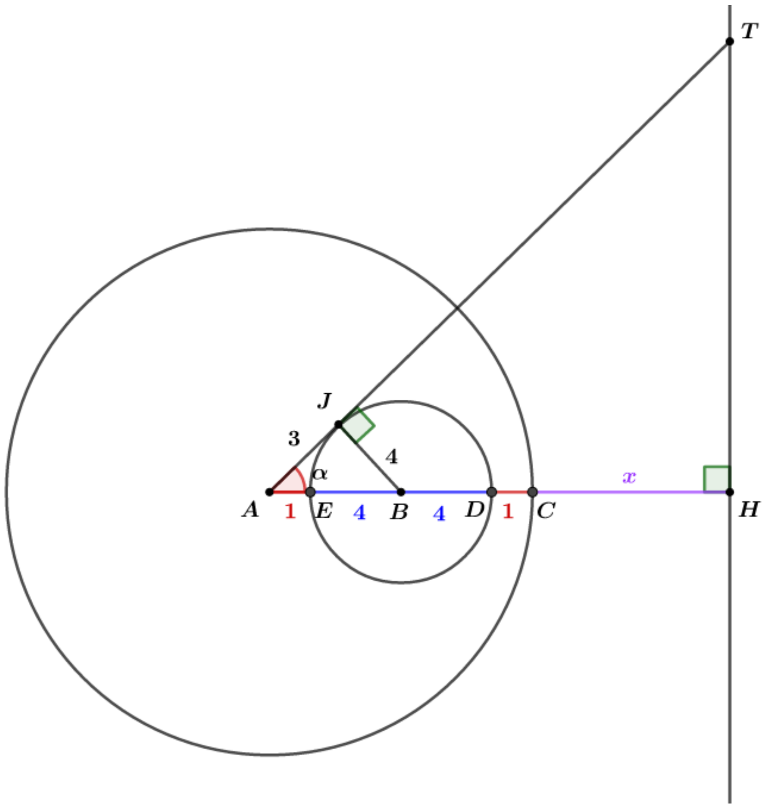
---

18. Considere os círculos da figura de raios 10 e 4 e seu eixo radical. Se $\overline{AT}$ é tangente em J ao círculo menor, calcule a área do triângulo ATH.



Resolução:

Se J é o ponto de tangência e o raio do círculo menor é 4, então, o triângulo retângulo ABJ é o triângulo retângulo 3:4:5. Vamos inserir as variáveis na figura:



Podemos encontrar o valor de x, usando a definição de eixo radical:

$$Pot_A^H = Pot_B^H \Rightarrow x\left(x + 2\underbrace{R_A}_{10}\right) = (x+1)\left(x + 1 + 2\underbrace{R_B}_{4}\right)$$

$$x(x+20) = (x+1)(x+9)$$

$$x^2 + 20x = x^2 + 10x + 9 \Rightarrow 10x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{10}$$

Analisando o triângulo retângulo ABJ, temos:

$$tg\alpha = \frac{4}{3}$$

Vamos encontrar a altura TH:

$$tg\alpha = \frac{TH}{AH} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{TH}{10 + \frac{9}{10}} \Rightarrow TH = \frac{4 \cdot 109}{30}$$

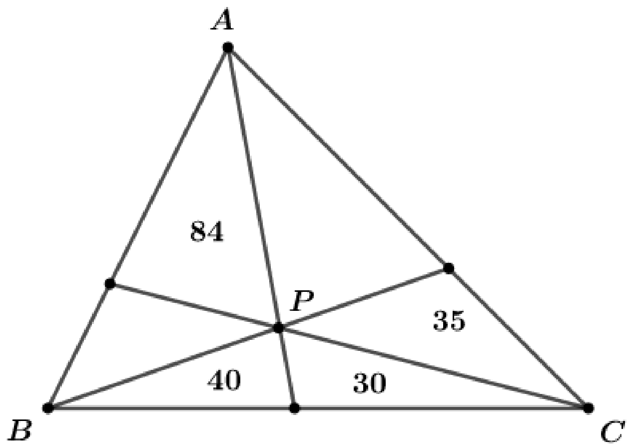
A área do ΔATH é dada por:

$$A_{ATH} = \frac{1}{2} \cdot \left(10 + \frac{9}{10}\right) \cdot \frac{4 \cdot 109}{30} = \frac{109^2}{150} = \frac{11881}{150}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{11881}{150}}$

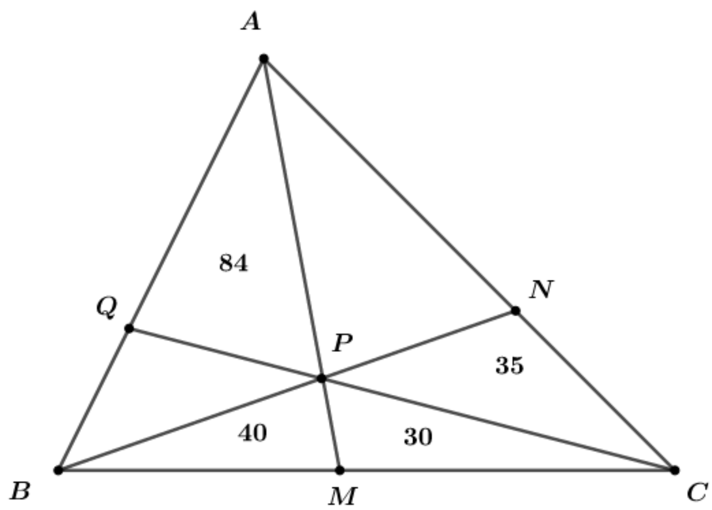
---

19. (IME/1990) Calcule a área do triângulo ABC.

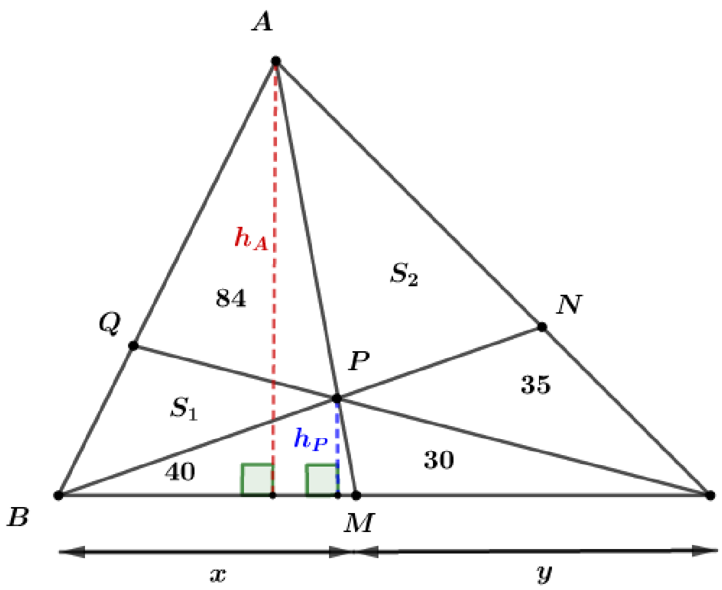


Resolução:

Sejam M, N e Q os pontos de intersecção dos prolongamentos dos segmentos $\overline{AP}, \overline{BP}$ e $\overline{CP}$ com os lados do triângulo, respectivamente.



Vamos tomar como base o lado BC. Note que a altura dos triângulos ABM e AMC possuem mesma medida e a altura dos triângulos BPM e MPC também. Assim, temos:



Vamos calcular as áreas dos triângulos:

$$\begin{cases} \Delta ABM \Rightarrow \dfrac{x \cdot h_A}{2} = 84 + S_1 + 40 \\ \Delta AMC \Rightarrow \dfrac{y \cdot h_A}{2} = S_2 + 35 + 30 \end{cases}$$

Dividindo as duas equações:

$$\frac{x}{y} = \frac{S_1 + 124}{S_2 + 65}$$

$$\begin{cases} \Delta BPM \Rightarrow \dfrac{x \cdot h_p}{2} = 40 \\ \Delta MPC \Rightarrow \dfrac{y \cdot h_P}{2} = 30 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{40}{30}$$

Igualando as equações:

$$\frac{S_1 + 124}{S_2 + 65} = \frac{40}{30} \Rightarrow \frac{S_1 + 124}{S_2 + 65} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3S_1 + 372 = 4S_2 + 260 \Rightarrow 4S_2 - 3S_1 = 112 \ \ (I)$$

Analogamente, os triângulos ABN e BNC possuem mesma altura em relação ao lado AC, então, temos:

$$\frac{S_1 + 84 + S_2}{40 + 30 + 35} = \frac{S_2}{35} \Rightarrow 35S_1 + 84 \cdot 35 + 35S_2 = 105S_2$$

$$S_1 + 84 + S_2 = 3S_2 \Rightarrow 2S_2 - S_1 = 84 \ \ (II)$$

Fazendo $2(II) - (I)$:

$$4S_2 - 2S_1 - (4S_2 - 3S_1) = 168 - 112 \Rightarrow S_1 = 56$$

Substituindo o valor de S_1 em (II):

$$2S_2 = 84 + S_1 \Rightarrow S_2 = \frac{84 + 56}{2} = 70$$

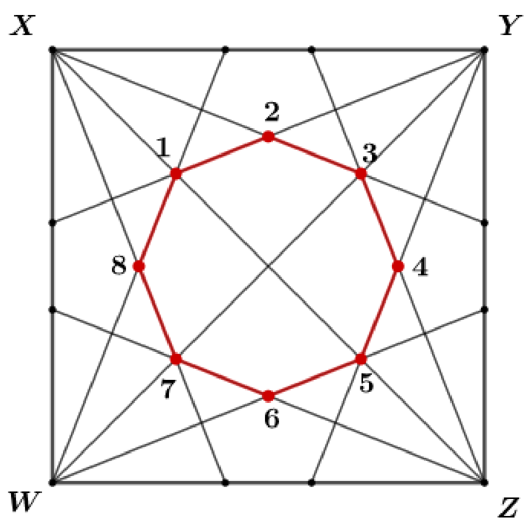
Portanto, a área total é dada por:

$$S_{ABC} = 84 + 56 + 40 + 70 + 35 + 30 = 315$$

Gabarito: $S = 315$

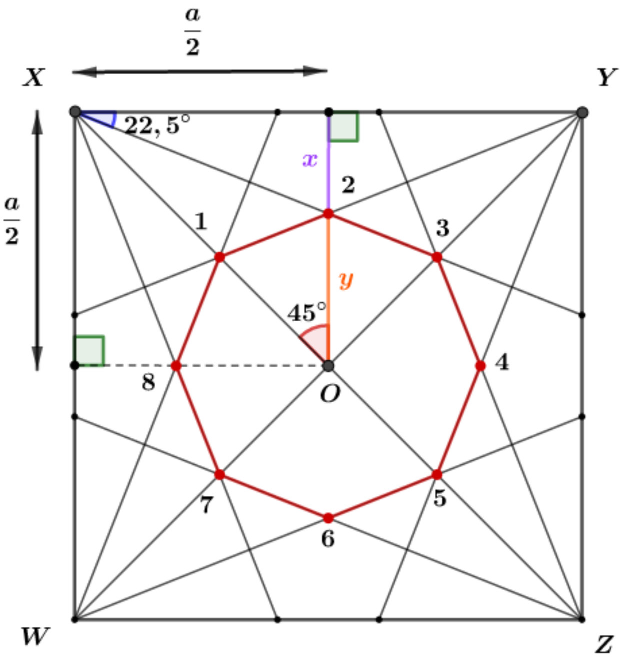
---

20. (IME/2002) Considere um quadrado $XYZW$ de lado a. Dividindo-se cada ângulo desse quadrado em 4 partes iguais, obtém-se o octógno regular da figura a seguir. Calcule a área do octógono $\overline{12345678}$ formado.



Resolução:

Para calcular o valor da área do octógono regular, precisamos encontrar o valor de um dos lados dos triângulos isósceles que formam o octógono regular. Como os ângulos foram divididos em 4 partes iguais, temos:



Usando a razão tangente, temos:

$$tg(22{,}5°) = \frac{x}{\frac{a}{2}} \Rightarrow x = \frac{a}{2} \cdot tg(22{,}5°)$$

Lembrando que:

$$tg\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - cosA}{senA}$$

$$tg(22{,}5°) = \frac{1 - cos45°}{sen45°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} - 1$$

Assim, podemos calcular o valor de y:

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

$$x + y = \frac{a}{2} \Rightarrow y = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow y = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2})$$

A área do octógono regular é dada por:

$$S_8 = 8 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot y \cdot ysen45°\right)}_{área\ do\ triângulo\ isósceles} \Rightarrow S_8 = 2\sqrt{2}y^2$$

Substituindo o valor de y na equação:

$$S_8 = 2\sqrt{2} \cdot \left[\frac{a}{2}(2 - \sqrt{2})\right]^2 = \frac{a^2}{4} \cdot 2\sqrt{2} \cdot (6 - 4\sqrt{2})$$

$$\therefore S_8 = a^2(3\sqrt{2} - 4)$$

Gabarito: $S_8 = a^2(3\sqrt{2} - 4)$

3. APÊNDICE

CURIOSIDADE

Estudaremos nessa seção alguns temas que mesmo que não caiam diretamente em sua prova, podem ajudar você a resolver algumas questões.

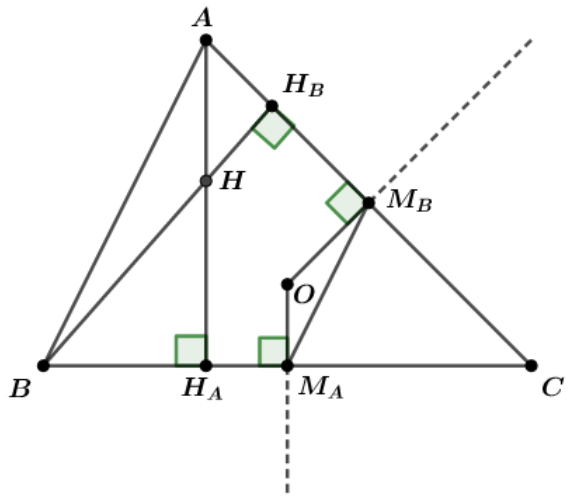
3.1. RETA DE EULER

Seja ABC um triângulo qualquer, podemos mostrar que o ortocentro, o baricentro e o circuncentro deste triângulo são colineares. A reta que liga esses pontos é chamada de reta de Euler.

Demonstração:

Vamos demonstrar para o triângulo acutângulo, a demonstração para o triângulo obtusângulo segue o mesmo raciocínio.

Considere o ΔABC abaixo:

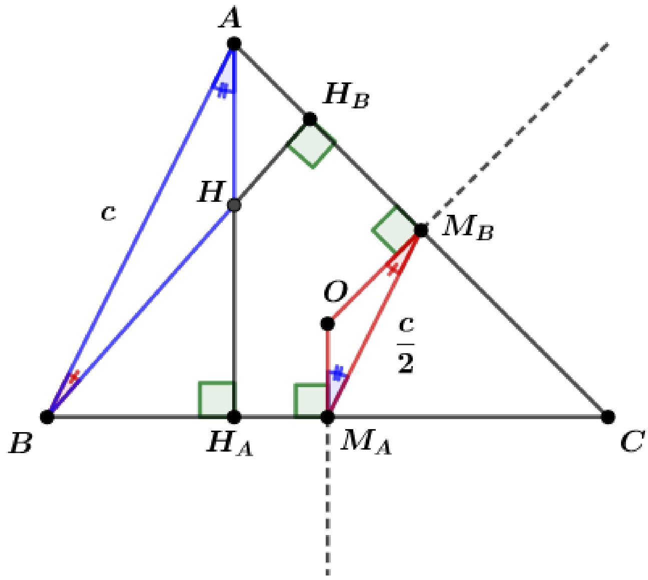


AH_A e BH_B são as alturas do ΔABC e H é seu ortocentro.

M_BO e M_AO são as mediatrizes do ΔABC e O é seu circuncentro.

Perceba que M_AM_B é a base média desse triângulo, logo, $M_AM_B//AB$ e $M_AM_B = AB/2$.

Como AH_A e OM_A são perpendiculares ao lado BC, temos que $AH//OM_A$ e, consequentemente, $B\hat{A}H \equiv O\widehat{M_A}M_B$. Analogamente, $BH//OM_B$ e $H\hat{B}A \equiv O\widehat{M_B}M_A$.

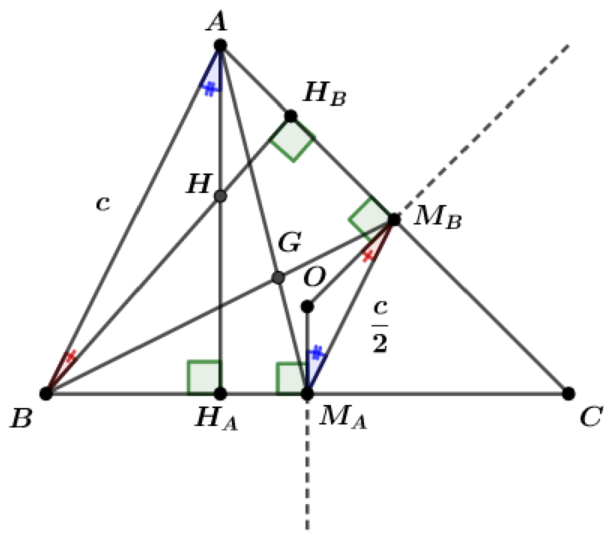


Assim, pelo critério de semelhança AA, temos $\Delta ABH \sim \Delta M_A M_B O$ e a razão de proporção entre eles é $k = 2$. Então:

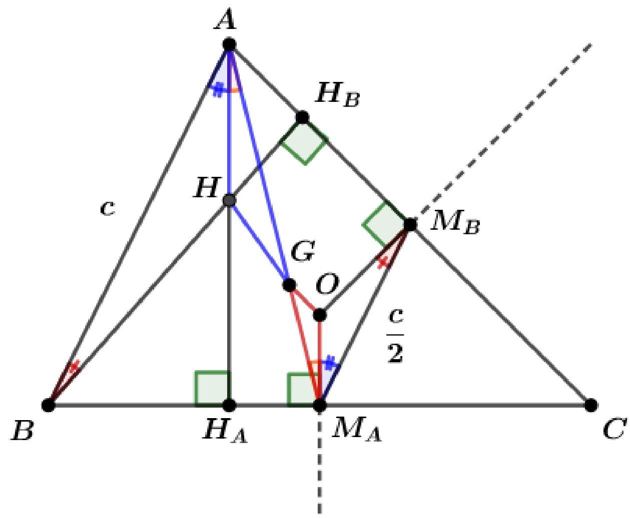
$$AH = 2OM_A$$

$$BH = 2OM_B$$

Vamos traçar o baricentro G (lembrando que o baricentro é o encontro das medianas):



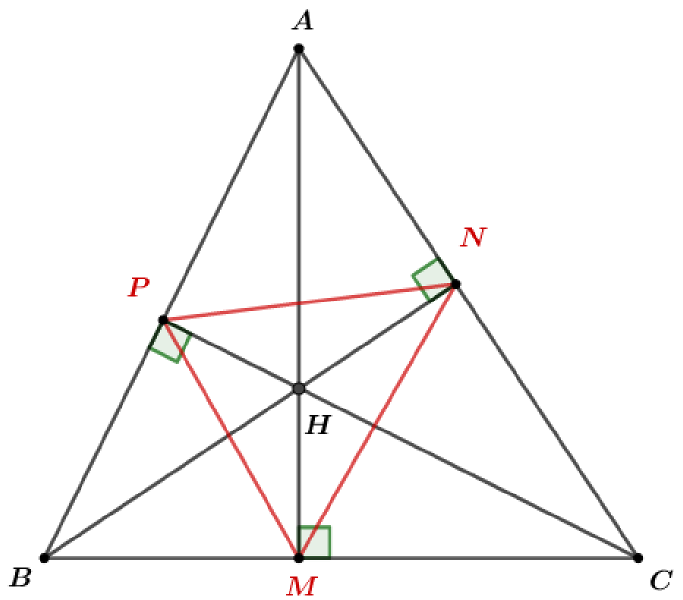
Como $AH//OM_A$ e AM_A é um segmento de reta, temos que $H\hat{A}G \equiv O\widehat{M_A}G$. Sabendo que o baricentro divide o segmento AM_A na razão 2:1, temos $AG = 2GM_A$. Então, usando o critério de semelhança LAL, temos que $\Delta AHG \sim \Delta M_A OG$. Desse modo, $A\hat{G}H \equiv M_A\hat{G}O$ e, portanto, H, G, O são colineares.



3.2. TRIÂNGULO ÓRTICO

3.2.1. DEFINIÇÃO

Tomando-se um ΔABC qualquer, chamamos de triângulo órtico, a figura formada pelos pés das alturas do ΔABC.



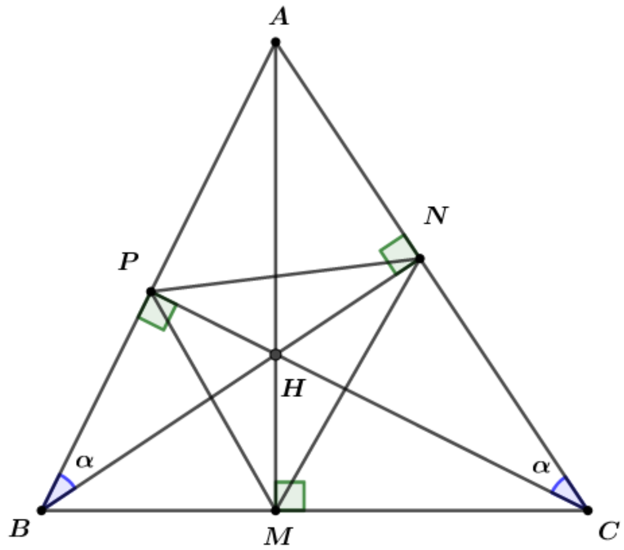
MNP é o triângulo órtico do ΔABC.

3.2.2. TEOREMA

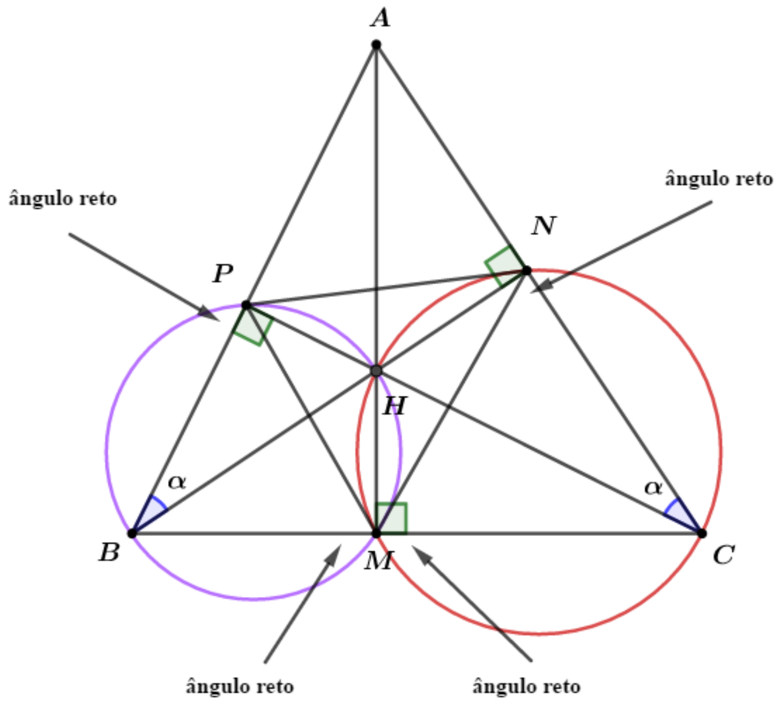
O ortocentro H do triângulo acutângulo ABC é o incentro do triângulo órtico.

Demonstração:

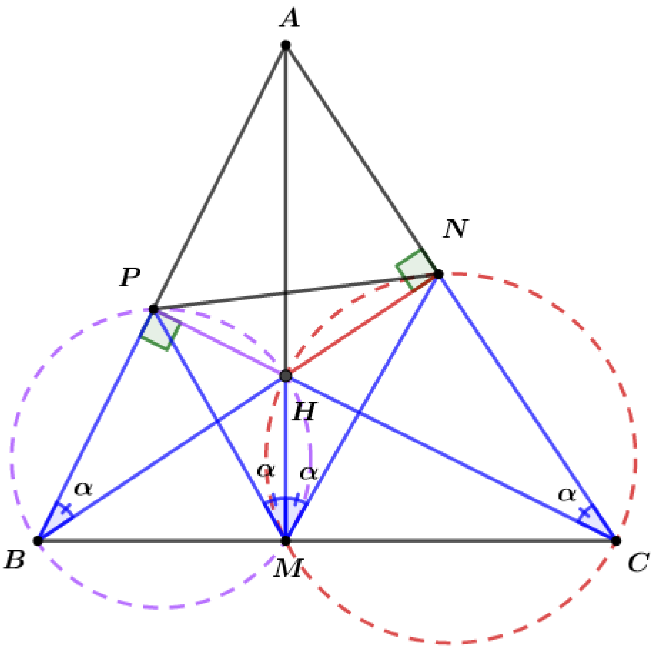
Vamos provar que $P\widehat{M}H \equiv H\widehat{M}N$. Perceba que os triângulos HBP e HCN são semelhantes, pois $P\widehat{H}B \equiv N\widehat{H}C$ e ambos são triângulos retângulos, logo, $N\hat{C}H \equiv P\hat{B}H$.



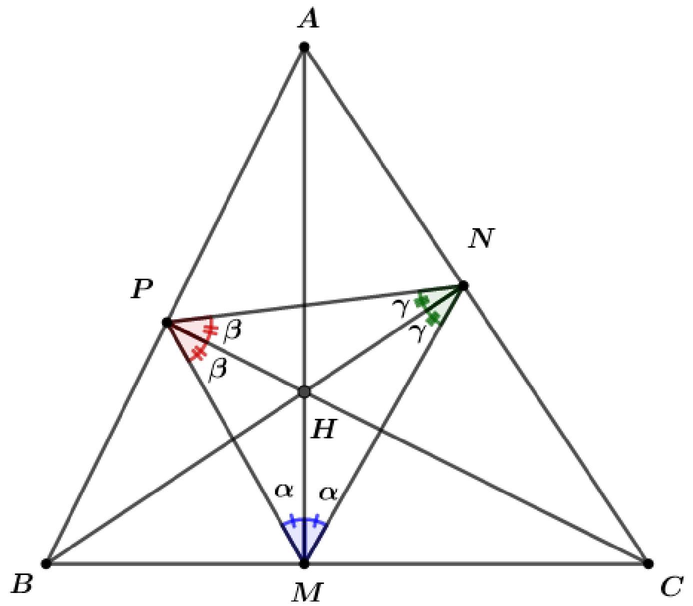
Os quadriláteros $HMCN$ e $HMBP$ são inscritíveis, pois possuem dois ângulos opostos retos:



Note que os ângulos $P\hat{B}H$ e $H\widehat{M}P$ enxergam o mesmo segmento HP, logo, eles são congruentes $P\hat{B}H \equiv H\widehat{M}P$. Analogamente, $N\hat{C}H \equiv N\widehat{M}H$.



Assim, podemos ver que a altura AM do triângulo ABC é a bissetriz interna do triângulo órtico. Usando o mesmo raciocínio, podemos provar que as outras alturas BN e CP também são bissetrizes internas do triângulo órtico. Portanto, o ortocentro do triângulo ABC é o incentro do triângulo órtico.



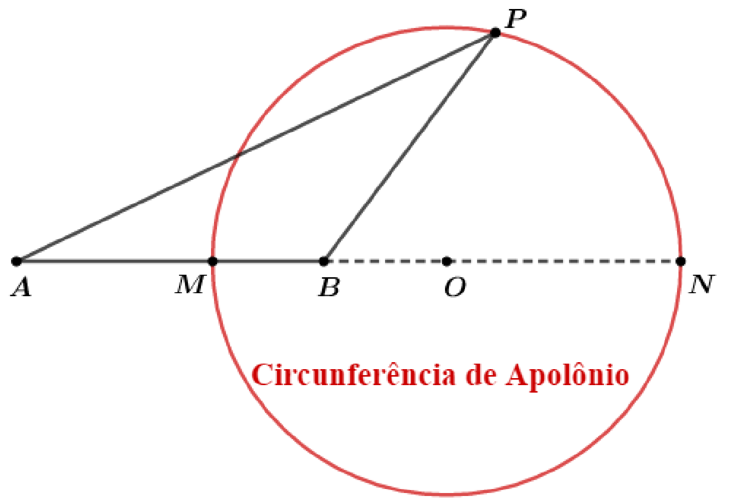
3.2.3. PROPRIEDADE

O triângulo órtico possui o menor perímetro entre os triângulos inscritos no ΔABC acutângulo.

Não veremos essa demonstração, o importante é saber esse resultado.

3.3. CIRCUNFERÊNCIA DE APOLÔNIO

Dado um segmento $\overline{AB}$ $(A \neq B)$ no plano α, chamamos de circunferência de Apolônio, o lugar geométrico dos pontos P de α tal que $\frac{PA}{PB} = k$, com $k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$.



M e N são os conjugados harmônicos em relação ao segmento $\overline{AB}$ na razão k. MN é o diâmetro da circunferência de Apolônio.

Demonstração:

Sejam M e N os conjugados harmônicos do segmento $\overline{AB}$ na razão k e $\lambda\left(O; \frac{MN}{2}\right)$, a circunferência de Apolônio de centro O e raio $MN/2$. Então, podemos escrever:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$$

Tomando-se P um ponto qualquer do LG, temos:

Caso 1) $P \in \{M, N\}$

Nesse caso, P pertence à λ, pois M e N são conjugados harmônicos do segmento $\overline{AB}$.

Caso 2) $P \notin \{M, N\}$

Pela definição do LG, temos:

$$\frac{PA}{PB} = k$$

Mas da definição de conjugado harmônico:

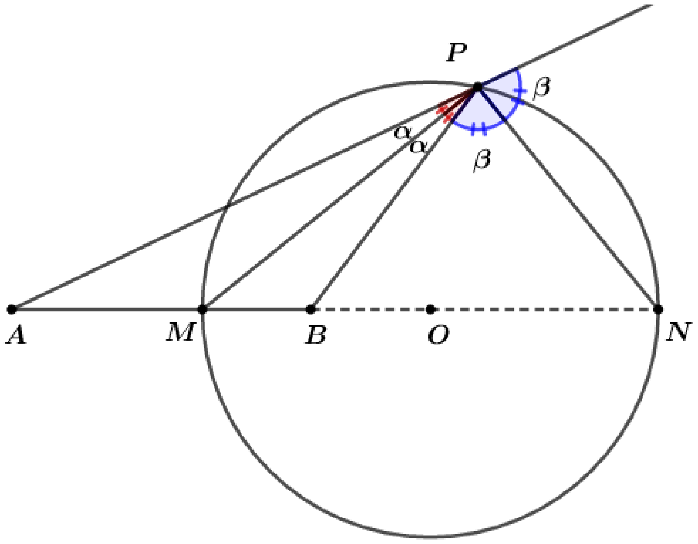
$$\frac{MA}{MB} = \frac{PA}{PB} = k \Rightarrow \frac{PA}{MA} = \frac{PB}{MB}$$

Portanto, pelo teorema das bissetrizes, temos que PM é bissetriz interna do ΔPAB.

Também, temos:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{NA}{NB} = k \Rightarrow \frac{PA}{NA} = \frac{PB}{NB}$$

PN é bissetriz externa do ΔPAB.



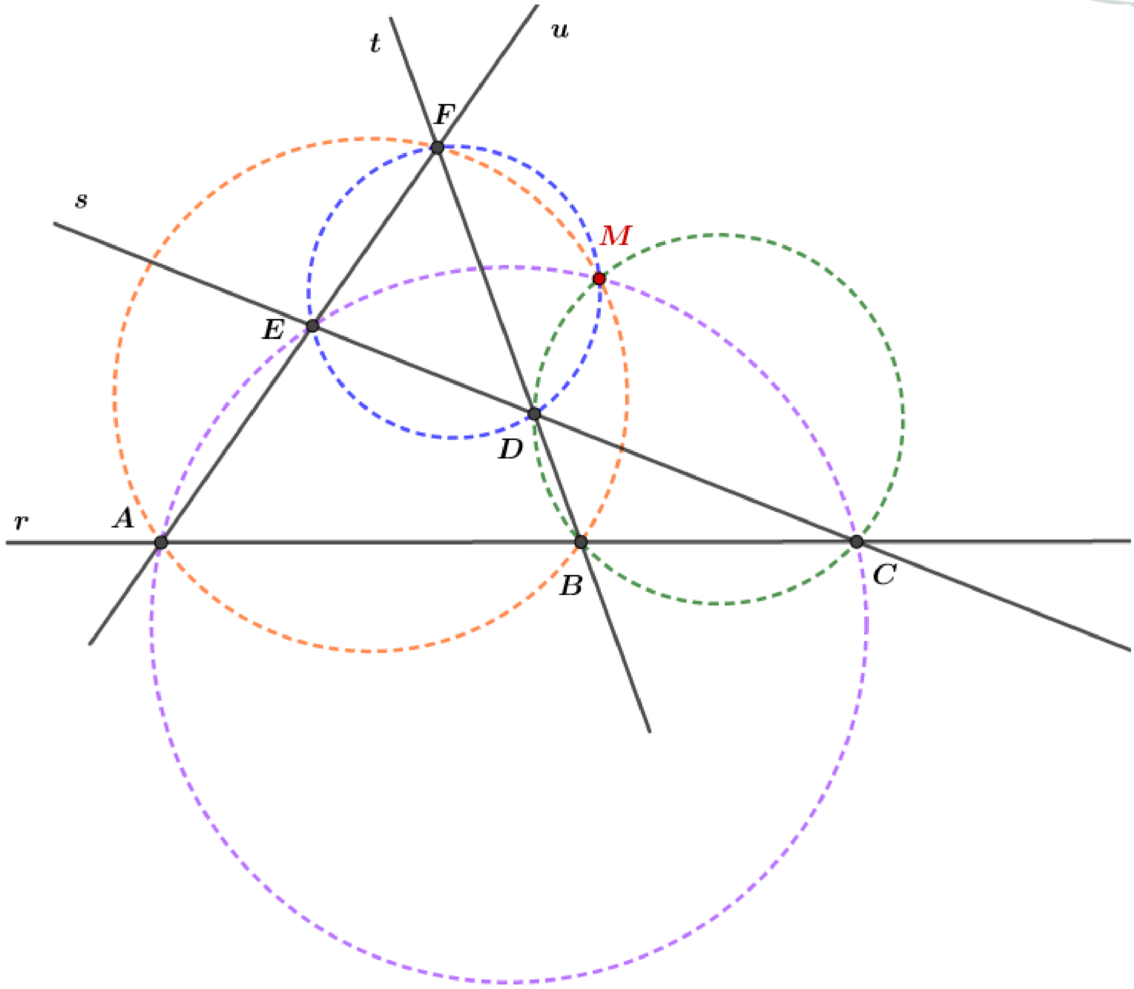
Podemos ver que:

$$2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$$

Assim, $M\hat{P}N$é ângulo reto e, portanto, $P \in \lambda\left(O; \frac{MN}{2}\right)$.

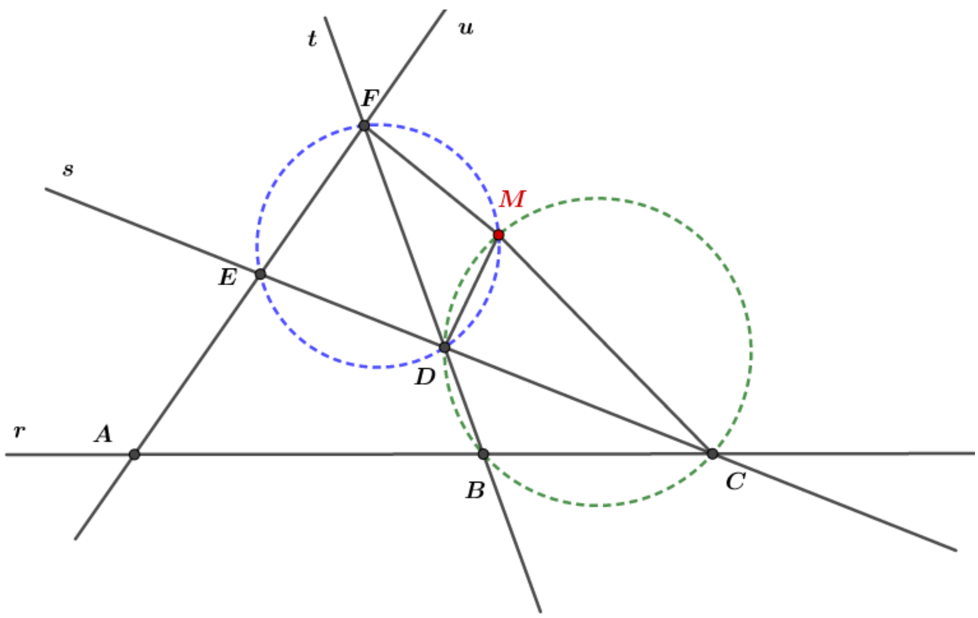
3.4. PONTO DE MIQUEL

Sejam r, s, t e u quatro retas coplanares de modo que não há duas retas paralelas nem três concorrentes. Essas retas determinam quatro triângulos. As circunferências circunscritas a esses triângulos se interceptam em um mesmo ponto, denominado ponto de Miquel das quatro retas.

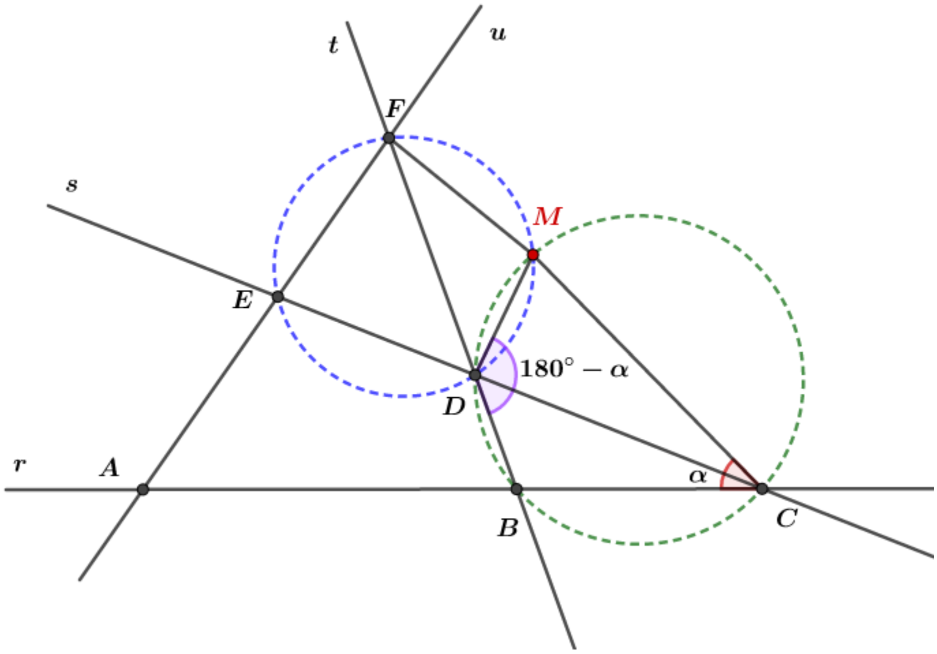


Demonstração:

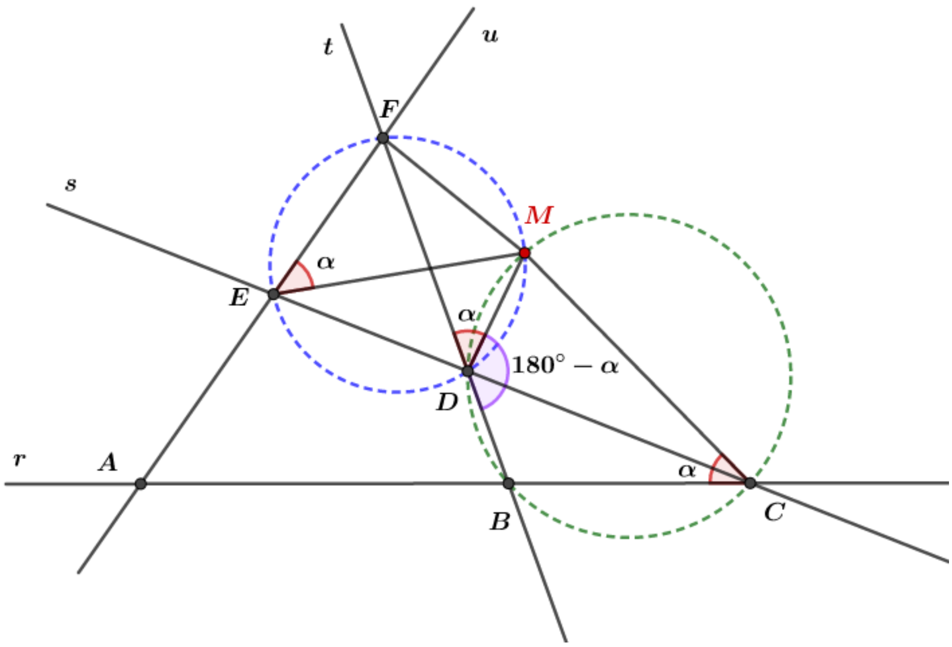
Vamos começar com as duas circunferências circunscritas aos quadriláteros $DEFM$ e $BDMC$.



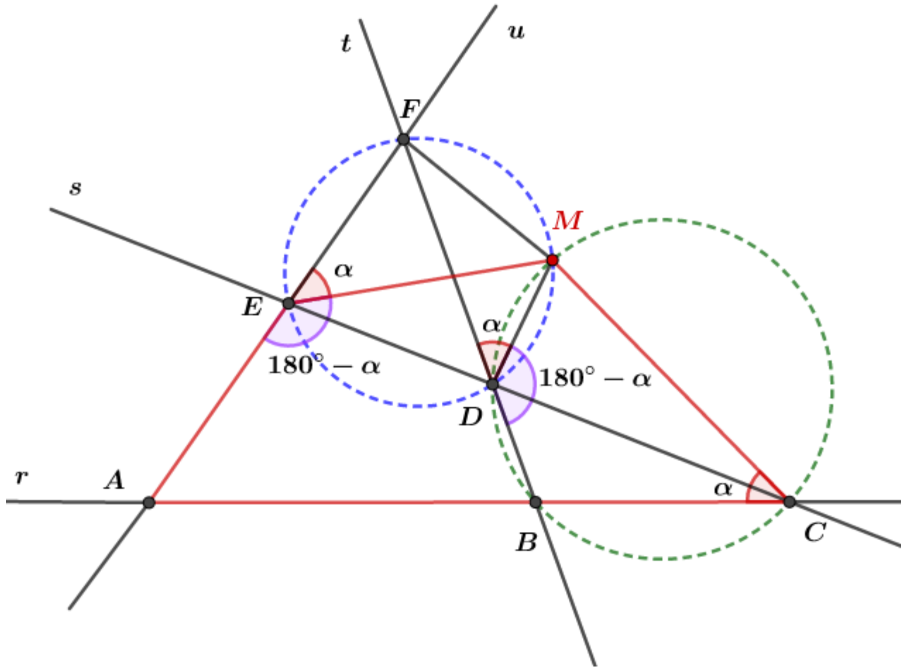
Como o quadrilátero $BDMC$ é inscritível, então, se $B\hat{C}M = \alpha$, temos $B\hat{D}M = 180° - \alpha$.



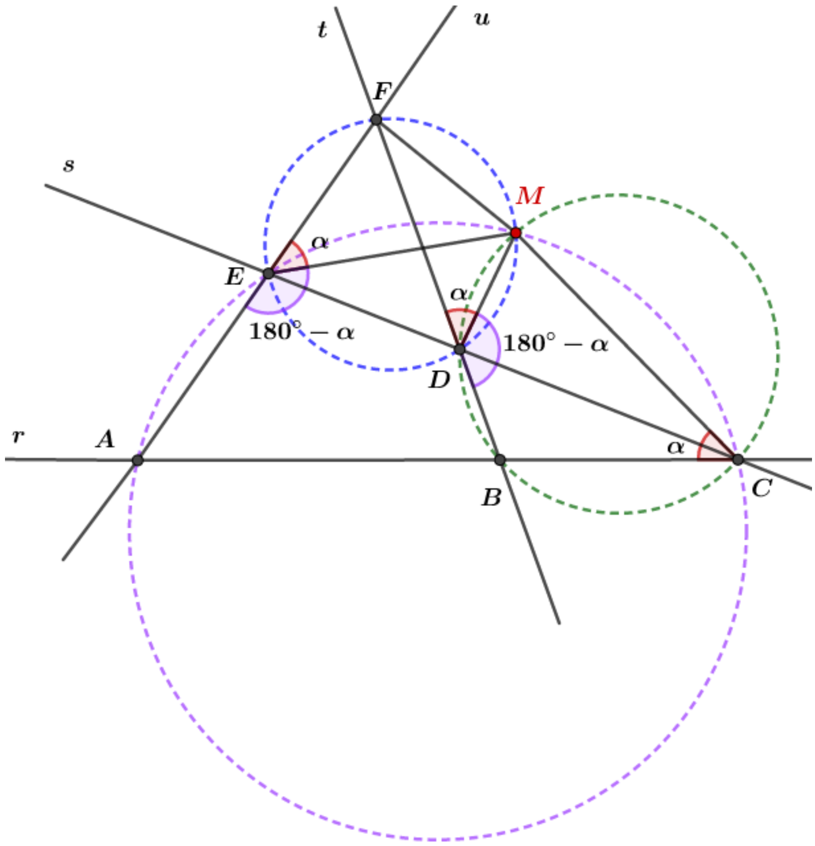
Note que no ponto D, se $B\widehat{D}M = 180° - \alpha$, devemos ter $M\widehat{D}F = \alpha$. Como $F\hat{E}M$ enxerga o mesmo segmento $\overline{FM}$, temos $F\hat{E}M = M\widehat{D}F = \alpha$.



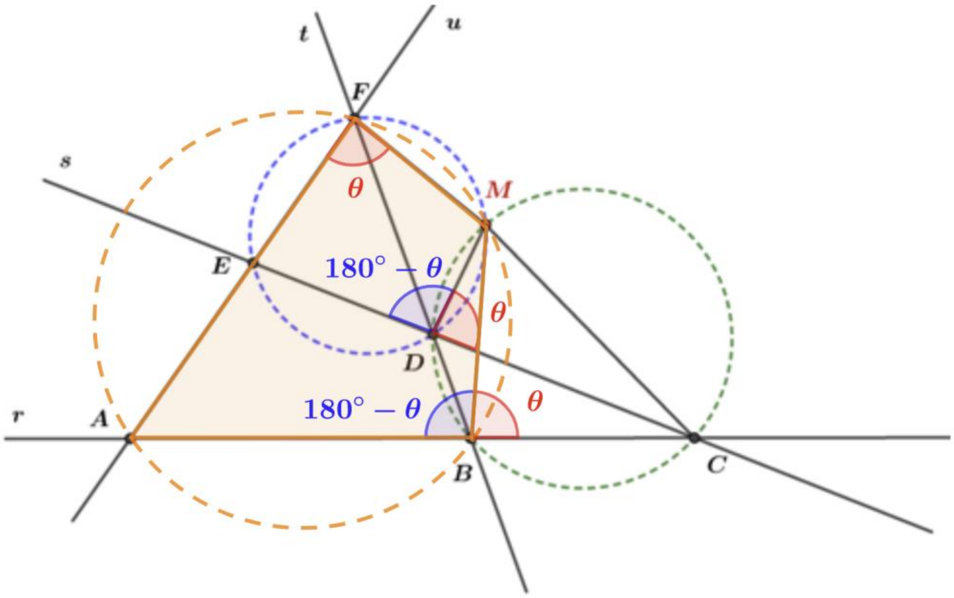
No ponto E, sabendo que $F\hat{E}M = \alpha$, então, $A\hat{E}M = 180° - \alpha$.



Perceba que no quadrilátero $AEMC$, temos $A\hat{E}M + M\hat{C}A = 180° - \alpha + \alpha = 180°$. Assim, os ângulos opostos desse quadrilátero são suplementares, logo, ele é inscritível. Portanto, o ponto M pertence ao circuncírculo do ΔAEC.

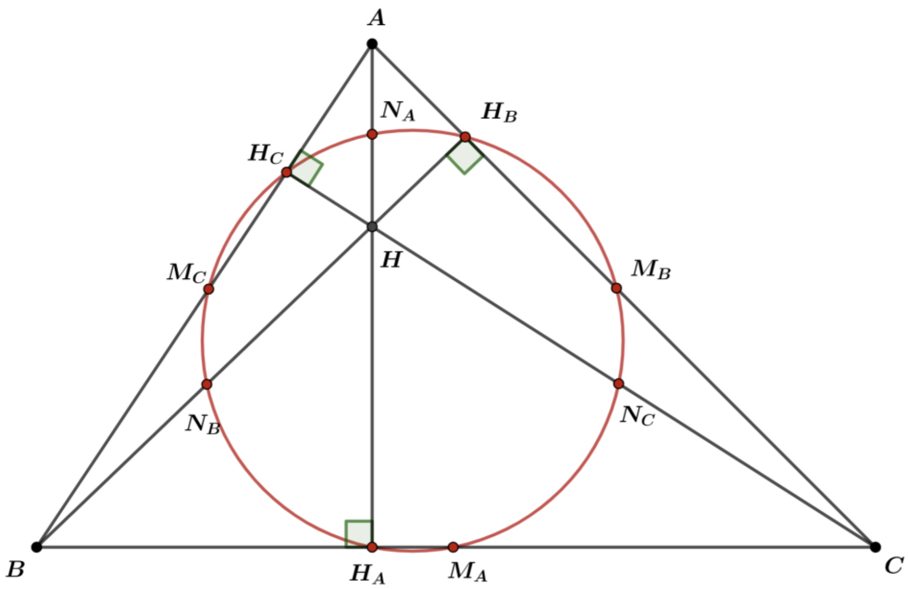


Analogamente, podemos provar que M também pertence ao circuncírculo do ΔABF.



3.5. CIRCUNFERÊNCIA DE 9 PONTOS

Os pés das três alturas de um triângulo, os pontos médios dos três lados e os pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro pertencem a uma mesma circunferência chamada **Circunferência dos 9 pontos**.

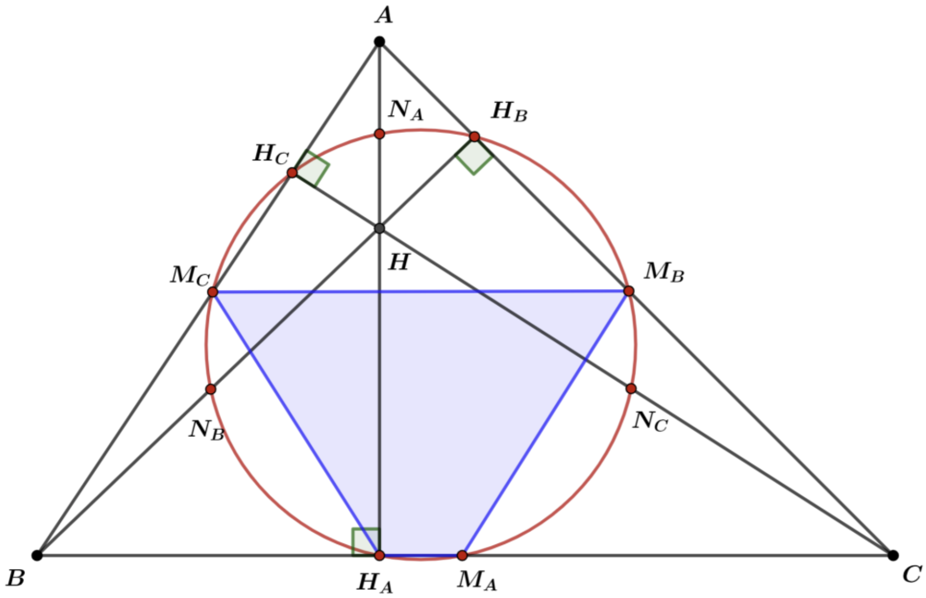


Elementos:

- A, B e C são os vértices do triângulo;
- H_A, H_B e H_C são os pés das alturas;
- H é o ortocentro;
- M_A, M_B e M_C são os pontos médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente;
- N_A, N_B e N_C são os pontos médios dos segmentos AH, BH e CH, respectivamente.

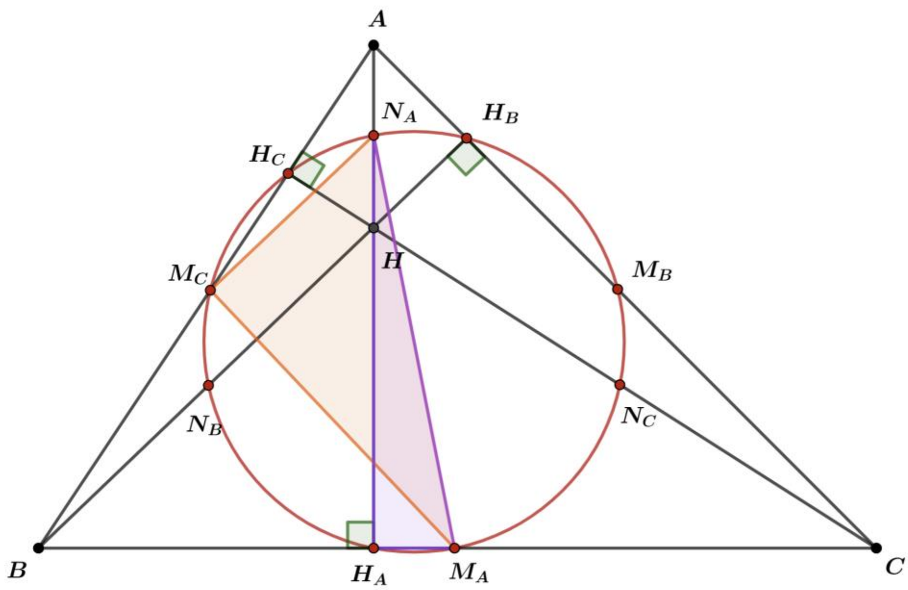
Demonstração:

Inicialmente, vamos considerar uma circunferência λ que passa pelos três pontos médios dos lados: M_A, M_B e M_C. Para provar que λ passa pelos pés das alturas e pelos pontos médios dos segmentos que unem os vértices ao ortocentro, basta demonstrar que ela passa por H_A e por N_A, pois para os outros pontos a demonstração é análoga. Então, vamos provar que H_A pertence a λ:



Como M_A e M_B são pontos médios dos lados BC e AC, respectivamente, temos que M_AM_B é base média do triângulo ABC, ou seja, $M_AM_B = AB/2$. Além disso, do triângulo retângulo ABH_A, temos que AB é hipotenusa e M_C é ponto médio dela, logo $M_CH_A = AB/2$. Com isso, temos que o quadrilátero $H_AM_AM_BM_C$ é um trapézio isósceles e, consequentemente, é inscritível. Portanto, podemos afirmar que λ passa por M_A, M_B, M_C e H_A. Analogamente, prova-se que ela passa por H_B e H_C.

Agora vamos provar que λ passa por N_A.



Analisando o triângulo ABH, vemos que M_CN_A é sua base média, logo o segmento M_CN_A é paralelo ao lado BH. Como M_A e M_C são pontos médios dos lados do triângulo ABC, temos que

$M_A M_C$ é base média e paralelo ao lado AC. Portanto, da relação de segmentos paralelos, temos que $N_A \widehat{M_C} M_A \equiv B\widehat{H_B}C \equiv 90°$. Com isso, vemos que os triângulos $N_A M_C M_A$ e $N_A H_A M_A$ são retângulos e compartilham da mesma hipotenusa $M_A N_A$ e, portanto, o quadrilátero $N_A M_C H_A M_A$ é inscritível. Sendo assim, a circunferência λ passa por M_A, H_A, M_C e N_A. Analogamente, prova-se para N_B e N_C.

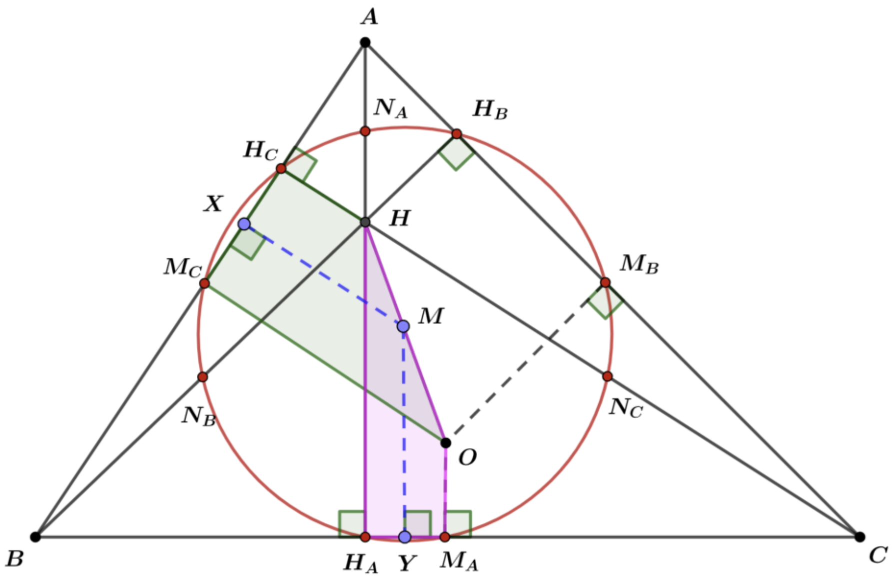
3.5.1. COROLÁRIOS

- O segmento $M_A N_A$ é diâmetro da **Circunferência dos 9 pontos**.
- O centro da **Circunferência dos 9 pontos** é o ponto médio do segmento HO, em que H é o ortocentro e O é o circuncentro do triângulo ABC.

Demonstração:

Como o triângulo $M_A M_C N_A$ é retângulo e está inscrito em λ, temos que $M_A N_A$ é o diâmetro de λ.

Para demonstrar que o centro da circunferência é o ponto médio de HO, podemos usar a seguinte figura:



Note que os trapézios $HOM_C H_C$ e $HOM_A H_A$ são retângulos. XM e YM são bases médias dos dois trapézios retângulos, sendo assim, XM é mediatriz de $M_C H_C$ e YM é mediatriz de $H_A M_A$. Como M é interseção das mediatrizes das cordas $M_C H_C$ e $H_A M_A$ de λ, temos que M é o seu centro.

Sendo M o centro do círculo e ponto médio do segmento HO, temos que MN_A é base média do triângulo HOA, ou seja, $MN_A = AO/2$. Como AO é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, podemos afirmar que:

$$\boxed{MN_A = \frac{R}{2}}$$

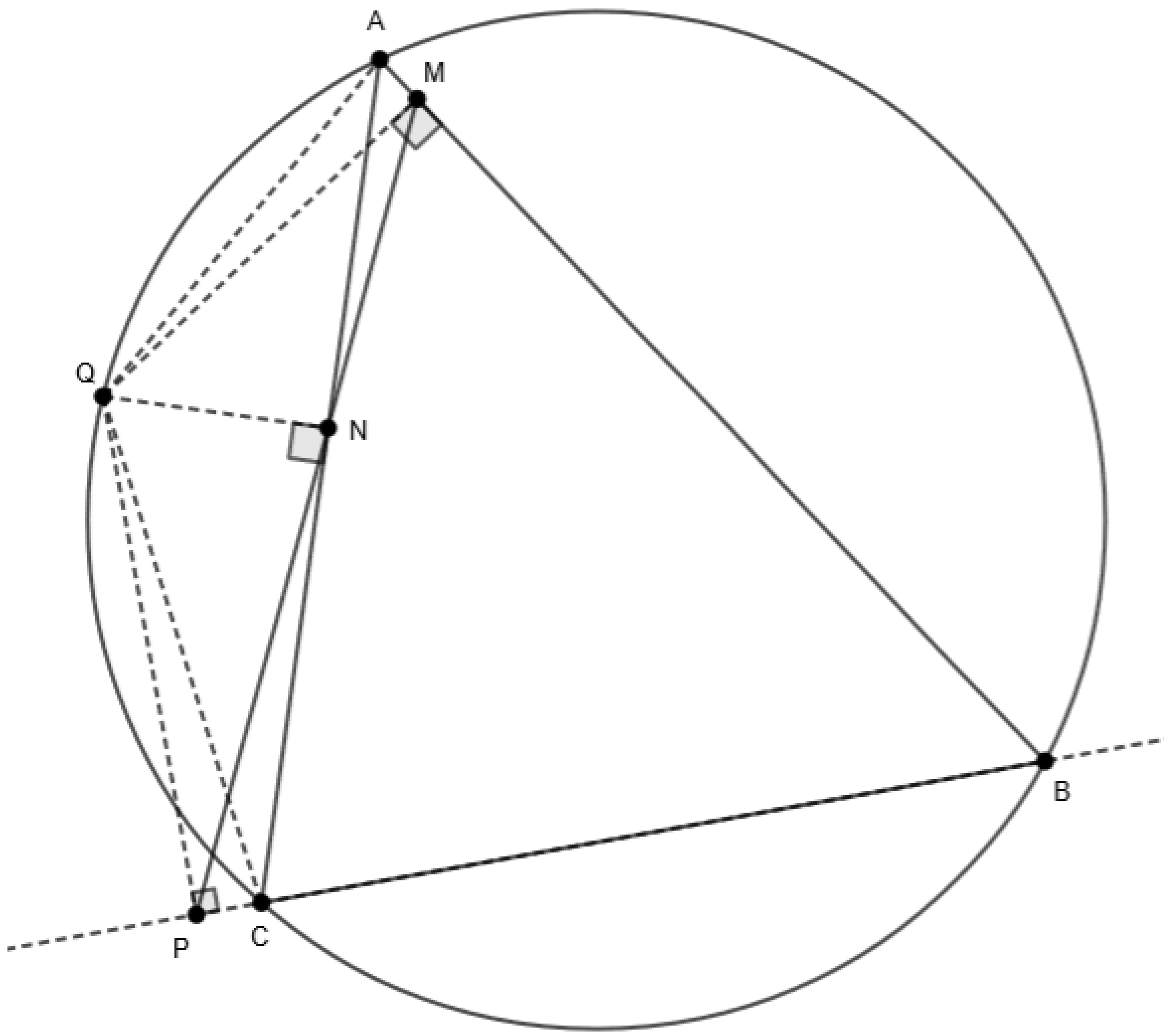
Com R sendo o raio da circunferência circunscrita.

3.6. RETA DE SIMSON-WALLACE

Se M, N e P são as interseções das perpendiculares traçadas de um ponto da circunferência circunscrita a um triângulo ABC aos seus lados, então M, N e P são colineares e pertencem à reta de Simson.

Demonstração:

Considere o triângulo ABC e Q um ponto do seu circuncírculo. Sejam M, N e P as perpendiculares aos lados AB, AC e BC, respectivamente.



Nosso objetivo é mostrar que os ângulos $P\hat{N}C$ e $M\hat{N}A$ são iguais, ou seja, ângulos opostos pelo vértice.

Primeiro, veja que o quadrilátero $PCNQ$ é inscritível, pois a soma dos ângulos opostos $Q\hat{P}C$ e $C\hat{N}Q$ é $180°$. Disso, temos que $P\hat{N}C = C\hat{Q}P$.

Veja também que o quadrilátero $QNMA$ é inscritível, pois $Q\hat{N}A = Q\hat{M}A = 90°$. Daí, segue que $A\hat{N}M = M\hat{Q}A$.

O quadrilátero $ABCQ$ é inscritível por construção, do que segue que $C\hat{Q}A + A\hat{B}C = 180°$.

O quadrilátero $MQPB$ também é inscritível pelo mesmo motivo do quadrilátero $PCNQ$, do que segue que $M\hat{Q}P + A\hat{B}C = 180°$.

Combinando as duas últimas informações, temos que $M\hat{Q}P = C\hat{Q}A$. Mas:

$$M\hat{Q}P = M\hat{Q}C + C\hat{Q}P$$

$$C\hat{Q}A = M\hat{Q}C + M\hat{Q}A$$

Logo:

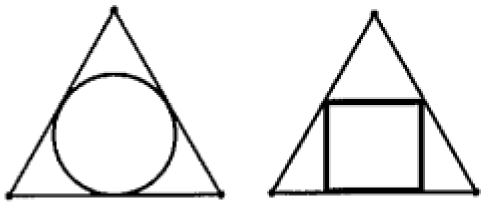
$$C\hat{Q}P = M\hat{Q}A \Rightarrow P\hat{N}C = A\hat{N}M$$

Como os ângulos opostos pelo vértice N são iguais e AC é uma reta, segue que M, P e N devem ser colineares.

4. QUESTÕES NÍVEL 1

1. (CN/2019)

Observe a figura a seguir.



Nela temos dois triângulos equiláteros de lado $2\sqrt{3}$. Sabe-se que o círculo no interior do primeiro triângulo e o quadrado no interior do segundo triângulo, tem as maiores áreas possíveis. É correto afirmar, que a razão entre os perímetros do círculo e do quadrado é igual a:

a) $\frac{\pi\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}+3)}{12}$

b) $\frac{\pi\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}-1)}{12}$

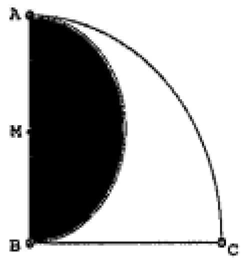
c) $\frac{(\pi+3\sqrt{3})\sqrt{3}}{6}$

d) $\frac{\pi\sqrt{3}\cdot(3+2\sqrt{3})}{36}$

e) $\frac{\pi\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+6)}{36}$

2. (CN/2019)

Observe a figura a seguir.



Nela, o arco AC, de centro em B, mede 90°. M é ponto médio do diâmetro AB do semicírculo em preto. Essa figura representa o ponto de partida de um desenhista gráfico para a construção do logotipo de uma empresa. As áreas das partes clara e escura somadas são iguais a 4^{π}. Após análise, ele resolve escurecer 30% da área clara e apronta o logotipo. Nessas novas condições é correto afirmar que a porcentagem da área da parte clara sobre a área total será igual a:

a) 25%

b) 30%

c) 32%

d) 35%

e) 40%

3. (CN/2019)

Seja ABCD um quadrado de lado 1 e centro em 'O. Considere a circunferência de centro em 'O e raio $3/7$. A área 'S' da região externa ao círculo considerado e interna ao quadrado é tal que:

a) $0 \leq S < 0,4$

b) $0,4 \leq S < 0,8$

c) $0,8 \leq S < 0,9$

d) $0,9 \leq S < 1$

e) $1 \leq S < 1,2$

4. (CN/2019)

O perímetro do triângulo ABC mede x unidades. O triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABC e sua área é 36 vezes a área do triângulo ABC. Nessas condições, é correto afirmar que o perímetro do triângulo DEF é igual a:

a) 2x

b) 3x

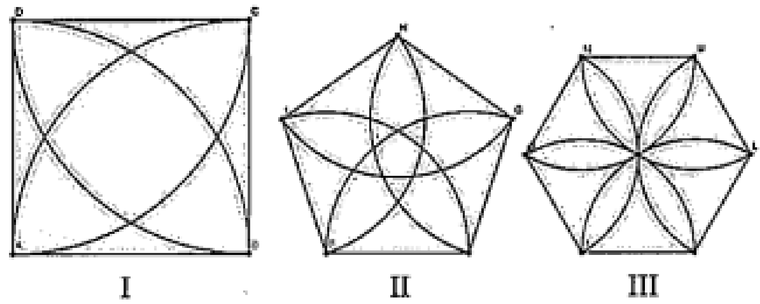
c) 6x

d) 9x

e) 10x

5. (CN/2019)

Observe as figuras a seguir.



Na figura observam-se as rosáceas de perímetro x, y e z, respectivamente. A rosácea I está inscrita num quadrado ABCD de lado 8,5 cm; a rosácea II está inscrita num pentágono regular EFGHI de lado 5 cm; e a rosácea III está inscrita num hexágono regular JKLMNO de lado 4 cm. Sabendo-se que o perímetro de uma rosácea é a soma de todos os arcos dos setores circulares apresentados na sua construção, é correto afirmar que:

a) $y > x > z$

b) $x > y > z$

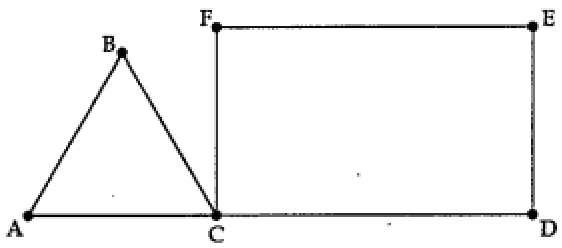
c) $x > z > y$

d) $z > y > x$

e) $z > x > y$

6. (CN/2019)

Observe a figura a seguir.



Ela apresenta o triângulo equilátero ABC e o retângulo CDEF. Sabe-se que A, C e D estão na mesma reta, AC = CF e CD = 2DE. Com centro em C e raio CD traça-se o arco de circunferência que intersecta EF em G. Por F traça-se a reta FH // CG, de modo tal que D, G e H estejam sobre a mesma reta. Dado que a área do triângulo CDG é 36, o valor da soma das medidas das áreas dos triângulos CBF e FGH é:

a) 22

b) 27

c) 31

d) 36

e) 40

7. (CN/2018)

Seja ABC um triângulo equilátero de lado 3. Exteriormente ao triângulo, constroem-se três quadrados, sempre a partir de um lado do triângulo ABC, ou seja, no quadrado Q_1, AB é um lado; no Q_2, BC é um lado; e no Q_3, AC é um lado. Com centro no baricentro "G" do triângulo ABC, traça-se um círculo de raio 3. A medida da área da parte do círculo que não pertence a nenhum dos quadrados Q_1, Q_2 e Q_3, e nem ao triângulo ABC é igual a:

a) 2π

b) 3π

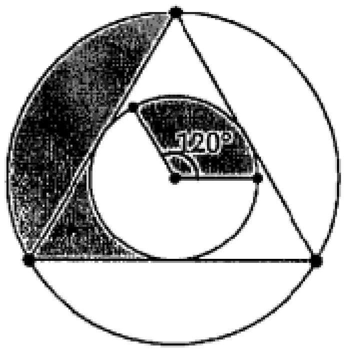
c) 5π

d) 7π

e) 12π

8. (CN/2018)

Observe a figura a seguir.



Essa figura representa um triângulo equilátero, inscrito numa circunferência maior, e circunscrito a uma outra circunferência menor de raio igual a 2cm, onde destacou-se a região com ângulo central de 120°. Sendo assim, é correto afirmar que a área total correspondente à parte sombreada mede, em cm²:

a) $\frac{10\pi}{3}$

b) $\frac{15\pi}{4}$

c) $\frac{16\pi}{3}$

d) $\frac{17\pi}{5}$

e) $\frac{13\pi}{3}$

9. (CN/2018)

Um triângulo retângulo ABC é reto no vértice A, o ângulo C mede 30°, a hipotenusa BC mede 1cm e o segmento AM é a mediana relativa à hipotenusa. Por um ponto N, exterior ao triângulo, traçam-se os segmentos BN e NA, com BN // AM e NA // BM. A área, em cm², do quadrilátero ANBC é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{16}$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{3\sqrt{3}}{16}$

10. (CN/2017)

Um triângulo isósceles ABC tem base BC = 16cm e lados congruentes AB = AC = 17cm. O raio do círculo inscrito ao triângulo ABC em cm é igual a:

a) $\frac{32}{15}$

b) $\frac{24}{5}$

c) $\frac{35}{8}$

d) $\frac{28}{5}$

e) $\frac{17}{4}$

11. (CN/2017)

Considere um losango ABCD de lado igual a 5cm, diagonais AC e BD, e ângulo interno BÂD = 120°. Sabe-se que um ponto M sobre o lado AB está a 2cm de A enquanto um ponto N sobre o lado BC está a 3cm de C. Sendo assim, a razão entre a área do losango ABCD e a área do triângulo de vértices MBN é igual a

a) $\frac{15}{2}$

b) $\frac{21}{4}$

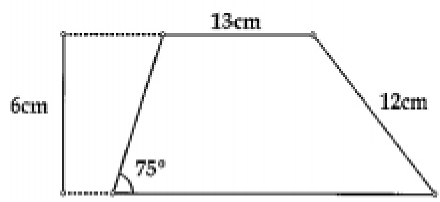
c) $\frac{25}{3}$

d) $\frac{32}{5}$

e) $\frac{49}{4}$

12. (CN/2017)

Observe a figura a seguir.



A figura acima representa o trapézio escaleno de altura 6cm, com base menor medindo 13cm, um dos ângulos internos da base maior medindo 75° e lado transversal oposto a esse ângulo igual a 12cm. Qual é a área, em cm^2, desse trapézio?

a) 120

b) 118

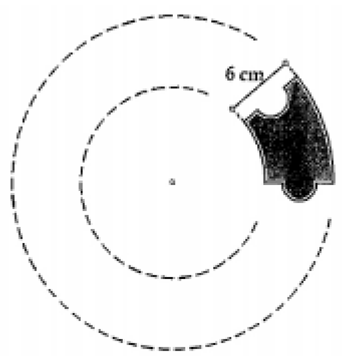
c) 116

d) 114

e) 112

13. (CN/2017)

Observe a figura a seguir.



A figura acima exibe um total de n peças idênticas de um quebra cabeça que, resolvido, revela uma coroa circular. Sabe-se que 6cm é a menor distância entre as circunferências concêntricas pontilhadas da figura e que o raio da menor dessas circunferências é igual a 9cm. Se a área de cada peça é $(12\pi)\ \mathrm{cm}^2$, é correto afirmar que n é igual a

a) 6

b) 8

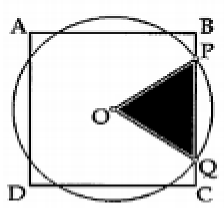
c) 9

d) 12

e) 15

14. (CN/2017)

Analise a figura a seguir.



Pelo centro O do quadrado de lado $\sqrt{6}$cm acima, traçou-se a circunferência que corta o lado BC nos pontos P e Q. O triângulo OPQ tem área $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm². Sendo assim, é correto afirmar que o raio dessa circunferência, em cm, é igual a

a) 1

b) $\sqrt{2}$

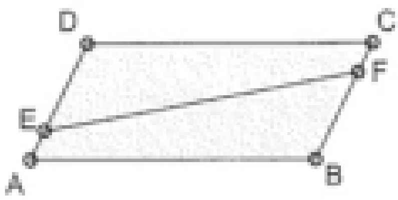
c) $\sqrt{3}$

d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

15. (CN/2016)

Observe a figura a seguir.



ABCD é um paralelogramo. E e F estão sobre os lados desse paralelogramo de tal forma que $AE = CF = x < AD$. Sendo assim, baseado na figura acima, assinale a opção correta.

a) Qualquer reta que intersecte dois lados de um paralelogramo o divide em dois polígonos de mesma área.

b) Qualquer reta que intersecte dois lados de um paralelogramo o divide em dois polígonos de mesmo perímetro.

c) A área de um trapézio é o produto de sua base média pela sua altura.

d) O dobro da soma dos quadrados das medidas dos lados paralelos de um trapézio é igual à soma dos quadrados das medidas de suas diagonais.

e) Para todo x, o segmento de reta EF é a metade do segmento de reta AB.

16. (CN/2016)

Seja o quadrado ABCD de lado 2. Traça-se, com centro no ponto M, médio do lado AB, uma semicircunferência de raio 2 que intersecta os lados BC e AD, respectivamente, em E e F. A área da superfície externa à semicircunferência e que também é interna ao quadrado, é igual a:

Obs.: $\pi = 3$.

a) $3-\sqrt{3}$

b) $2-\sqrt{3}$

c) $3+\sqrt{3}$

d) $2-\sqrt{3}$

e) $3-\sqrt{2}$

17. (CN/2016)

Considere uma circunferência de centro O e raio r. Prolonga-se o diâmetro AB de um comprimento BC de medida igual a r e, de C, traça-se uma tangente que toca a circunferência em D. A perpendicular traçada de C, a BC, intersecta a reta que passa por A e D em E. Sendo assim, a área do triângulo ODE em função do raio é

a) $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$

b) $r^2\sqrt{6}$

c) $\frac{r^2\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{r^2\sqrt{2}}{4}$

e) $r^2\sqrt{3}$

18. (CN/2015)

Num semicírculo S, inscreve-se um triângulo retângulo ABC. A maior circunferência possível que se pode construir externamente ao triângulo ABC e internamente ao S, mas tangente a um dos catetos de ABC e ao S, tem raio 2. Sabe-se ainda que o menor cateto de ABC mede 2. Qual a área do semicírculo?

a) 10π

b) $12,5\pi$

c) 15π

d) $17,5\pi$

e) 20π

19. (CN/2015)

No triângulo isósceles ABC, AB = AC = 13 e BC = 10. Em AC marca-se R e S, com CR = 2x e CS = x. Paralelo a AB e passando por S traça-se o segmento ST, com T em BC. Por fim, marcam-se U, P e Q, simétricos de T, S e R, nessa ordem, e relativo à altura de ABC com pé sobre BC. Ao analisar a medida inteira x para que a área do hexágono PQRSTU seja máxima, obtém-se:

a) 5

b) 4

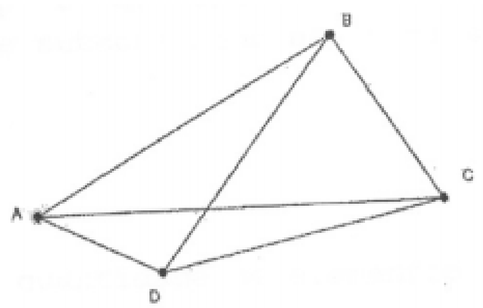
c) 3

d) 2

e) 1

20. (CN/2015)

Observe a figura a seguir.



Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa 6 e com catetos diferentes. Com relação a área S de ABC, pode-se afirmar que

a) será máxima quando um dos catetos for $3\sqrt{2}$.

b) será máxima quando um dos ângulos internos for 30°.

c) será máxima quando um cateto for o dobro do outro.

d) será máxima quando a soma dos catetos for $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

e) seu valor máximo não existe.

21. (CN/2015)

Seja ABCD um quadrado de lado $2a$ cujo centro é O. Os pontos M, P e Q são os pontos médios dos lados AB, AD e BC, respectivamente. O segmento BP intersecta a circunferência de centro O e raio a em R e, também OM, em S. Sendo assim, a área do triângulo SMR é

a) $\frac{3a^2}{20}$

b) $\frac{7a^2}{10}$

c) $\frac{9a^2}{20}$

d) $\frac{11a^2}{10}$

e) $\frac{13a^2}{20}$

22. (CN/2015)

ABC é um triângulo equilátero. Seja D um ponto do plano de ABC, externo a esse triângulo, tal que DB intersecta AC em E, com E pertencendo ao lado AC. Sabe-se que BÂD = $A\widehat{C}D$ = 90°. Sendo assim, a razão entre as áreas dos triângulos BEC e ABE é

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{2}{5}$

23. (CN/2015)

Seja ABC um triângulo de lados medindo 8, 10 e 12, Sejam M, N e P os pés das alturas traçadas dos vértices sobre os lados desse triângulo. Sendo assim, o raio do círculo circunscrito ao triângulo MNP é

a) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\frac{6\sqrt{7}}{7}$

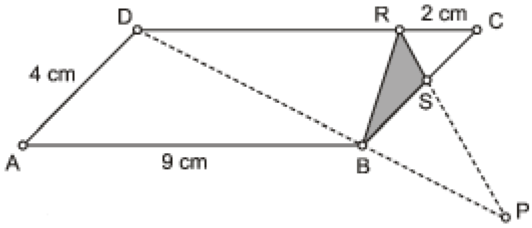
c) $\frac{8\sqrt{7}}{7}$

d) $\frac{9\sqrt{7}}{7}$

e) $\frac{10\sqrt{7}}{7}$

24. (CN/2014)

Observe a figura a seguir.



Na figura, o paralelogramo ABCD tem lados 9cm e 4cm. Sobre o lado CD está marcado o ponto R, de modo que CR = 2cm; sobre o lado BC está marcado o ponto S tal que a área do triângulo BRS seja $1/36$ da área do paralelogramo; e o ponto P é a interseção do prolongamento do segmento RS com o prolongamento da diagonal DB. Nessas condições, é possível concluir que a razão entre as medidas dos segmentos de reta $\frac{DP}{BP}$ vale:

a) 13,5

b) 11

c) 10,5

d) 9

e) 7,5

25. (CN/2014)

Sobre o lado BC do quadrado $ABCD$, marcam-se os pontos E e F tais que $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$ e $\frac{CF}{BC} = \frac{1}{4}$. Sabendo-se que os segmentos AF e ED intersectam-se em P, qual é, aproximadamente, o percentual da área do triângulo BPE em relação à área do quadrado $ABCD$?

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

26. (CN/2014)

Suponha que ABC seja um triângulo isósceles com lados AC = BC, e que L seja a circunferência de centro C, raio igual a 3 e tangente ao lado AB. Com relação à área da superfície comum ao triângulo ABC e ao círculo de L, pode-se afirmar que:

a) não possui um valor máximo.

b) pode ser igual a 5π.

c) não pode ser igual a 4π.

d) possui um valor mínimo igual a 2π.

e) possui um valor máximo igual a $4,5\pi$.

27. (CN/2014)

Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa 26 e perímetro 60. A razão entre a área do círculo inscrito e do círculo circunscrito nesse triângulo é, aproximadamente:

a) 0,035

b) 0,055

c) 0,075

d) 0,095

e) 0,105

28. (CN/2014)

Observe as figuras a seguir.

Figura I

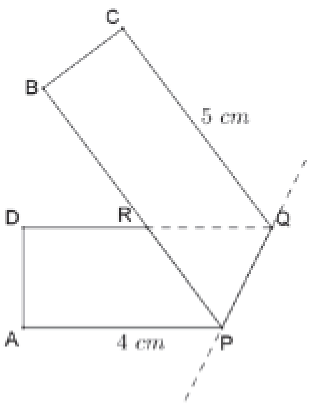


Figura II

Uma dobra é feita no retângulo 10cm x 2cm da figura I, gerando a figura plana II. Essa dobra está indicada pela reta suporte de PQ. A área do polígono APQCBRD da figura II, em cm², é:

a) $8\sqrt{5}$

b) 20

c) $10\sqrt{2}$

d) $\frac{35}{2}$

e) $\frac{13\sqrt{6}}{2}$

29. (CN/2013)

Sabendo-se que ABC é um triângulo retângulo de hipotenusa BC = a, qual é o valor máximo da área de ABC?

a) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{a^2}{4}$

c) $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$

d) $\frac{3a^2}{4}$

e) $\frac{3a^2}{2}$

30. (CN/2013)

Considere que ABCD é um trapézio, onde os vértices são colocados em sentido horário, com bases AB = 10 e CD = 22. Marcam-se na base AB o ponto P e na base CD o ponto Q, tais que AP = 4 e CQ = x. Sabe-se que as áreas dos quadriláteros APQD e PBCQ são iguais. Sendo assim, pode-se afirmar que a medida x é:

a) 10

b) 12

c) 14

d) 15

e) 16

31. (CN/2013)

Seja ABC um triângulo acutângulo e L a circunferência circunscrita ao triângulo. De um ponto Q (diferente de A e de C) sobre o menor arco AC de L são traçadas perpendiculares às retas suportes

dos lados do triângulo. Considere M, N e P os pés das perpendiculares sobre os lados AB, AC e BC, respectivamente. Tomando MN = 12 e PN = 16, qual é a razão entre as áreas dos triângulos BMN e BNP?

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{9}{16}$

c) $\frac{8}{9}$

d) $\frac{25}{36}$

e) $\frac{36}{49}$

32. (CN/2012)

Em dois triângulos, T_1 e T_2, cada base é o dobro da respectiva altura. As alturas desses triângulos, h_1 e h_2, são números ímpares positivos. Qual é o conjunto dos valores possíveis de h_1 e h_2, de modo que a área $T_1 + T_2$ seja equivalente à área de um quadrado de lado inteiro?

a) 0

b) unitário

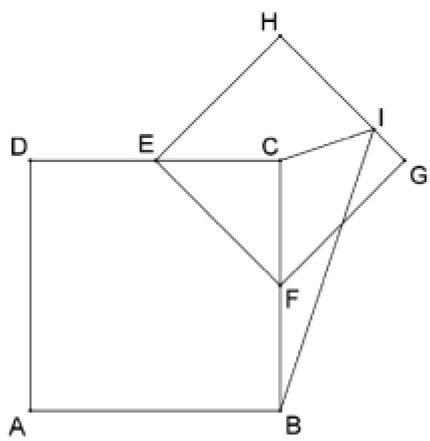
c) finito

d) $\{3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$

e) $\{11, 17, 23, 29, \ldots\}$

33. (CN/2012)

Observe a figura a seguir.



A figura acima apresenta um quadrado ABCD de lado 2. Sabe-se que E e F são, os pontos médios dos lados DC e CB, respectivamente. Além disso, EFGH também formam um quadrado e I está sobre o lado GH, de modo que $GI = \frac{GH}{4}$. Qual é a área do triângulo BCI?

a) $\frac{7}{8}$

b) $\frac{6}{7}$

c) $\frac{5}{6}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{3}{4}$

34. (CN/2012)

Um trapézio isósceles tem lados não paralelos medindo $10\sqrt{3}$. Sabendo que a bissetriz interna da base maior contém um dos vértices do trapézio, qual é a área desse trapézio?

a) $75\sqrt{3}$

b) $105\sqrt{3}$

c) $180\sqrt{3}$

d) $225\sqrt{3}$

e) $275\sqrt{3}$

35. (CN/2011)

Um aluno estudava sobre polígonos convexos e tentou obter dois polígonos de N e n lados ($N \neq n$), e com D e d diagonais, respectivamente, de modo que $N - n = D - d$. A quantidade de soluções corretas que satisfazem essas condições é:

a) 0.

b) 1.

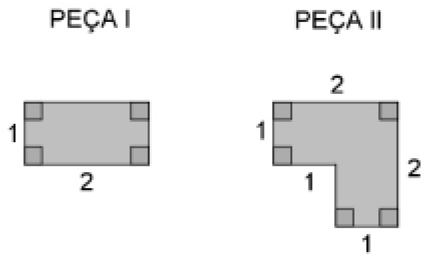
c) 2.

d) 3.

e) indeterminada.

36. (CN/2011)

Observe a ilustração a seguir.



Qual a quantidade mínima de peças necessárias para revestir, sem falta ou sobra, um quadro de lado 5, utilizando as peças acima?

a) 12

b) 11

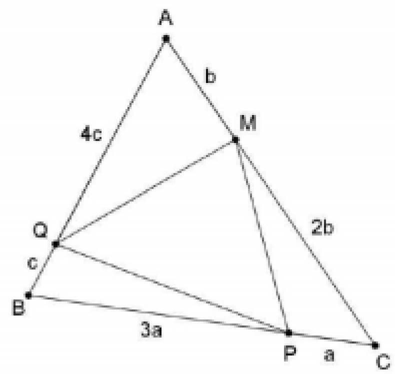
c) 10

d) 9

e) 8

37. (CN/2011)

Considere a figura a seguir.



A razão $\frac{S(MPQ)}{S(ABC)}$, entre as áreas dos triângulos MPQ e ABC, é:

a) $\frac{7}{12}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{7}{15}$

d) $\frac{8}{15}$

e) $\frac{7}{8}$

38. (CN/2011)

Num paralelogramo ABCD de altura CP = 3, a razão $\frac{AB}{BC} = 2$. Seja M o ponto médio de AB e P o pé da altura de ABCD baixada sobre o prolongamento de AB, a partir de C. Sabe-se que a razão entre as áreas dos triângulos MPC e ADM é $\frac{S(MPC)}{S(ADM)} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$. A área do triângulo PBC é igual a:

a) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

39. (CN/2010)

ABC é um triângulo equilátero. Seja P um ponto do plano de ABC e exterior ao triângulo de tal forma que PB intersecta AC em Q (Q está entre A e C). Sabendo que o ângulo APB é igual a 60°, que PA = 6 e PC = 8, a medida de PQ será

a) $\frac{24}{7}$

b) $\frac{23}{5}$

c) $\frac{19}{6}$

d) $\frac{33}{14}$

e) $\frac{11}{4}$

40. (CN/2010)

Considere o conjunto de todos os triângulos retângulos. Sendo h a altura relativa à hipotenusa, quantos elementos, nesse conjunto, tem altura igual $\frac{\sqrt{15}}{4}h^2$?

a) Infinitos.

b) Mais de dezesseis e menos de trinta.

c) Mais de quatro e menos de 15.

d) Apenas um.

e) Nenhum.

41. (CN/2010)

Tem-se o quadrado de vértices ABCD com lados medindo k cm. Sobre AB marca-se M, de modo que $AM = \frac{BM}{3}$. Sendo N o simétrico de B em relação ao lado CD, verifica-se que MN corta a diagonal AC em P. Em relação à área ABCD a área do triângulo PBC equivale a:

a) 18%

b) 24%

c) 27%

d) 30%

e) 36%

42. (CN/2010)

Seja ABC um triângulo com lados AB = 15, AC = 12 e BC = 18. Seja P um ponto sobre o lado AC, tal que PC = 3AP. Tomando Q sobre BC, entre B e C, tal que a área do quadrilátero APQB seja igual à área do triângulo PQC, qual será o valor de BQ?

a) 3,5

b) 5

c) 6

d) 8

e) 8,5

43. (CN/2009)

O triângulo de lados 0,333... cm, 0,5cm e 0,666... cm é equivalente ao triângulo isósceles de base 0,333... cm e lados congruentes medindo x centímetros cada um. Com base nos dados apresentados, é correto afirmar que x é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{151}}{24}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{\sqrt{257}}{48}$

e) $\frac{\sqrt{15}+4\sqrt{6}}{36}$

44. (CN/2009)

Sendo h_A, h_B e h_C as medidas das alturas; m_A, m_B e m_C as medidas das medianas; e b_A, b_B e b_C as medidas das bissetrizes internas de um triângulo ABC, analise as afirmativas a seguir.

I. O triângulo formado pelos segmentos $\frac{1}{h_A}, \frac{1}{h_B}$ e $\frac{1}{h_C}$ é semelhante ao triângulo ABC.

II. O triângulo formado pelos segmentos $\frac{1}{m_A}, \frac{1}{m_B}$ e $\frac{1}{m_C}$ é semelhante ao triângulo ABC.

III. O triângulo formado pelos segmentos $\frac{1}{b_A}, \frac{1}{b_B}$ e $\frac{1}{b_C}$ é semelhante ao triângulo ABC.

Pode-se concluir que

a) apenas I é sempre verdadeira.

b) apenas II é sempre verdadeira.

c) apenas III é sempre verdadeira.

d) I, II e III são sempre verdadeiras.

e) I, II e III são sempre falsas.

45. (CN/2009)

Sobre o lado maior de um retângulo de base 1 e altura 2 constrói-se um retângulo de base 2 e altura 3; sobre o maior lado desse último, constrói-se um retângulo de base 3 e altura 4; e assim sucessivamente, até se construir o retângulo de base 99 e altura 100. Com quantos zeros termina o produto das áreas de cada um desses retângulos?

a) 39

b) 40

c) 46

d) 78

e) 80

46. (CN/2009)

A área de um quadrado de 5 cm de lado, na unidade u definida como sendo a área de um círculo de raio 1 cm, é:

a) exatamente 25.

b) exatamente 12,5.

c) aproximadamente 8.

d) aproximadamente 6.

e) aproximadamente 5.

47. (CN/2008)

Seja ABC um triângulo retângulo com catetos AC = 12 e AB = 5. A bissetriz interna traçada de C intersecta o lado AB em M. Sem

do I o incentro de ABC, a razão entre as áreas de BMI e ABC é:

a) $\frac{1}{50}$

b) $\frac{13}{60}$

c) $\frac{1}{30}$

d) $\frac{13}{150}$

e) $\frac{2}{25}$

48. (CN/2008)

Duas tangentes a uma circunferência, de raio igual a dois centímetros, partem de um mesmo ponto P e são perpendiculares entre si. A área, em centímetros quadrados, da figura limitada pelo conjunto de todos os pontos P do plano, que satisfazem as condições dadas, é um número entre

a) vinte e um e vinte e dois.

b) vinte e dois e vinte e três.

c) vinte e três e vinte e quatro.

d) vinte e quatro e vinte e cinco.

e) vinte e cinco e vinte e seis.

49. (CN/2007)

Com a “ponta seca” de um compasso, colocada no centro de um quadrado de lado 2, traça-se uma circunferência de raio r. Observa-se que cada arco da circunferência, externo ao quadrado, tem o dobro do comprimento de cada arco interno. Usando-se raiz quadrada de 3 igual a 1,7 e $\pi = 3$, qual a área da região intersecção do quadrado e do círculo, assim determinado?

a) 2,8

b) 3,0

c) 3,2

d) 3,4

e) 3,6

50. (CN/2007)

Deseja-se revestir uma área retangular, de 198 cm de comprimento e 165 cm de largura, com um número exato de lajotas quadradas, de tal forma que a medida do lado dessas lajotas, expressa por um número inteiro em cm, seja a maior possível. Quantas lajotas deverão ser usadas?

a) 27

b) 30

c) 33

d) 36

e) 38

51. (CN/2007)

Dado um triângulo ABC de área 72, sobre a mediana AM = 12, traçam-se os segmentos AQ = 3 e QP = 6. Sabendo-se que E é o ponto de intersecção entre as retas BP e QC, qual é a área do triângulo QPE?

a) 6

b) 8

c) 9

d) 12

e) 18

52. (CN/2007)

Um hexágono regular ABCDEF está inscrito em uma circunferência de raio 6. Traçam-se as tangentes à circunferência nos pontos A, B, D e F, obtendo-se, assim, um quadrilátero circunscrito a essa circunferência. Usando-se 1,7 para raiz quadrada de 3, qual é o perímetro desse quadrilátero?

a) 54,4

b) 47,6

c) 40,8

d) 34,0

e) 30,6

53. (CN/2006)

Qual é o perímetro de um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência de raio unitário, sabendo-se que foi construído utilizando-se, pelo menos uma vez e somente, os lados do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular inscritos nessa circunferência?

a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$

b) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1$

c) $2\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$

d) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2$

e) $2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)$

54. (CN/2006)

Em um triângulo retângulo ABC, o cateto AC e a hipotenusa BC medem, respectivamente, 10 e 40. Sabe-se que os segmentos CX, CY e CZ dividem o ângulo ACB em quatro ângulos de medidas iguais, e que AX, XY, YZ e ZB são segmentos consecutivos contidos internamente no segmento

AB. Se S_1, S_2, S_3 e S_4 e são, respectivamente, as áreas dos triângulos CAX, CXY, CYZ e CZB, qual será o valor da razão $\frac{S_1S_3}{S_2S_4}$

a) 0,25

b) 0,5

c) 0,75

d) 1

e) 1,25

55. (CN/2006)

Em lugar do quadrado de lado igual a 1 (um) centímetro, tomou-se como unidade de área o triângulo equilátero de lado igual a 1 (um) centímetro. Qual será, nessa nova unidade, o número que expressará a área de um retângulo de base igual a 6 (seis) centímetros e altura igual a 4 (quatro) centímetros?

a) 24

b) $6\sqrt{3}$

c) $18\sqrt{3}$

d) $24\sqrt{3}$

e) $32\sqrt{3}$

56. (CN/2005)

Um polígono convexo de n lados tem três dos seus ângulos iguais a 83°, 137° e 142°. Qual é o menor valor de n para que nenhum dos outros ângulos desse polígono seja menor que 121°?

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

e) 10

57. (CN/2005)

O número de diagonais de um polígono regular P inscrito em um círculo K é 170.

Logo:

a) o número de lados de P é ímpar.

b) P não tem diagonais passando pelo centro de K.

c) o ângulo externo de P mede 36°.

d) uma das diagonais de P é o lado do pentágono regular inscrito em K.

e) o número de lados de P é múltiplo de 3.

58. (CN/2005)

Um círculo α de centro num ponto A e raio $2\sqrt{3}$ é tangente interior, num ponto B, a um círculo β de centro num ponto O e raio $6\sqrt{3}$. Se o raio OC é tangente a α num ponto D, a medida da área limitada pelo segmento DC e os menores arcos BC de β e BD de α é igual a

a) $4\pi - 3\sqrt{3}$

b) $5\pi - 4\sqrt{3}$

c) $4\pi - 6\sqrt{3}$

d) $5\pi - 6\sqrt{3}$

e) $5\pi - 5\sqrt{3}$

59. (CN/2005)

Três dos quatro lados de um quadrilátero circunscritível são iguais aos lados do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular circunscritos a um círculo de raio 6. Qual é a medida do quarto lado desse quadrilátero, sabendo-se que é o maior valor possível nas condições dadas?

a) $16\sqrt{3}-12$

b) $12\sqrt{3}-12$

c) $8\sqrt{3}+12$

d) $12\sqrt{3}+8$

e) $16\sqrt{3}-8$

60. (CN/2004)

Considere o triângulo escaleno ABC e os pontos P e Q pertencentes ao plano de ABC e exteriores a esse triângulo. Se as medidas dos ângulos PAC e QBC são iguais; as medidas dos ângulos PCA e QCB são iguais; M é o ponto médio de AC; N é o ponto médio de BC; S_1 é a área do triângulo PAM; S_2 é a área do triângulo QBN; S_3 é a área do triângulo PMC; e S_4 é área do triângulo QNC, analise as afirmativas:

I. S_1 está para S_4, assim como S_3 está para S_2.

II. S_1 está para S_2, assim como $(PM)^2$ está para $(QN)^2$.

III. S_1 está para S_3, assim como S_2 está para S_4.

Logo pode-se concluir, corretamente, que

a) apenas a afirmativa 1 é verdadeira.

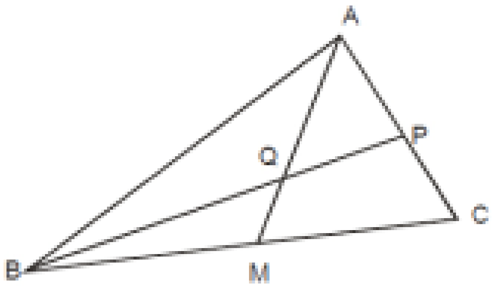
b) apenas as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.

c) apenas as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

d) apenas as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.

e) as afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

61. (CN/2004)



Na figura acima AM e BP são cevianas do triângulo ABC de área S. Sendo AP = 2PC e AQ = 3QM, qual o valor da área do triângulo determinado pelos pontos P, Q e M, em função de S?

a) $\frac{S}{16}$

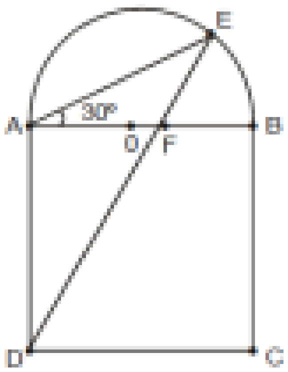
b) $\frac{S}{18}$

c) $\frac{S}{20}$

d) $\frac{S}{21}$

e) $\frac{S}{24}$

62. (CN/2004)



Na figura acima, ABCD é um quadrado de área 104 e o ponto O é o centro do semicírculo de diâmetro AB. A área do triângulo AEF é dada por

a) $2(3\sqrt{3}+3)$

b) $6(4\sqrt{3}-3)$

c) $5(4\sqrt{3}-6)$

d) $3(4\sqrt{3}-3)$

e) $8(4\sqrt{3}-3)$

63. (CN/2003)

Um estudante foi calculando o lado do polígono regular de 2n lados, inscrito em uma circunferência de raio 10 centímetros, para n sucessivamente igual a 6, 12, 24, 48, 96, etc. Após determinar cada lado, calculou o perímetro p do respectivo polígono, e observou que p é um número cada vez mais próximo, porém menor que

a) 60

b) 61

c) 62

d) 63

e) 64

64. (CN/2003)

Num quadrilátero ABCD tem-se: AB = 42, BC = 48, CD = 64, DA = 49 e P é o ponto de interseção entre as diagonais AC e BD. Qual é a razão entre os segmentos PA e PC, sabendo-se que a diagonal BD é igual a 56?

a) $\frac{7}{8}$

b) $\frac{8}{7}$

c) $\frac{7}{6}$

d) $\frac{6}{7}$

e) $\frac{49}{64}$

GABARITO

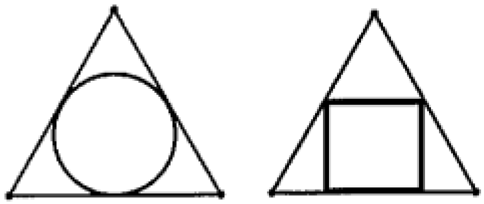
1. d
2. d
3. b
4. c
5. c
6. d
7. Não há resposta entre as alternativas.
8. c
9. e
10. b
11. c
12. d
13. d
14. b
15. c
16. b
17. a
18. b
19. b
20. e
21. a
22. b
23. c
24. c
25. d
26. a
27. d

28. d
29. b
30. a
31. a
32. a
33. e
34. Anulada.
35. a
36. d
37. b
38. b
39. a
40. (anulada) “e”.
41. d
42. c
43. b
44. a
45. c
46. c
47. d
48. e
49. e
50. b
51. c
52. a
53. b
54. a
55. e
56. b
57. d
58. d
59. c
60. e
61. b
62. d
63. Anulada (“d” ou “e”).
64. e

RESOLUÇÃO

1. (CN/2019)

Observe a figura a seguir.



Nela temos dois triângulos equiláteros de lado $2\sqrt{3}$. Sabe-se que o círculo no interior do primeiro triângulo e o quadrado no interior do segundo triângulo, tem as maiores áreas possíveis. É correto afirmar, que a razão entre os perímetros do círculo e do quadrado é igual a:

a) $\frac{\pi\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}+3)}{12}$

b) $\frac{\pi\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}-1)}{12}$

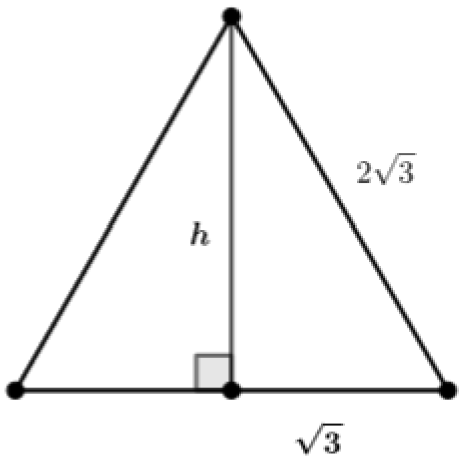
c) $\frac{(\pi+3\sqrt{3})\sqrt{3}}{6}$

d) $\frac{\pi\sqrt{3}\cdot(3+2\sqrt{3})}{36}$

e) $\frac{\pi\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}+6)}{36}$

Comentários

Vamos começar pela parte mais simples, que é a circunferência. Em ambos os casos iremos precisar da altura desse triângulo. Isso pode ser obtido facilmente pelo teorema de Pitágoras, veja:



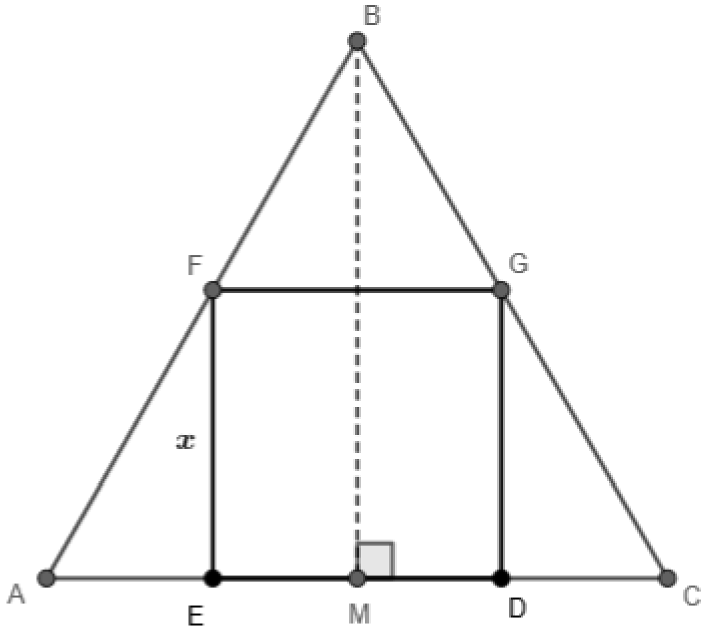
$$\left(2\sqrt{3}\right)^2 = h^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow h = 3$$

Do nosso estudo da geometria plana, sabemos que, no triângulo equilátero, o Incentro, o Baricentro e o Circuncentro são coincidentes. Além disso, a altura é mediana, bissetriz e mediatriz e o centro da circunferência é o incentro do triângulo.

Dessa forma, temos que o incentro, que também é baricentro, divide a altura na razão de 2 para 3, do que segue que o raio dessa circunferência é:

$$\frac{1}{3}(h) = \frac{1}{3}(3) = 1$$

Para encontrar o lado do quadrado conforme dado no enunciado, vamos fazer a seguinte semelhança de triângulos (veja a figura):



$$\frac{FE}{AE} = \frac{BM}{AM}$$

Como $FE = x$, vem:

$$\frac{x}{\sqrt{3} - \frac{x}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{6}{2 + \sqrt{3}}$$

Por fim:

$$per\acute{i}metro\ do\ quadrado = 4 \cdot \frac{6}{2 + \sqrt{3}}$$

$$per\acute{i}metro\ do\ c\acute{i}rculo = 2\pi$$

A razão entre eles:

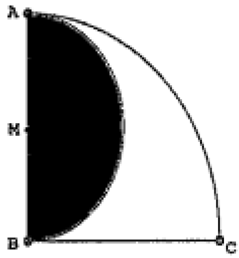
$$2\pi \cdot \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{24}\right) = \frac{\pi\left(2 + \sqrt{3}\right)}{12} = \frac{\pi\sqrt{3}(2\sqrt{3} + 3)}{36}$$

Gabarito: “d”.

---

2. (CN/2019)

Observe a figura a seguir.



Nela, o arco AC, de centro em B, mede 90°. M é ponto médio do diâmetro AB do semicírculo em preto. Essa figura representa o ponto de partida de um desenhista gráfico para a construção do logotipo de uma empresa. As áreas das partes clara e escura somadas são iguais a 4^{π}. Após análise, ele resolve escurecer 30% da área clara e apronta o logotipo. Nessas novas condições é correto afirmar que a porcentagem da área da parte clara sobre a área total será igual a:

a) 25%

b) 30%

c) 32%

d) 35%

e) 40%

Comentários

Para resolver essa questão devemos pensar de maneira bem simples para não fazer muitas contas. Veja que a área total equivale a um quarto da área de uma circunferência de raio, digamos, r.

Ou seja:

$$A = \acute{a}rea\ total = \frac{1}{4}(\pi r^2) = \frac{\pi r^2}{4}$$

A área escura é um semicírculo de raio $r/2$, uma vez que M é ponto médio. Disso, temos que a área da parte escura é:

$$B = \acute{a}rea\ escura = \frac{1}{2}\left(\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2\right) = \frac{\pi r^2}{8}$$

A área clara inicial é, portanto:

$$C = \acute{a}rea\ clara = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{\pi r^2}{8} = \frac{\pi r^2}{8}$$

Após a redução, a área clara que sobra é:

$$0{,}7 \cdot C = \frac{0{,}7\pi r^2}{8}$$

Por fim, a porcentagem é:

$$\frac{0{,}7C}{A} = \frac{0{,}7\pi r^2}{8} \cdot \frac{4}{\pi r^2} = \frac{0{,}7}{2} = 0{,}35 = 35\%$$

Gabarito: “d”.

3. (CN/2019)

Seja ABCD um quadrado de lado 1 e centro em ‘O. Considere a circunferência de centro em ‘O e raio $3/7$. A área 'S' da região externa ao círculo considerado e interna ao quadrado é tal que:

a) $\mathbf{0 \leq S < 0,4}$

b) $\mathbf{0,4 \leq S < 0,8}$

c) $\mathbf{0,8 \leq S < 0,9}$

d) $\mathbf{0,9 \leq S < 1}$

e) $\mathbf{1 \leq S < 1,2}$

Comentários

A maior circunferência que pode ser inscrita nesse quadrado possui raio $1/2$, que é tal que:

$$\frac{1}{2} > \frac{3}{7}$$

Disso, concluímos que a circunferência fornecida estará completamente no interior do quadrado, de modo que a área S é dada por:

$$S = 1 - \frac{9\pi}{49}$$

Usando que $\pi \approx 3{,}14$, podemos fazer uma estimativa simples dessa área, pois:

$$9 \cdot 3{,}14 = 28{,}26$$

Além disso:

$$\frac{28{,}26}{49} \approx 0{,}57$$

Do que segue que:

$$S \approx 1 - 0{,}57 = 0{,}43$$

Gabarito: “b”.

4. (CN/2019)

O perímetro do triângulo ABC mede x unidades. O triângulo DEF é semelhante ao triângulo ABC e sua área é 36 vezes a área do triângulo ABC. Nessas condições, é correto afirmar que o perímetro do triângulo DEF é igual a:

a) 2x

b) 3x

c) 6x

d) 9x

e) 10x

Comentários

Seja k a razão de semelhança entre os triângulos de modo que:

$$\frac{DE}{AB}=\frac{EF}{BC}=\frac{FD}{CA}=k$$

A área é o produto da base pela altura. Dessa forma, seja h a altura do ΔABC, de modo que a área de ΔABC:

$$\text{área de } \Delta ABC = AB\cdot h$$

De forma que, pela semelhança de triângulos, temos que:

$$\text{área de } \Delta DEF = DE\cdot h = kAB\cdot kh = k^2 AB\cdot h$$

Do enunciado, temos que a área do triângulo ΔDEF é 36 vezes a área do ΔABC, de modo que:

$$k^2=36 \Rightarrow k=6$$

O perímetro do ΔABC é:

$$AB+BC+CA=x$$

O perímetro do ΔDEF é:

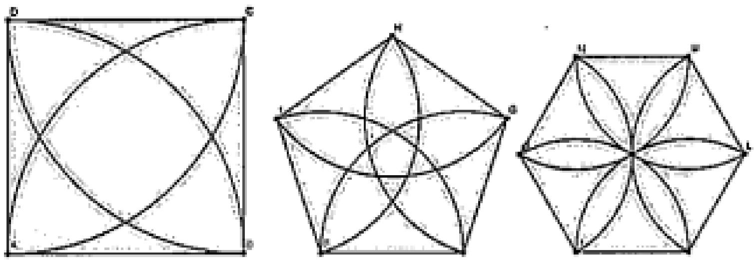
$$DE+EF+FD=k(AB+BC+CA)=6x$$

Gabarito: “c”.

---

5. (CN/2019)

Observe as figuras a seguir.



Na figura observam-se as rosáceas de perímetro x, y e z, respectivamente. A rosácea I está inscrita num quadrado ABCD de lado 8,5 cm; a rosácea II está inscrita num pentágono regular EFGHI de lado 5 cm; e a rosácea III está inscrita num hexágono regular JKLMNO de lado 4 cm. Sabendo-se que o perímetro de uma rosácea é a soma de todos os arcos dos setores circulares apresentados na sua construção, é correto afirmar que:

a) $y>x>z$

b) $x>y>z$

c) $x>\ z>y$

d) $z>y>x$

e) $z > x > y$

Comentários

O primeiro passo é entender que cada arco de circunferência que compõe cada rosácea está associado a um vértice da figura base (quadrado, pentágono ou hexágono).

Dessa forma, para calcular cada arco de rosácea precisamos identificar:

A quantidade de vértices do polígono;

A soma dos ângulos internos desse polígono.

Do nosso estudo da geometria plana, sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é:

$$180(n-2)$$

Dessa forma, cada arco de rosácea mede:

$$\frac{180(n-2)}{n} \cdot \frac{1}{360} \cdot 2\pi l$$

Onde l é o lado do polígono e n o número de lados. Mas o número de arcos é igual ao número de vértices ou lados do polígono, do que temos que o perímetro total da rosácea é dado por:

$$n \cdot \frac{180(n-2)}{n} \cdot \frac{1}{360} \cdot 2\pi l = \frac{n-2}{2} \cdot 2\pi l$$

Disso, podemos calcular os perímetros dados:

Para $n = 4$ e $l = 8{,}5$, temos:

$$x = \frac{4-2}{2} \cdot 2\pi \cdot 8{,}5 = 17\pi$$

Para $n = 5$ e $l = 5$, temos:

$$y = \frac{5-2}{2} \cdot 2\pi \cdot 5 = 15\pi$$

Para $n = 6$ e $l = 4$, vem:

$$z = \frac{6-2}{2} \cdot 2\pi \cdot 4 = 16\pi$$

Disso, podemos dizer que:

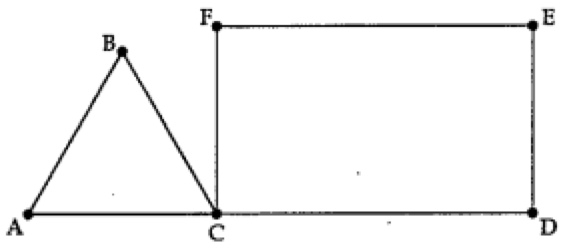
$$x > z > y$$

Gabarito: “c”.

---

6. (CN/2019)

Observe a figura a seguir.



Ela apresenta o triângulo equilátero ABC e o retângulo CDEF. Sabe-se que A, C e D estão na mesma reta, AC = CF e CD = 2DE. Com centro em C e raio CD traça-se o arco de circunferência que intersecta EF em G. Por F traça-se a reta FH // CG, de modo tal que D, G e H estejam sobre a mesma reta. Dado que a área do triângulo CDG é 36, o valor da soma das medidas das áreas dos triângulos CBF e FGH é:

a) 22

b) 27

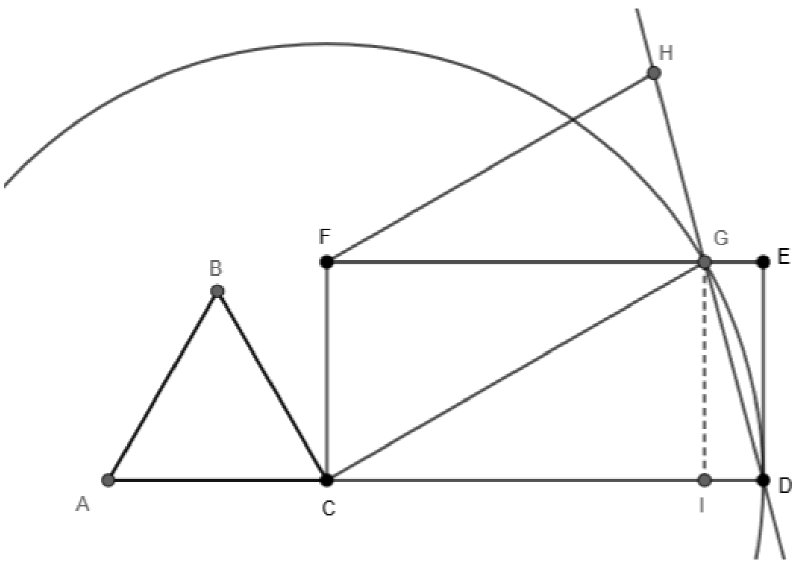
c) 31

d) 36

e) 40

Comentários

O primeiro passo nessa questão é representar o enunciado por meio de uma figura, veja:



Na figura, traçamos a altura GI do triângulo ΔCDG. Sabemos $CDEF$ é um retângulo, de modo que $CF = GI$. Além disso, $CD = 2DE = 2CF$. Disso, temos que a área do triângulo ΔCDG é dada por:

$$\frac{CF \cdot 2CF}{2} = 36 \Rightarrow CF^2 = 36 \Rightarrow CF = 6$$

Agora, observe que, como $FH \parallel CG$, $GD \parallel GH$ e $FG \parallel CD$, podemos dizer que os triângulos ΔCDG e ΔFGH são semelhantes pelo caso LLL. Desse modo, a razão entre suas áreas é o quadrado da razão entre os lados. Usando Pitágoras, podemos calcular FG:

$$FG^2 + CF^2 = CG^2$$

Mas $CG = CD = 2CF$. Logo:

$$FG^2 + CF^2 = 4CF^2 \Rightarrow FG = \sqrt{3}CF$$

Do que segue que a razão de semelhança é:

$$\frac{FG}{CD} = \frac{\sqrt{3}CF}{2CF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

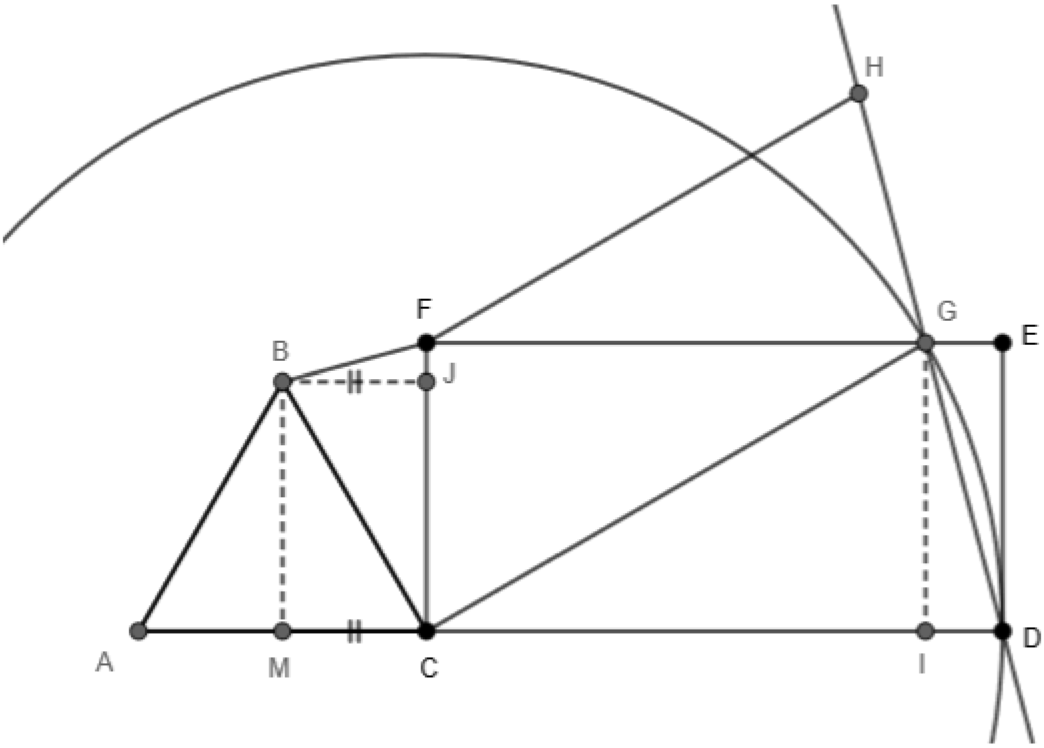
Logo, a razão entre as áreas é:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

De onde concluímos que a área de ΔFGH é dada por:

$$\frac{3}{4} \cdot 36 = 27$$

Vamos agora calcular a área do triângulo CBF:



Traçamos a atura BJ. Veja que ela corresponde à metade do segmento $AC = CF$, de modo que a área desse triângulo é dada por:

$$\frac{\frac{CF}{2} \cdot CF}{2} = \frac{CF^2}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

Por fim, queremos:

$$27 + 9 = 36$$

Gabarito: “d”.

7. (CN/2018)

Seja ABC um triângulo equilátero de lado 3. Exteriormente ao triângulo, constroem-se três quadrados, sempre a partir de um lado do triângulo ABC, ou seja, no quadrado Q_1, AB é um lado; no Q_2, BC é um lado; e no Q_3, AC é um lado. Com centro no baricentro "G" do triângulo ABC, traça-se um círculo de raio 3. A medida da área da parte do círculo que não pertence a nenhum dos quadrados Q_1, Q_2 e Q_3, e nem ao triângulo ABC é igual a:

a) 2π

b) 3π

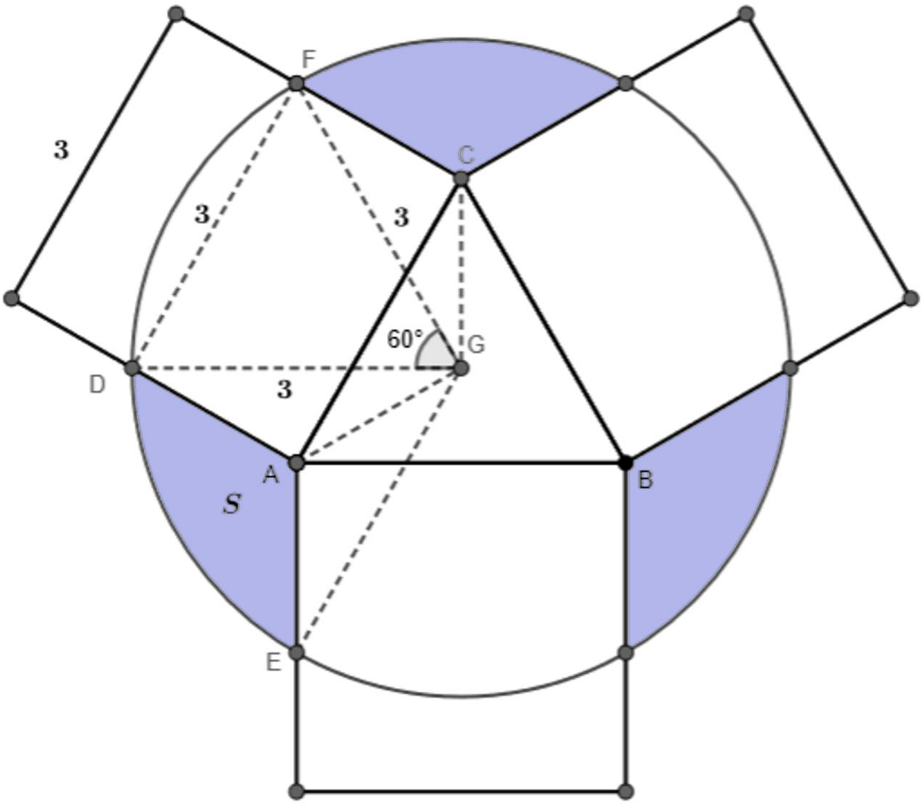
c) 5π

d) 7π

e) 12π

Comentários

O primeiro passo é fazer um esboço da situação proposta:



Por simetria, a área pedida corresponde a $3S$ (veja figura). Essa área S, por sua vez, corresponde à área do setor circular DGE subtraída da soma das áreas dos triângulos ADG e AGE, que são iguais, pois os triângulos são congruentes (LAL).

O ângulo $A\hat{G}C$ mede $120°$ e $A\hat{G}D = C\hat{G}F$. Assim, como ΔDGF é equilátero, temos:

$$120° = 2A\hat{G}D + 60° \Rightarrow A\hat{G}D = 30°$$

O segmento AG mede $2/3$ da altura do triângulo equilátero que mede $3\sqrt{3}/2$, logo:

$$AG = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Da trigonometria aplicada à geometria plana:

$$S(ADG) = \frac{DG \cdot GA \cdot sen\ 30°}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} = S(AGE)$$

Área do setor DGE:

$$\frac{60}{360}\pi(3)^2 = \frac{3\pi}{2}$$

Do que temos que:

$$S = \frac{3\pi}{2} - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Por fim:

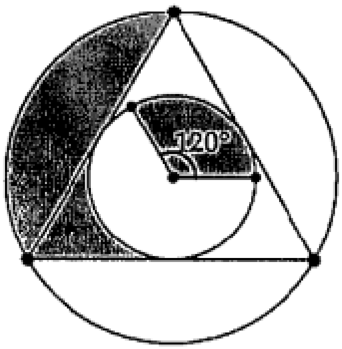
$$3S = \frac{9\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Gabarito: Não há resposta entre as alternativas.

---

8. (CN/2018)

Observe a figura a seguir.



Essa figura representa um triângulo equilátero, inscrito numa circunferência maior, e circunscrito a uma outra circunferência menor de raio igual a 2cm, onde destacou-se a região com ângulo central de 120°. Sendo assim, é correto afirmar que a área total correspondente à parte sombreada mede, em cm²:

a) $\frac{10\pi}{3}$

b) $\frac{15\pi}{4}$

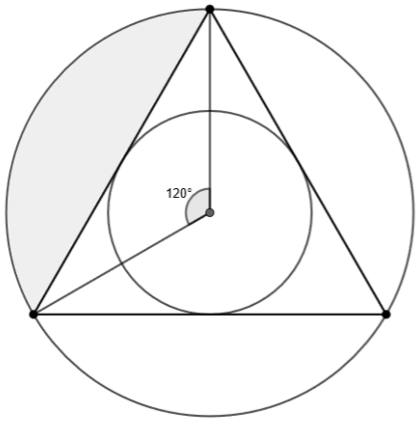
c) $\frac{16\pi}{3}$

d) $\frac{17\pi}{5}$

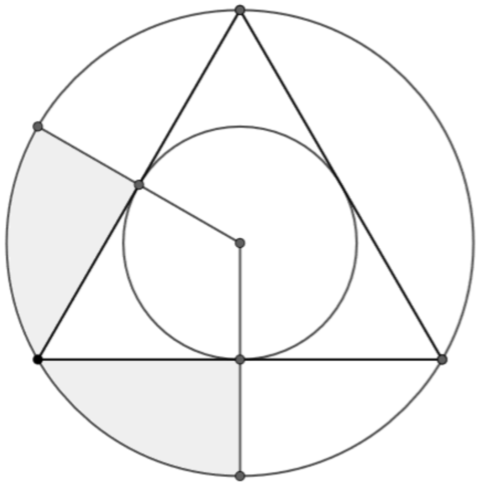
e) $\frac{13\pi}{3}$

Comentários

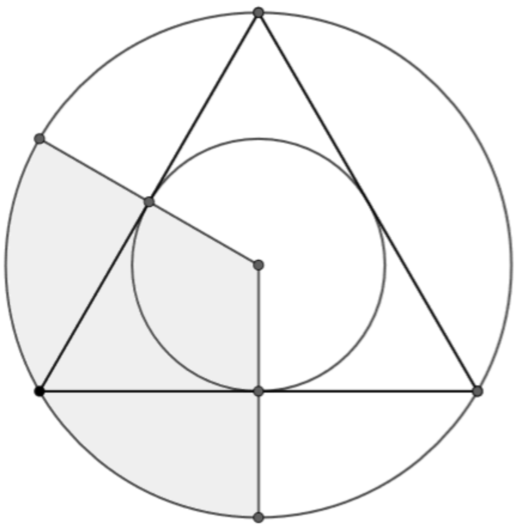
Essa questão pode ser bastante simplificada se percebermos que as três áreas, em conjunto, compõem um setor circular de $120°$ da circunferência maior. Veja:



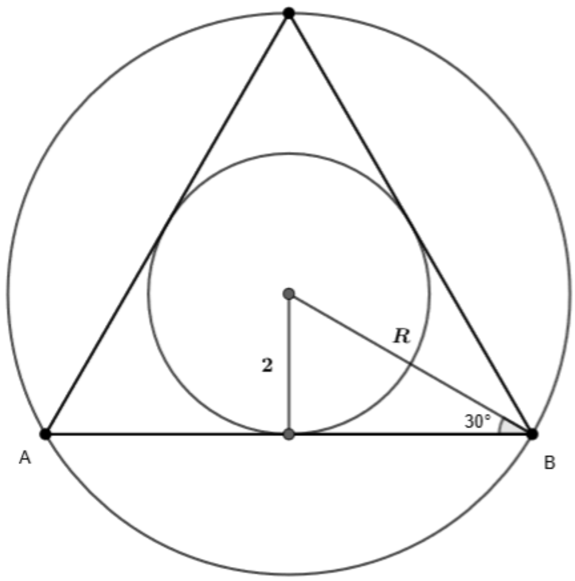
Pode ser visto como:



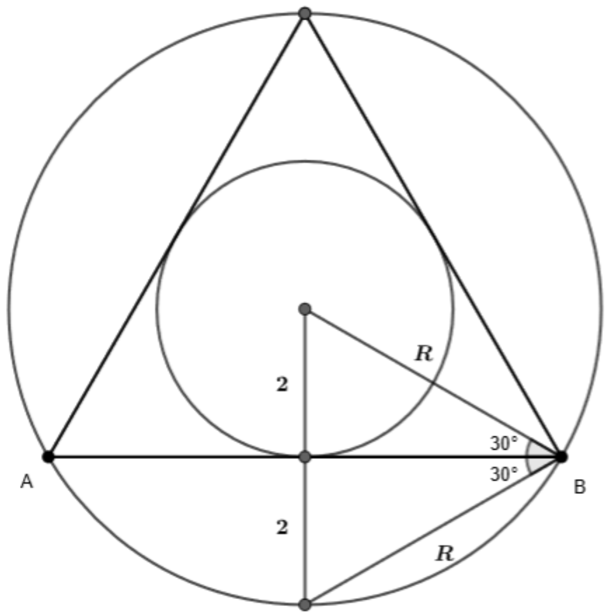
Dessa forma, basta apenas "rotacionar" o setor de $120°$ da circunferência menor, de modo a completar a área desejada:



Precisamos saber o raio da circunferência maior. Tudo o que sabemos é que o raio da menor é $2\ cm$. Para descobrir o da menor, veja a seguinte figura:



Refletindo o triângulo menor em torno da reta AB:



O triângulo resultante é isósceles com ângulo de $60°$, do que seque que ele é equilátero e podemos afirmar que:

$$R = 2 + 2 = 4$$

Por fim, o setor circular de ângulo $120°$:

$$\frac{120}{360} \cdot \pi(4)^2 = \frac{16\pi}{3}$$

Gabarito: "c".

---

9. (CN/2018)

Um triângulo retângulo ABC é reto no vértice A, o ângulo C mede 30°, a hipotenusa BC mede 1cm e o segmento AM é a mediana relativa à hipotenusa. Por um ponto N, exterior ao triângulo, traçam-se os segmentos BN e NA, com BN // AM e NA // BM. A área, em cm², do quadrilátero ANBC é:

a) $\frac{\sqrt{3}}{16}$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

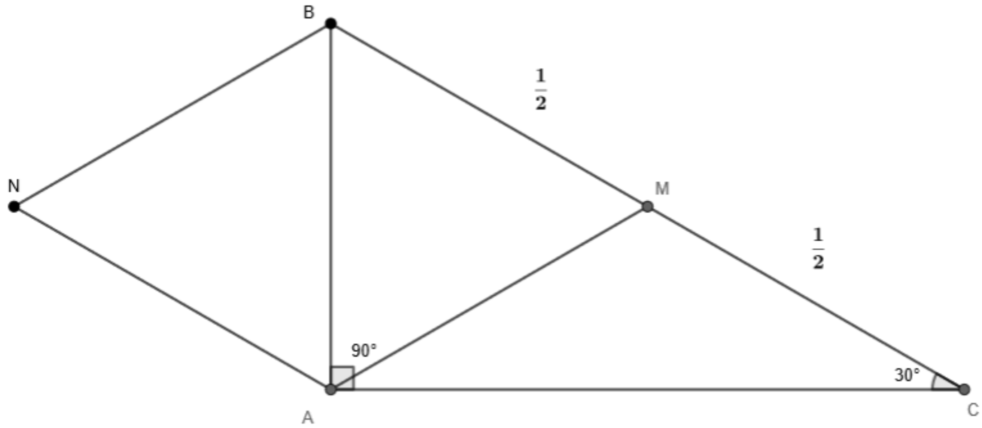
c) $\frac{\sqrt{3}}{8}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

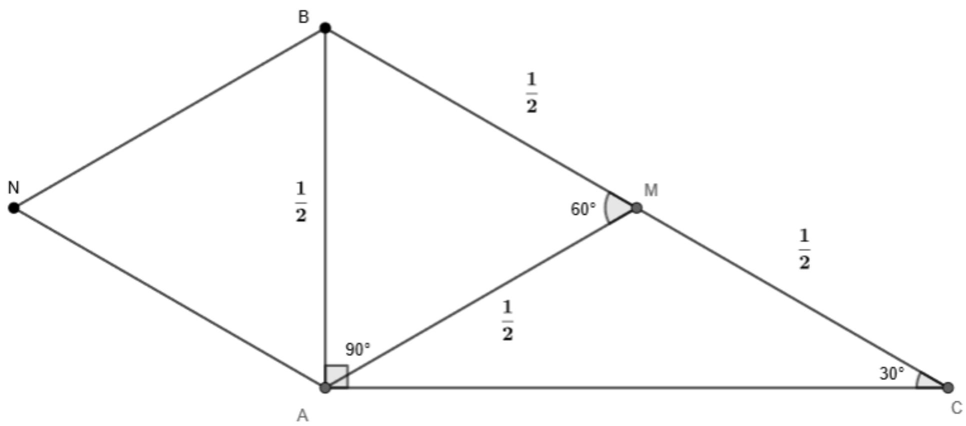
e) $\frac{3\sqrt{3}}{16}$

Comentários

Representando a situação proposta:



Do estudo da geometria plana, sabemos que a mediana relativa à hipotenusa é igual à metade da hipotenusa, disso temos que o triângulo ΔAMB é equilátero e $AB = \frac{1}{2}$:



Além disso, por construção, $AMBN$ é um paralelogramo, do que segue que $NB = AM$ e $NA = BM$. Dessa forma, concluímos que o ΔABN é equilátero de lado $1/2$. Para calcular a área pedida, devemos calcular a área do ΔABC e do ΔABN.

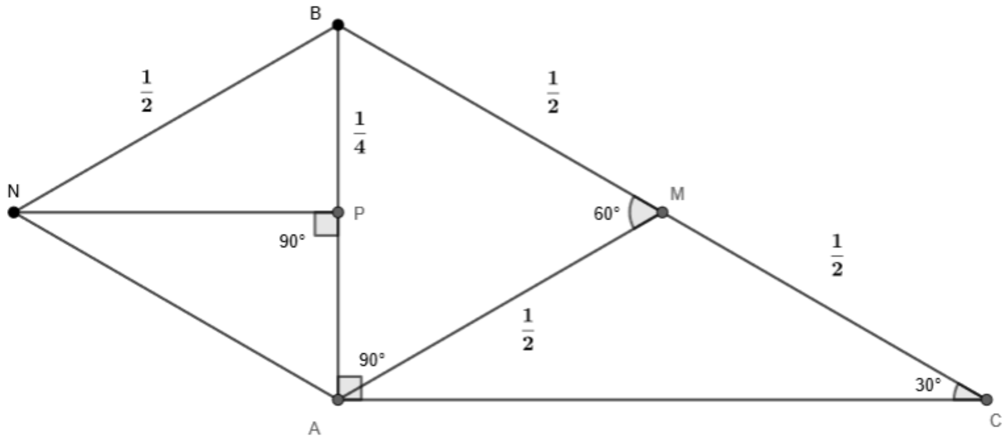
Para calcular a área do ΔABC, vamos calcular AC:

$$\frac{1}{2}^2 + AC^2 = 1^2 \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Disso, a área é dada por:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

Para calcular a área do ΔABN, traçamos a altura NP:



Veja que o triângulo ΔNPB é semelhante ao triângulo ΔABC com razão $1/2$. Disso, sua área é $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ da área do ΔABC:

$$\text{área do } \Delta NPB=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{32}$$

Mas a área do ΔABN é o dobro da área do ΔNPB. Logo:

$$\text{área do } \Delta ABN=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{32}=\frac{\sqrt{3}}{16}$$

Por fim:

$$\frac{\sqrt{3}}{16}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$$

Gabarito: “e”.

10. (CN/2017)

Um triângulo isósceles ABC tem base BC = 16cm e lados congruentes AB = AC = 17cm. O raio do círculo inscrito ao triângulo ABC em cm é igual a:

a) $\frac{32}{15}$

b) $\frac{24}{5}$

c) $\frac{35}{8}$

d) $\frac{28}{5}$

e) $\frac{17}{4}$

Comentários

Como nos são fornecidos os lados do triângulo, é conveniente usar a fórmula de Heron para calcular a área do triângulo e depois calcular a área dele usando a fórmula do raio da circunferência inscrita.

A fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Onde:

$$p = \frac{16+17+17}{2} = 25$$

$$p-a = p-b = 25-17 = 8$$

$$p-c = 25-16 = 9$$

Do que segue que:

$$A = \sqrt{25 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 9} = 5 \cdot 8 \cdot 3 = 120$$

Por outro lado, temos que a área do triângulo é dada por:

$$A = pr$$

Onde r é o raio do círculo inscrito no triângulo. Disso, temos que:

$$120 = 25 \cdot r \Rightarrow r = \frac{120}{25} = \frac{24}{5}$$

Gabarito: "b".

---

11. (CN/2017)

Considere um losango ABCD de lado igual a 5cm, diagonais AC e BD, e ângulo interno BÂD = 120°. Sabe-se que um ponto M sobre o lado AB está a 2cm de A enquanto um ponto N sobre o lado BC está a 3cm de C. Sendo assim, a razão entre a área do losango ABCD e a área do triângulo de vértices MBN é igual a

a) $\frac{15}{2}$

b) $\frac{21}{4}$

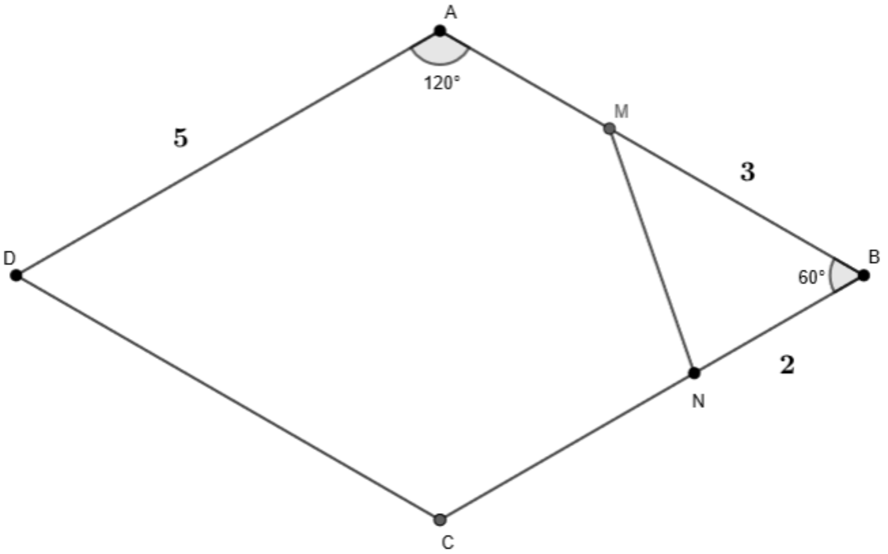
c) $\frac{25}{3}$

d) $\frac{32}{5}$

e) $\frac{49}{4}$

Comentários

A figura que representa a situação proposta é a seguir:



Do estudo da trigonometria, podemos calcular a área do losango como sendo:

$$2 \cdot \frac{AD \cdot AB}{2} \cdot sen\ 120° = 25 \cdot sen\ 60°$$

Da mesma forma, podemos calcular a área do triângulo ΔMBN:

$$\frac{MB \cdot BN}{2} \cdot sen\ 60° = \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot sen\ 60° = 3 \cdot sen\ 60°$$

Fazendo a divisão:

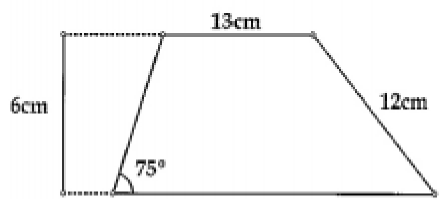
$$\frac{25 \cdot sen\ 60°}{3 \cdot sen\ 60°} = \frac{25}{3}$$

Gabarito: “c”.

---

12. (CN/2017)

Observe a figura a seguir.



A figura acima representa o trapézio escaleno de altura 6cm, com base menor medindo 13cm, um dos ângulos internos da base maior medindo 75° e lado transversal oposto a esse ângulo igual a 12cm. Qual é a área, em cm², desse trapézio?

a) 120

b) 118

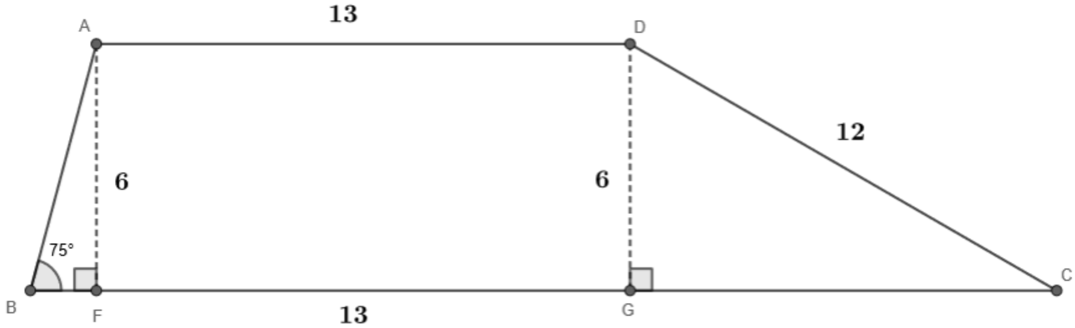
c) 116

d) 114

e) 112

Comentários

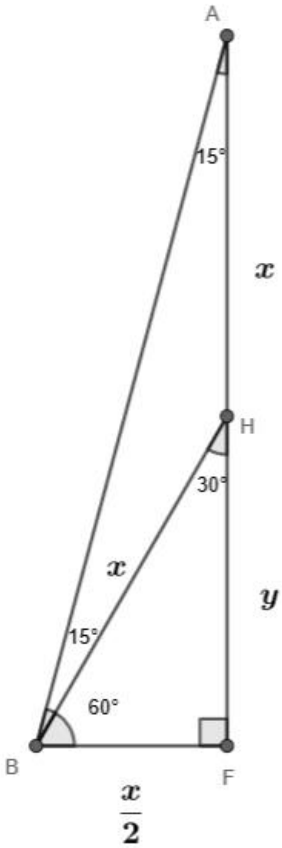
Observe a seguinte figura:



Do triângulo retângulo ΔGCD, temos:

$$6^2 + CG^2 = 12^2 \Rightarrow CG = 6\sqrt{3}\ cm$$

Para calcular a área do trapézio, precisamos também da medida do segmento BF. Para isso, vamos destacar o triângulo ΔBFA fazendo a seguinte construção:



Veja que:

$$x + y = 6$$

E por Pitágoras, no triângulo ΔBFH, temos:

$$(y)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Do que segue que:

$$x + \frac{\sqrt{3}}{2}x = 6 \Rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{3}+2} = 12(2-\sqrt{3})$$

Disso, temos que:

$$BF = \frac{x}{2} = 6(2-\sqrt{3})$$

Assim, podemos calcular a base maior do trapézio:

$$6\left(2-\sqrt{3}\right) + 13 + 6\sqrt{3} = 12 + 13 + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 25$$

Por fim, calculamos a área do trapézio:

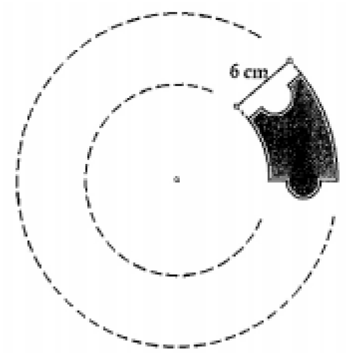
$$Área\ do\ trapézio = altura \cdot \frac{base\ menor + base\ maior}{2} = 6 \cdot \frac{13+25}{2} = 114\ cm^2$$

Gabarito: “d”.

---

13. (CN/2017)

Observe a figura a seguir.



A figura acima exibe um total de n peças idênticas de um quebra cabeça que, resolvido, revela uma coroa circular. Sabe-se que 6cm é a menor distância entre as circunferências concêntricas pontilhadas da figura e que o raio da menor dessas circunferências é igual a 9cm. Se a área de cada peça é $(12\pi)\ \mathrm{cm}^2$, é correto afirmar que n é igual a

a) 6

b) 8

c) 9

d) 12

e) 15

Comentários

Seja r o raio da circunferência menor e R o raio da maior. Do enunciado temos que:

$$r = 9\ cm$$

$$R = 9 + 6 = 15\ cm$$

Disso, temos que a área da coroa circular é dada por:

$$A_{coroa} = \pi(15^2 - 9^2) = \pi(15 + 9)(15 - 9) = \pi \cdot 24 \cdot 6$$

Se a área de cada peça é 12π, então a área da coroa é:

$$A_{coroa} = 12\pi \cdot n$$

Disso, temos que:

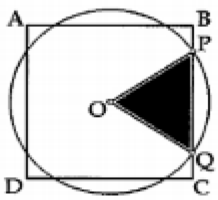
$$12\pi \cdot n = \pi \cdot 24 \cdot 6 \Rightarrow n = 12$$

Gabarito: "d".

---

14. (CN/2017)

Analise a figura a seguir.



Pelo centro O do quadrado de lado $\sqrt{6}$cm acima, traçou-se a circunferência que corta o lado BC nos pontos P e Q. O triângulo OPQ tem área $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm². Sendo assim, é correto afirmar que o raio dessa circunferência, em cm, é igual a

a) 1

b) $\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}$

d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Comentários

A altura h do triângulo ΔOPQ, por simetria, é igual à metade do lado do quadrado, isto é:

$$h = \frac{\sqrt{6}}{2}\ cm$$

A área do triângulo pode ser calculada então por:

$$\frac{h \cdot PQ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow PQ = \sqrt{2}\ cm$$

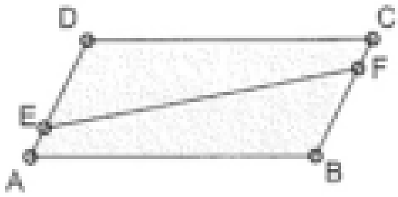
Seja $OP = R$ o raio da circunferência, tomando o ponto médio M de PQ, podemos aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo ΔMPO:

$$R^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{6+2}{4} = 2 \Rightarrow R = \sqrt{2}\,cm$$

Gabarito: "b".

15. (CN/2016)

Observe a figura a seguir.



ABCD é um paralelogramo. E e F estão sobre os lados desse paralelogramo de tal forma que $AE = CF = x < AD$. Sendo assim, baseado na figura acima, assinale a opção correta.

a) Qualquer reta que intersecte dois lados de um paralelogramo o divide em dois polígonos de mesma área.

b) Qualquer reta que intersecte dois lados de um paralelogramo o divide em dois polígonos de mesmo perímetro.

c) A área de um trapézio é o produto de sua base média pela sua altura.

d) O dobro da soma dos quadrados das medidas dos lados paralelos de um trapézio é igual à soma dos quadrados das medidas de suas diagonais.

e) Para todo x, o segmento de reta EF é a metade do segmento de reta AB.

Comentários

A figura fornecida leva o candidato a cometer equívocos no momento de avaliar as alternativas. Mas observe que a figura que foi fornecida representa uma situação particular e que não reflete todas as retas que intersectam dois lados de um paralelogramo.

Lendo rapidamente as alternativas, observa-se, do estudo da geometria plana, que a alternativa c é verdadeira, já que a área de um trapézio de bases a e b e de altura h é calculada por:

$$h \cdot \frac{(a+b)}{2}$$

Mas $\frac{a+b}{2}$ representa a base média desse trapézio, isto é, a área é produto da base média pela altura.

Gabarito: "c".

16. (CN/2016)

Seja o quadrado ABCD de lado 2. Traça-se, com centro no ponto M, médio do lado AB, uma semicircunferência de raio 2 que intersecta os lados BC e AD, respectivamente, em E e F. A área da superfície externa à semicircunferência e que também é interna ao quadrado, é igual a:

Obs.: $\pi = 3$.

a) $3 - \sqrt{3}$

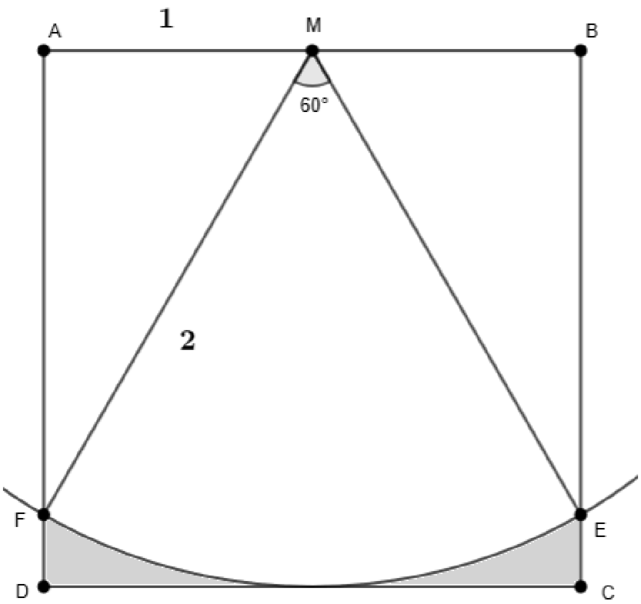
b) $2 - \sqrt{3}$

c) $3 + \sqrt{3}$

d) $2 - \sqrt{3}$

e) $3 - \sqrt{2}$

Comentários



Na figura acima, observe que a área procurada corresponde à área do quadrado subtraída da área de um setor circular de ângulo $60°$ e das áreas dos triângulos ΔAMF e ΔMEB.

A área do setor circular é calculada por:

$$\frac{60°}{360°} \cdot \pi \cdot 2^2 = \frac{2\pi}{3}$$

Como $\pi = 3, \frac{2\pi}{3} = 2$.

Por Pitágoras, podemos descobrir $AF = BE$:

$$1^2 + AF^2 = 2^2 \Rightarrow AF = \sqrt{3}$$

Por simetria, os triângulos ΔAMF e ΔMEB são congruentes e suas áreas são iguais. A soma das áreas é, portanto:

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{2} = \sqrt{3}$$

Por fim, queremos:

$$4 - (2 + \sqrt{3}) = 2 - \sqrt{3}$$

Gabarito: "b".

17. (CN/2016)

Considere uma circunferência de centro O e raio r. Prolonga-se o diâmetro AB de um comprimento BC de medida igual a r e, de C, traça-se uma tangente que toca a circunferência em D. A perpendicular traçada de C, a BC, intersecta a reta que passa por A e D em E. Sendo assim, a área do triângulo ODE em função do raio é

a) $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$

b) $r^2\sqrt{6}$

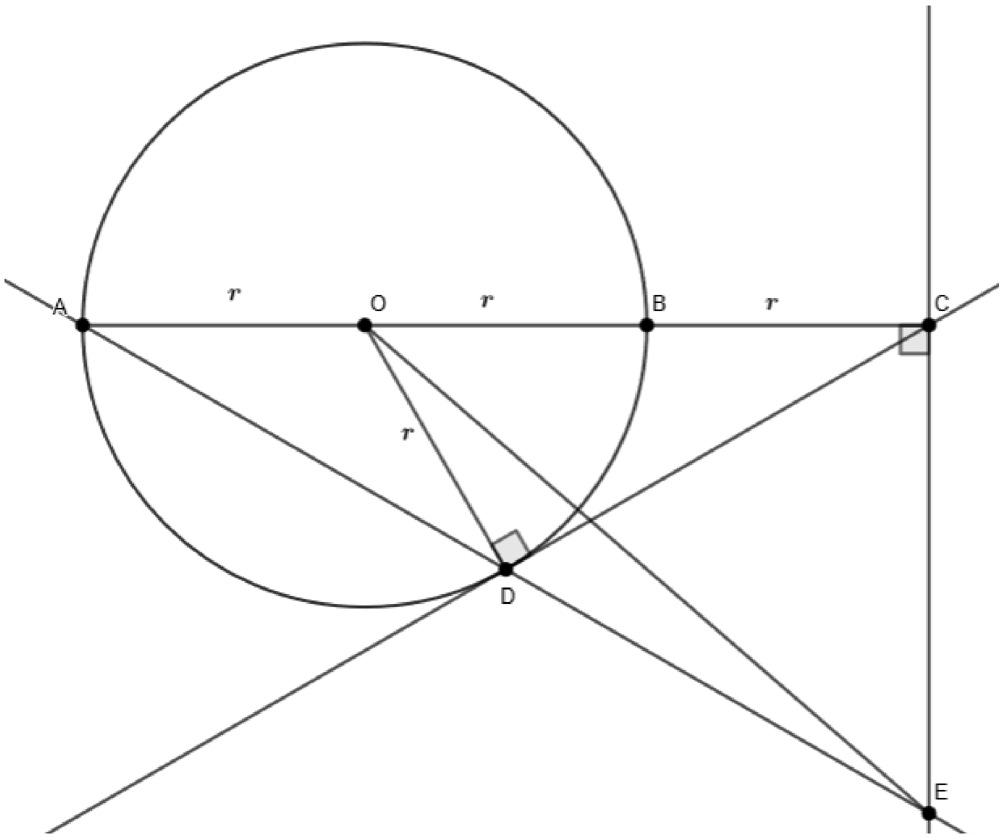
c) $\frac{r^2\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{r^2\sqrt{2}}{4}$

e) $r^2\sqrt{3}$

Comentários

Esboçando a situação proposta no enunciado, temos:



A primeira informação que podemos extrair é a medida do ângulo $O\hat{C}D$:

$$\text{sen}(O\hat{C}D) = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \Rightarrow O\hat{C}D = 30°$$

Disso, segue que $C\hat{O}D = 60°$ e, como o ΔAOD é isósceles e como $C\hat{O}D$ é externo, temos pela propriedade do ângulo externo:

$$O\hat{A}D = O\widehat{D}A = 30° = \frac{60°}{2}$$

Logo, temos que:

$$C\hat{E}A = 60°$$

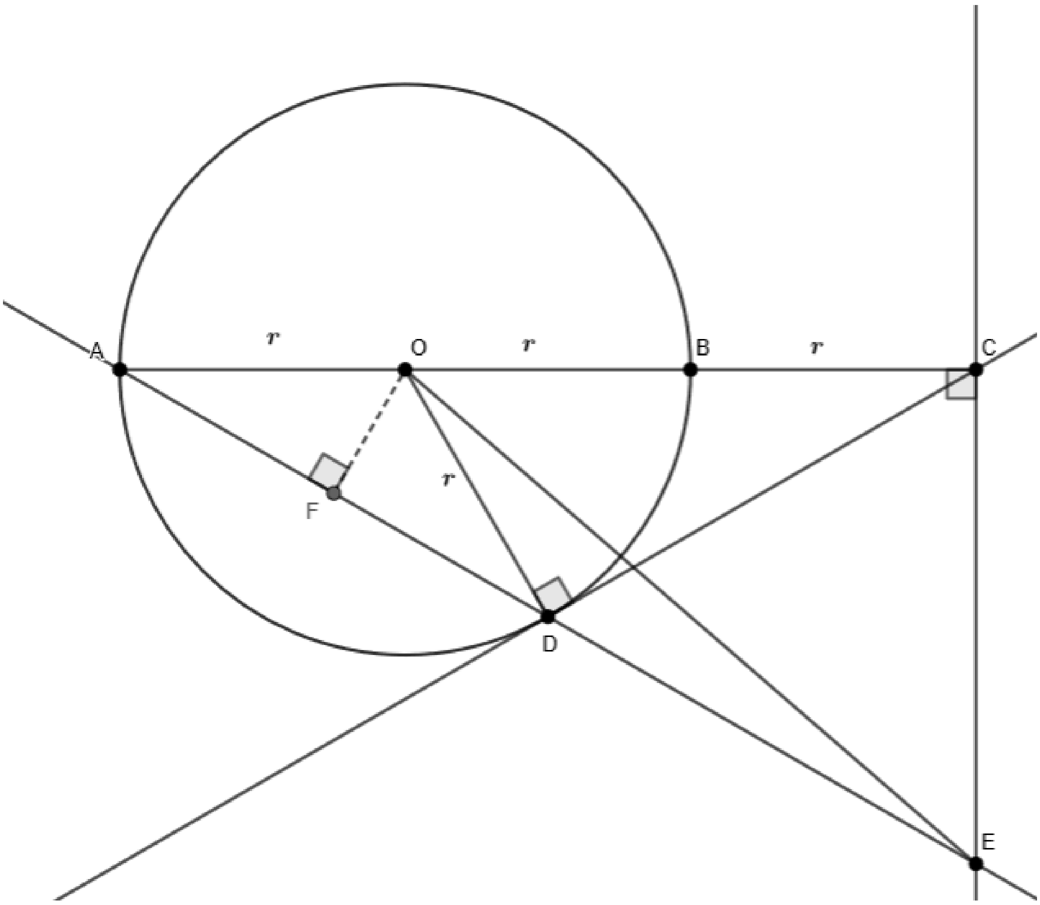
Como $O\hat{C}D = 30°$, segue que $D\hat{C}E = 90° - 30° = 60°$. Combinando essas informações, temos que o ΔCDE é equilátero, pois todos os seus ângulos são $60°$, de modo que $CE = ED = DC$.

Aplicando Pitágoras ao ΔODC:

$$r^2 + CD^2 = (2r)^2 \Rightarrow CD = \sqrt{3}r$$

Ou seja, $ED = CD = \sqrt{3}r$.

Para calcularmos a área do ΔODE, basta traçar a altura relativa ao lado DE:



Pela semelhança entre os triângulos ΔOAF e ΔODC, temos que:

$$\frac{r}{OF} = \frac{2r}{r} \Rightarrow OF = \frac{r}{2}$$

Dessa forma, temos que a área do triângulo ΔODE é dada por:

$$\frac{OF \cdot DE}{2} = \frac{\left(\frac{r}{2} \cdot \sqrt{3}r\right)}{2} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

Gabarito: "a".

18. (CN/2015)

Num semicírculo S, inscreve-se um triângulo retângulo ABC. A maior circunferência possível que se pode construir externamente ao triângulo ABC e internamente ao S, mas tangente a um dos catetos de ABC e ao S, tem raio 2. Sabe-se ainda que o menor cateto de ABC mede 2. Qual a área do semicírculo?

a) $\mathbf{10\pi}$

b) $\mathbf{12,5\pi}$

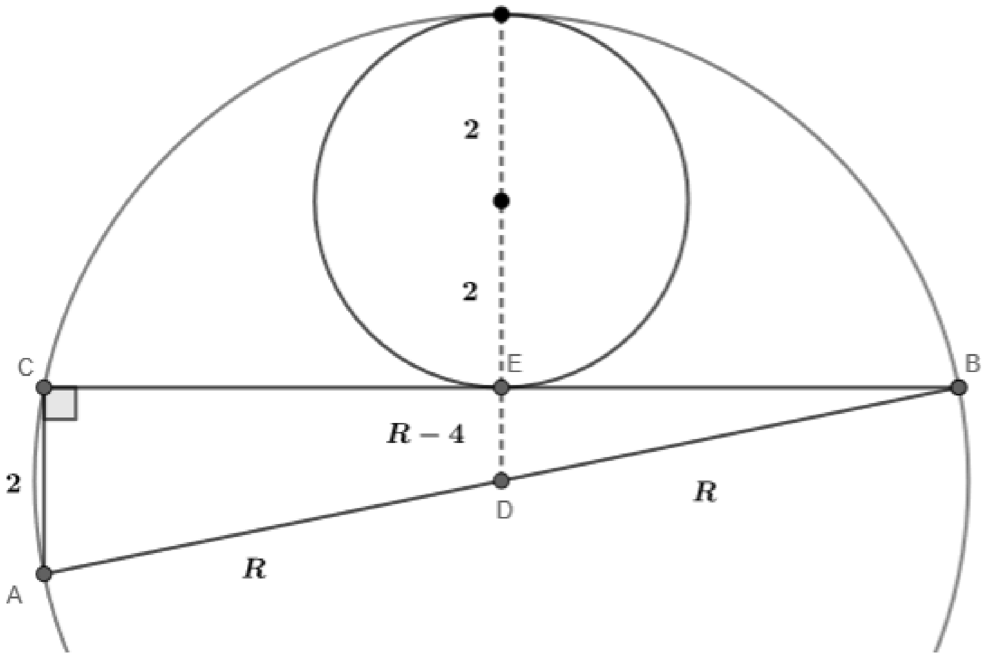
c) $\mathbf{15\pi}$

d) $\mathbf{17,5\pi}$

e) $\mathbf{20\pi}$

Comentários

Como queremos a maior circunferência possível, teremos a seguinte figura:



Pela semelhança entre os triângulos ΔABC e ΔDEB, pelo caso LLL, podemos escrever:

$$\frac{R-4}{2} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 5$$

A área do semicírculo R é, portanto:

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 = 12,5\pi$$

Gabarito: "b".

19. (CN/2015)

No triângulo isósceles ABC, AB = AC = 13 e BC = 10. Em AC marca-se R e S, com CR = 2x e CS = x. Paralelo a AB e passando por S traça-se o segmento ST, com T em BC. Por fim, marcam-se U, P e Q, simétricos de T, S e R, nessa ordem, e relativo à altura de ABC com pé sobre BC. Ao analisar a medida inteira x para que a área do hexágono PQRSTU seja máxima, obtém-se:

a) 5

b) 4

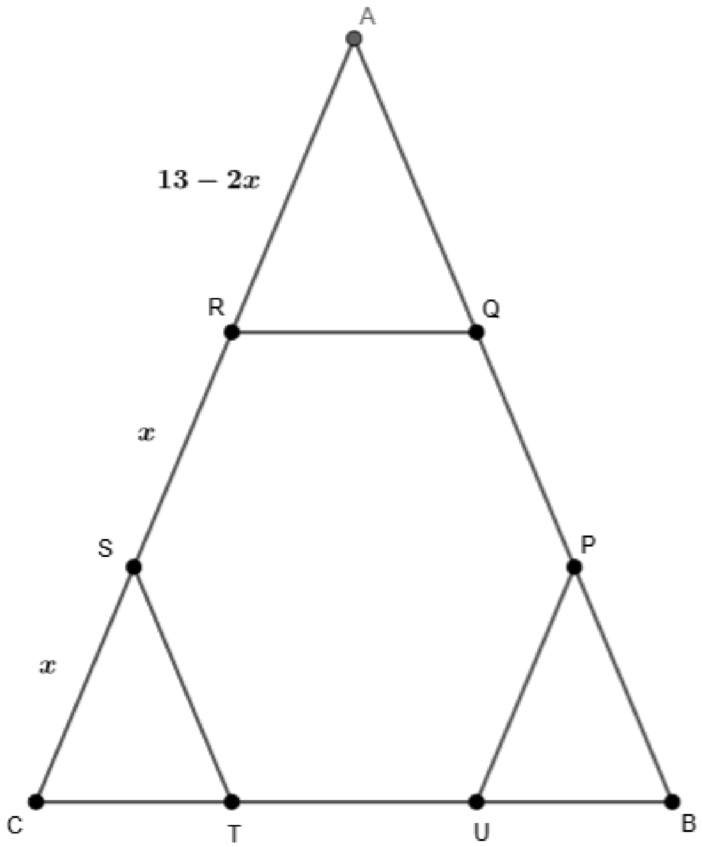
c) 3

d) 2

e) 1

Comentários

Para facilitar nossa análise, observe a figura abaixo:



Os triângulos ΔCST, ΔRAQ, ΔUPB são semelhantes ao triângulo ΔABC.

Dessa forma, seja S a área do ΔABC. Podemos calcular as áreas desses triângulos usando o quadrado das razões entre os lados:

$$\Delta ABC \sim \Delta CST \Rightarrow \left(\frac{13}{x}\right)^2 = \frac{S}{S_{\Delta CST}}$$

$$S_{\Delta CST} = S_{\Delta UPB} = \left(\frac{x}{13}\right)^2 \cdot S$$

$$\Delta ABC \sim \Delta RAQ \Rightarrow \left(\frac{13}{13-2x}\right)^2 = \frac{S}{S_{\Delta RAQ}}$$

$$S_{\Delta RAQ} = \left(\frac{13-2x}{13}\right)^2 \cdot S$$

Assim, podemos calcular a área do hexágono $PQRSTU$ em função de x:

$$S - \left(2 \cdot \left[\left(\frac{x}{13}\right)^2 \cdot S\right] + \left(\frac{13-2x}{13}\right)^2 \cdot S\right) = \frac{S}{13^2}(13^2 - 2x^2 - (13-2x)^2)$$

$$= \frac{S}{13^2}(13^2 - 2x^2 - 13^2 - 4x^2 + 52x) = \frac{S}{13^2}(-6x^2 + 52x) = \frac{2S}{13^2}(-3x^2 + 26x)$$

Nesse caso temos que a área depende de x como uma função polinomial do segundo grau, cujo valor de máximo (pois a concavidade está para baixo) é dado por:

$$x_{máx} = -\frac{26}{2 \cdot (-3)} = \frac{13}{3}$$

Como queremos x inteiro, temos que os dois inteiros mais próximos de $x_{máx}$ são $4\ e\ 5$. Mas:

$$5 - \frac{13}{3} = \frac{2}{3} > \frac{1}{3} = \frac{13}{3} - 4$$

*Lembre-se, quanto mais afastado do vértice, menor o valor de y! O ponto $x = 4$ está mais próximo do vértice!

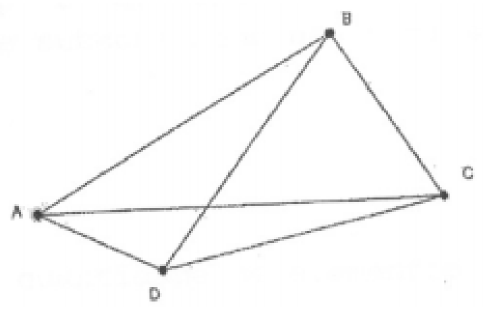
Logo, o inteiro que maximiza a área do hexágono é $x = 4$.

Gabarito: "b".

---

20. (CN/2015)

Observe a figura a seguir.



Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa 6 e com catetos diferentes. Com relação a área S de ABC, pode-se afirmar que

a) será máxima quando um dos catetos for $3\sqrt{2}$.

b) será máxima quando um dos ângulos internos for 30°.

c) será máxima quando um cateto for o dobro do outro.

d) será máxima quando a soma dos catetos for $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

e) seu valor máximo não existe.

Comentários

Sejam a e b os catetos desse triângulo retângulo. Por Pitágoras, temos:

$$a^2 + b^2 = 6^2 = 36$$

Como ΔABC é retângulo, sua área é dada por:

$$S = \frac{ab}{2}$$

Como a e b são positivos, podemos usar a desigualdade entre as médias ($MA \geq MG$):

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2} = ab \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{4} \geq S$$

Da condição de igualdade da desigualdade entre as médias, a área será máxima quando $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$.

Mas, do enunciado, temos que $a \neq b$.

Sabemos que $S \leq 9$ mas que a igualdade só ocorre se $a = b$, ou seja, S pode se aproximar de 9 tanto quanto se queira, mas nunca vai atingir, de fato, o máximo, pois $a \neq b$.

Gabarito: "e".

---

21. (CN/2015)

Seja ABCD um quadrado de lado $2a$ cujo centro é O. Os pontos M, P e Q são os pontos médios dos lados AB, AD e BC, respectivamente. O segmento BP intersecta a circunferência de centro O e raio a em R e, também OM, em S. Sendo assim, a área do triângulo SMR é

a) $\frac{3a^2}{20}$

b) $\frac{7a^2}{10}$

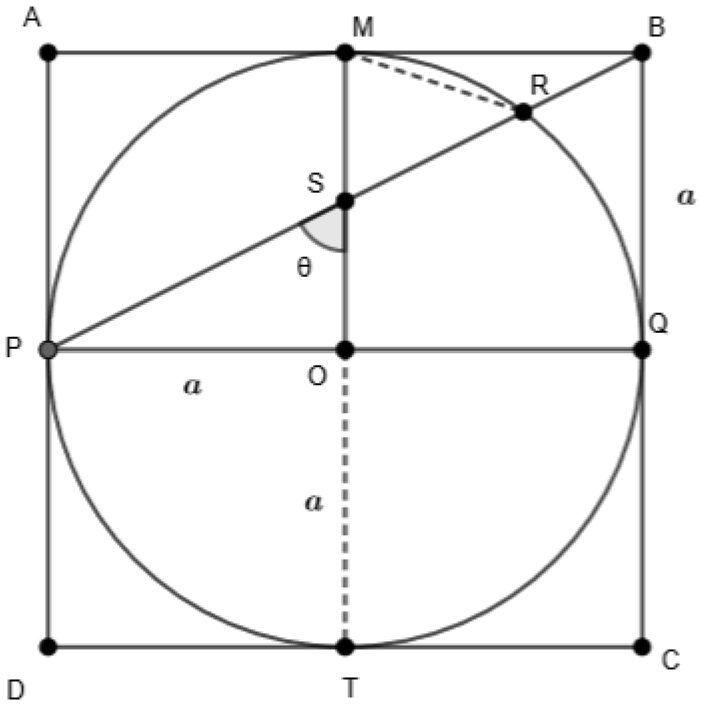
c) $\frac{9a^2}{20}$

d) $\frac{11a^2}{10}$

e) $\frac{13a^2}{20}$

Comentários

O primeiro passo é, naturalmente, representar a situação proposta:



Pela potência do ponto S relativa à circunferência:

$$MS \cdot ST = PS \cdot SR$$

Veja que SO é base média do ΔPQB, pois é paralelo à QB e divide PQ ao meio. Disso:

$$SO = \frac{a}{2} \Rightarrow ST = \frac{a}{2} + a = \frac{3a}{2}$$

$$MS = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

Pitágoras no ΔPOS:

$$PS^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow PS = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Assim:

$$\frac{a}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a \cdot SR \Rightarrow SR = \frac{3a}{2\sqrt{5}}$$

Do estudo da trigonometria, temos que a área do ΔMSR é dada por:

$$\acute{A}rea\ do\ \Delta MSR = sen\ \theta \cdot \frac{MS \cdot SR}{2}$$

$$sen\ \theta = \frac{a}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\acute{A}rea\ do\ \Delta MSR = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{3a}{2\sqrt{5}}}{2} = \frac{3a^2}{20}$$

Gabarito: “a”.

22. (CN/2015)

ABC é um triângulo equilátero. Seja D um ponto do plano de ABC, externo a esse triângulo, tal que DB intersecta AC em E, com E pertencendo ao lado AC. Sabe-se que BÂD = $A\widehat{C}D$ = 90°. Sendo assim, a razão entre as áreas dos triângulos BEC e ABE é

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

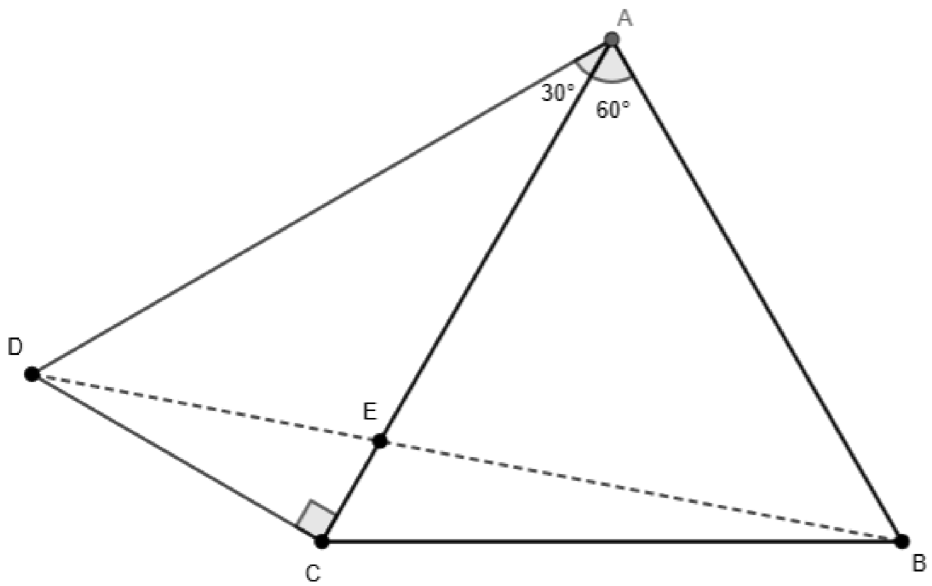
c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{2}{5}$

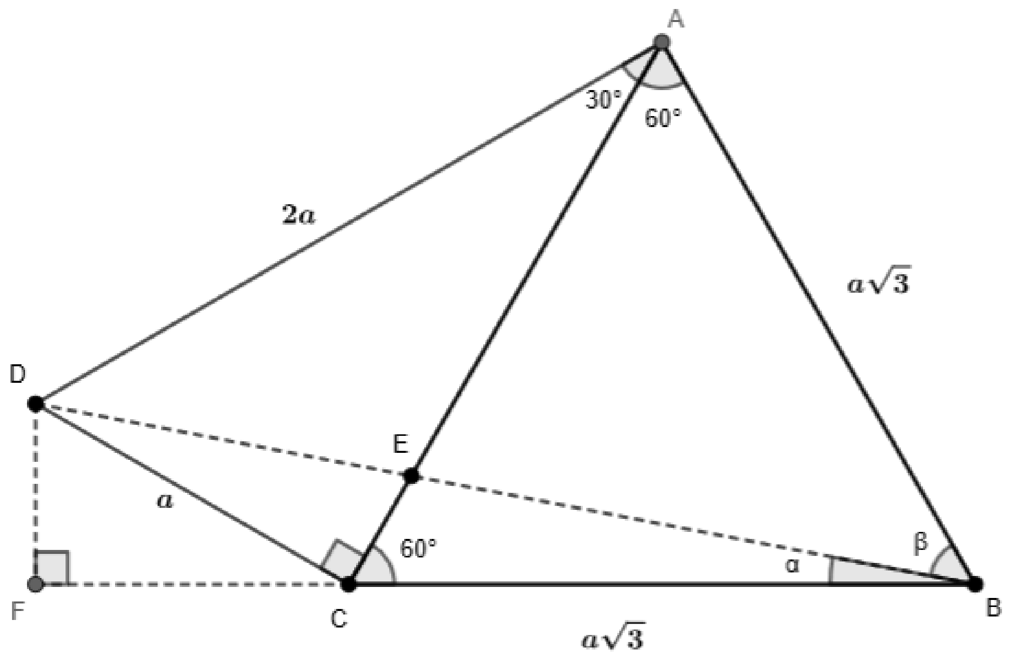
Comentários

Representando a situação proposta:



As alturas relativas a AC dos ΔBEC e ΔABE são iguais, do que segue a razão entre suas áreas se resume à razão entre suas bases, isto é, a razão entre CE e EA.

Vamos chamar $DC = a$ e traçar a altura do triângulo ΔDBC relativa ao lado BC. Além disso, explorando as razões trigonométricas dos ângulos $30°\ e\ 60°$, temos a seguinte figura:



Aplicando Pitágoras ao ΔABD:

$$BD^2 = (2a)^2 + \left(\sqrt{3}a\right)^2 = 7a^2 \Rightarrow BD = \sqrt{7}a$$

Como $D\hat{C}F = 30°$, temos que:

$$DF = asen30° = \frac{a}{2}$$

Disso, segue que:

$$sen\ \alpha = \frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$sen\ \beta = \frac{2a}{\sqrt{7}a} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

Aplicando a lei dos senos aos triângulos $\Delta BEC\ e\ \Delta ABE$:

$$\frac{EB}{sen60°} = \frac{CE}{sen\alpha}$$

$$\frac{EB}{sen60°} = \frac{AE}{sen\ \beta}$$

Que implica:

$$\frac{CE}{sen\ \alpha} = \frac{AE}{sen\ \beta} \Rightarrow \frac{CE}{AE} = \frac{sen\ \alpha}{sen\ \beta} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{4}$$

Gabarito: "b".

23. (CN/2015)

Seja ABC um triângulo de lados medindo 8, 10 e 12, Sejam M, N e P os pés das alturas traçadas dos vértices sobre os lados desse triângulo. Sendo assim, o raio do círculo circunscrito ao triângulo MNP é

a) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\frac{6\sqrt{7}}{7}$

c) $\frac{8\sqrt{7}}{7}$

d) $\frac{9\sqrt{7}}{7}$

e) $\frac{10\sqrt{7}}{7}$

Comentários

Do estudo da geometria plana, sabemos que a circunferência circunscrita ao triângulo formado pelos pés da altura é o triângulo órtico. Essa circunferência é conhecida como círculo dos nove pontos e o seu raio corresponde à metade do raio do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

Disso, precisamos descobrir o raio do círculo circunscrito ao ΔABC. Calculando sua área por Heron:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Mas:

$$p = \frac{8+10+12}{2} = 15$$

$$p - a = 15 - 8 = 7$$

$$p - b = 15 - 10 = 5$$

$$p - c = 15 - 12 = 3$$

Daí, temos que:

$$A = \sqrt{15 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} = 15\sqrt{7}$$

Por outro lado, temos que sua área pode ser calculada usando o circunraio:

$$A = \frac{abc}{4R} = \frac{8 \cdot 10 \cdot 12}{4R} = \frac{240}{R}$$

Igualando:

$$\frac{240}{R} = 15\sqrt{7} \Rightarrow R = \frac{16\sqrt{7}}{7}$$

Do que foi dito mais acima, o raio buscado vale:

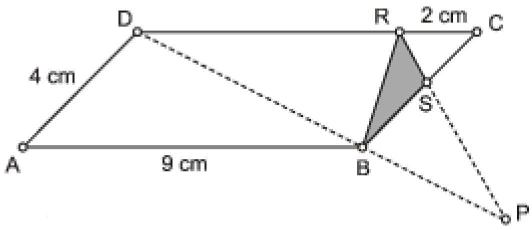
$$\frac{R}{2} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

Gabarito: “c”.

---

24. (CN/2014)

Observe a figura a seguir.



Na figura, o paralelogramo ABCD tem lados 9cm e 4cm. Sobre o lado CD está marcado o ponto R, de modo que CR = 2cm; sobre o lado BC está marcado o ponto S tal que a área do triângulo BRS seja $1/36$ da área do paralelogramo; e o ponto P é a interseção do prolongamento do segmento RS com o prolongamento da diagonal DB. Nessas condições, é possível concluir que a razão entre as medidas dos segmentos de reta $\frac{DP}{BP}$ vale:

a) 13,5

b) 11

c) 10,5

d) 9

e) 7,5

Comentários

Para simplificar as contas:

$$\acute{A}rea\ do\ \Delta DBR = A$$

$$\acute{A}rea\ do\ \Delta RSC = B$$

Será conveniente, para a resolução da questão, encontrar os valores as áreas $A\ e\ B$ em função da área do paralelogramo, que chamaremos de $2C$. Veja que isso implica:

$$\acute{A}rea\ do\ \Delta BRS = \frac{2C}{36}$$

Como a diagonal é um eixo de simetria do paralelogramo, podemos escrever:

$$C = A + B + \frac{2C}{36} \Rightarrow A + B = \frac{17}{18}C\ eq.01$$

Os triângulos ΔDBR e ΔRBC possuem mesma altura, de modo que a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. Disso, temos que:

$$\frac{A}{B + \frac{2C}{36}} = \frac{DR}{RC} = \frac{7}{2} \Rightarrow 2A - 7B = \frac{7C}{18}\ eq.02$$

Combinando as equações $01\ e\ 02$, temos:

$$A = \frac{7C}{9}\ e\ B = \frac{C}{6}$$

Os triângulos $\Delta BRS\ e\ \Delta SCR$ possuem mesma altura, de modo que a razão entre suas áreas é dada por:

$$\frac{\frac{2C}{36}}{\frac{C}{6}} = \frac{BS}{SC} \Rightarrow SC = 3BS$$

Mas $BS + SC = 4 \Rightarrow BS = 1\ e\ SC = 3$.

Por fim, basta aplicar o teorema de Menelaus ao triângulo ΔDBC:

$$\frac{DP}{BP} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CR}{RD} = 1 \Rightarrow \frac{DP}{BP} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} = 1 \Rightarrow \frac{DP}{BP} = \frac{21}{2} = 10{,}5$$

Gabarito: "c".

---

25. (CN/2014)

Sobre o lado BC do quadrado $ABCD$, marcam-se os pontos E e F tais que $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$ e $\frac{CF}{BC} = \frac{1}{4}$. Sabendo-se que os segmentos AF e ED intersectam-se em P, qual é, aproximadamente, o percentual da área do triângulo BPE em relação à área do quadrado $ABCD$?

a) 2

b) 3

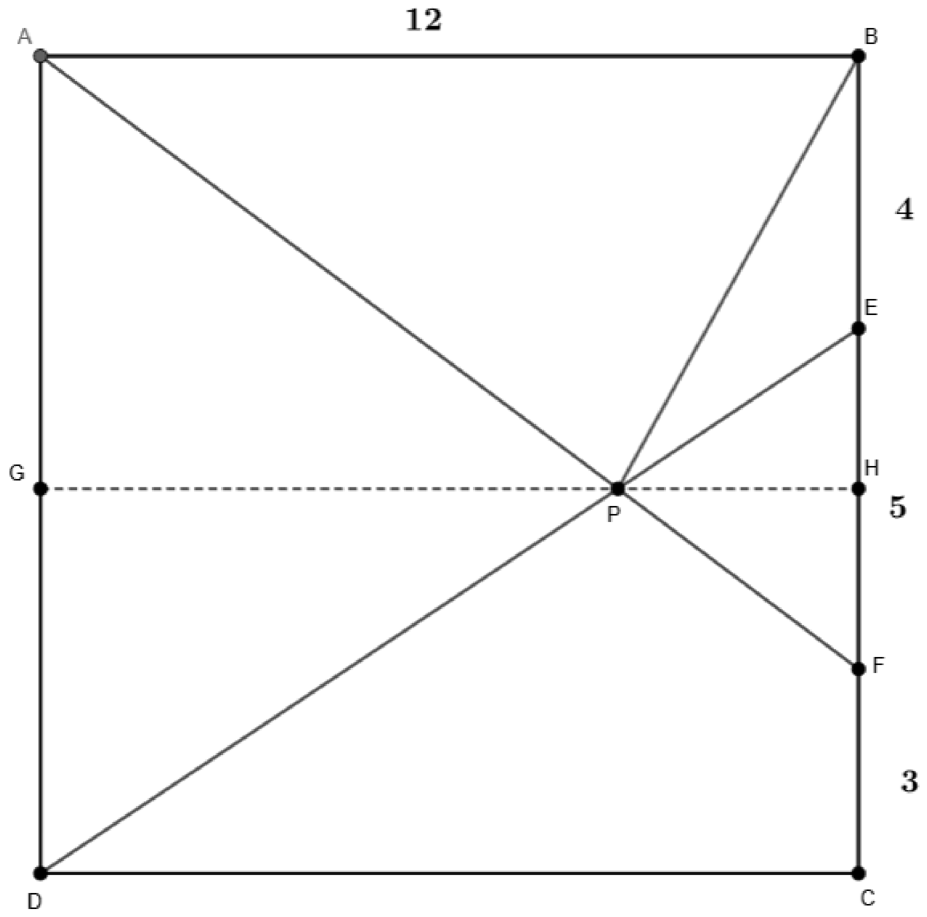
c) 4

d) 5

e) 6

Comentários

Para simplificar as frações, faça $BC = 12$. Disso, temos que a situação é representada por:



Veja que os triângulos ΔAPD e ΔPEF são semelhantes (LLL), do que temos que:

$$\frac{GP}{12} = \frac{PH}{5} \Rightarrow GP = \frac{12}{5}PH$$

Mas:

$$GP + PH = 12 \Rightarrow \frac{12}{5}PH + PH = \frac{17}{5}PH = 12 \Rightarrow PH = \frac{60}{17}$$

A área do ΔPEB:

$$\frac{PH \cdot BE}{2} = \frac{\frac{60}{17} \cdot 4}{2} = \frac{120}{17}$$

A porcentagem é, portanto:

$$\frac{\frac{120}{17}}{12 \cdot 12} = \frac{10}{17 \cdot 12} = \frac{10}{204} \approx 0{,}049 \ ou\ 4{,}9\%$$

Gabarito: “d”.

---

26. (CN/2014)

Suponha que ABC seja um triângulo isósceles com lados AC = BC, e que L seja a circunferência de centro C, raio igual a 3 e tangente ao lado AB. Com relação à área da superfície comum ao triângulo ABC e ao círculo de L, pode-se afirmar que:

a) não possui um valor máximo.

b) pode ser igual a 5π.

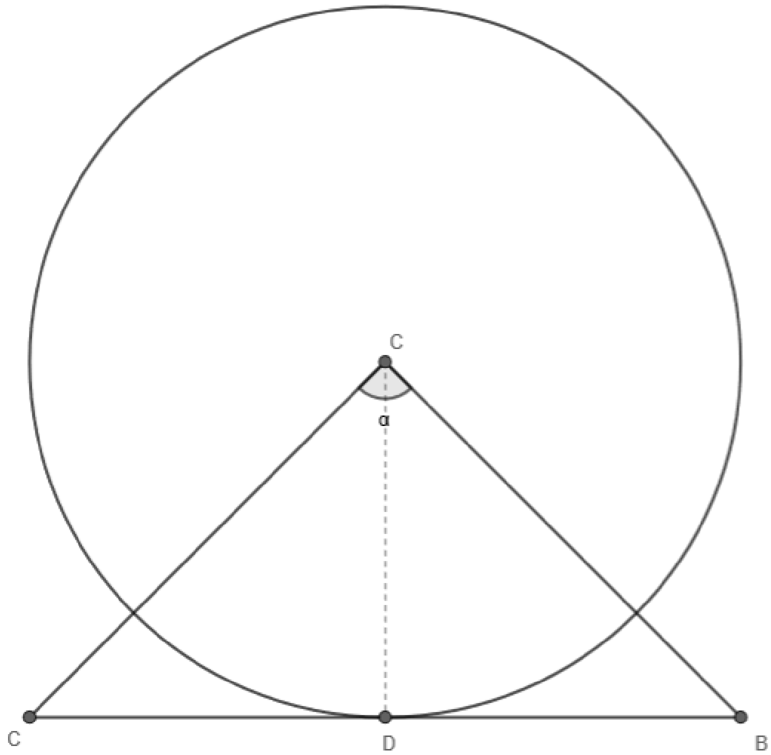
c) não pode ser igual a 4π.

d) possui um valor mínimo igual a 2π.

e) possui um valor máximo igual a $4,5\pi$.

Comentários

Observe a situação proposta:



O ângulo α, por ser interno ao triângulo, é tal que $\alpha < \pi$. Sobre a reta BC pode-se sempre escolher dois pontos simétricos em relação ao segmento CD escolhendo α tão próximo de π quanto se queira, mas nunca atingindo esse valor.

A área é diretamente proporcional ao ângulo α, de modo que ela acompanha o seu crescimento.

Deve-se ter cuidado para não achar que o valor $\frac{9\pi}{2} = 4,5\pi$ é um máximo possível, pois, para que ele ocorra, α deve atingir π, o que não é possível por ele ser interno ao triângulo.

Gabarito: "a".

---

27. (CN/2014)

Seja ABC um triângulo retângulo de hipotenusa 26 e perímetro 60. A razão entre a área do círculo inscrito e do círculo circunscrito nesse triângulo é, aproximadamente:

a) 0,035

b) 0,055

c) 0,075

d) 0,095

e) 0,105

Comentários

Sejam $a\ e\ b$ os catetos desse triângulo. Podemos afirmar que:

$$a^2 + b^2 = 26^2$$

$$a + b + 26 = 60 \Rightarrow a + b = 34$$

Veja que:

$$(a+b)^2 = 34^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 34^2 \Rightarrow 26^2 + 2ab = 34^2$$

Ou seja:

$$2ab = 34^2 - 26^2 = (34+26)\cdot(34-26) = 60\cdot 8 = 480$$

Logo:

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 = 676 - 480 = 196 = 14^2 \Rightarrow a - b = 14$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a + b = 34 \\ a - b = 14 \end{cases}$$

Assumindo $a > b$, temos $a = 24$ e $b = 10$.

Como o triângulo é retângulo, o círculo circunscrito possui raio igual a metade da hipotenusa:

$$R = \frac{26}{2} = 13$$

Além disso, do estudo da geometria, podemos calcular a área desse triângulo de duas formas:

Usando o raio da circunferência inscrita:

$$pr = \frac{60}{2}\cdot r = 30r$$

Usando os catetos:

$$\frac{ab}{2} = \frac{24\cdot 10}{2} = 3\cdot 4\cdot 10$$

Logo:

$$3\cdot 10\cdot r = 3\cdot 4\cdot 10 \Rightarrow r = 4$$

A razão entre as áreas é, portanto:

$$\frac{\pi\cdot(4)^2}{\pi\cdot(13)^2} = \frac{16}{169} \approx 0{,}095$$

Gabarito: “d”.

28. (CN/2014)

Observe as figuras a seguir.

Figura I

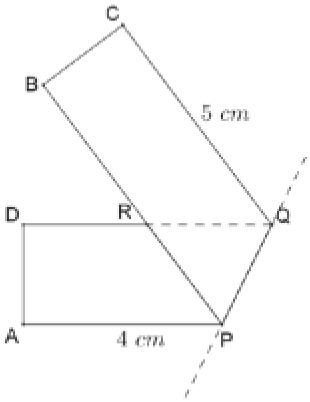


Figura II

Uma dobra é feita no retângulo 10cm x 2cm da figura I, gerando a figura plana II. Essa dobra está indicada pela reta suporte de PQ. A área do polígono APQCBRD da figura II, em cm², é:

a) $8\sqrt{5}$

b) 20

c) $10\sqrt{2}$

d) $\frac{35}{2}$

e) $\frac{13\sqrt{6}}{2}$

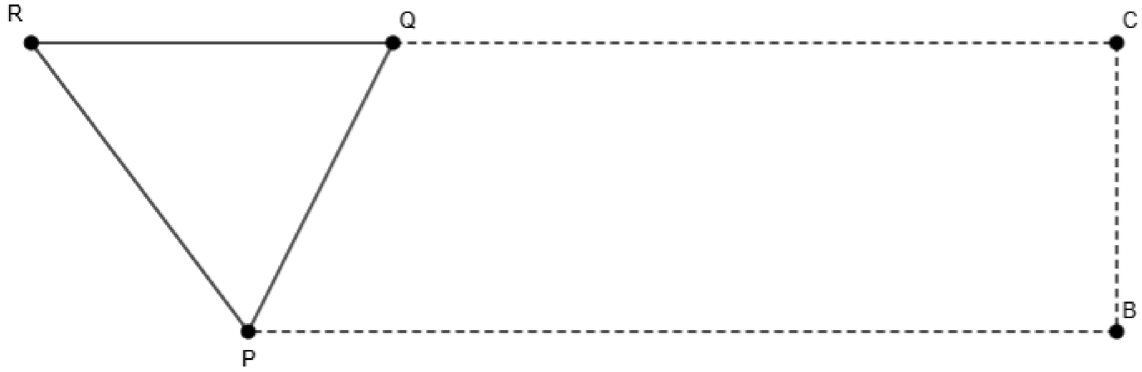
Comentários

Para calcular a área dessa figura, o primeiro passo é perceber que ela formada pelos trapézios $APQD$ e $BCQR$.

$$Área\ do\ APQD = \frac{2 \cdot (4 + DQ)}{2} = \frac{2 \cdot (4 + 5)}{2} = 9$$

$$Área\ do\ BCQR = \frac{2 \cdot (5 + RB)}{2} = 5 + RB$$

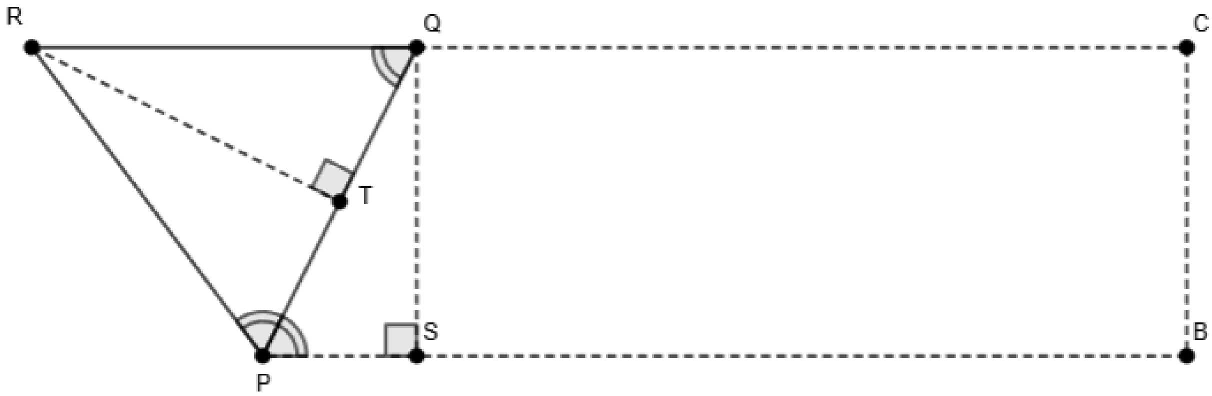
Assim, surge a necessidade de calcular a medida de RB. Para isso, observe a figura abaixo:



Ela representa uma mescla das duas situações. Veja que, como foi feita uma reflexão em torno de PQ os ângulos $R\hat{P}Q$ e $Q\hat{P}B$ são iguais.

Além disso, como $PB \parallel QC$, os ângulos $Q\hat{P}B$ e $P\hat{Q}R$ são iguais, do que segue o ΔPQR é isósceles e $RP = RQ$, pois $R\hat{P}Q = Q\hat{P}B = P\hat{Q}R$.

Observe ainda a seguinte figura:



Aplicando Pitágoras ao triângulo ΔPSQ:

$$PS^2 + SQ^2 = PQ^2 \Rightarrow 1^2 + 2^2 = PQ^2 \Rightarrow PQ = \sqrt{5}$$

Como T é o ponto médio do ΔPQR, já que o mesmo é isósceles e RT é sua altura relativa à base, temos que $PT = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Da semelhança entre os ΔPTR e ΔPSQ:

$$\frac{RP}{PT} = \frac{PQ}{PS} \Rightarrow \frac{RP}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{1} \Rightarrow RP = \frac{5}{2}$$

Mas:

$$RP + RB = 6 \Rightarrow RB = 6 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\acute{A}rea\ do\ BCQR = 5 + \frac{7}{2} = \frac{17}{2}$$

Por fim:

$$Área\ total = \frac{17}{2} + 9 = \frac{35}{2}$$

Gabarito: “d”.

29. (CN/2013)

Sabendo-se que ABC é um triângulo retângulo de hipotenusa BC = a, qual é o valor máximo da área de ABC?

a) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{a^2}{4}$

c) $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$

d) $\frac{3a^2}{4}$

e) $\frac{3a^2}{2}$

Comentários

Sejam $b\ e\ c$ os catetos. Do teorema de Pitágoras, sabemos que:

$$c^2 + b^2 = a^2$$

A área do triângulo é dada por:

$$S = \frac{b \cdot c}{2}$$

Da desigualdade entre as médias, temos:

$$\frac{c^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{c^2 b^2} = cb \Rightarrow \frac{c^2 + b^2}{4} \geq \frac{cb}{2} = S$$

Ou seja:

$$S \leq \frac{a^2}{4}$$

Portanto, como não temos nenhuma restrição para os catetos, o máximo é $\frac{a^2}{4}$, que ocorre quando $b = c$, da igualdade da desigualdade entre as médias.

Gabarito: “b”.

30. (CN/2013)

Considere que ABCD é um trapézio, onde os vértices são colocados em sentido horário, com bases AB = 10 e CD = 22. Marcam-se na base AB o ponto P e na base CD o ponto Q, tais que AP = 4 e CQ = x. Sabe-se que as áreas dos quadriláteros APQD e PBCQ são iguais. Sendo assim, pode-se afirmar que a medida x é:

a) 10

b) 12

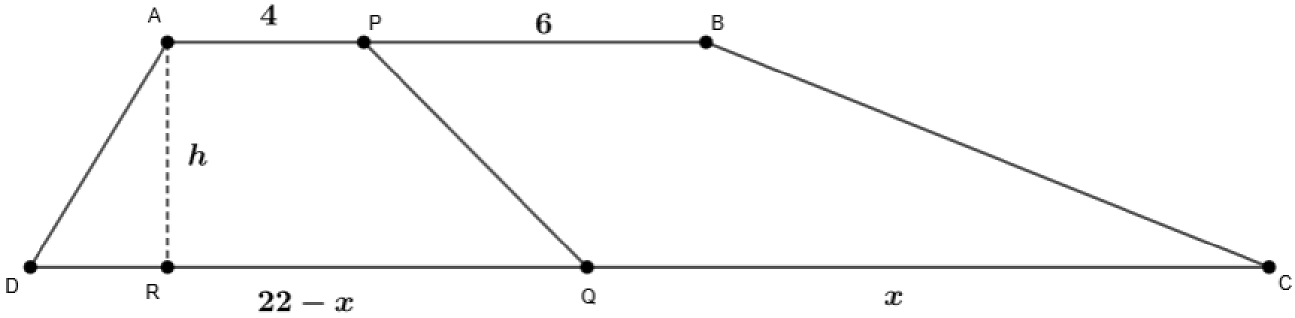
c) 14

d) 15

e) 16

Comentários

Esboçando a situação proposta:



Da igualdade das áreas:

$$\frac{h}{2} \cdot (4 + 22 - x) = \frac{h}{2} \cdot (6 + x) \Rightarrow 26 - x = 6 + x \Rightarrow x = 10$$

Gabarito: "a".

---

31. (CN/2013)

Seja ABC um triângulo acutângulo e L a circunferência circunscrita ao triângulo. De um ponto Q (diferente de A e de C) sobre o menor arco AC de L são traçadas perpendiculares às retas suportes dos lados do triângulo. Considere M, N e P os pés das perpendiculares sobre os lados AB, AC e BC, respectivamente. Tomando MN = 12 e PN = 16, qual é a razão entre as áreas dos triângulos BMN e BNP?

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{9}{16}$

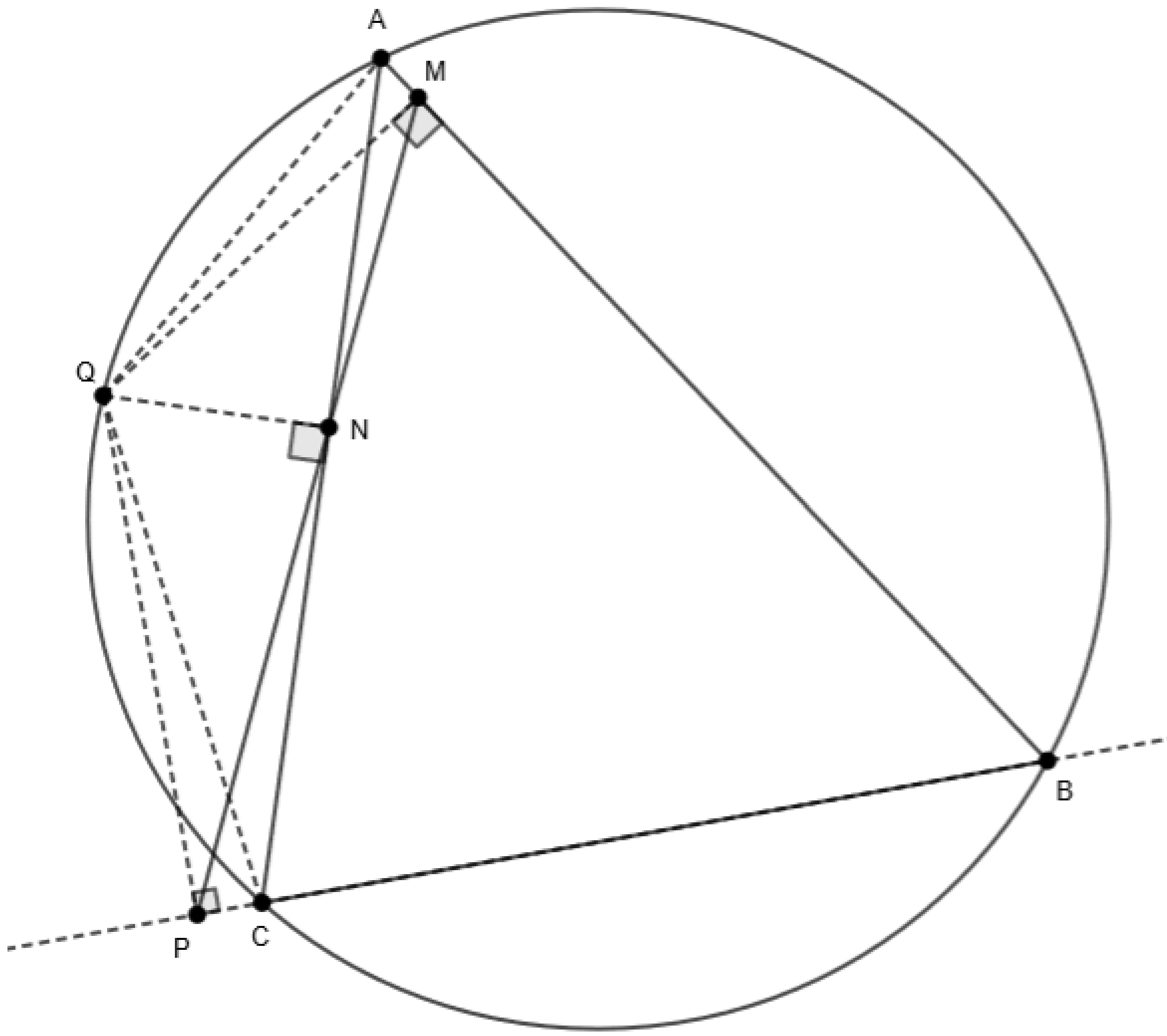
c) $\frac{8}{9}$

d) $\frac{25}{36}$

e) $\frac{36}{49}$

Comentários

O primeiro passo é provar que os pontos M, N e P são colineares. Esse resultado é conhecido como teorema de Simsom-Wallace e será demonstrado abaixo.



Nosso objetivo é mostrar que os ângulos $P\hat{N}C$ e $M\hat{N}A$ são iguais.

Primeiro, veja que o quadrilátero $PCNQ$ é inscritível, pois a soma dos ângulos opostos $Q\hat{P}C$ e $C\hat{N}Q$ é $180°$. Disso, temos que $P\hat{N}C = C\hat{Q}P$.

Veja também que o quadrilátero $QNMA$ é inscritível, pois $Q\hat{N}A = Q\hat{M}A = 90°$. Daí, segue que $A\hat{N}M = M\hat{Q}A$.

O quadrilátero $ABCQ$ é inscritível por construção, do que segue que $C\hat{Q}A + A\hat{B}C = 180°$.

O quadrilátero $MQPB$ também é inscritível pelo mesmo motivo do quadrilátero $PCNQ$, do que segue que $M\hat{Q}P + A\hat{B}C = 180°$.

Combinando as duas últimas informações, temos que $M\hat{Q}P = C\hat{Q}A$. Mas:

$$M\hat{Q}P = M\hat{Q}C + C\hat{Q}P$$

$$C\hat{Q}A = M\hat{Q}C + M\hat{Q}A$$

Logo:

$$C\hat{Q}P = M\hat{Q}A \Rightarrow P\hat{N}C = A\hat{N}M$$

Como os ângulos opostos pelo vértice N são iguais e AC é uma reta, segue que $M, P\ e\ N$ devem ser colineares.

Para achar a razão entre as áreas dos triângulos ΔBMN e ΔBNP basta ver que eles possuem a mesma altura relativa à reta MP, digamos h. Suas áreas são:

$$Área\ do\ \Delta BMN = \frac{h \cdot MN}{2}$$

$$Área\ do\ \Delta BNP = \frac{h \cdot NP}{2}$$

Perceba que a razão entre as áreas se resume à razão entre os seguimentos $MN\ e\ NP$:

$$\frac{MN}{NP} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Gabarito: "a".

---

32. (CN/2012)

Em dois triângulos, T_1 e T_2, cada base é o dobro da respectiva altura. As alturas desses triângulos, h_1 e h_2, são números ímpares positivos. Qual é o conjunto dos valores possíveis de h_1 e h_2, de modo que a área $T_1 + T_2$ seja equivalente à área de um quadrado de lado inteiro?

a) 0

b) unitário

c) finito

d) $\{3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$

e) $\{11, 17, 23, 29, \dots\}$

Comentários

As bases desses triângulos são $2h_1\ e\ 2h_2$, respectivamente, de modo que suas áreas são:

$$T_1 = \frac{h_1 \cdot 2h_1}{2} = h_1^2$$

$$T_2 = \frac{h_2 \cdot 2h_2}{2} = h_2^2$$

Logo:

$$T_1 + T_2 = h_1^2 + h_2^2$$

Mas $h_1\ e\ h_2$ são inteiros ímpares, isto é:

$$h_1 = 2n_1 + 1\ e\ h_2 = 2n_2 + 1$$

Assim:

$$h_1^2 = 4n_1^2 + 4n_1 + 1$$

$$h_2^2 = 4n_2^2 + 4n_2 + 1$$

$$h_1^2 + h_2^2 = 4(n_1^2 + n_1 + n_2^2 + n_2) + 2$$

Seja l o lado do quadrado. Como ele é inteiro, ou ele é par ou é ímpar. Disso, veja que:

$$l = 2n \Rightarrow l^2 = 4n^2$$

Ou:

$$l = 2n + 1 \Rightarrow l^2 = 4(n^2 + n) + 1$$

Ou seja, o quadrado de um inteiro somente pode deixar resto $0\ ou\ 1$ na divisão por quatro, o que não é o caso da soma $T_1 + T_2$, que deixa resto 2.

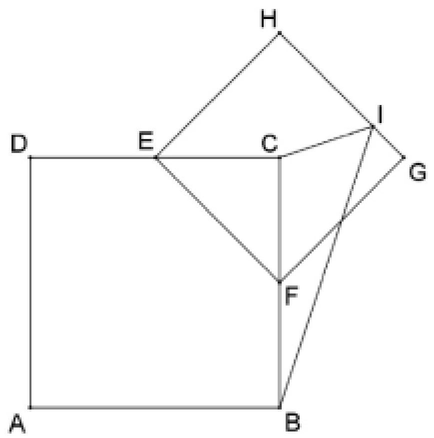
Daí, concluímos que a igualdade não é possível e o conjunto é vazio.

Gabarito: "a".

---

33. (CN/2012)

Observe a figura a seguir.



A figura acima apresenta um quadrado ABCD de lado 2. Sabe-se que E e F são, os pontos médios dos lados DC e CB, respectivamente. Além disso, EFGH também formam um quadrado e I está sobre o lado GH, de modo que $GI = \frac{GH}{4}$. Qual é a área do triângulo BCI?

a) $\frac{7}{8}$

b) $\frac{6}{7}$

c) $\frac{5}{6}$

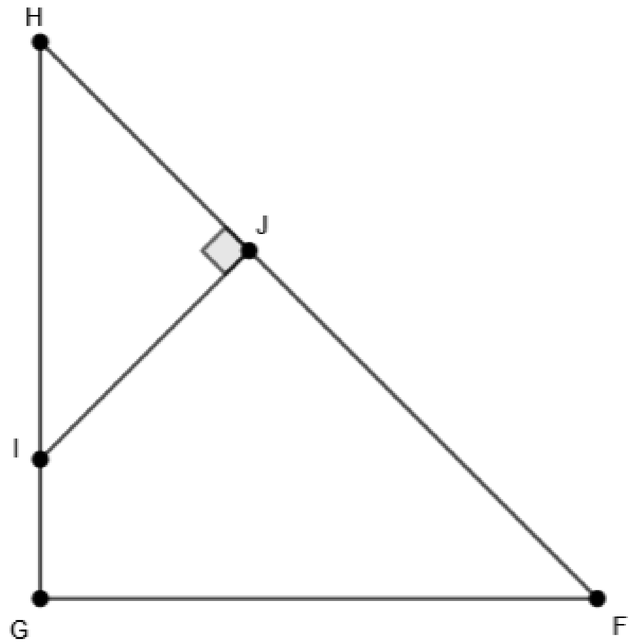
d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{3}{4}$

Comentários

Para calcular a área do triângulo ΔBCI, precisamos de uma base e de uma altura. Por conveniência, vamos tomar a base BC e vamos calcular a atura relativa à essa base.

Para encontrar essa altura, veja que ela corresponde à perpendicular traçada do ponto I sobre a reta suporte de BC. Observe:



Como $GH = \sqrt{2}$, pois é o lado do quadrado $EFGH$, do enunciado, $GI = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow IH = \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

Como $IHJ = 45°$, $IJ = \frac{3}{4}\sqrt{2} \cdot sen\ 45° = \frac{3}{4}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$.

Assim, temos que a área pedida é:

$$Área\ do\ BCI = \frac{IJ \cdot BC}{2} = \frac{\frac{3}{4} \cdot 2}{2} = \frac{3}{4}$$

Gabarito: "e".

---

34. (CN/2012)

Um trapézio isósceles tem lados não paralelos medindo $10\sqrt{3}$. Sabendo que a bissetriz interna da base maior contém um dos vértices do trapézio, qual é a área desse trapézio?

a) $75\sqrt{3}$

b) $105\sqrt{3}$

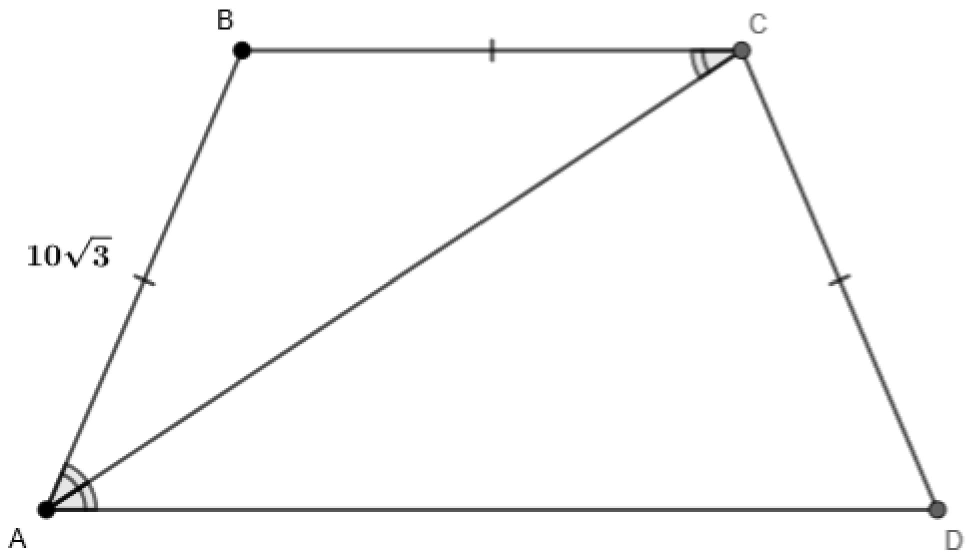
c) $180\sqrt{3}$

d) $225\sqrt{3}$

e) $275\sqrt{3}$

Comentários

O enunciado dessa questão está incompleto, pois com os dados fornecidos não podemos determinar a base desse trapézio, que é variável, veja:



O ângulo $B\hat{A}D$ não está definido, o que torna impossível determinar a base AD. Perceba que um quadrado de lado $10\sqrt{3}$ também satisfaz o enunciado (caso em que $B\hat{A}D = 90°$).

Gabarito: Anulada.

---

35. (CN/2011)

Um aluno estudava sobre polígonos convexos e tentou obter dois polígonos de N e n lados ($N \neq n$), e com D e d diagonais, respectivamente, de modo que $N - n = D - d$. A quantidade de soluções corretas que satisfazem essas condições é:

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) indeterminada.

Comentários

Do estudo da geometria plana, sabemos que:

$$D = \frac{N(N-3)}{2} \; e \; d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Usando a relação fornecida:

$$N - n = \frac{N(N-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2}$$

$$2(N-n) = N^2 - 3N - n^2 + 3n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(N-n) = (N-n)(N+n) - 3(N-n)$$

Ou seja:

$$(N-n)(N+n-5) = 0$$

Como $n \neq N$, temos que:

$$N + n - 5 = 0 \Rightarrow N + n = 5$$

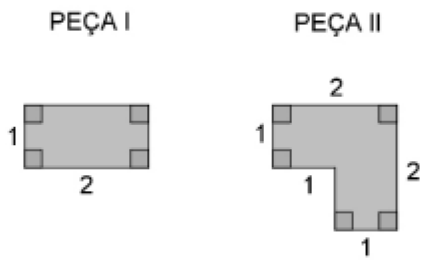
Mas como $N\ e\ n$ são lados de um polígono convexo, devem obedecer $n, N > 3$, isto é, $N + n > 6$. Logo, não há solução para a equação acima.

Gabarito: "a".

---

36. (CN/2011)

Observe a ilustração a seguir.



Qual a quantidade mínima de peças necessárias para revestir, sem falta ou sobra, um quadro de lado 5, utilizando as peças acima?

a) 12

b) 11

c) 10

d) 9

e) 8

Comentários

O primeiro passo é calcular a área de cada peça:

Peça I:

$$S_1 = 1 \cdot 2 = 2$$

Peça II:

$$S_2 = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$$

Um quadrado de lado 5 possui área:

$$S = 5^2 = 25$$

Seja ainda a a quantidade da peça I e b a quantidade da peça II. Temos que:

$$2a + 3b = 25$$

Queremos o valor mínimo de $a + b$ sabendo que $a\ e\ b$ são naturais.

A equação acima é uma equação diofantina. Do estudo das equações desse tipo, sabemos que se (a_0, b_0) é um par solução dessa equação, então $(a_0 + 3k, b_0 - 2k)$ representa todas as soluções dessa equação para k inteiro qualquer, pois $mdc(2,3) = 1$.

Uma solução particular facilmente verificável é $(2,7)$, do que temos que todas as soluções podem ser expressas por $(2+3k, 7-2k)$.

Mas devemos lembrar que queremos apenas as soluções naturais, isto é:

$$2+3k>0 \Rightarrow k>-\frac{2}{3}$$

$$7-2k>0 \Rightarrow \frac{7}{2}>k$$

Do que segue que:

$$-\frac{2}{3}<k<\frac{7}{2}$$

Ou seja, k pertence ao conjunto:

$$\{0,1,2,3\}$$

Veja ainda que:

$$a+b=2+3k+7-2k=9+k$$

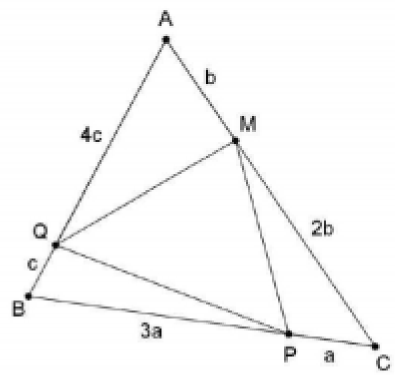
O valor é mínimo quando $k=0$, isto é, $a+b=9+0=9$.

Gabarito: "d".

---

37. (CN/2011)

Considere a figura a seguir.



A razão $\frac{S(MPQ)}{S(ABC)}$, entre as áreas dos triângulos MPQ e ABC, é:

a) $\frac{7}{12}$

b) $\frac{5}{12}$

c) $\frac{7}{15}$

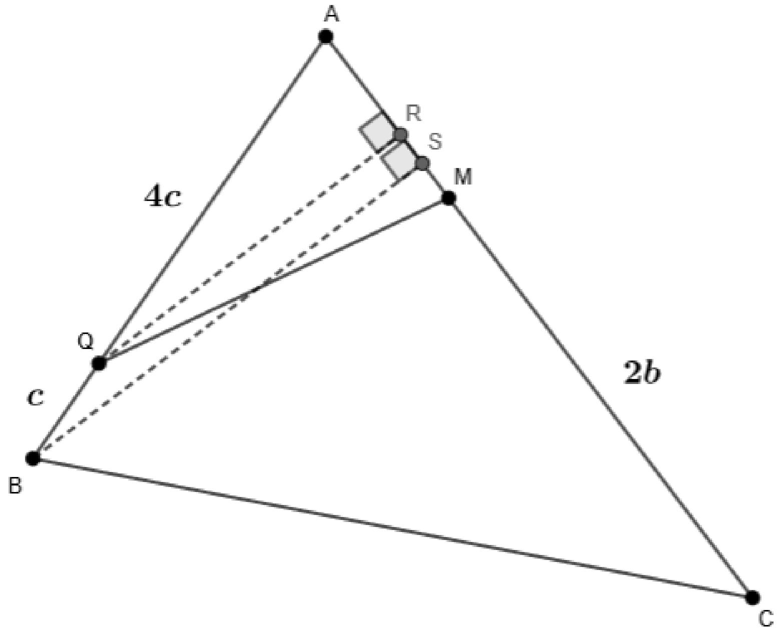
d) $\frac{8}{15}$

e) $\frac{7}{8}$

Comentários

A ideia para resolver essa questão é relacionar a área dos triângulos $\Delta AQM, \Delta BQP\ e\ \Delta CPM$ com a área do triângulo ΔABC. Para fazer isso seguiremos a mesma ideia para os três triângulos. Faremos apenas para um deles, para os outros dois é completamente análogo. Além disso, denotaremos por S a área do ΔABC.

Fazendo primeiro para o ΔQMA:



Da semelhança entre os triângulos ΔQRA e ΔBSA (LLL), temos:

$$\frac{QR}{BS} = \frac{QA}{BA}$$

As áreas:

$$\text{Área do } \Delta QMA = \frac{MA \cdot QR}{2} = \frac{QR \cdot b}{2}$$

$$\text{Área do } \Delta ABC = \frac{AC \cdot BS}{2} = \frac{3b \cdot BS}{2}$$

A razão entre as áreas:

$$\frac{\text{Área do } \Delta QMA}{S} = \frac{\frac{QR \cdot MA}{2}}{\frac{AC \cdot BS}{2}} = \frac{MA \cdot QA}{AC \cdot BA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{QA}{BA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15}$$

Ou seja:

$$\text{Área do } \Delta QMA = \frac{4}{15} S$$

De maneira análoga:

$$\frac{\text{Área do } \Delta PCM}{S} = \frac{PC \cdot CM}{BC \cdot CA} = \frac{a \cdot 2b}{4a \cdot 3b} = \frac{1}{6}$$

Logo:

$$Área\ do\ \Delta PCM = \frac{1}{6}S$$

Analogamente:

$$\frac{Área\ do\ \Delta QBP}{S} = \frac{QB \cdot BP}{AB \cdot BC} = \frac{c \cdot 3a}{5c \cdot 4a} = \frac{3}{20}$$

Logo:

$$Área\ do\ \Delta QBP = \frac{3}{20}S$$

Veja que:

$$S(MPQ) = S - \left(\frac{3}{20}S + \frac{1}{6}S + \frac{4}{15}S\right) = \frac{60-35}{60}S = \frac{25}{60}S = \frac{5}{12}S$$

E finalmente:

$$\frac{S(MPQ)}{S(ABC)} = \frac{5}{12}$$

Gabarito: "b".

---

38. (CN/2011)

Num paralelogramo ABCD de altura CP = 3, a razão $\frac{AB}{BC} = 2$. Seja M o ponto médio de AB e P o pé da altura de ABCD baixada sobre o prolongamento de AB, a partir de C. Sabe-se que a razão entre as áreas dos triângulos MPC e ADM é $\frac{S(MPC)}{S(ADM)} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$. A área do triângulo PBC é igual a:

a) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

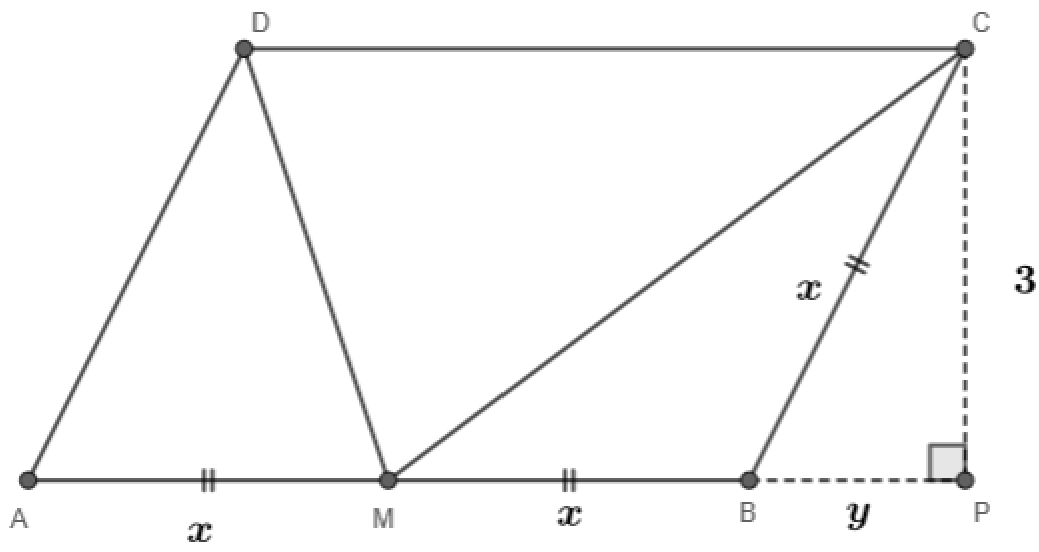
c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Comentários

O primeiro passo é esboçar a situação proposta, de modo que vamos denotar $AM = x$ e $BP = y$:



Os triângulos $\Delta AMB\ e\ \Delta MPC$ possuem mesma altura, então a razão entre as áreas é igual a razão entre as bases:

$$\frac{x+y}{x}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 2y+2x=2x+\sqrt{3}x\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}x}{2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao ΔBPC, temos:

$$x^2=3^2+y^2=3^2+\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)^2\Rightarrow x=6$$

Logo:

$$y=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

Por fim, a área do ΔBPC:

$$\frac{3\cdot 3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Gabarito: "b".

---

39. (CN/2010)

ABC é um triângulo equilátero. Seja P um ponto do plano de ABC e exterior ao triângulo de tal forma que PB intersecta AC em Q (Q está entre A e C). Sabendo que o ângulo APB é igual a 60°, que PA = 6 e PC = 8, a medida de PQ será

a) $\frac{24}{7}$

b) $\frac{23}{5}$

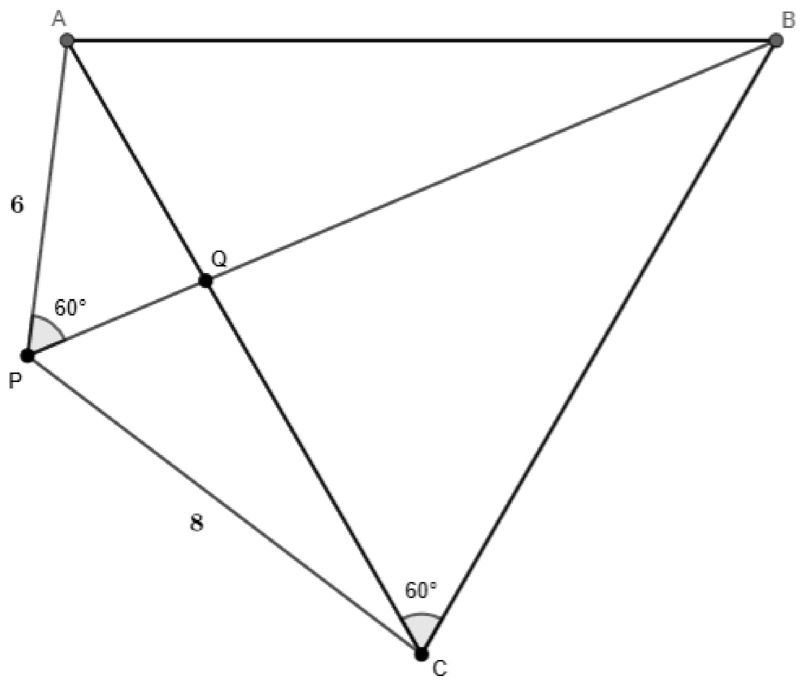
c) $\frac{19}{6}$

d) $\frac{33}{14}$

e) $\frac{11}{4}$

Comentários

Esboçando a situação proposta, temos:



O quadrilátero $ABCP$ é inscritível, pois $A\hat{C}B = A\hat{P}B$. Disso, temos que $B\hat{P}C = B\hat{A}C = 60°$.

Da trigonometria aplicada à geometria plana, temos que a área do triângulo ΔAPC, ou seja, $S(APC)$, pode ser calculada como sendo:

$$S(APC) = \frac{AP \cdot PC \cdot sen\ 120°}{2} = \frac{6 \cdot 8 \cdot sen\ 120°}{2}$$

Além disso:

$$S(APC) = S(APQ) + S(QPC)$$

$$S(APQ) = \frac{AP \cdot PQ \cdot sen\ 60°}{2} = \frac{6 \cdot PQ \cdot sen\ 60°}{2}$$

$$S(QPC) = \frac{PQ \cdot PC \cdot sen\ 60°}{2} = \frac{PQ \cdot 8 \cdot sen\ 60°}{2}$$

Como $60° + 120° = 180°$, temos $sen\ 60° = sen\ 120°$.

Por fim:

$$\frac{6 \cdot 8 \cdot sen\ 120°}{2} = \frac{6 \cdot PQ \cdot sen\ 60°}{2} + \frac{PQ \cdot 8 \cdot sen\ 60°}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 48 = 6PQ + 8PQ = 14PQ \Rightarrow PQ = \frac{48}{14} = \frac{24}{7}$$

Gabarito: "a".

40. (CN/2010)

Considere o conjunto de todos os triângulos retângulos. Sendo h a altura relativa à hipotenusa, quantos elementos, nesse conjunto, tem altura igual $\frac{\sqrt{15}}{4}h^2$?

a) Infinitos.

b) Mais de dezesseis e menos de trinta.

c) Mais de quatro e menos de 15.

d) Apenas um.

e) Nenhum.

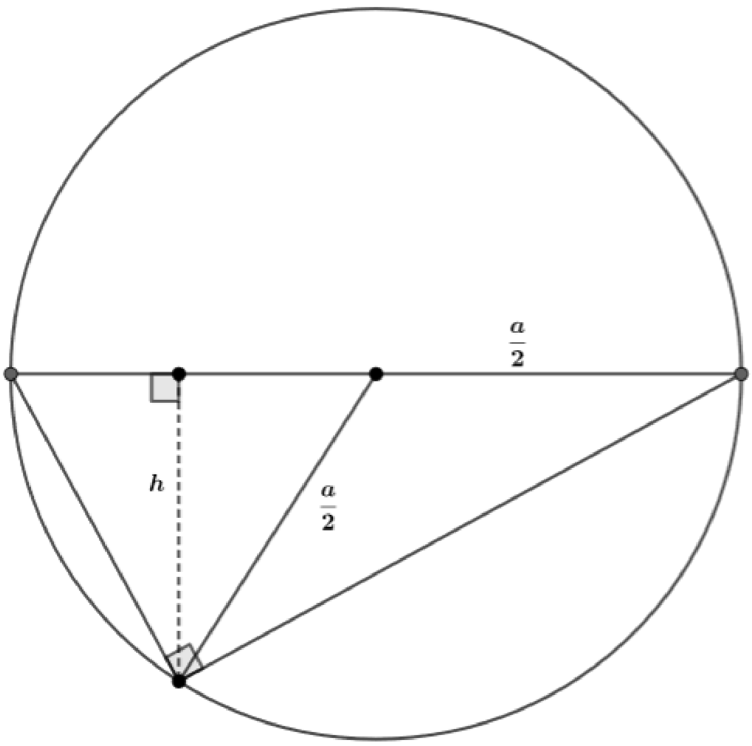
Comentários

Essa questão foi anulada no concurso e seu enunciado deve ser corrigido para altura igual a $\frac{\sqrt{15}}{4}h^2$.

Suponha que a hipotenusa tenha medida a, temos que:

$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}h^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{15}}{2}h$$

Agora observe a figura abaixo:



O conjunto de triângulos que possuem altura h tem altura no máximo $a/2$, conforme se observa na figura. O máximo ocorre quando a altura é também mediana relativa à hipotenusa.

Mas se o triângulo possui área $\frac{\sqrt{15}}{4}h^2$ e altura h, vimos que $a = \frac{\sqrt{15}}{2}h$. Isso implica:

$$\frac{a}{2} \geq h \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{15}h}{2}}{2} \geq h \Rightarrow \sqrt{15} \geq 4 \Rightarrow 15 \geq 16$$

Que é absurdo. Logo, há nenhum elemento nesse conjunto.

Gabarito: (anulada) "e".

41. (CN/2010)

Tem-se o quadrado de vértices ABCD com lados medindo k cm. Sobre AB marca-se M, de modo que $AM = \frac{BM}{3}$. Sendo N o simétrico de B em relação ao lado CD, verifica-se que MN corta a diagonal AC em P. Em relação à área ABCD a área do triângulo PBC equivale a:

a) 18%

b) 24%

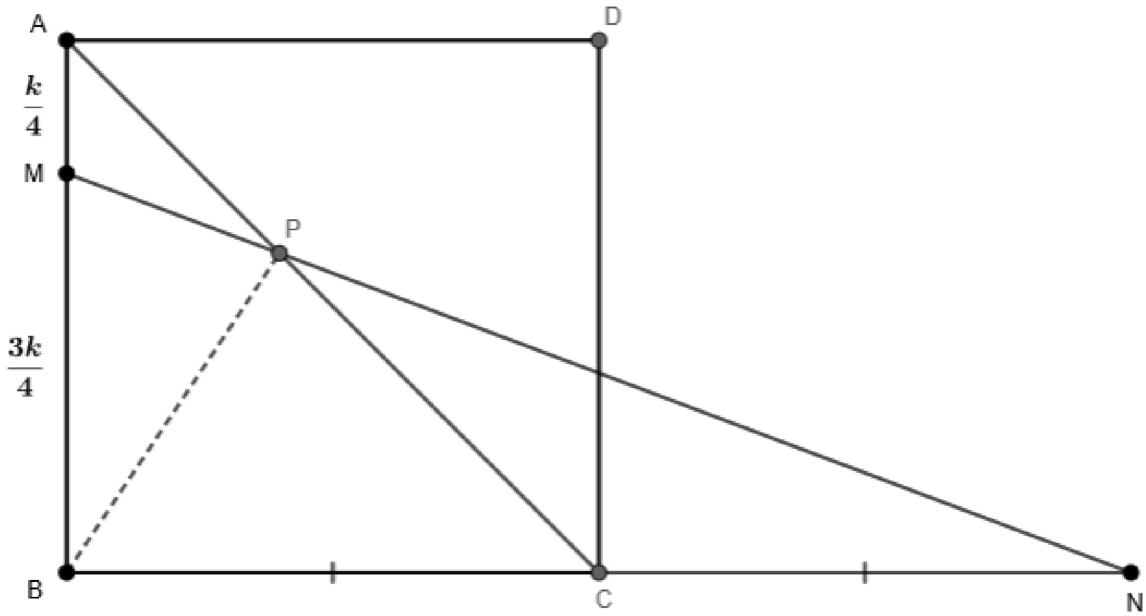
c) 27%

d) 30%

e) 36%

Comentários

Fazendo um esboço da situação, temos:



Aplicando o teorema de Menelaus ao ΔABC:

$$\frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1 \Rightarrow 2 \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{1}{3} = 1 \Rightarrow \frac{CP}{PA} = \frac{3}{2}$$

Os $\Delta APB\ e\ \Delta PBC$ possuem mesma altura. Vamos denotar:

$$S(APB) = A\ e\ S(PBC) = B$$

Disso, temos:

$$\begin{cases} A + B = \dfrac{S(ABCD)}{2} \\ \dfrac{B}{A} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Resolvendo em função de $S(ABCD)$:

$$B = \frac{3}{10}S(ABCD) \Rightarrow \frac{B}{S(ABCD)} = 0{,}3 = 30\%$$

Gabarito: "d".

---

42. (CN/2010)

Seja ABC um triângulo com lados AB = 15, AC = 12 e BC = 18. Seja P um ponto sobre o lado AC, tal que PC = 3AP. Tomando Q sobre BC, entre B e C, tal que a área do quadrilátero APQB seja igual à área do triângulo PQC, qual será o valor de BQ?

a) 3,5

b) 5

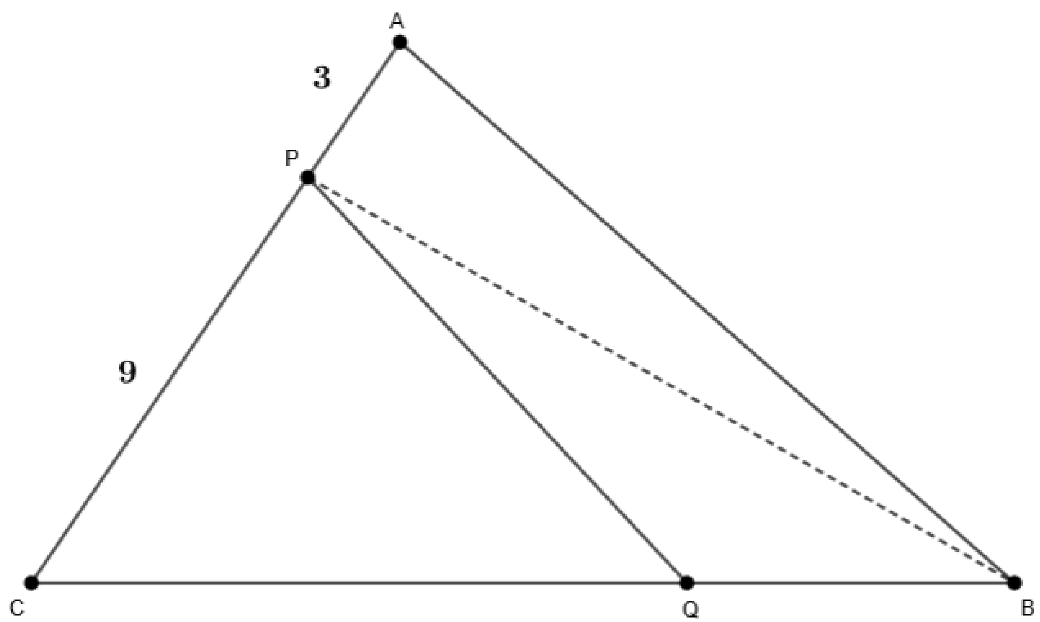
c) 6

d) 8

e) 8,5

Comentários

Fazendo um esboço da situação proposta:



A ideia é utilizar a razão entre áreas para determinar a razão entre os seguimentos $CQ\ e\ QB$.

Para simplificar, seja:

$$S(ABC) = S$$

$$S(APB) = A$$
$$S(PBQ) = B$$

Como $S(CQP) = S(APQB)$ e $S(ABC) = S(CPQ) + S(APQB)$, segue que $S(CPQ) = \frac{S}{2}$.

Além disso, como os ΔPCB e ΔAPB possuem mesma altura, a razão entre suas áreas é dada por:

$$\frac{A}{B + \frac{S}{2}} = \frac{AP}{PC} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3A - B = \frac{S}{2}\ eq.01$$

Por outro lado, $A + B = \frac{S}{2}\ eq.02$.

Combinando as equações $01\ e\ 02$, vem:

$$A = B = \frac{S}{4}$$

Veja que os ΔCPQ e ΔPQB possuem mesma altura, de modo que a razão entre suas áreas é dada por:

$$\frac{S(PBQ)}{S(CPQ)} = \frac{BQ}{QC} \Rightarrow \frac{\frac{S}{4}}{\frac{S}{2}} = \frac{BQ}{QC} \Rightarrow QC = 2BQ$$

Por fim:

$$QC + BQ = 18 \Rightarrow 2BQ + BQ = 18 \Rightarrow BQ = 6$$

Gabarito: “c”.

---

43. (CN/2009)

O triângulo de lados 0,333... cm, 0,5cm e 0,666... cm é equivalente ao triângulo isósceles de base 0,333... cm e lados congruentes medindo x centímetros cada um. Com base nos dados apresentados, é correto afirmar que x é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{151}}{24}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{\sqrt{257}}{48}$

e) $\frac{\sqrt{15}+4\sqrt{6}}{36}$

Comentários

Dois triângulos são ditos equivalentes se possuem a mesma área.

O primeiro passo é perceber que:

$$0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$$

$$0{,}5 = \frac{1}{2}$$

$$0{,}666\ldots = \frac{2}{3}$$

O semiperímetro desse triângulo é dado por:

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{2} = \frac{3}{4}$$

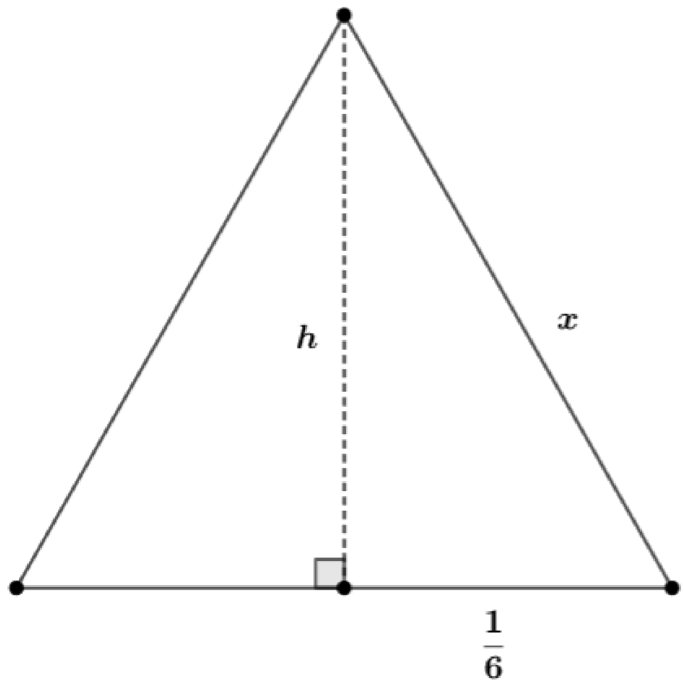
Por Heron, temos que a área desse triângulo é dada por:

$$A = \sqrt{\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\sqrt{15}}{18}$$

Tomando como base o lado $1/3$ do triângulo isósceles e lembrando da equivalência entre os triângulos:

$$\frac{h\cdot\frac{1}{3}}{2} = \frac{\sqrt{15}}{18} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

Observe a figura abaixo:



Acima está representado o triângulo isósceles com sua altura traçada, de modo que, pelo teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$h^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = x^2 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{15}}{8}\right)^2 + \frac{1}{36} = x^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{151}}{24}$$

Gabarito: “b”.

44. (CN/2009)

Sendo h_A, h_B e h_C as medidas das alturas; m_A, m_B e m_C as medidas das medianas; e b_A, b_B e b_C as medidas das bissetrizes internas de um triângulo ABC, analise as afirmativas a seguir.

I. O triângulo formado pelos segmentos $\frac{1}{h_A}, \frac{1}{h_B}$ e $\frac{1}{h_C}$ é semelhante ao triângulo ABC.

II. O triângulo formado pelos segmentos $\frac{1}{m_A}, \frac{1}{m_B}$ e $\frac{1}{m_C}$ é semelhante ao triângulo ABC.

III. O triângulo formado pelos segmentos $\frac{1}{b_A}, \frac{1}{b_B}$ e $\frac{1}{b_C}$ é semelhante ao triângulo ABC.

Pode-se concluir que

a) apenas I é sempre verdadeira.

b) apenas II é sempre verdadeira.

c) apenas III é sempre verdadeira.

d) I, II e III são sempre verdadeiras.

e) I, II e III são sempre falsas.

Comentários

Vamos analisar cada afirmação.

Afirmação I:

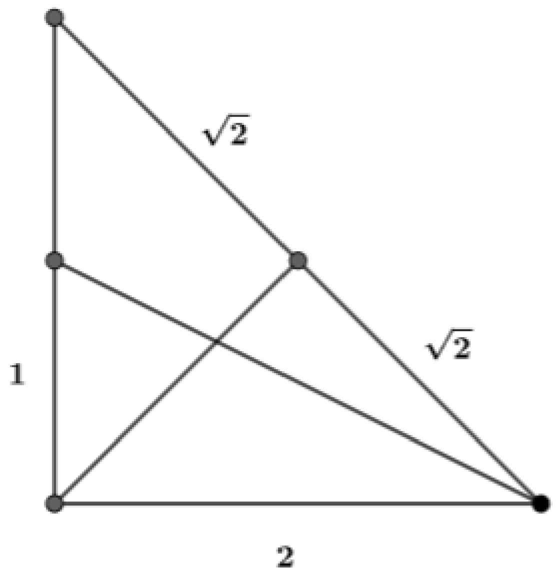
Podemos calcular a área do triângulo usando cada lado e cada altura correspondente:

$$S = \frac{ah_A}{2} = \frac{bh_B}{2} = \frac{ch_C}{2} \Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{h_A}} = \frac{b}{\frac{1}{h_B}} = \frac{c}{\frac{1}{h_C}} = 2S$$

Veja que os lados são proporcionais aos inversos das alturas, do que temos que os dois triângulos são semelhantes. Portanto, é verdadeira.

Afirmação II:

Falsa. Observe o triângulo retângulo isósceles de lados $2, 2\ e\ 2\sqrt{2}$:



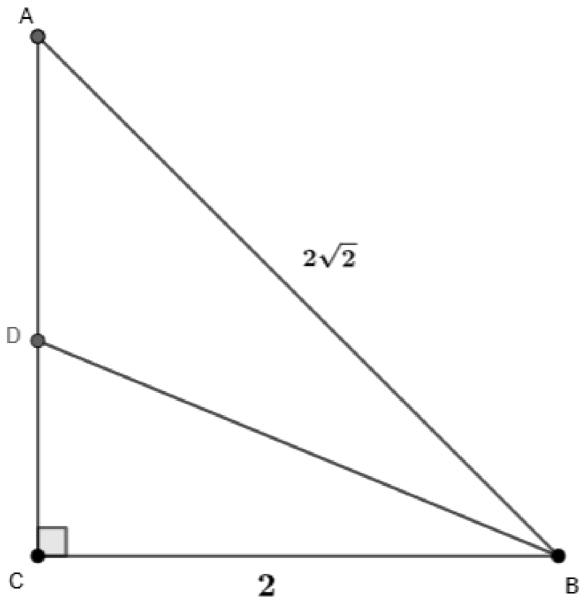
Suas medianas valem $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{2}$. Veja que:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Do que temos que o triângulo formado pelos inversos das medianas não é retângulo, logo não é semelhante ao triângulo original.

Afirmação III:

A ideia neste item é olhar novamente para o triângulo retângulo de lados $2, 2\ e\ 2\sqrt{2}$, pois podemos calcular facilmente suas bissetrizes:



A bissetriz relativa à hipotenusa tem medida $\sqrt{2}$, pois também é mediana relativa à hipotenusa.

Do teorema da bissetriz interna, temos que $\frac{DA}{CD} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow DA = \sqrt{2}CD$. Além disso:

$$CD + DA = CA = 2 \Rightarrow CD + \sqrt{2}CD = 2 \Rightarrow CD = 2(\sqrt{2} - 1)$$

Usando Pitágoras no ΔDCB:

$$DB^2 = 2^2 + \left[2\left(\sqrt{2} - 1\right)\right]^2 \Rightarrow DB = 2\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Como ele é isósceles, sua outra bissetriz também vale $2\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

Observe que $\frac{1}{2\sqrt{4-2\sqrt{2}}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ e:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}\right)^2 < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Do que segue que o triângulo formado pelos inversos das bissetrizes não é retângulo e, portanto, não pode ser semelhante ao triângulo original.

Gabarito: "a".

45. (CN/2009)

Sobre o lado maior de um retângulo de base 1 e altura 2 constrói-se um retângulo de base 2 e altura 3; sobre o maior lado desse último, constrói-se um retângulo de base 3 e altura 4; e assim sucessivamente, até se construir o retângulo de base 99 e altura 100. Com quantos zeros termina o produto das áreas de cada um desses retângulos?

a) 39

b) 40

c) 46

d) 78

e) 80

Comentários

A área de um retângulo é o produto de sua base por sua altura. Disso, temos que o produto das áreas de todos os retângulos é dado por:

$$(1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 4) \cdot \ldots \cdot (98 \cdot 99) \cdot (99 \cdot 100)$$

Observe que isso pode ser reescrito como:

$$\frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 100)^2}{100}$$

Para que se obtenha a quantidade de zeros na terminação do número, basta contar a quantidade de fatores 10 que esse número possui. Veja ainda que cada fator $10 = 2 \cdot 5$. Mas a quantidade de fatores 2 deve ser superior a quantidade de fatores 5, de modo que basta contarmos a quantidade de fatores 5 que esse número possui.

Para contar a quantidade de fatores 5 dos números de 1 a 100 devemos fazer:

$$\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20$$

$$\left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor = 4$$

Logo, temos 24 fatores 5 de 1 a 100. Portanto, no produto de 1 a 100, devemos ter 24 zeros que, ao quadrado, resulta em 48 fatores.

Mas o nosso número está divido por 100, do que temos que subtrair dois fatores 10, restando:

$$48 - 2 = 46$$

Gabarito: "c".

46. (CN/2009)

A área de um quadrado de 5 cm de lado, na unidade u definida como sendo a área de um círculo de raio 1 cm, é:

a) exatamente 25.

b) exatamente 12,5.

c) aproximadamente 8.

d) aproximadamente 6.

e) aproximadamente 5.

Comentários

Em centímetros quadrados, a área do quadrado é dada por:

$$5cm \cdot 5cm = 25cm^2$$

A unidade u é definida por:

$$u = \pi \cdot 1^2 cm^2 = \pi\ cm^2$$

Dessa forma, a quantidade de unidades u contidas no quadrado é dada por:

$$\frac{25}{\pi} = 7{,}95 \approx 8\,u$$

Gabarito: "c".

---

47. (CN/2008)

Seja ABC um triângulo retângulo com catetos AC = 12 e AB = 5. A bissetriz interna traçada de C intersecta o lado AB em M. Sem

do I o incentro de ABC, a razão entre as áreas de BMI e ABC é:

a) $\frac{1}{50}$

b) $\frac{13}{60}$

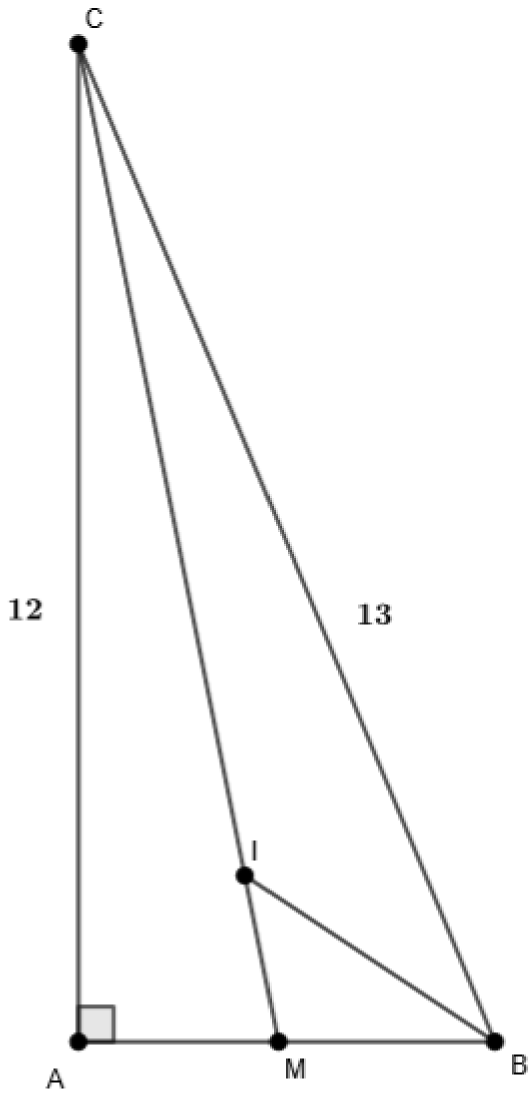
c) $\frac{1}{30}$

d) $\frac{13}{150}$

e) $\frac{2}{25}$

Comentários

Fazendo um esboço da situação:



Pelo teorema de Pitágoras:

$$CA^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow 12^2 + 5^2 = BC^2 \Rightarrow BC = 13$$

Do teorema da bissetriz interna:

$$\frac{CA}{AM} = \frac{BC}{MB} \Rightarrow MB = \frac{13}{12}AM$$

$$AM + MB = AM + \frac{13}{12}AM = 5 \Rightarrow AM = \frac{12}{5} \Rightarrow MB = \frac{13}{5}$$

A área do ΔABC:

$$S(ABC) = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$$

A área do ΔCAM:

$$S(CAM) = \frac{12 \cdot \frac{12}{5}}{2} = \frac{144}{10}$$

Por simplicidade, seja $S(MBI) = A$.

Do teorema da bissetriz interna aplicada ao ΔCMB:

$$\frac{BM}{MI} = \frac{BC}{CI} \Rightarrow \frac{CI}{MI} = \frac{BC}{BM} = \frac{13}{\frac{13}{5}} = 5$$

Como os ΔMBI e ΔIBC possuem mesma altura relativa ao segmento CM, temos que:

$$\frac{S(MBI)}{S(IBC)} = \frac{A}{S(IBC)} = \frac{MI}{CI} = \frac{1}{5} \Rightarrow S(IBC) = 5A$$

Por fim:

$$S(MBI) + S(IBC) = S(CMB) = S(ABC) - S(CAM) = 30 - \frac{144}{10}$$

Ou seja:

$$A + 5A = 30 - \frac{144}{10} \Rightarrow A = 2{,}6$$

Queremos:

$$\frac{A}{S(ABC)} = \frac{2{,}6}{30} = \frac{26}{300} = \frac{13}{150}$$

Gabarito: "d".

---

48. (CN/2008)

Duas tangentes a uma circunferência, de raio igual a dois centímetros, partem de um mesmo ponto P e são perpendiculares entre si. A área, em centímetros quadrados, da figura limitada pelo conjunto de todos os pontos P do plano, que satisfazem as condições dadas, é um número entre

a) vinte e um e vinte e dois.

b) vinte e dois e vinte e três.

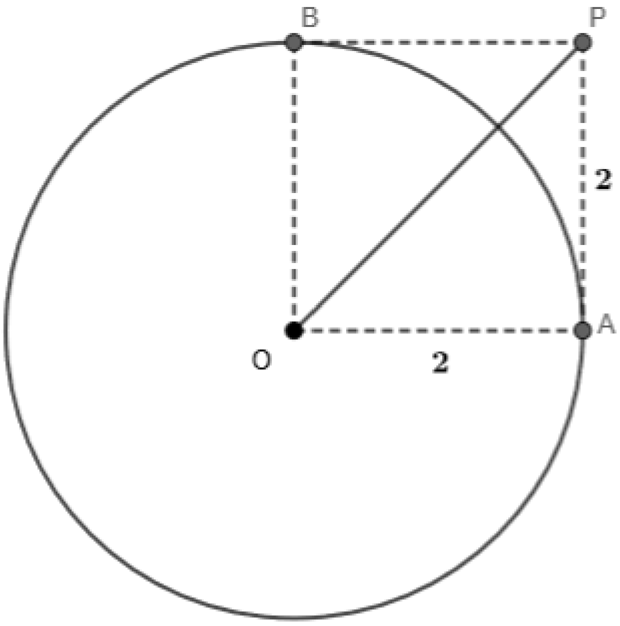
c) vinte e três e vinte e quatro.

d) vinte e quatro e vinte e cinco.

e) vinte e cinco e vinte e seis.

Comentários

O primeiro passo é fazer um esquema representando a situação:



Observe que os pontos P que satisfazem o enunciado estão a uma distância fixa OP do centro da circunferência. Isso significa que o lugar geométrico dos pontos P é uma circunferência de raio:

$$OP^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow OP = 2\sqrt{2}\ cm$$

Por fim, a área da figura é:

$$\pi \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8\pi = 8 \cdot 3{,}14 = 25{,}12\ cm^2$$

Logo, ela está entre $25\ e\ 26$.

Gabarito: "e".

---

49. (CN/2007)

Com a "ponta seca" de um compasso, colocada no centro de um quadrado de lado 2, traça-se uma circunferência de raio r. Observa-se que cada arco da circunferência, externo ao quadrado, tem o dobro do comprimento de cada arco interno. Usando-se raiz quadrada de 3 igual a 1,7 e $\pi = 3$, qual a área da região intersecção do quadrado e do círculo, assim determinado?

a) 2,8

b) 3,0

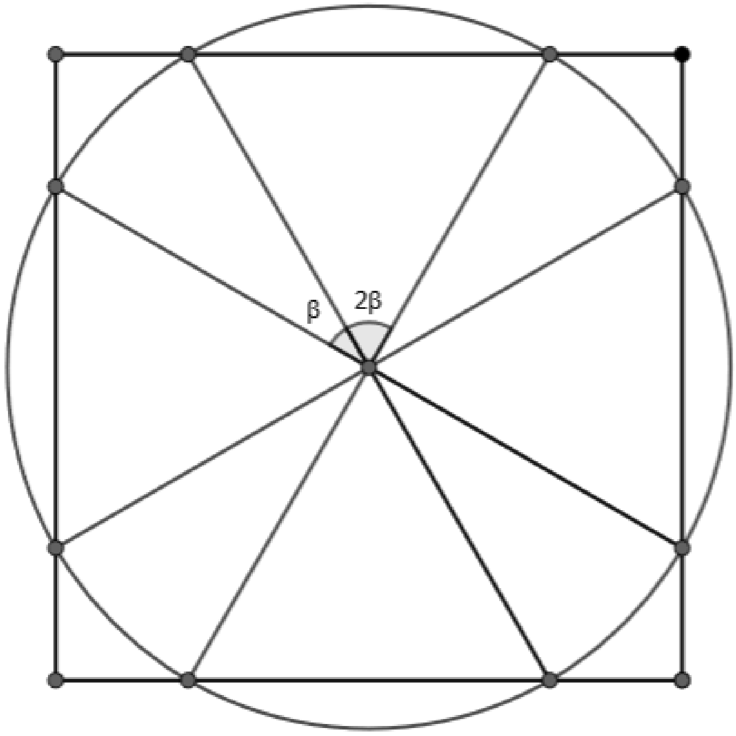
c) 3,2

d) 3,4

e) 3,6

Comentários

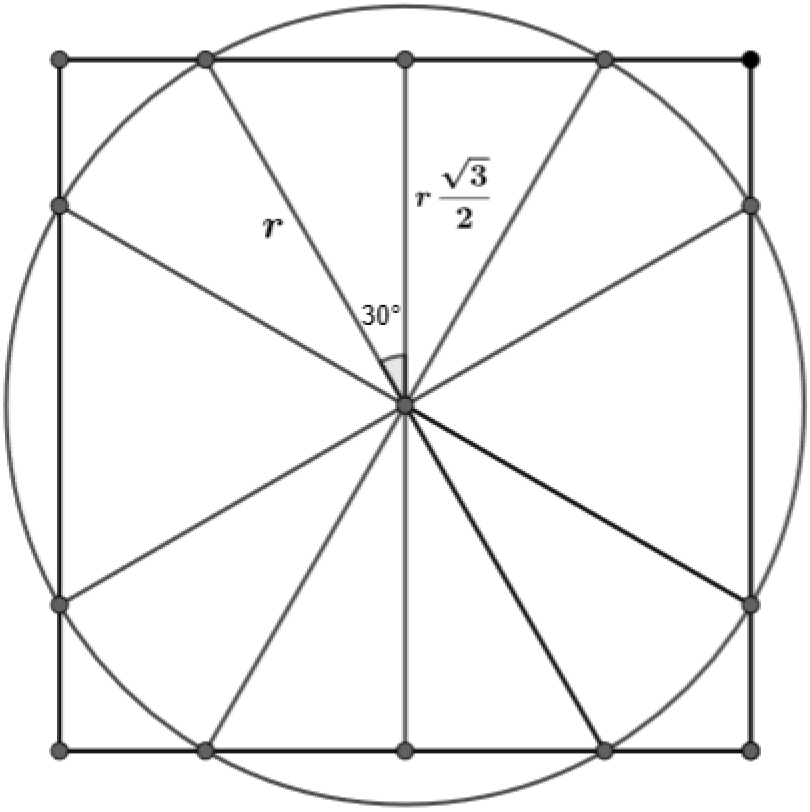
Fazendo um esquema da situação, temos:



Pela figura acima, percebe-se que há 4 ângulos iguais a β e 4 iguais a 2β, formando um ângulo de $360°$. Disso, temos:

$$4\beta + 4(4\beta) = 360° \Rightarrow 12\beta = 360° \Rightarrow \beta = 30°$$

O próximo passo é encontrar o raio da circunferência. Para isso, observe a figura abaixo:



Nela, podemos observar que o lado do quadrado é igual a duas vezes a altura do triângulo destacado na figura:

$$2\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Perceba ainda que a área interna a ambos constitui-se de 4 setores circulares de $30°$ e 4 triângulos de ângulo $60°$ entre os lados de medida r. Logo:

$$4 \cdot \left(\frac{30}{360} \cdot \pi r^2\right) = r^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

Já que $\pi = 3$.

Além disso:

$$4 \cdot \left(\frac{r \cdot r \cdot sen\ 60°}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6{,}8}{3}$$

Já que $\sqrt{3} = 1{,}7$.

Por fim, basta somar as áreas:

$$\frac{4}{3} + \frac{6{,}8}{3} = \frac{10{,}8}{3} = 3{,}6$$

Gabarito: "e".

---

50. (CN/2007)

Deseja-se revestir uma área retangular, de 198 cm de comprimento e 165 cm de largura, com um número exato de lajotas quadradas, de tal forma que a medida do lado dessas lajotas, expressa por um número inteiro em cm, seja a maior possível. Quantas lajotas deverão ser usadas?

a) 27

b) 30

c) 33

d) 36

e) 38

Comentários

Do estudo da geometria plana, a área retangular é calculada por:

$$198 \cdot 165$$

Queremos lajotas quadradas de lados inteiros. Seja l o lado dessa lajota. Sua área é dada por l^2.

Dessa forma, devemos fatorar a área para descobrir os possíveis lados que essa lajota pode ter.

Fatorando o número $198 \cdot 165$:

$$2 \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

Para termos o maior lado do quadrado possível, devemos agrupar a maior quantidade de fatores com expoente 2, isto é:

$$(3 \cdot 11)^2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3$$

Observe que o lado da lajota deve ser $3 \cdot 11 = 33$, de modo que o número de lajotas é dado por $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$.

Gabarito: "b".

---

51. (CN/2007)

Dado um triângulo ABC de área 72, sobre a mediana AM = 12, traçam-se os segmentos AQ = 3 e QP = 6. Sabendo-se que E é o ponto de intersecção entre as retas BP e QC, qual é a área do triângulo QPE?

a) 6

b) 8

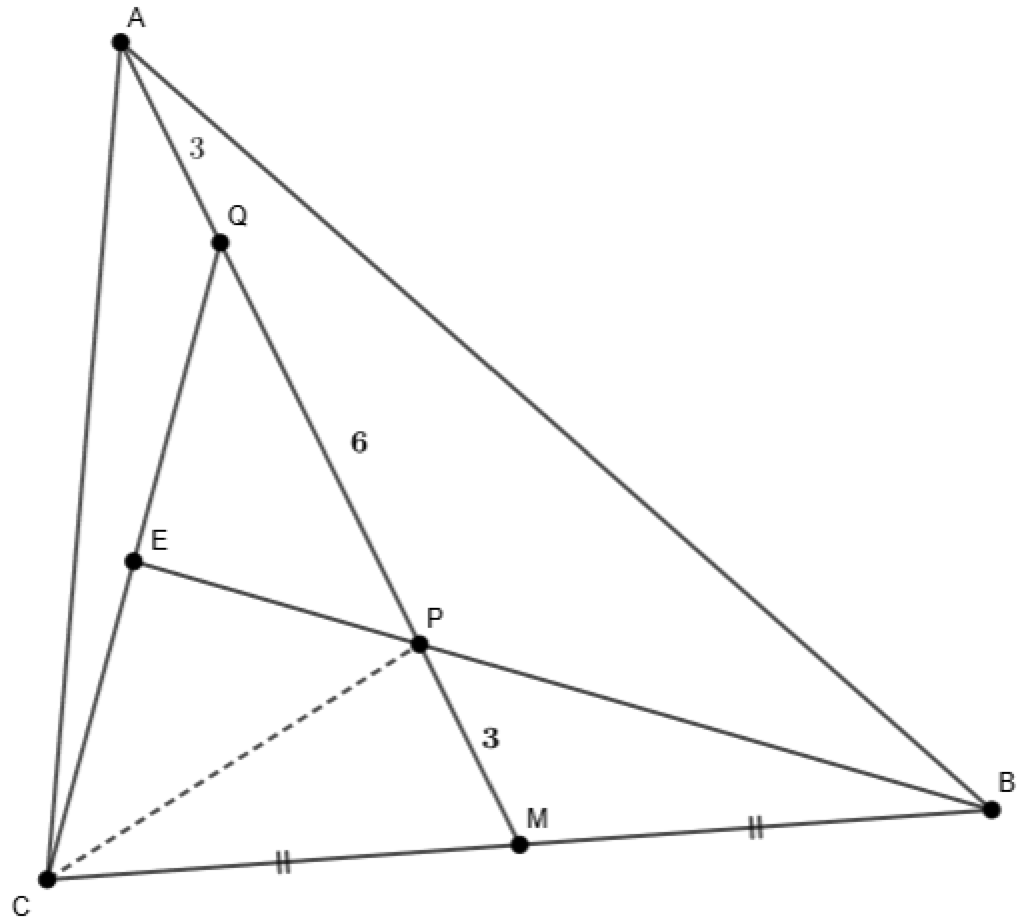
c) 9

d) 12

e) 18

Comentários

Veja a situação representada abaixo:



Vamos denotar a área de um triângulo como segue:

$$\acute{A}rea\ do\ \Delta ABC = S(ABC)$$

Como $\Delta ACM\ e\ \Delta AMB$ possuem mesma altura e bases iguais, suas áreas são iguais. Mas:

$$S(ACM) + S(AMB) = 72 \Rightarrow A(ACM) = S(AMB) = 36$$

Aplicando o teorema de Menelaus ao triângulo QCM, temos:

$$\frac{BC}{BM} \cdot \frac{MP}{PQ} \cdot \frac{QE}{EC} = 1 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{QE}{EC} = 1 \Rightarrow QE = EC$$

Como os triângulos $MQC\ e\ QCA$ possuem mesma altura em relação à base AM, temos que suas áreas obedecem a relação:

$$\frac{S(MQC)}{S(QCA)} = \frac{MQ}{QA} = \frac{9}{3} \Rightarrow S(MQC) = 3S(QCA)$$

Mas $S(MQC) + S(QCA) = S(ACM) = 36 \Rightarrow 3S(QCA) + S(QCA) = 36 \Rightarrow S(QCA) = 9$

Ou seja, $S(MQC) = 27$.

Os triângulos $ABP\ e\ PBM$ possuem mesma altura em relação à base AM, perceba que a razão entre suas áreas e a soma entre suas áreas é a mesma dos triângulos MQC e QCA, de modo que:

$$S(PBM) = 9\ e\ S(APB) = 27$$

Além disso, os triângulos $CPM\ e\ PMB$ possuem mesma altura em relação à base BC e bases iguais, de modo que suas áreas também são iguais:

$$S(CPM) = S(PBM) = 9$$

Veja que:

$$S(QCP) = S(QCM) - Q(CPM) = 27 - 9 = 18$$

Por fim, veja que os triângulos $QPE\ e\ EPC$ possuem mesma base e mesma altura em relação à base CQ, de modo que suas áreas são iguais. Mas:

$$S(QEP) + S(EPC) = 18 \Rightarrow S(EPC) = S(QEP) = \frac{18}{2} = 9$$

Gabarito: "c".

---

52. (CN/2007)

Um hexágono regular ABCDEF está inscrito em uma circunferência de raio 6. Traçam-se as tangentes à circunferência nos pontos A, B, D e F, obtendo-se, assim, um quadrilátero circunscrito a essa circunferência. Usando-se 1,7 para raiz quadrada de 3, qual é o perímetro desse quadrilátero?

a) 54,4

b) 47,6

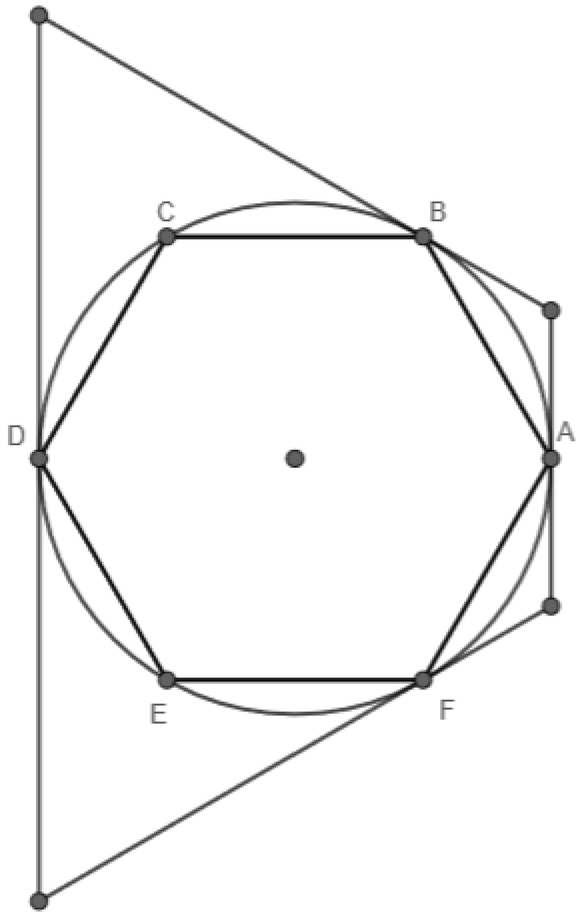
c) 40,8

d) 34,0

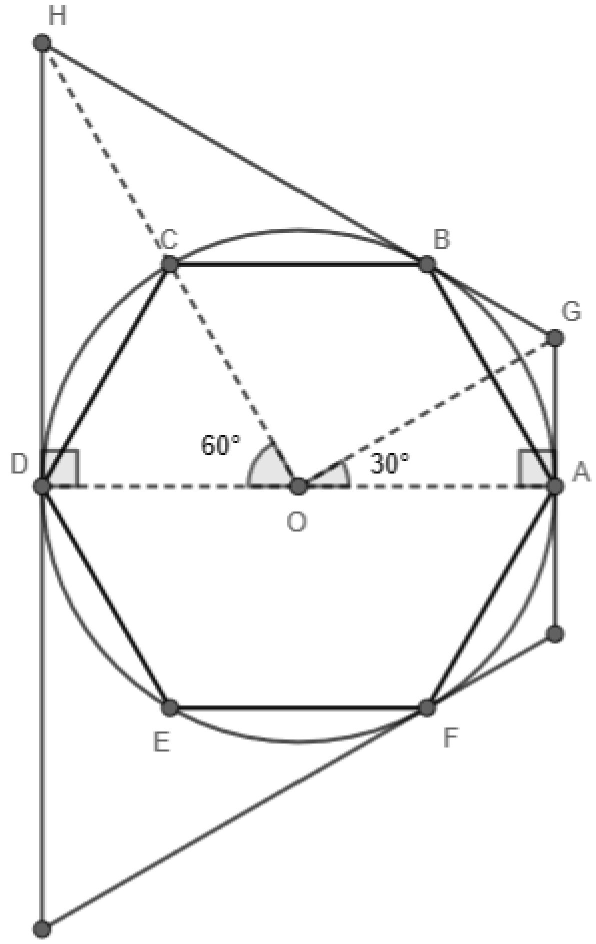
e) 30,6

Comentários

Fazendo um esboço da situação, temos:



Para facilitar nossos cálculos, vamos traçar o segmento AD, que representa um diâmetro da circunferência e um eixo de simetria para o quadrilátero:



Pela simetria, somente precisamos calcular os seguimentos no semi-plano superior relativo ao segmento AD. Pelo teorema do bico:

$$AG = GB \ e \ BH = HD$$

Da trigonometria aplicada ao ΔOAG e ΔODH:

$$\frac{GA}{OA} = tg(30°) \Rightarrow GA = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{HD}{OD} = tg(60°) \Rightarrow HD = 6\sqrt{3}$$

Dai $BH = HD = 6\sqrt{3} \ e \ AG = GB = 2\sqrt{3}$. Pela simetria, temos que o perímetro do quadrilátero é dado por:

$$2 \cdot (2 \cdot GA + 2 \cdot HD) = 4 \cdot (GA + HD) = 4 \cdot \left(2\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\right) = 4 \cdot 8\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$$

Como $\sqrt{3} = 1{,}7$:

$$32 \cdot 1{,}7 = 54{,}4$$

Gabarito: "a".

53. (CN/2006)

Qual é o perímetro de um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência de raio unitário, sabendo-se que foi construído utilizando-se, pelo menos uma vez e somente, os lados do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular inscritos nessa circunferência?

a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$

b) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}+1$

c) $2\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$

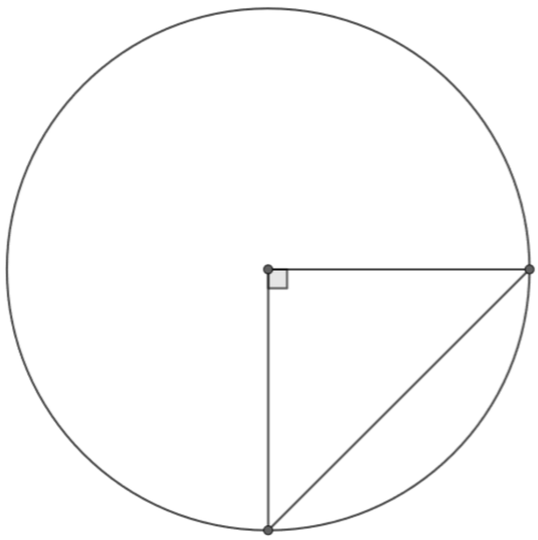
d) $\sqrt{3}+2\sqrt{2}+2$

e) $2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1\right)$

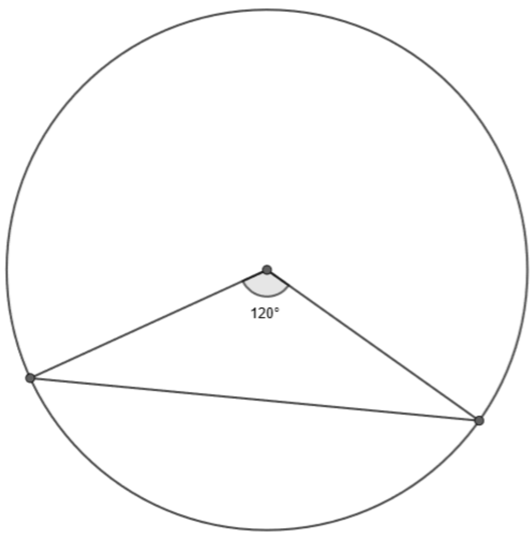
Comentários

Podemos pensar nesse problema como um quebra cabeça angular. As peças disponíveis são:

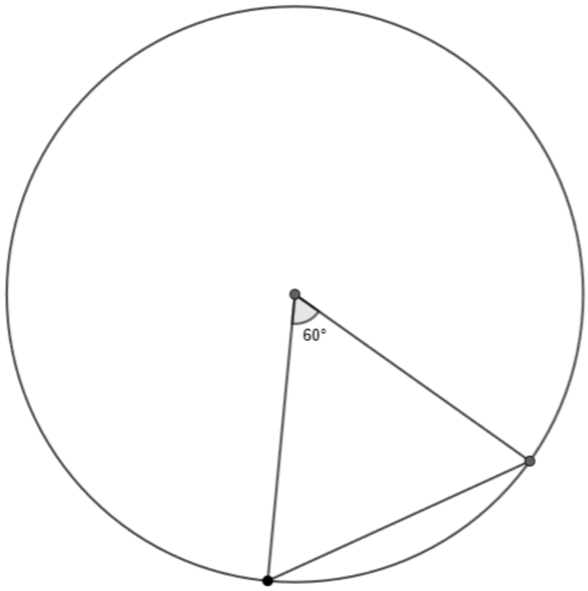
Lado do quadrado:



Lado do triângulo equilátero:



Lado do hexágono regular:



Veja que temos que ter cada peça pelo menos uma vez. Note que a soma dos ângulos centrais da peça correspondente ao lado do triângulo e do hexágono resulta em um ângulo de $180°$. Como temos que ter pelo menos uma vez a peça correspondente ao lado do quadrado, que adiciona um ângulo de $90°$ ao ângulo central, a única forma de completar $360°$ é se ela aparecer duas vezes.

Daí, seu perímetro corresponde à uma vez o lado do triângulo ($\sqrt{3}$), uma vez o lado do hexágono (1) e a duas vezes o lado do quadrado ($\sqrt{2}$):

$$1 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

Gabarito: “b”.

---

54. (CN/2006)

Em um triângulo retângulo ABC, o cateto AC e a hipotenusa BC medem, respectivamente, 10 e 40. Sabe-se que os segmentos CX, CY e CZ dividem o ângulo ACB em quatro ângulos de medidas iguais, e que AX, XY, YZ e ZB são segmentos consecutivos contidos internamente no segmento

AB. Se S_1, S_2, S_3 e S_4 e são, respectivamente, as áreas dos triângulos CAX, CXY, CYZ e CZB, qual será o valor da razão $\frac{S_1S_3}{S_2S_4}$

a) 0,25

b) 0,5

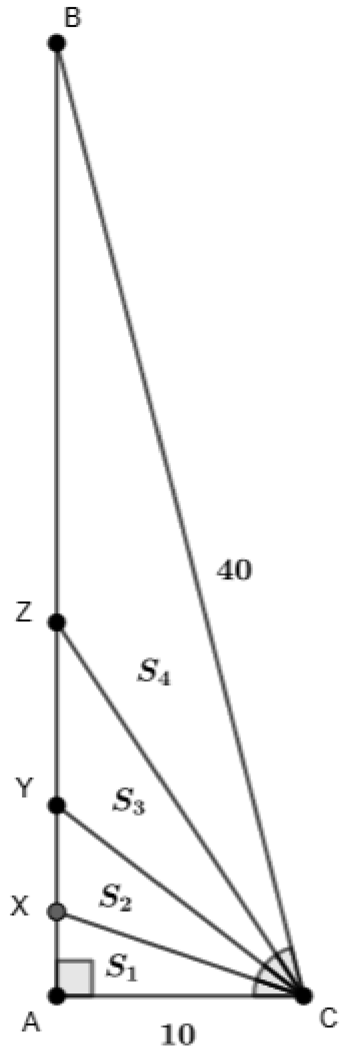
c) 0,75

d) 1

e) 1,25

Comentários

Observe a figura abaixo:



Os triângulos $CAX, CXY, CYZ \text{ e } CZB$ possuem mesma altura relativa à base AB. Disso, temos as seguintes relações entre áreas:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{XA}{YX}$$

$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{ZY}{ZB}$$

Do teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{XA}{YX} = \frac{10}{CY}$$

$$\frac{ZY}{ZB} = \frac{CY}{40}$$

Logo, temos:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{10}{CY} \text{ e } \frac{S_3}{S_4} = \frac{CY}{40}$$

Multiplicando ambas as equações:

$$\frac{S_1S_3}{S_2S_4} = \frac{10}{CY} \cdot \frac{CY}{40} = 0{,}25$$

Gabarito: “a”.

---

55. (CN/2006)

Em lugar do quadrado de lado igual a 1 (um) centímetro, tomou-se como unidade de área o triângulo equilátero de lado igual a 1 (um) centímetro. Qual será, nessa nova unidade, o número que expressará a área de um retângulo de base igual a 6 (seis) centímetros e altura igual a 4 (quatro) centímetros?

a) 24

b) $6\sqrt{3}$

c) $18\sqrt{3}$

d) $24\sqrt{3}$

e) $32\sqrt{3}$

Comentários

A área de um triângulo equilátero pode ser facilmente calculada com a ajuda da trigonometria aplicada à geometria plana. Como seu lado vale 1 e o ângulo entre eles é $60°$, sua área será:

$$S = \frac{1 \cdot 1 \cdot sen\ 60°}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ cm^2$$

Essa área é a nova unidade de medida de área. Para que seja feita a conversão, primeiramente devemos calcular a área do retângulo nas unidades anteriores:

$$6\ cm \cdot 4\ cm = 24\ cm^2$$

A conversão é feita dividindo-se a área pela unidade em que se quer representá-la:

$$\frac{24}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = 32\sqrt{3}$$

Gabarito: “e”.

---

56. (CN/2005)

Um polígono convexo de n lados tem três dos seus ângulos iguais a 83°, 137° e 142°. Qual é o menor valor de n para que nenhum dos outros ângulos desse polígono seja menor que 121°?

a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

e) 10

Comentários

Como o polígono é convexo, a soma dos seus ângulos internos é dada por:

$$180°(n-2) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$$

Temos que $\alpha_1 = 83°, \alpha_2 = 137°\ e\ \alpha_3 = 142°$. Disso:

$$180(n-2) = 83 + 137 + 142 + \alpha_4 + \cdots + a_n = 362 + \alpha_4 + \cdots + \alpha_n$$

Cada $\alpha_i \geq 121°$, temos que:

$$\alpha_4 + \cdots + \alpha_n \geq 121(n-3)$$

Logo:

$$180(n-2) - 362 \geq 121(n-3) \Rightarrow 59n \geq 359 \Rightarrow n \geq 6{,}084$$

Como n é inteiro, n é no mínimo 7.

Gabarito: "b".

---

57. (CN/2005)

O número de diagonais de um polígono regular P inscrito em um círculo K é 170.

Logo:

a) o número de lados de P é ímpar.

b) P não tem diagonais passando pelo centro de K.

c) o ângulo externo de P mede 36°.

d) uma das diagonais de P é o lado do pentágono regular inscrito em K.

e) o número de lados de P é múltiplo de 3.

Comentários

O número de diagonais de um polígono convexo é dada por:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 170 \Rightarrow n(n-3) = 20 \cdot 17$$

Assim, temos que $n = 20$.

Vamos resolver por eliminação.

O número de lados de P é par, logo não pode ser o item a.

Como o número de lados é par, ele possui uma diagonal passando pelo centro (simetria), logo não pode ser o item b.

A soma dos ângulos internos do polígono é:

$$180°(20-2) = 18^2 \cdot 10$$

Cada ângulo mede, portanto:

$$\frac{18^2 \cdot 10}{20} = 162°$$

Assim, seu ângulo externo mede $180° - 162° = 18°$, logo não pode ser o item c.

O número de lados é 20, que não é múltiplo de 3, logo não pode ser o item e.

A resposta é, portanto, o item d.

Para confirmar a resposta, basta ver que $20 = 5 \cdot 4$, ou seja, o ângulo central $\frac{360°}{20}$ correspondente a cada lado desse polígono pode ser multiplicado por 4 para gerar o ângulo central do pentágono regular, de modo que uma das diagonais é um lado do pentágono (basta pegar 4 ângulos centrais).

Gabarito: "d".

---

58. (CN/2005)

Um círculo α de centro num ponto A e raio $2\sqrt{3}$ é tangente interior, num ponto B, a um círculo β de centro num ponto O e raio $6\sqrt{3}$. Se o raio OC é tangente a α num ponto D, a medida da área limitada pelo segmento DC e os menores arcos BC de β e BD de α é igual a

a) $4\pi - 3\sqrt{3}$

b) $5\pi - 4\sqrt{3}$

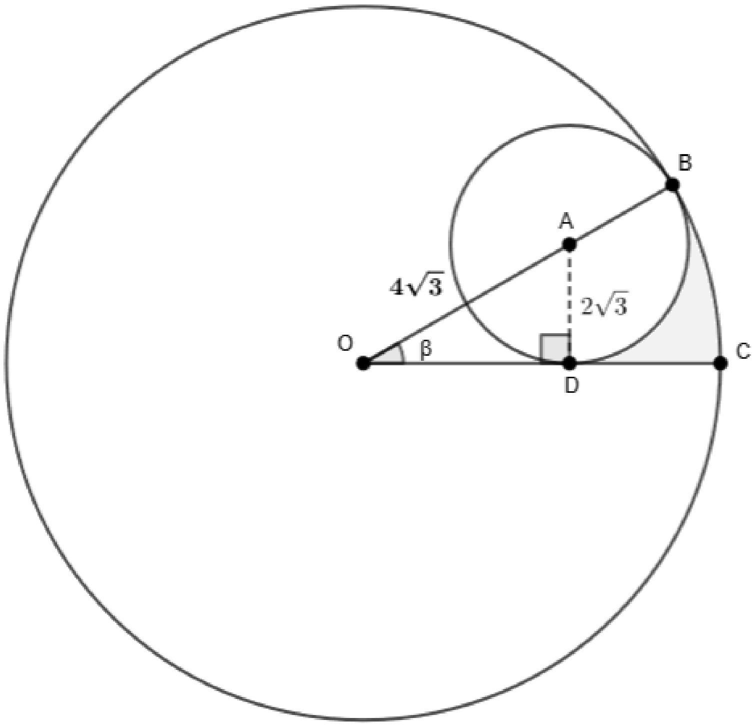
c) $4\pi - 6\sqrt{3}$

d) $5\pi - 6\sqrt{3}$

e) $5\pi - 5\sqrt{3}$

Comentários

Fazendo um esquema da situação, temos:



Queremos a área hachurada na figura acima. Observe que ela corresponde à área do setor circular correspondente ao arco BC na circunferência maior subtraída da área do ΔOAD e do setor correspondente ao arco BD na circunferência menor.

Vamos calcular cada um deles.

Antes disso, precisamos saber a medida do ângulo β. Para isso, veja que:

$$sen\ \beta = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30°$$

Setor correspondente ao arco BC na circunferência maior:

$$\frac{30}{360} \cdot \pi \cdot \left(6\sqrt{3}\right)^2 = 9\pi$$

Setor correspondente ao arco BD na circunferência menor:

Veja que o ângulo subentendido por esse arco na circunferência menor é de:

$$180° - 60° = 120°$$

Daí:

$$\frac{120}{360} \cdot \pi \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4\pi$$

Área do ΔOAD:

$$\frac{OD \cdot DA}{2} = \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

Por fim, a área pedida:

$$9\pi - 4\pi - 6\sqrt{3} = 5\pi - 6\sqrt{3}$$

Gabarito: “d”.

59. (CN/2005)

Três dos quatro lados de um quadrilátero circunscritível são iguais aos lados do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular circunscritos a um círculo de raio 6. Qual é a medida do quarto lado desse quadrilátero, sabendo-se que é o maior valor possível nas condições dadas?

a) $16\sqrt{3} - 12$

b) $12\sqrt{3} - 12$

c) $8\sqrt{3} + 12$

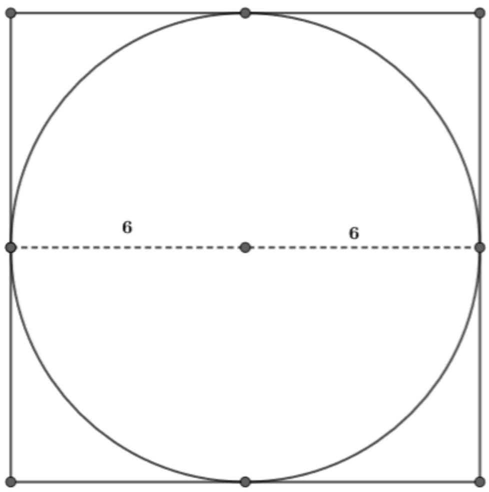
d) $12\sqrt{3} + 8$

e) $16\sqrt{3} - 8$

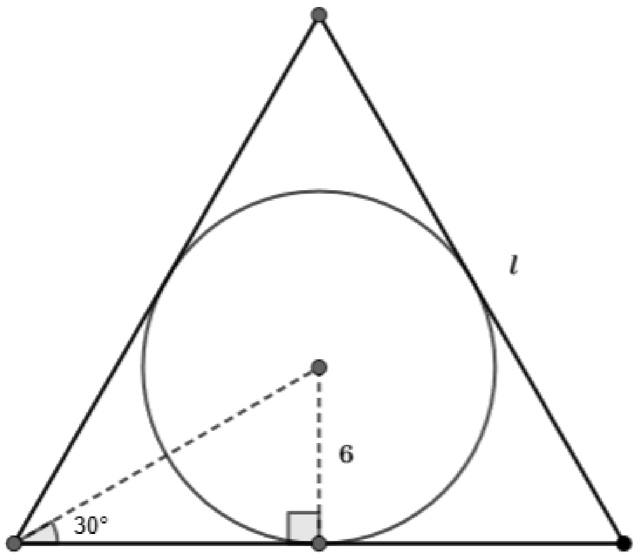
Comentários

O primeiro passo é determinar a medida de cada um dos lados que compõem o quadrilátero.

O quadrado possui, naturalmente, lado igual ao diâmetro da circunferência, veja:

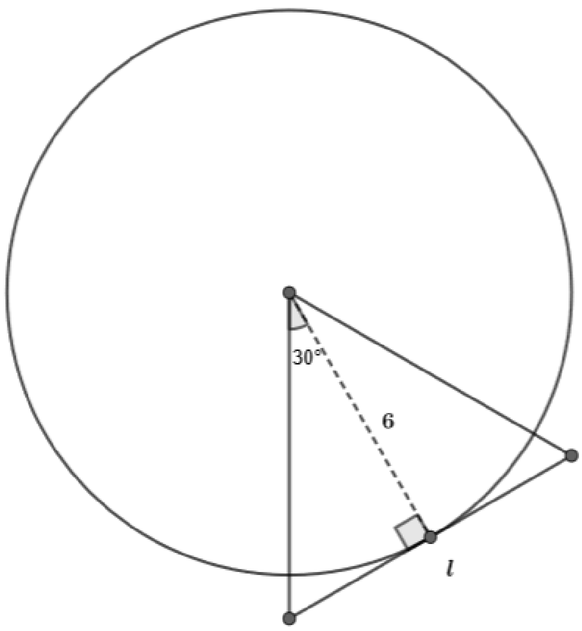


O lado do triângulo pode ser calculado com base no seguinte esquema:



$$\frac{l}{2} = 6\cot 30° \Rightarrow l = 12\sqrt{3}$$

O lado do hexágono, por sua vez:



Veja que:

$$\frac{l}{2} = 6tg(30°) \Rightarrow l = 4\sqrt{3}$$

Quando um quadrilátero é circunscritível temos que a soma dos lados opostos são iguais. Já possuímos três lados desse quadrilátero e seja o quarto lado de medida desconhecida x.

Para que ele seja o maior possível, o lado oposto a ele deve ser o menor possível, logo:

$$x + 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3} + 12 \Rightarrow x = 8\sqrt{3} + 12$$

Gabarito: "c".

60. (CN/2004)

Considere o triângulo escaleno ABC e os pontos P e Q pertencentes ao plano de ABC e exteriores a esse triângulo. Se as medidas dos ângulos PAC e QBC são iguais; as medidas dos ângulos PCA e QCB são iguais; M é o ponto médio de AC; N é o ponto médio de BC; S_1 é a área do triângulo PAM; S_2 é a área do triângulo QBN; S_3 é a área do triângulo PMC; e S_4 é área do triângulo QNC, analise as afirmativas:

I. S_1 está para S_4, assim como S_3 está para S_2.

II. S_1 está para S_2, assim como $(PM)^2$ está para $(QN)^2$.

III. S_1 está para S_3, assim como S_2 está para S_4.

Logo pode-se concluir, corretamente, que

a) apenas a afirmativa 1 é verdadeira.

b) apenas as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.

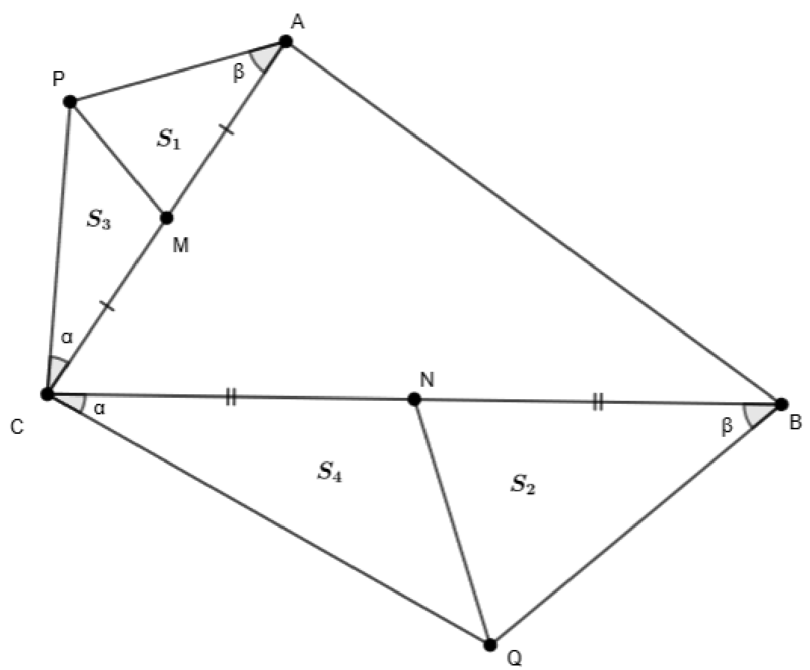
c) apenas as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

d) apenas as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.

e) as afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

Comentários

Representando a situação por um diagrama, temos:



Primeiramente, veja que os ΔPAC e ΔBCQ são semelhantes pelo caso AAA.

Além disso, como os ΔPMC e ΔPMA possuem mesma altura e mesma base, suas áreas são iguais, isto é:

$$S_1 = S_3$$

Pelo mesmo motivo, temos que:

$$S_2 = S_4$$

Dividindo essas equações membro a membro, temos:

$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{S_3}{S_2}$$

Disso, temos que a afirmação I é verdadeira.

Da semelhança entre os triângulos PAC e BCQ, segue a semelhança dos triângulos PAM e NBQ pelo caso LLL. Disso, temos que a razão entre suas áreas é igual ao quadrado razão de semelhança entre os lados:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{PM}{NQ}\right)^2 = \frac{PM^2}{NQ^2}$$

Logo, a afirmação II também é verdadeira.

Por fim, temos que:

$$S_1 = S_3 \Rightarrow \frac{S_1}{S_3} = 1$$

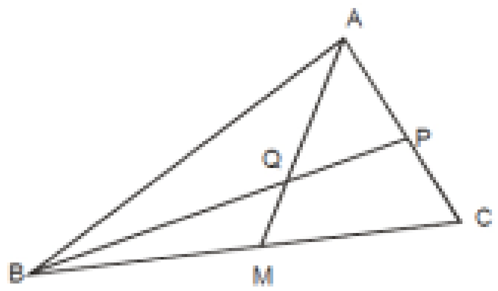
$$S_2 = S_4 \Rightarrow \frac{S_2}{S_4} = 1$$

O que torna a afirmação III verdadeira.

Gabarito: "e".

---

61. (CN/2004)



Na figura acima AM e BP são cevianas do triângulo ABC de área S. Sendo AP = 2PC e AQ = 3QM, qual o valor da área do triângulo determinado pelos pontos P, Q e M, em função de S?

a) $\frac{S}{16}$

b) $\frac{S}{18}$

c) $\frac{S}{20}$

d) $\frac{S}{21}$

e) $\frac{S}{24}$

Comentários

Aplicando o teorema de Menelaus ao ΔAMC, temos:

$$\frac{CB}{BM}\cdot\frac{MQ}{QA}\cdot\frac{AP}{PC}=1\Rightarrow\frac{CB}{BM}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2=1\Rightarrow\frac{CB}{BM}=\frac{3}{2}$$

Como os triângulos AMB e ABC possuem mesma altura em relação a BC, a razão entre suas áreas é dada por:

$$\frac{S(AMB)}{S(ABC)}=\frac{BM}{CB}=\frac{2}{3}\Rightarrow S(AMB)=\frac{2S}{3}$$

Além disso, temos que $S(ABC)=S(AMB)+S(AMC)\Rightarrow S=\frac{2S}{3}+S(AMC)\Rightarrow$

$$\Rightarrow S(AMC)=\frac{S}{3}$$

Os triângulos APM e PMC possuem mesma altura em relação ao segmento AC, do que temos que a razão entre suas áreas é dada por:

$$\frac{S(APM)}{S(PMC)}=\frac{AP}{PC}=2\Rightarrow S(PMC)=\frac{S(APM)}{2}$$

Mas temos também:

$$S(PMC)+S(APM)=S(AMC)=\frac{S}{3}$$

Usando a relação entre $S(PMC)$ e $S(APM)$:

$$\frac{S(APM)}{2}+S(APM)=\frac{S}{3}\Rightarrow S(APM)=\frac{2S}{9}$$

Por fim, perceba que os triângulos APQ e PQM possuem mesma altura em relação à base AM, do que temos que a razão entre suas áreas é dada por:

$$\frac{S(APQ)}{S(PQM)}=\frac{AQ}{QM}=3\Rightarrow S(APQ)=3S(PQM)$$

E:

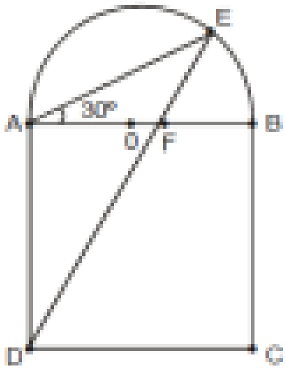
$$S(APQ)+S(PQM)=S(APM)=\frac{2S}{9}\Rightarrow 3S(PQM)+S(PQM)=\frac{2S}{9}$$

$$S(PQM)=\frac{S}{18}$$

Gabarito: “b”.

---

62. (CN/2004)



Na figura acima, ABCD é um quadrado de área 104 e o ponto O é o centro do semicírculo de diâmetro AB. A área do triângulo AEF é dada por

a) $2\left(3\sqrt{3}+3\right)$

b) $6\left(4\sqrt{3}-3\right)$

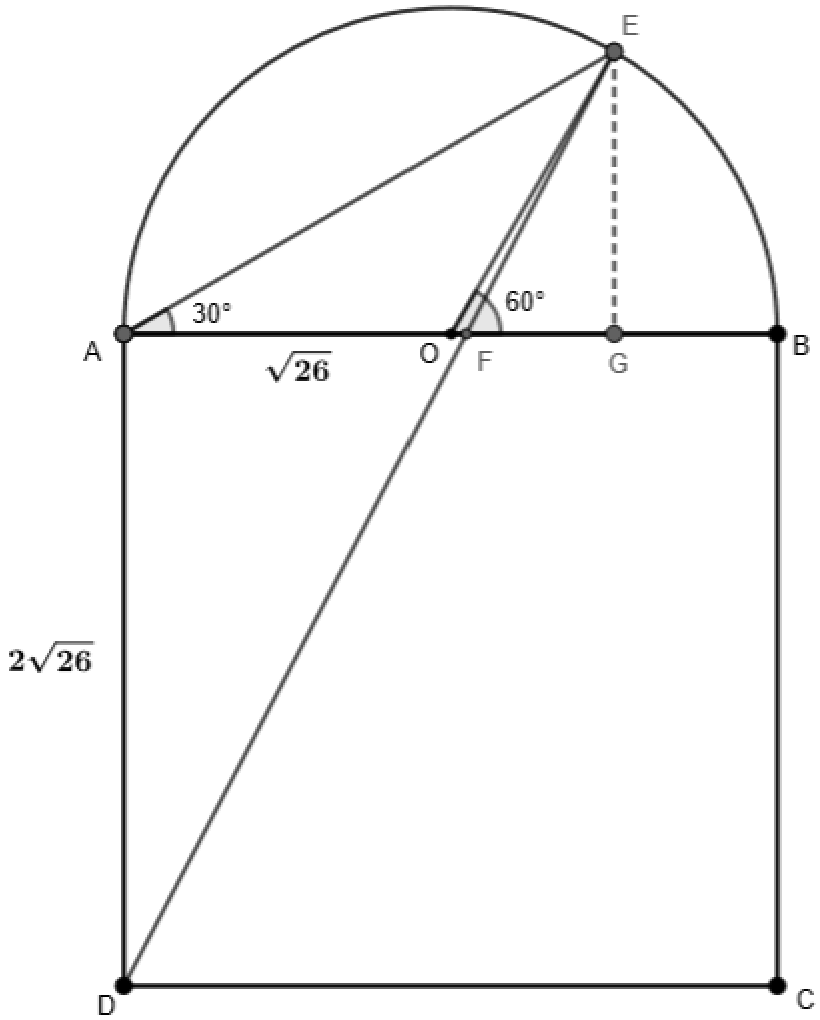
c) $5\left(4\sqrt{3}-6\right)$

d) $3\left(4\sqrt{3}-3\right)$

e) $8\left(4\sqrt{3}-3\right)$

Comentários

Observe o esquema abaixo onde são destacadas algumas informações relevantes:



Veja que $EO = \sqrt{26}$, pois corresponde ao raio da semicircunferência.

Além disso, como ΔAOE é isósceles e $E\hat{O}G$ é externo a esse triângulo, segue que $E\hat{O}G = 60°$.

Da trigonometria, temos que:

$$EG = \sqrt{26} sen\ 60°$$

Os triângulos $AFD\ e\ OEG$ são semelhantes pelo caso AAA, do que podemos escrever:

$$\frac{EG}{AD} = \frac{FG}{FA} \Rightarrow \frac{FG}{FA} = \frac{\sqrt{26} sen\ 60°}{2\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow FG = \frac{\sqrt{3}}{4} FA$$

Além disso, temos que;

$$FG + FA = AO + OG = \sqrt{26} + \sqrt{26}\cos 60° = \frac{3\sqrt{26}}{2}$$

Usando a relação entre $FG\ e\ FA$, temos:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} FA + FA = \frac{3\sqrt{26}}{2} \Rightarrow FA = \frac{6\sqrt{26}}{4 + \sqrt{3}}$$

Por fim, a área é dada por:

$$S(AFE)=\frac{AF\cdot EG}{2}=\frac{\frac{6\sqrt{26}}{4+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{26}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{6\cdot 26\cdot\sqrt{3}\cdot(4-\sqrt{3})}{4(4^2-\sqrt{3}^2)}=3(4\sqrt{3}-3)$$

Gabarito: "d".

---

63. (CN/2003)

Um estudante foi calculando o lado do polígono regular de 2n lados, inscrito em uma circunferência de raio 10 centímetros, para n sucessivamente igual a 6, 12, 24, 48, 96, etc. Após determinar cada lado, calculou o perímetro p do respectivo polígono, e observou que p é um número cada vez mais próximo, porém menor que

a) 60

b) 61

c) 62

d) 63

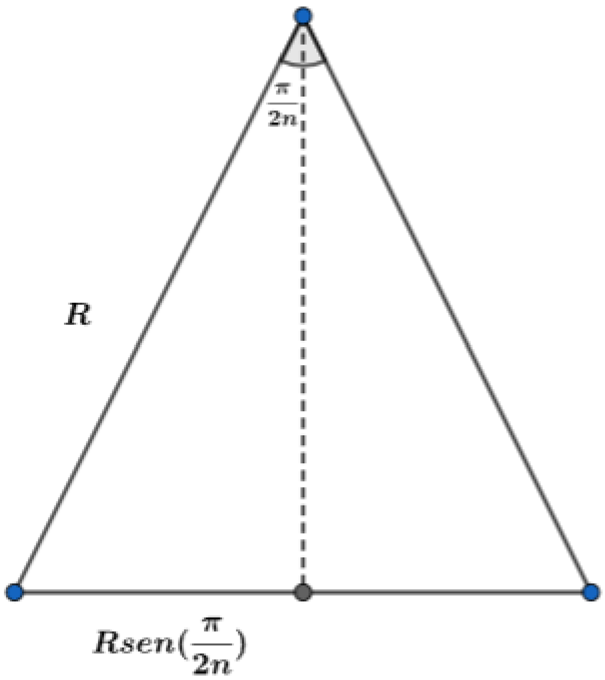
e) 64

Comentários

Seja $2n$ o número de lados desse polígono. Seu ângulo central é dado por:

$$\frac{2\pi}{2n}=\frac{\pi}{n}$$

Analisando um dos triângulos que compõem o polígono regular, temos:



Veja então que o lado mede $2Rsen\left(\frac{\pi}{2n}\right)$. Se ele possui $2n$ lados, então seu perímetro p vale:

$$p = 2n \cdot 2 \cdot 10 \cdot sen\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 20\pi \cdot \frac{sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{\pi}{2n}}$$

Sabe-se que à medida que um ângulo se aproxima de 0, o seno desse ângulo se aproxima do seu valor em radianos. Em nosso caso, n está crescendo cada vez mais, fazendo com que $\pi/2n$ se aproxime de zero e:

$$\frac{sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{\pi}{2n}} \to 1$$

Assim:

$$p \to 20\pi \approx 62{,}8$$

Isso faz com que tanto a alternativa "d" quanto a "e" estejam corretas.

Gabarito: Anulada ("d" ou "e").

---

64. (CN/2003)

Num quadrilátero ABCD tem-se: AB = 42, BC = 48, CD = 64, DA = 49 e P é o ponto de interseção entre as diagonais AC e BD. Qual é a razão entre os segmentos PA e PC, sabendo-se que a diagonal BD é igual a 56?

a) $\frac{7}{8}$

b) $\frac{8}{7}$

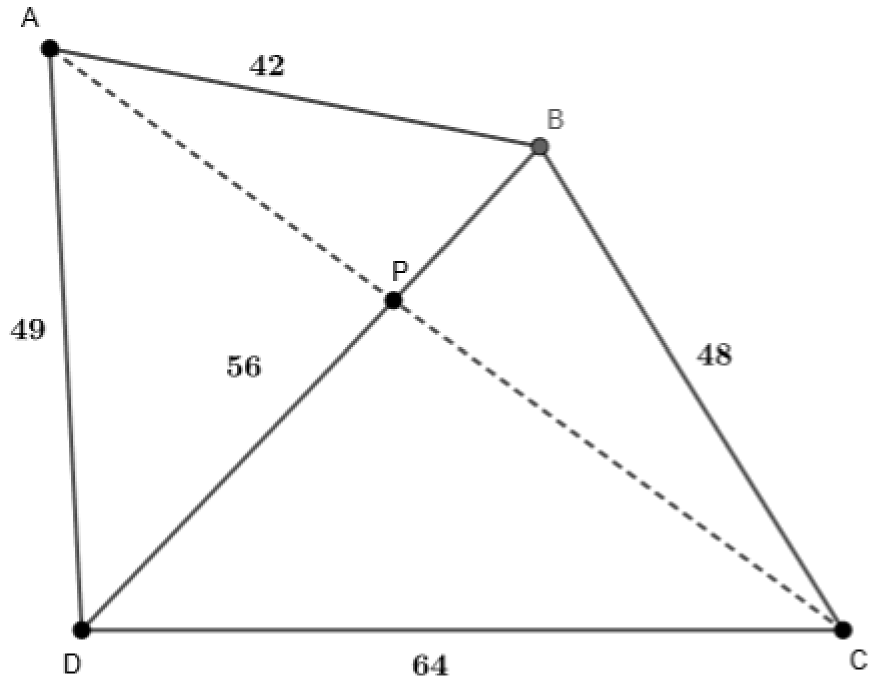
c) $\frac{7}{6}$

d) $\frac{6}{7}$

e) $\frac{49}{64}$

Comentários

O quadrilátero pode ser representado como segue:



O primeiro passo é perceber que o triângulo ABD é o triângulo de lados $6, 7\ e\ 8$ com seus lados multiplicados por 7 e o triângulo BCD é o triângulo $6, 7\ e\ 8$ com seus lados multiplicados por 8. Disso, temos que os triângulos ABD e BCD são semelhantes pelo caso LLL:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD} = \frac{7}{8}$$

Da semelhança, temos que os ângulos $A\hat{D}P\ e\ P\hat{D}C$ são iguais.

Veja que os triângulos $APD\ e\ PDC$ possuem mesma altura em relação à base AC, do que segue que a razão entre suas áreas é:

$$\frac{S(APD)}{S(PDC)} = \frac{PA}{PC}$$

Por outro lado, da trigonometria aplicada à geometria, temos que:

$$S(APD) = \frac{49 \cdot PD \cdot sen\left(A\hat{D}P\right)}{2}$$

$$S(PDC) = \frac{PD \cdot 64 \cdot sen\left(P\hat{D}C\right)}{2}$$

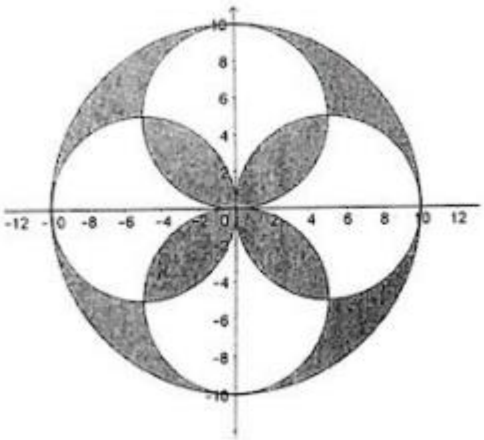
Da igualdade dos ângulos, segue que:

$$\frac{S(APD)}{S(PDC)} = \frac{49}{64} = \frac{PA}{PC}$$

Gabarito: "e".

5. QUESTÕES NÍVEL 2

65. (EFOMM/2021)



Seja o círculo com centro na origem e raio 10 cm. Os círculos menores têm raio 5 cm.

O valor da área hachurada, em cm^2, é:

a) $\frac{250}{3}(1-\pi)$

b) $50(\pi-1)$

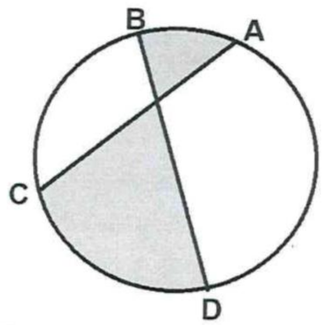
c) $100(\pi-1)$

d) $100(\pi-2)$

e) $\frac{100}{3}(1-\pi)$

66. (Escola Naval/2018)

Sejam os pontos A, B, C e D sobre uma circunferência, conforme a figura abaixo, de tal forma que os comprimentos dos arcos AB, BC, CD e DA medem, respectivamente, $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, e $\frac{5\pi}{3}$, determinando as cordas AC e BD. O valor da área da região hachurada é de:



a) $\frac{4\pi}{3} + 4 + \sqrt{3}$

b) $\frac{4\pi}{3} + 4 - \sqrt{3}$

c) $\frac{5\pi}{3} + 4 + \sqrt{3}$

d) $\frac{5\pi}{3} + 4 - 2\sqrt{3}$

e) $\frac{4\pi}{3} + 4 - 2\sqrt{3}$

67. (Escola Naval/2016)

Um triângulo inscrito em um círculo possui um lado de medida $2\sqrt[4]{3}$ oposto ao ângulo de $15°$. O produto do apótema do hexágono regular pelo apótema do triângulo equilátero inscritos nesse círculo é igual a:

a) $3(\sqrt{3} + 2)$

b) $4(2\sqrt{3} + 3)$

c) $\sqrt{8\sqrt{3} + 12}$

d) $\sqrt{2}(2\sqrt{3} + 3)$

e) $6(\sqrt{2} + 1)$

68. (Escola Naval/2015)

Seja $ABCD$ um quadrado de lado ℓ, em que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são suas diagonais. Seja O o ponto de encontro dessas diagonais e sejam P e Q os pontos médios dos segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, respectivamente. Pode-se dizer que a área do quadrilátero que tem vértices nos pontos A, B, Q e P vale

a) $\frac{3\ell^2}{16}$

b) $\frac{\ell^2}{16}$

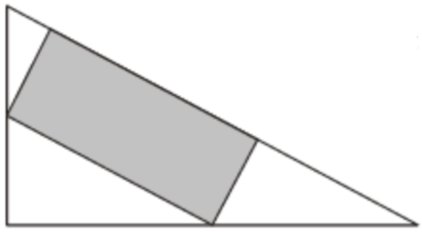
c) $\frac{3\ell^2}{8}$

d) $\frac{\ell^2}{8}$

e) $\frac{3\ell^2}{24}$

69. (Escola Naval/2013)

Numa vidraçaria há um pedaço de espelho sob a forma de um triângulo retângulo de lados $30\ cm$, $40\ cm$ e $50\ cm$. Deseja-se, a partir dele, recortar um espelho retangular, com a maior área possível, conforme a figura abaixo. Então as dimensões do espelho são



a) $25\ cm$ e $12\ cm$

b) $20\ cm$ e $15\ cm$

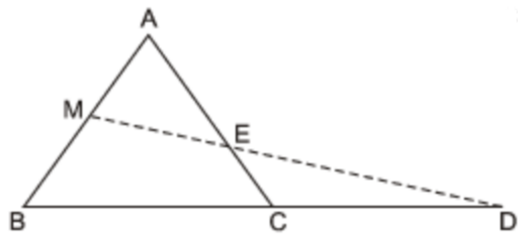
c) $10\ cm$ e $30\ cm$

d) $12,5\ cm$ e $24\ cm$

e) $10\sqrt{3}\ cm$ e $10\sqrt{3}\ cm$

70. (Escola Naval/2012)

O triângulo da figura abaixo é equilátero, $\overline{AM} = \overline{MB} = 5$ e $\overline{CD} = 6$. A área do triângulo MAE vale



a) $\frac{200\sqrt{3}}{11}$

b) $\frac{100\sqrt{3}}{11}$

c) $\frac{100\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{200\sqrt{2}}{11}$

e) $\frac{200\sqrt{2}}{2}$

71. (EFOMM/2020)

Sejam a circunferência C_1, com centro em A e raio 1, e a circunferência C_2 que passa por A, com centro em B e raio 2. Sabendo-se que D é o ponto médio do segmento AB, E é um dos pontos de interseção entre C_1 e C_2, e F é a interseção da reta ED com a circunferência C_2, o valor da área do triângulo AEF, em unidades de área, é

a) $2 + \frac{\sqrt{15}}{8}$

b) $1 + \frac{\sqrt{15}}{4}$

c) $\frac{3\sqrt{15}}{8}$

d) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

e) $\frac{5\sqrt{15}}{8}$

72. (EFOMM/2018)

Qual é a área de uma circunferência inscrita em um triângulo equilátero, sabendo-se que esse triângulo está inscrito em uma circunferência de comprimento igual a $10\pi\ cm$?

a) $\frac{75\pi}{4}$

b) $\frac{25\pi}{4}$

c) $\frac{5\pi}{2}$

d) $\frac{25\pi}{16}$

e) $\frac{5\pi}{4}$

73. (EFOMM/2016)

Seja um quadrado de lado 2. Unindo os pontos médios de cada lado, temos um segundo quadrado. Unindo os pontos médios do segundo quadrado, temos um terceiro quadrado, e assim sucessivamente. O produto das áreas dos dez primeiros quadrados é

a) $2^{\frac{9}{2}}$

b) $2^{\frac{25}{2}}$

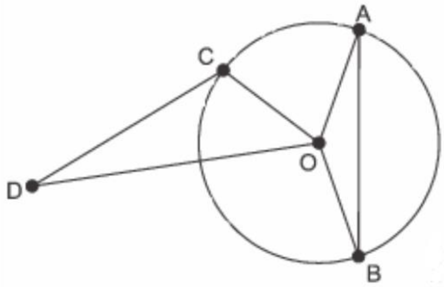
c) $2^{\frac{-45}{2}}$

d) 2^{-45}

e) 2^{-25}

74. (EFOMM/2016)

Determine o comprimento do menor arco AB na circunferência de centro O, representada na figura a seguir, sabendo que o segmento OD mede $12\ cm$, os ângulos $C\hat{O}D = 30°$ e $O\hat{A}B = 15°$ e que a área do triângulo CDO é igual a $18\ cm^2$.



a) $5\pi\ cm$

b) $12\ cm$

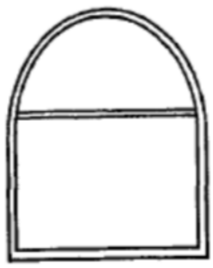
c) $5\ cm$

d) $12\pi\ cm$

e) $10\pi\ cm$

75. (EFOMM/2015)

Deseja-se construir uma janela que possuindo a forma de um retângulo sob um semicírculo, conforme figura abaixo, permita o máximo de passagem de luz possível. Sabe-se que: o vidro do retângulo será transparente; o vidro do semicírculo será colorido, transmitindo, por unidade de área, apenas metade da luz incidente em relação ao vidro transparente; o perímetro total da janela é fixo e vale p. Nessas condições, determine as medidas da parte retangular da janela, em função do perímetro p. Obs: Ignore a espessura do caixilho.



a) $\frac{4}{3\pi+8}p$ e $\frac{\pi+4}{2(3\pi+8)}p$

b) $\frac{2}{3\pi+8}p$ e $\frac{\pi+4}{4(3\pi+8)}p$

c) $\frac{8}{3\pi+8}p$ e $\frac{\pi+4}{3\pi+8}p$

d) $\frac{6}{3\pi+8}p$ e $\frac{3(\pi+4)}{4(3\pi+8)}p$

e) $\frac{4}{3\pi+8}p$ e $\frac{8}{3\pi+8}p$

76. (EFOMM/2014)

A diferença entre o comprimento x e a largura y de um retângulo é de $2\ cm$. Se a sua área é menor ou igual a $35\ cm^2$, então o valor de x, em cm, será:

a) $0 < x < 7$

b) $0 < x < 5$

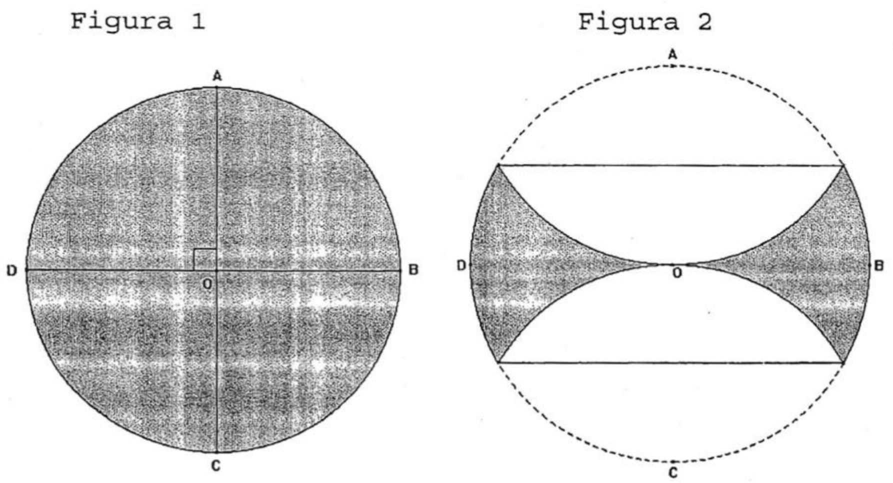
c) $2 < x \leq 5$

d) $2 < x \leq 7$

e) $2 < x < 7$

77. (EFOMM/2010)

João construiu um círculo de papel com centro O e raio $4cm$ (figura 1). Traçou dois diâmetros AC e BD perpendiculares e, em seguida, dobrou o papel fazendo coincidir A, O e C, conforme sugere a Figura 2.



A área da parte do círculo não encoberta pelas dobras sombreada na Figura 2, é igual a

a) $\frac{1}{3}(96 - 16\pi)cm^2$

b) $\frac{1}{3}(16\pi - 48)cm^2$

c) $\frac{1}{3}(16\pi - 12\sqrt{3})cm^2$

d) $\frac{1}{3}(16\pi + 12\sqrt{3})cm^2$

e) $\frac{1}{3}(32\pi + 12\sqrt{3})cm^2$

78. (EFOMM/2010)

As medidas dos lados $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ de um triângulo ABC formam, nesta ordem, uma progressão aritmética crescente. Os ângulos internos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ desse triângulo possuem a seguinte propriedade:

$sen^2\hat{A} + sen^2\hat{B} - sen^2\hat{C} - 2 \cdot sen\,\hat{A} \cdot sen\,\hat{B} \cdot \cos\hat{C} = \cos^2\hat{C}$. Se o perímetro do triângulo ABC mede $3\sqrt{3}m$, sua área, em m^2, é igual a

a) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{9}{8}$

d) 2

e) 4

79. (EFOMM/2010)

Um triângulo obtusângulo ABC tem $18\ cm$ de perímetro e as medidas de seus lados formam uma progressão aritmética crescente (AB, AC, BC). Os raios das circunferências inscrita e circunscrita a esse triângulo ABC medem, respectivamente, r e R. Se $sen\,\hat{A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ e $sen\,\hat{B} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$, então o produto $r \cdot R$, em cm^2, é igual a

a) $\frac{35}{9}$

b) $6\sqrt{6}$

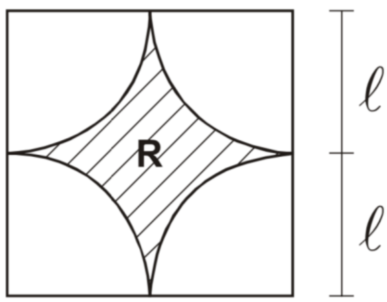
c) $3\sqrt{15}$

d) $\frac{16}{3}$

e) 1

80. (EFOMM/2006)

A região hachurada R da figura é limitada por arcos de circunferência centrados nos vértices do quadrado de lado $2l$. A área de R é



a) $\frac{\pi l^2}{2}$

b) $(\pi - 2\sqrt{2})l^2$

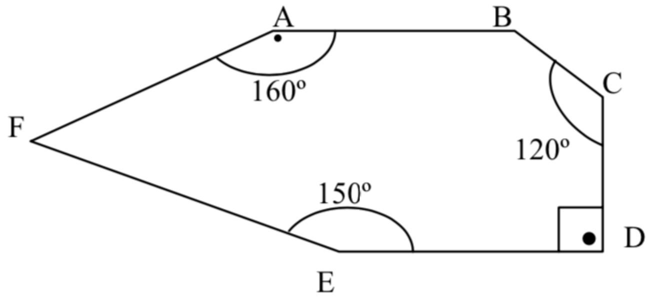
c) $\left(\pi - \frac{4}{3}\right)l^2$

d) $(4 - \pi)l^2$

e) $\sqrt{2}l^2$

81. (EFOMM/2005)

No hexágono $ABCDEF$, abaixo, a medida do ângulo $A\hat{B}C$ é quatro vezes a medida do ângulo $E\hat{F}A$. Determine a medida do ângulo obtuso formado pelas bissetrizes de $A\hat{B}C$ e $E\hat{F}A$.



a) $70°$

b) $80°$

c) $85°$

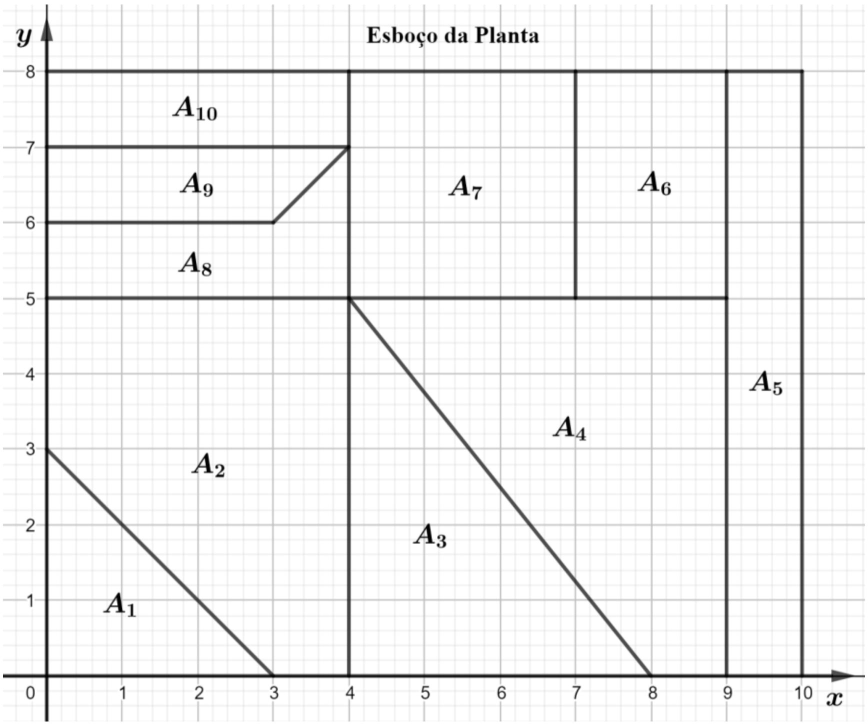
d) $100°$

e) $120°$

82. (AFA/2021)

Para construir um viaduto, a prefeitura de uma cidade precisará desapropriar alguns locais de uma determinada quadra da cidade.

Para identificar o que precisará ser desapropriado, fez-se um esboço da planta dessa quadra no qual os locais foram representados em um plano cartesiano e nomeados de A_1 até A_{10}, conforme figura a seguir.



O viaduto estará representado pela região compreendida entre as retas de equações $r: -\frac{1}{2}x - y + 8 = 0$ e $s: -x - 2y + 10 = 0$.

Um local será inteiramente desapropriado se o viaduto passar por qualquer trecho de seu território.

Se cada unidade do plano no esboço da planta equivale a 10m na situação real, então a área total dos locais dessa quadra que precisará ser desapropriada, em m^2, é igual a

a) 5950

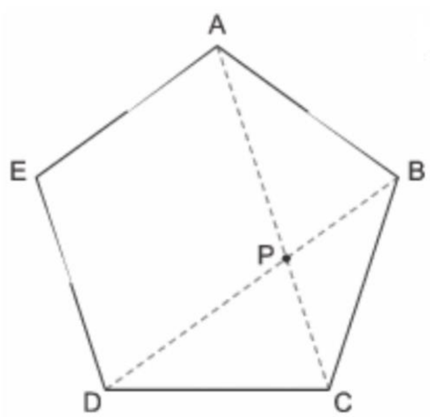
b) 6450

c) 6950

d) 7450

83. (AFA-2018)

A figura a seguir é um pentágono regular de lado 2cm.



Os triângulos DBC e BCP são semelhantes.

A medida de $\overline{AC}$, uma das diagonais do pentágono regular, em cm, é igual a:

a) $1+\sqrt{5}$

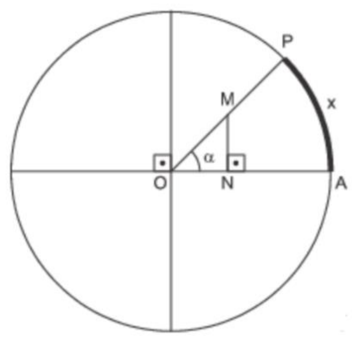
b) $-1+\sqrt{5}$

c) $2+\frac{\sqrt{5}}{2}$

d) $2\sqrt{5}-1$

84. (AFA/2018)

No círculo do centro O a seguir, $\overline{OA}=2m$, M é o ponto médio de $\overline{OP}$ e a área y do triângulo ONM é dada em função do comprimento x do arco $\widehat{AP}$, com $0<x<\frac{\pi}{2}$.



Assim sendo, é correto afirmar que y

a) é decrescente se $x \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

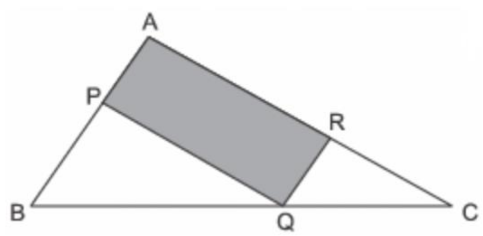
b) assume valor máximo $0,125m^2$.

c) pode assumir valor igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}m^2$.

d) é sempre um número racional.

85. (AFA/2017)

Considere, no triângulo ABC abaixo, os pontos $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{BC}$, $R \in \overline{AC}$ e os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ paralelos, respectivamente, a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.



Sabendo que $\overline{BQ} = 3cm$, $\overline{QC} = 1cm$ e que a área do triângulo ABC é $8cm^2$, então a área do paralelogramo hachurado, em cm^2, é igual a

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

86. (AFA/2015)

Seja o quadrado $ABCD$ e o ponto E pertencente ao segmento $\overline{AB}$. Sabendo-se que a área do triângulo ADE, a área do trapézio $BCDE$ e a área do quadrado $ABCD$ formam juntas, nessa ordem, uma Progressão Aritmética (P.A.) e a soma das áreas desses polígonos é igual a $800cm^2$, tem-se que a medida do segmento $\overline{EB}$

a) é fração própria.

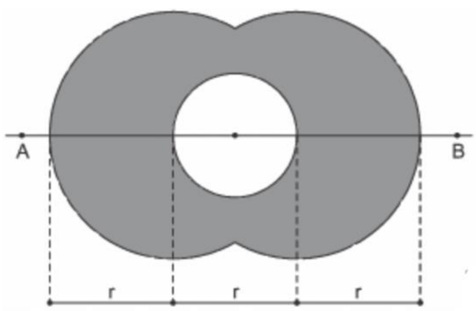
b) é decimal exato.

c) é decimal não-exato e periódico.

d) pertence ao conjunto $A = \mathbb{R}_+^* - \mathbb{Q}_+$

87. (AFA/2014)

Na figura abaixo, os três círculos têm centro sobre a reta AB e os dois de maior raio têm centro sobre a circunferência de menor raio.



A expressão que fornece o valor da área sombreada é

a) $\frac{17\pi - 6\sqrt{3}}{9} r^2$

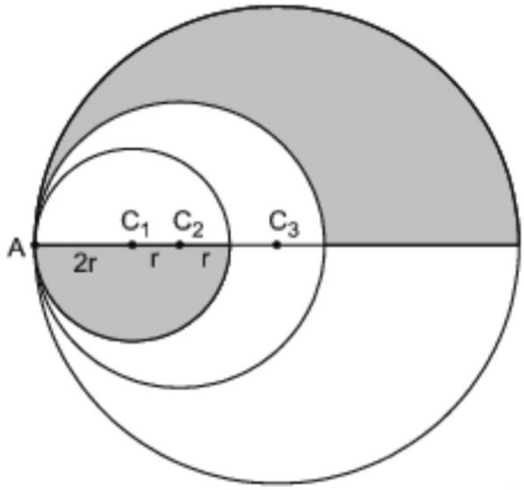
b) $\frac{11\pi + 9\sqrt{3}}{12} r^2$

c) $\frac{15\pi - 4\sqrt{3}}{9} r^2$

d) $\frac{13\pi+6\sqrt{3}}{12}r^2$

88. (AFA/2012)

Conforme a figura abaixo, A é o ponto de tangência das circunferências de centros C_1, C_2 e C_3. Sabe-se que os raios dessas circunferências formam uma progressão geométrica crescente.



Se os raios das circunferências de centros C_1 e C_2 medem, respectivamente, $2r$ e $3r$, então a área da região sombreada vale, em unidades de área,

a) $\frac{55}{8}\pi r^2$

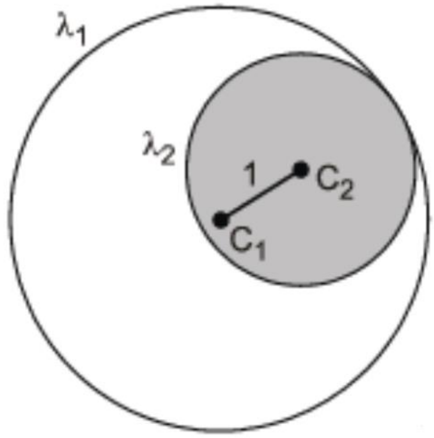
b) $\frac{29}{4}\pi r^2$

c) $\frac{61}{8}\pi r^2$

d) $8\pi r^2$

89. (AFA/2011)

As circunferências λ_1 e λ_2 da figura abaixo são tangentes interiores e a distância entre os centros C_1 e C_2 é igual a 1cm.



Se a área sombreada é igual à área não sombreada na figura, é correto afirmar que o raio λ_2, em cm, é um número do intervalo.

a) $\left]2, \frac{11}{5}\right[$

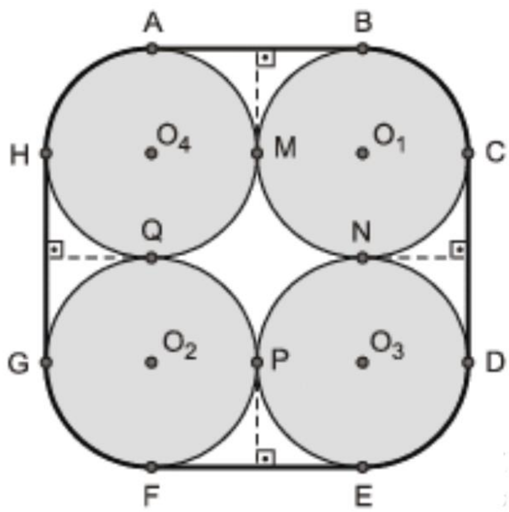
b) $\left]\frac{11}{5}, \frac{23}{10}\right[$

c) $\left]\frac{23}{10}, \frac{5}{2}\right[$

d) $\left]\frac{5}{2}, \frac{13}{5}\right[$

90. (AFA/2011)

Na figura abaixo, têm-se quatro círculos congruentes de centros O_1, O_2, O_3 e O_4 e de raio igual a $10cm$. Os pontos M, N, P, Q são pontos de tangência entre os círculos e A, B, C, D, E, F, G, H são pontos de tangência entre os círculos e a correia que os contorna.



Sabendo-se que essa correia é inextensível, seu perímetro, em cm, é igual a

a) $2(\pi + 40)$

b) $5(\pi + 16)$

c) $20(\pi + 4)$

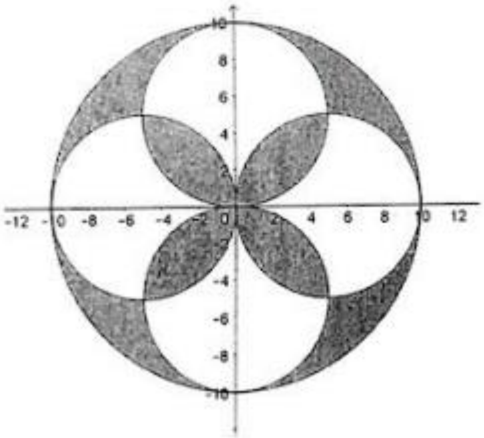
d) $5(\pi + 8)$

GABARITO

65. d
66. d
67. a
68. a
69. a
70. b
71. c
72. b
73. e
74. a
75. a
76. d
77. Anulada
78. c
79. d
80. d
81. d
82. c
83. a
84. Anulada
85. b
86. c
87. d
88. c
89. c
90. c

RESOLUÇÃO

65. (EFOMM/2021)



Seja o círculo com centro na origem e raio 10 cm. Os círculos menores têm raio 5 cm.

O valor da área hachurada, em cm^2, é:

a) $\frac{250}{3}(1-\pi)$

b) $50(\pi-1)$

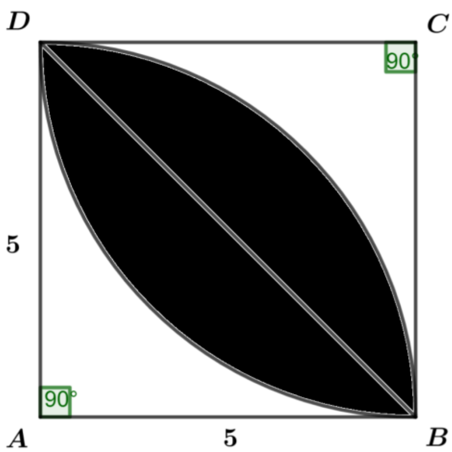
c) $100(\pi-1)$

d) $100(\pi-2)$

e) $\frac{100}{3}(1-\pi)$

Comentários

Perceba que podemos calcular a área hachurada central, da seguinte forma:



Devido à simetria temos que ABCD é um quadrado cujo lado é igual ao raio do círculo menor.

Podemos calcular a área do segmento circular do seguinte modo:

Calculando a área do setor circular:

$$A=\frac{\pi\cdot 5^2}{4}=\frac{25\pi}{4}$$

Agora basta subtrair a área do triângulo retângulo isósceles:

$$A_{sc}=\frac{25}{4}\pi-\frac{5\cdot 5}{2}=\frac{25}{4}(\pi-2)$$

Contudo, essa área representa metade de uma "pétala da flor" central, logo:

$$\acute{A}rea\ P\acute{e}tala=\frac{25}{2}(\pi-2)$$

Como são 4 pétalas, temos:

$$4\cdot\frac{25}{2}(\pi-2)=50(\pi-2)$$

Portanto, área a hachurada é:

$$A=\pi\cdot 10^2-4\cdot\pi\cdot 5^2+2\cdot 50(\pi-2)$$

$$\therefore A=100(\pi-2)$$

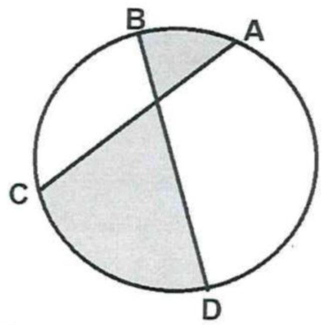
Obs: Devemos somar duas vezes a área das pétalas, pois ao retirar a área dos círculos menores, acabamos retirando 2 vezes a área das interseções.

Gabarito: D

---

66. (Escola Naval/2018)

Sejam os pontos A, B, C e D sobre uma circunferência, conforme a figura abaixo, de tal forma que os comprimentos dos arcos AB, BC, CD e DA medem, respectivamente, $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, e $\frac{5\pi}{3}$, determinando as cordas AC e BD. O valor da área da região hachurada é de:



a) $\frac{4\pi}{3}+4+\sqrt{3}$

b) $\frac{4\pi}{3}+4-\sqrt{3}$

c) $\frac{5\pi}{3}+4+\sqrt{3}$

d) $\frac{5\pi}{3}+4-2\sqrt{3}$

e) $\frac{4\pi}{3}+4-2\sqrt{3}$

Comentários

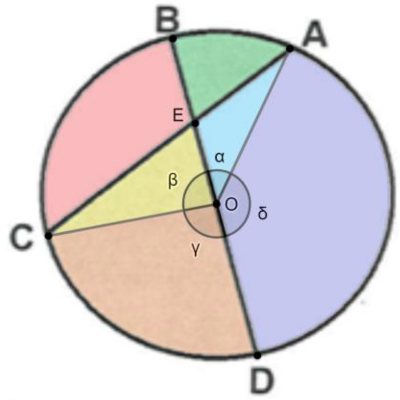
Pela soma dos setores circulares, temos:

$$\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}=4\pi$$

$$2\pi R = 4\pi$$

$$\Rightarrow R = 2$$

Separando todos os setores e obtendo os arcos centrais, temos a seguinte figura:



Na qual os ângulos centrais correspondem a metade dos arcos que cobrem:

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \quad \beta = \frac{\pi}{3} \quad \gamma = \frac{2\pi}{3} \quad \delta = \frac{5\pi}{6}$$

Temos que o ângulo dos setores com centro em E são:

$$\text{ângulos opostos pelo vértice} \rightarrow A\hat{E}B = D\hat{E}C = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{5\pi}{12}$$

No triângulo OCE, temos:

$$E\hat{C}O + C\hat{E}O + E\hat{O}C = \pi$$

$$E\hat{C}O = \pi - \frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4}$$

Lembrando que os valores dos senos são:

$$sen\ \beta = sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen\ \alpha = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$sen\left(\frac{5\pi}{12}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Descobrindo o valor de OE pela lei dos senos:

$$\frac{OC}{sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{OE}{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$OE = R\frac{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

$$OE = 2\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Temos, portanto, que o valor da área hachurada vale:

$$S = S_{S_{ODC}} + S_{S_{OAB}} + S_{\Delta OCE} - S_{\Delta OEA}$$

$$S = \frac{2\pi}{3}\cdot 2 + \frac{\pi}{6}\cdot 2 + \frac{1}{2}2\cdot 2\left(\sqrt{3}-1\right)sen\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}2\cdot 2\left(\sqrt{3}-1\right)sen\frac{\pi}{6}$$

$$S = \frac{5\pi}{3} + \left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{3} - \left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$S = \frac{5\pi}{3} + 4 - 2\sqrt{3}$$

Gabarito: "d".

67. (Escola Naval/2016)

Um triângulo inscrito em um círculo possui um lado de medida $2\sqrt[4]{3}$ oposto ao ângulo de $15°$. O produto do apótema do hexágono regular pelo apótema do triângulo equilátero inscritos nesse círculo é igual a:

a) $3(\sqrt{3}+2)$

b) $4(2\sqrt{3}+3)$

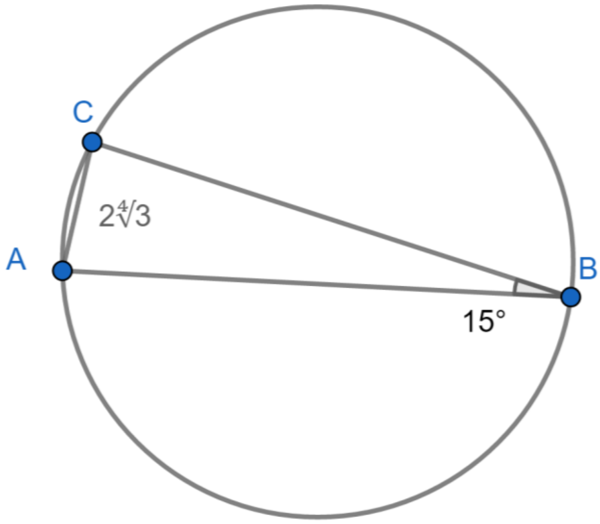
c) $\sqrt{8\sqrt{3}+12}$

d) $\sqrt{2}(2\sqrt{3}+3)$

e) $6(\sqrt{2}+1)$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Aplicando a lei dos senos, obtemos:

$$\frac{AC}{sen(\hat{B})} = 2R$$

$$\frac{2\sqrt[4]{3}}{\text{sen } 15°} = 2R$$

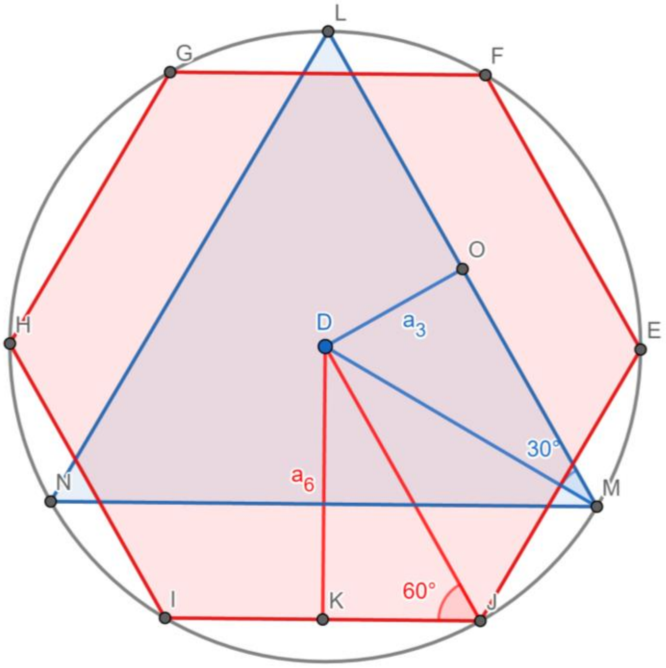
Veja que:

$$sen(15°) = sen(45° - 30°) = sen(45°)\cos(30°) - sen(30°)\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow sen(15°) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow R = \frac{\sqrt[4]{3}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{4\sqrt[4]{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

Na seguinte figura, temos as relações do triângulo e do hexágono, ambos regulares e inscritos na circunferência de raio R:



Para o hexágono, temos:

$$a_6 = R\ sen\ 60°$$
$$a_6 = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para o triângulo, temos:

$$a_3 = R\ sen\ 30°$$
$$a_3 = R \cdot \frac{1}{2}$$

Portanto, temos que o produto $a_3 \cdot a_6$ vale:

$$a_3 \cdot a_6 = R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$a_3 \cdot a_6 = \left(\frac{4\sqrt[4]{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$\Rightarrow a_3 \cdot a_6 = \frac{16\sqrt{3}}{6+2-4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{48}{8-4\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2-\sqrt{3}} = 3(\sqrt{3}+2)$$

Gabarito: "a".

68. (Escola Naval/2015)

Seja $ABCD$ um quadrado de lado ℓ, em que $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são suas diagonais. Seja O o ponto de encontro dessas diagonais e sejam P e Q os pontos médios dos segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$, respectivamente. Pode-se dizer que a área do quadrilátero que tem vértices nos pontos A, B, Q e P vale

a) $\frac{3\ell^2}{16}$

b) $\frac{\ell^2}{16}$

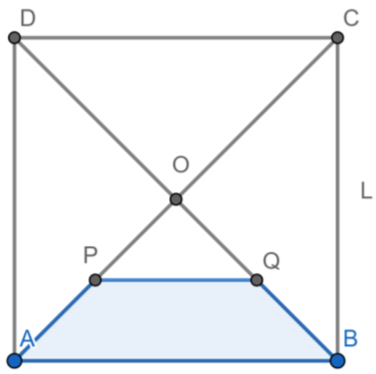
c) $\frac{3\ell^2}{8}$

d) $\frac{\ell^2}{8}$

e) $\frac{3\ell^2}{24}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Veja que $AP = BQ$ e $AO = BO \Longrightarrow OP = OQ$

A diagonal do quadrado de lado l vale $l\sqrt{2}$, como P é ponto médio de AO, temos que:

$$OP = OQ = \frac{l\sqrt{2}}{4}$$

Assim, a área do triangulo ΔOPQ é:

$$S_{\Delta OPQ} = \frac{\left(\frac{l\sqrt{2}}{4}\right)^2}{2} = \frac{\frac{l^2}{8}}{2} = \frac{l}{16}$$

Como ΔAOB é um quarto do quadrado, temos que a área de $APQB$ é:

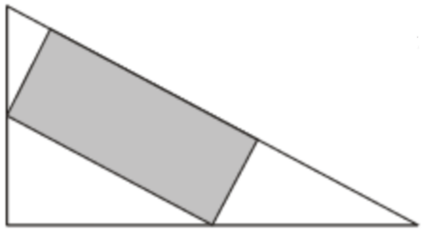
$$S_{APQB} = \frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{16} = \frac{3l^2}{16}$$

Gabarito: “a”.

---

69. (Escola Naval/2013)

Numa vidraçaria há um pedaço de espelho sob a forma de um triângulo retângulo de lados $30\ cm$, $40\ cm$ e $50\ cm$. Deseja-se, a partir dele, recortar um espelho retangular, com a maior área possível, conforme a figura abaixo. Então as dimensões do espelho são



a) $25\ cm$ e $12\ cm$

b) $20\ cm$ e $15\ cm$

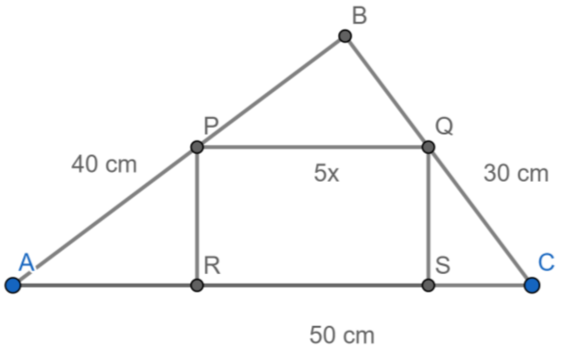
c) $10\ cm$ e $30\ cm$

d) $12,5\ cm$ e $24\ cm$

e) $10\sqrt{3}\ cm$ e $10\sqrt{3}\ cm$

Comentários

Interpretando o enunciado, temos a seguinte figura:



Suponhamos que o segmento PQ tenha o valor de $5x$, logo temos as seguintes semelhanças de triângulos:

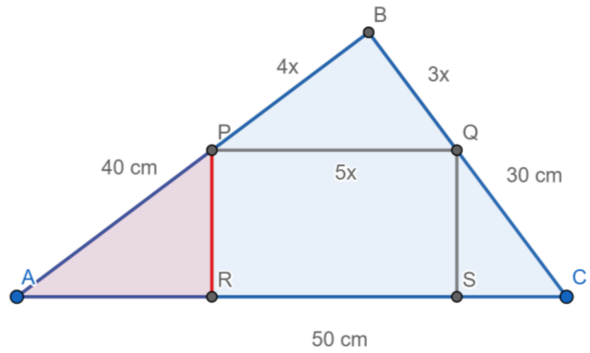
$$\Delta ABC \sim \Delta PBQ \Rightarrow \frac{PB}{AB} = \frac{BQ}{BC} = \frac{PQ}{AC}$$

$$\frac{PB}{AB} = \frac{BQ}{BC} = \frac{5x}{AC}$$

$$\frac{PB}{40} = \frac{BQ}{30} = \frac{5x}{50}$$

$$PB = 4x \ e \ BQ = 3x$$

Assim, temos a seguinte figura:



Lembrando que ΔABC possui ângulo reto em B e ΔAPR em R, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta APR \Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{PR}{BC}$$

$$\frac{AP}{AC} = \frac{PR}{BC} \Rightarrow \frac{40 - 4x}{50} = \frac{PR}{30}$$

$$PR = \frac{3}{5}(40 - 4x)$$

Portanto, temos no retângulo $PQRS$ a seguinte área:

$$S(x) = 5x \cdot \frac{3}{5}(40 - 4x)$$

$$S(x) = 3x(40 - 4x) = -12x^2 + 120x$$

Tratando a função $f(x)$ como uma função quadrática, temos que o valor do vértice é

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{120}{-24} = 5$$

Logo, as medidas do retângulo são:

$$PQ = 5x = 25\ cm$$

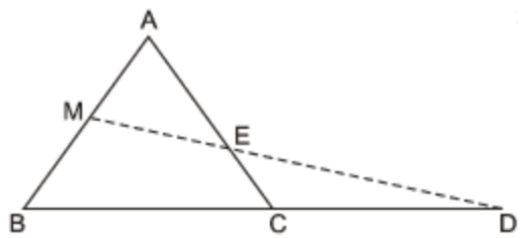
$$PR = \frac{3}{5}(40 - 4x) = \frac{3}{5} \cdot 20 = 12\ cm$$

Gabarito: "a".

---

70. (Escola Naval/2012)

O triângulo da figura abaixo é equilátero, $\overline{AM} = \overline{MB} = 5$ e $\overline{CD} = 6$. A área do triângulo MAE vale



a) $\frac{200\sqrt{3}}{11}$

b) $\frac{100\sqrt{3}}{11}$

c) $\frac{100\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{200\sqrt{2}}{11}$

e) $\frac{200\sqrt{2}}{2}$

Comentário

Pela aplicação do teorema de Menelaus no triângulo ABC e usando-se a secante MED, temos a seguinte relação:

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AM}{MB}=1$$

$$\frac{10+6}{6}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{5}{5}=1$$

$$\frac{CE}{EA}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

Porém, temos que $CE = AC - AE$, logo:

$$\frac{AC-AE}{AE}=\frac{AC}{AE}-1=\frac{3}{8}$$

$$\frac{AC}{AE}=\frac{3}{8}+1=\frac{11}{8}$$

$$AE = AC\frac{8}{11}=\frac{80}{11}$$

Sabemos que a área do triangulo equilátero ΔAME é:

$$S_{AME}=\frac{AM\cdot AE\cdot sen\,60°}{2}$$

$$S_{AME}=5\cdot\frac{80}{11}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_{AME}=\frac{100\sqrt{3}}{11}$$

Gabarito: "b".

---

71. (EFOMM/2020)

Sejam a circunferência C_1, com centro em A e raio 1, e a circunferência C_2 que passa por A, com centro em B e raio 2. Sabendo-se que D é o ponto médio do segmento AB, E é um dos pontos de interseção entre C_1 e C_2, e F é a interseção da reta ED com a circunferência C_2, o valor da área do triângulo AEF, em unidades de área, é

a) $2+\frac{\sqrt{15}}{8}$

b) $1+\frac{\sqrt{15}}{4}$

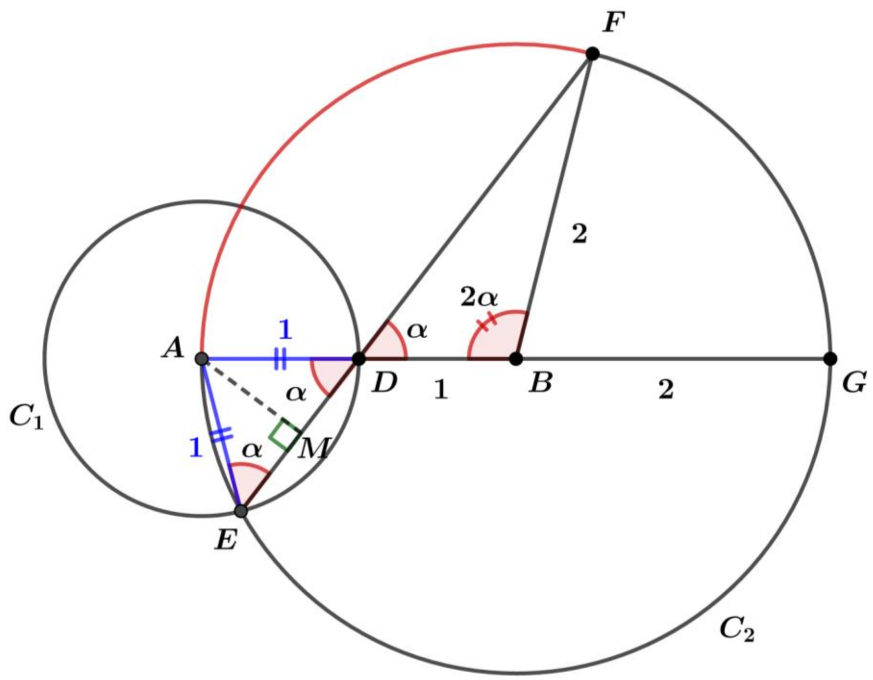
c) $\frac{3\sqrt{15}}{8}$

d) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

e) $\frac{5\sqrt{15}}{8}$

Comentários

Do enunciado, temos a seguinte figura:



Veja que ΔADE é isósceles, pois $AE = AD = 1$. Assim, temos $A\hat{E}M = A\hat{D}M = \alpha$. A medida de ED é dada por:

$$ED = EM + MD = 1 \cdot \cos\alpha + 1 \cdot \cos\alpha = 2\cos\alpha$$

Perceba que $A\hat{E}F$ e $A\hat{B}F$ "enxergam" o mesmo arco $\widehat{AF}$, como B é o centro da circunferência C_2, temos que $A\hat{B}F = 2A\hat{E}F = 2\alpha$.

Da lei dos senos no triângulo DBF:

$$\frac{2}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{DF}{\operatorname{sen}2\alpha} \Rightarrow DF = \frac{2}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot (2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) = 4\cos\alpha$$

Aplicando a potência de ponto na circunferência C_2:

$$ED \cdot DF = AD \cdot DG \Rightarrow 2\cos\alpha \cdot 4\cos\alpha = 1 \cdot 3$$

$$\cos^2\alpha = \frac{3}{8}$$

Como $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Pelo teorema de Pitágoras:

$$sen\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

Dessa forma, EF é:

$$EF = ED + DF = 6\cos\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Por fim, a área solicitada vale:

$$S_{AEF} = \frac{EF \cdot AM}{2} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{EF \cdot 1 \cdot sen\alpha}{2} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$$

Gabarito: “c”.

---

72. (EFOMM/2018)

Qual é a área de uma circunferência inscrita em um triângulo equilátero, sabendo-se que esse triângulo está inscrito em uma circunferência de comprimento igual a $10\pi\ cm$?

a) $\frac{75\pi}{4}$

b) $\frac{25\pi}{4}$

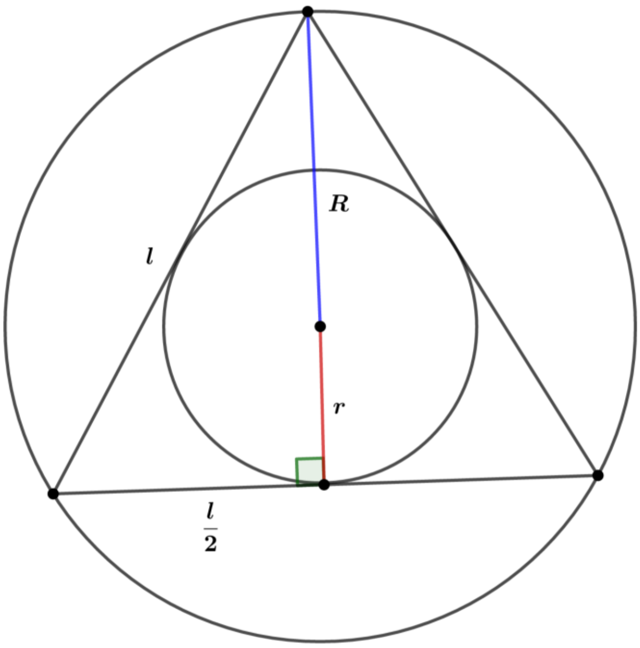
c) $\frac{5\pi}{2}$

d) $\frac{25\pi}{16}$

e) $\frac{5\pi}{4}$

Comentários

Um triângulo equilátero possui o incentro, o circuncentro e o baricentro coincidentes e, além disso, o baricentro é o ponto que divide sua altura na razão 2:1, logo:



Temos $R = 2r$. Como a circunferência externa possui comprimento igual a 10π, temos:

$$2\pi R = 10\pi \Rightarrow R = 5\ cm$$

Assim,

$$r = \frac{R}{2} = \frac{5}{2}\ cm$$

A área da circunferência inscrita é:

$$A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}\pi\ cm^2$$

Gabarito: "b".

---

73. (EFOMM/2016)

Seja um quadrado de lado 2. Unindo os pontos médios de cada lado, temos um segundo quadrado. Unindo os pontos médios do segundo quadrado, temos um terceiro quadrado, e assim sucessivamente. O produto das áreas dos dez primeiros quadrados é

a) $2^{\frac{9}{2}}$

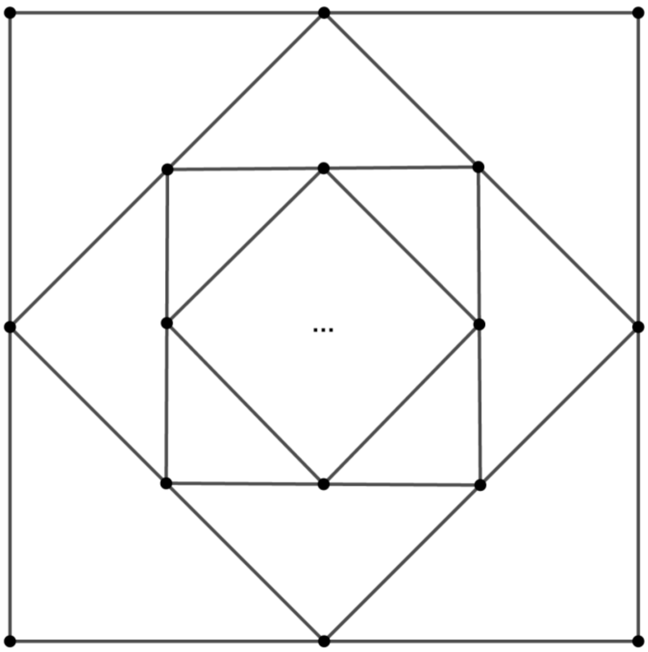
b) $2^{\frac{25}{2}}$

c) $2^{\frac{-45}{2}}$

d) 2^{-45}

e) 2^{-25}

Comentários



A área do maior quadrado é:

$$S_1 = 2^2 = 4$$

O lado do segundo quadrado é, pelo teorema de Pitágoras:

$$l_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow l_2 = \sqrt{2}$$

Sua área é:

$$S_2 = \sqrt{2}^2 = 2$$

O lado do terceiro quadrado é:

$$l_3^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow l_3 = 1$$

Sua área é:

$$S_3 = 1^2 = 1$$

Note que seguindo o raciocínio, encontramos uma PG de razão $q = 1/2$:

$$(S_1, S_2, S_3, S_4, \dots) = \left(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots\right)$$

Assim, o produto das áreas dos dez primeiros quadrados é:

$$P = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot \dots \cdot S_{10} = 4 \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \left(4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \cdot \dots \cdot \left(4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9\right) = 4^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+3+\dots+9}$$

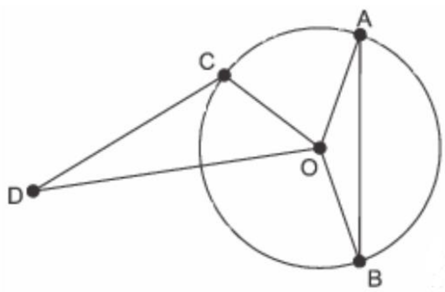
$$P = 4^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(1+9)\cdot\frac{9}{2}} = 4^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{45} = \frac{2^{20}}{2^{45}} = 2^{-25}$$

Gabarito: "e".

---

74. (EFOMM/2016)

Determine o comprimento do menor arco AB na circunferência de centro O, representada na figura a seguir, sabendo que o segmento OD mede $12\ cm$, os ângulos $C\hat{O}D = 30°$ e $O\hat{A}B = 15°$ e que a área do triângulo CDO é igual a $18\ cm^2$.



a) $5\pi\ cm$

b) $12\ cm$

c) $5\ cm$

d) $12\pi\ cm$

e) $10\pi\ cm$

Comentários

Seja $CO = R$. Assim,

$$S_{CDO} = \frac{OD \cdot CO \cdot \operatorname{sen} D\hat{O}C}{2} \Rightarrow 18 = \frac{12 \cdot R \cdot \operatorname{sen} 30°}{2} \Rightarrow 36 = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot R \Rightarrow R = 6\ cm$$

Como $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 15°$ já que OAB é um triângulo isósceles, temos:

$$A\hat{O}B = 150° = \frac{5\pi}{6}$$

E então o arco AB é dado por:

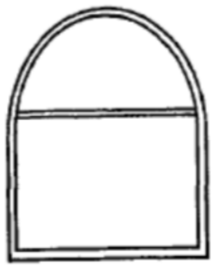
$$A\hat{O}B = \frac{m(\widehat{AB})}{R} \Rightarrow \frac{5\pi}{6} = \frac{m(\widehat{AB})}{6} \Rightarrow m(\widehat{AB}) = 5\pi\ cm$$

Gabarito: "a".

---

75. (EFOMM/2015)

Deseja-se construir uma janela que possuindo a forma de um retângulo sob um semicírculo, conforme figura abaixo, permita o máximo de passagem de luz possível. Sabe-se que: o vidro do retângulo será transparente; o vidro do semicírculo será colorido, transmitindo, por unidade de área, apenas metade da luz incidente em relação ao vidro transparente; o perímetro total da janela é fixo e vale p. Nessas condições, determine as medidas da parte retangular da janela, em função do perímetro p. Obs: Ignore a espessura do caixilho.



a) $\frac{4}{3\pi+8}p$ e $\frac{\pi+4}{2(3\pi+8)}p$

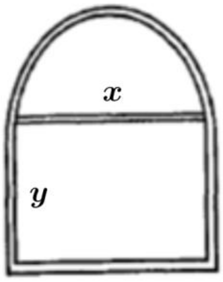
b) $\frac{2}{3\pi+8}p$ e $\frac{\pi+4}{4(3\pi+8)}p$

c) $\frac{8}{3\pi+8}p$ e $\frac{\pi+4}{3\pi+8}p$

d) $\frac{6}{3\pi+8}p$ e $\frac{3(\pi+4)}{4(3\pi+8)}p$

e) $\frac{4}{3\pi+8}p$ e $\frac{8}{3\pi+8}p$

Comentários



Seja x a base do retângulo e y a altura. Logo, o raio do semicírculo vale $r = \frac{x}{2}$. O perímetro da janela é:

$$p = x + 2y + \frac{2\pi r}{2} \Rightarrow p - x - \frac{\pi x}{2} = 2y \Rightarrow y = \frac{2p - 2x - \pi x}{4}$$

Assim, as áreas das partes da janela são dadas por:

$$S_{Retângulo} = xy \ e \ S_{SemiCírculo} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi x^2}{8}$$

A luminosidade é proporcional à área, logo vamos trabalhar com a área total (incluindo a diferença de transparência):

$$S = S_R + \frac{1}{2} S_{SC} = xy + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi x^2}{8}\right)$$

$$S = x\left(\frac{2p - 2x - \pi x}{4}\right) + \frac{\pi x^2}{16} = \frac{4x(2p - 2x - \pi x) + \pi x^2}{16} = \frac{8px - 8x^2 - 4\pi x^2 + \pi x^2}{16}$$

$$S = \frac{-(3\pi + 8)x^2 + 8px}{16}$$

Logo, trata-se de uma função quadrática em x com concavidade para baixo e, portanto, possui um máximo.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(8p)}{2(-3\pi - 8)} = \frac{4}{3\pi + 8} p$$

$$y = \frac{2p - (2 + \pi)\frac{4p}{3\pi + 8}}{4} = \frac{6p\pi + 16p - 8p - 4p\pi}{4(3\pi + 8)} = \frac{2p\pi + 8p}{4(3\pi + 8)} = \frac{\pi + 4}{2(3\pi + 8)} p$$

Gabarito: “a”.

---

76. (EFOMM/2014)

A diferença entre o comprimento x e a largura y de um retângulo é de 2 cm. Se a sua área é menor ou igual a 35 cm^2, então o valor de x, em cm, será:

a) $0 < x < 7$

b) $0 < x < 5$

c) $2 < x \leq 5$

d) $2 < x \leq 7$

e) $2 < x < 7$

Comentários

Do enunciado,

$$x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$$
$$xy \leq 35$$

Assim,

$$x(x-2) \leq 35 \Rightarrow x^2 - 2x - 35 \leq 0$$

Resolvendo a inequação:

$$raízes: x = -(-1) \pm \sqrt{36} = 1 \pm 6 = -5 \; ou \; 7$$
$$x^2 - 2x - 35 \leq 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq 7$$

y deve ser um número positivo, logo:

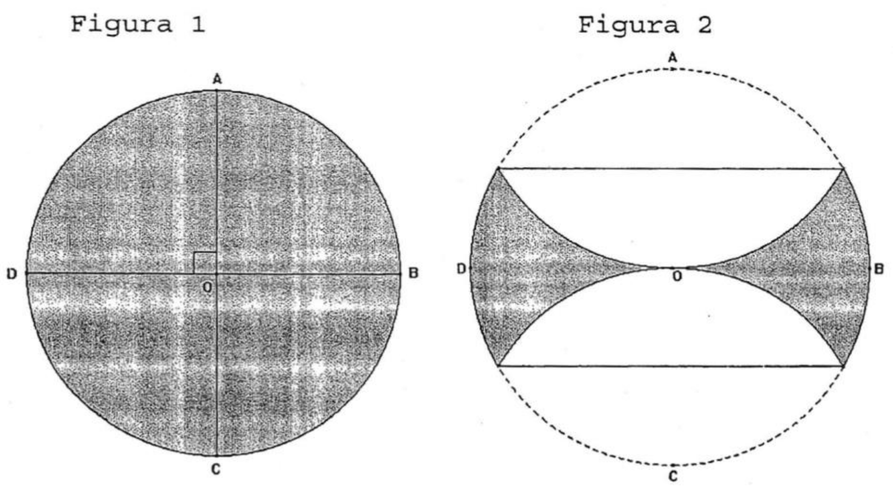
$$y > 0 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$
$$\therefore 2 < x \leq 7$$

Gabarito: "d".

---

77. (EFOMM/2010)

João construiu um círculo de papel com centro O e raio $4cm$ (figura 1). Traçou dois diâmetros AC e BD perpendiculares e, em seguida, dobrou o papel fazendo coincidir A, O e C, conforme sugere a Figura 2.



A área da parte do círculo não encoberta pelas dobras sombreada na Figura 2, é igual a

a) $\frac{1}{3}(96 - 16\pi)cm^2$

b) $\frac{1}{3}(16\pi - 48)cm^2$

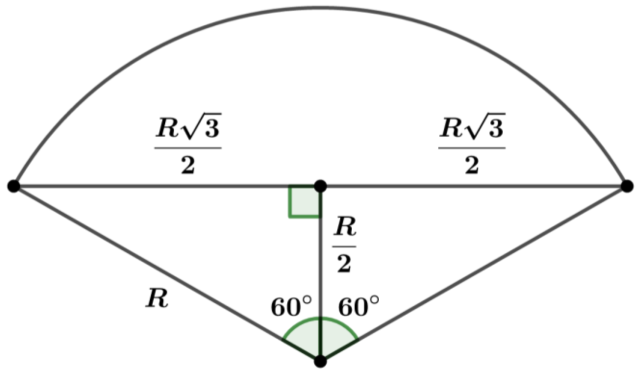
c) $\frac{1}{3}(16\pi - 12\sqrt{3})cm^2$

d) $\frac{1}{3}(16\pi + 12\sqrt{3})cm^2$

e) $\frac{1}{3}(32\pi + 12\sqrt{3})cm^2$

Comentários

Vamos calcular o valor da área dos segmentos circulares para podermos subtrai-las do círculo. Perceba que o círculo foi dobrado a uma distância de $R/2$ do seu centro, sendo R o seu raio. Assim, temos:



A área de um segmento corresponde à área de um setor de 120° menos um triângulo é:

$$S_S = \pi R^2 \frac{120°}{360°} - \frac{\frac{R}{2} \cdot R\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$

Assim, a área da parte não encoberta é:

$$S = \pi R^2 - 4S_S \to S = \pi R^2 - 4\frac{\pi R^2}{3} + 4\frac{R^2\sqrt{3}}{4} \to S = \frac{R^2(3\sqrt{3} - \pi)}{3}$$

Logo, para $R = 4cm$:

$$S = \frac{16(3\sqrt{3} - \pi)}{3} = \frac{1}{3}(48\sqrt{3} - 16\pi)cm^2$$

Percebe-se que não há alternativa compatível.

Gabarito: "ANULADA".

78. (EFOMM/2010)

As medidas dos lados $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ de um triângulo ABC formam, nesta ordem, uma progressão aritmética crescente. Os ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ desse triângulo possuem a seguinte propriedade: $sen^2\hat{A} + sen^2\hat{B} - sen^2\hat{C} - 2 \cdot sen\,\hat{A} \cdot sen\,\hat{B} \cdot \cos\hat{C} = \cos^2\hat{C}$. Se o perímetro do triângulo ABC mede $3\sqrt{3}m$, sua área, em m^2, é igual a

a) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

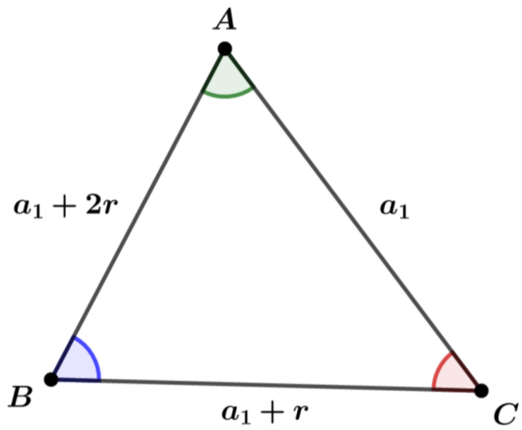
b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{9}{8}$

d) 2

e) 4

Comentários



Como os lados estão em PA:

$$AC = a_1, BC = a_1 + r, AB = a_1 + 2r$$

Temos que o perímetro mede $3\sqrt{3}$:

$$2p = a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r \Rightarrow 3a_1 + 3r = 3\sqrt{3} \Rightarrow a_1 + r = \sqrt{3}$$

Pela lei dos cossenos:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \hat{C}$$

Pela lei dos senos:

$$\frac{AB}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{AC}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{BC}{\text{sen } \hat{A}}$$

Assim, obtemos que

$$i)\ BC = \frac{AC \text{ sen } \hat{A}}{\text{sen } \hat{B}} \Rightarrow AC \cdot BC = AC^2 \frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{sen } \hat{B}}$$

$$ii)\ AB^2 = AC^2 \frac{\text{sen}^2\ \hat{C}}{\text{sen}^2\ \hat{B}}$$

$$iii)\ BC^2 = AC^2 \frac{\text{sen}^2\ \hat{A}}{\text{sen}^2\ \hat{B}}$$

Substituindo (i), (ii) e (iii) na lei dos cossenos:

$$AC^2 \frac{\text{sen}^2\ \hat{C}}{\text{sen}^2\ \hat{B}} = AC^2 + AC^2 \frac{\text{sen}^2\ \hat{A}}{\text{sen}^2\ \hat{B}} - 2AC^2 \frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{sen } \hat{B}} \cos \hat{C}$$

$$\text{sen}^2\ \hat{C} = \text{sen}^2\ \hat{B} + \text{sen}^2\ \hat{A} - 2 \text{ sen } \hat{A} \text{ sen } \hat{B} \cos \hat{C}$$

$$\text{sen}^2\ \hat{A} + \text{sen}^2\ \hat{B} - \text{sen}^2\ \hat{C} - 2 \text{ sen } \hat{A} \text{ sen } \hat{B} \cos \hat{C} = 0$$

Do enunciado:

$$sen^2\hat{A} + sen^2\hat{B} - sen^2\hat{C} - 2 \cdot sen\ \hat{A} \cdot sen\ \hat{B} \cdot \cos \hat{C} = \cos^2 \hat{C}$$

Assim,

$$\cos^2 \hat{C} = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

Portanto, temos um triângulo pitagórico:

$$(a_1 + 2r)^2 = a_1^2 + (a_1 + r)^2$$

$$a_1 + r = \sqrt{3}$$

Substituindo uma na outra:

$$\left(\sqrt{3} + r\right)^2 = \left(\sqrt{3} - r\right)^2 + \sqrt{3}^2$$

$$3 + r^2 + 2\sqrt{3}r = 3 + r^2 - 2\sqrt{3}r + 3$$

$$4\sqrt{3}r = 3 \Rightarrow r = \frac{3}{4\sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow a_1 = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Por fim, a área solicitada vale:

$$S = a_1 \cdot \frac{a_1 + r}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} . \sqrt{3}}{2} = \frac{9}{8}$$

Gabarito: “c”.

---

79. (EFOMM/2010)

Um triângulo obtusângulo ABC tem 18 cm de perímetro e as medidas de seus lados formam uma progressão aritmética crescente (AB, AC, BC). Os raios das circunferências inscrita e circunscrita a esse triângulo ABC medem, respectivamente, r e R. Se $sen\,\widehat{A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ e $sen\,\widehat{B} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$, então o produto $r \cdot R$, em cm^2, é igual a

a) $\frac{35}{9}$

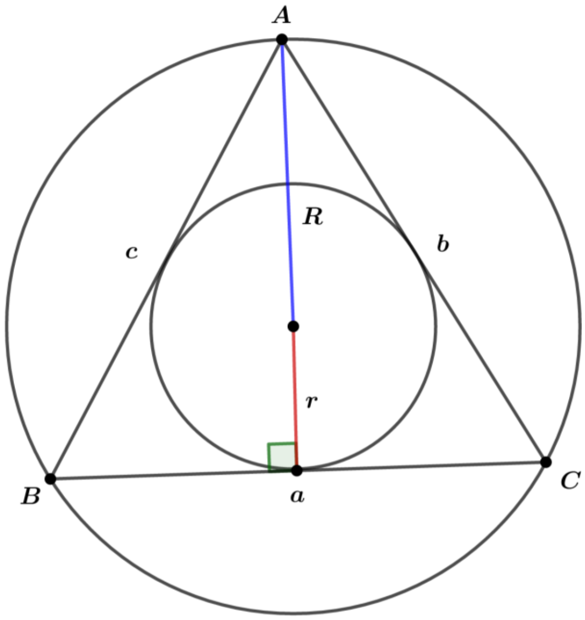
b) $6\sqrt{6}$

c) $3\sqrt{15}$

d) $\frac{16}{3}$

e) 1

Comentários



Lados em PA:

$$(c, b, a) = (b - q, b, b + q)$$

Como o perímetro vale 18, temos:

$$2p = b - q + b + b + q \Rightarrow 18 = 3b \Rightarrow b = 6$$

Da Lei dos Senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \Rightarrow \frac{6 + q}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{6}{\frac{3\sqrt{15}}{16}} \Rightarrow 24 + 4q = 32 \Rightarrow 4q = 8 \Rightarrow q = 2$$

Logo, temos dos lados do triângulo:

$$(c, b, a) = (4, 6, 8)$$

A área do triângulo é:

$$S_{ABC} = p \cdot r = \frac{abc}{4R} = \frac{bc \operatorname{sen} \hat{A}}{2}$$

$$9r = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{4R} = \frac{6 \cdot 4 \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}{2} = 3\sqrt{15}$$

Assim,

$$9r = 3\sqrt{15} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{15}}{3} cm$$

$$\frac{48}{R} = 3\sqrt{15} \Rightarrow R = \frac{16\sqrt{15}}{15} cm$$

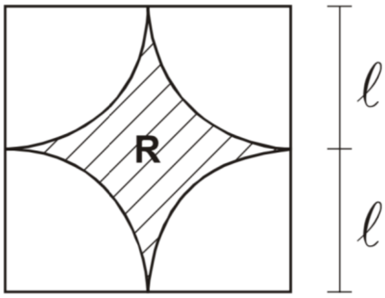
Portanto,

$$r \cdot R = \frac{16}{3}\ cm^2$$

Gabarito: "d".

80. (EFOMM/2006)

A região hachurada R da figura é limitada por arcos de circunferência centrados nos vértices do quadrado de lado $2l$. A área de R é



a) $\frac{\pi l^2}{2}$

b) $(\pi - 2\sqrt{2})l^2$

c) $\left(\pi - \frac{4}{3}\right)l^2$

d) $(4 - \pi)l^2$

e) $\sqrt{2}l^2$

Comentários

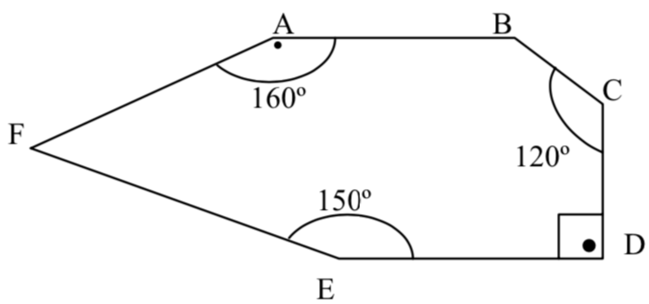
A área sombreada se refere à área do quadrado subtraída por 4 quartos de circunferência de raio l. Assim,

$$S_S = S_Q - 4S_C \Rightarrow S_S = (2l)^2 - 4\left(\frac{\pi l^2}{4}\right) \Rightarrow S_S = 4l^2 - \pi l^2 = l^2(4 - \pi)$$

Gabarito: "d".

81. (EFOMM/2005)

No hexágono $ABCDEF$, abaixo, a medida do ângulo $A\hat{B}C$ é quatro vezes a medida do ângulo $E\hat{F}A$. Determine a medida do ângulo obtuso formado pelas bissetrizes de $A\hat{B}C$ e $E\hat{F}A$.



a) $70°$

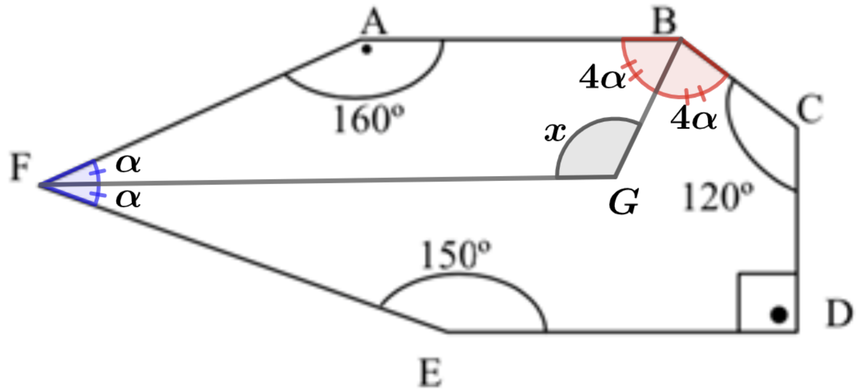
b) $80°$

c) $85°$

d) $100°$

e) $120°$

Comentários



Primeiramente, a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $S = 180°(n - 2)$.

Da soma dos ângulos internos do hexágono:

$$2\alpha + 150° + 90° + 120° + 8\alpha + 160° = 180°(6-2)$$

$$10\alpha + 520° = 720° \Rightarrow \alpha = 20°$$

No quadrilátero FGBA, em que G é o ponto comum das bissetrizes, temos:

$$20° + x + 80° + 160° = 180° \cdot 2$$

$$x = 360° - 260°$$

$$\therefore x = 100°$$

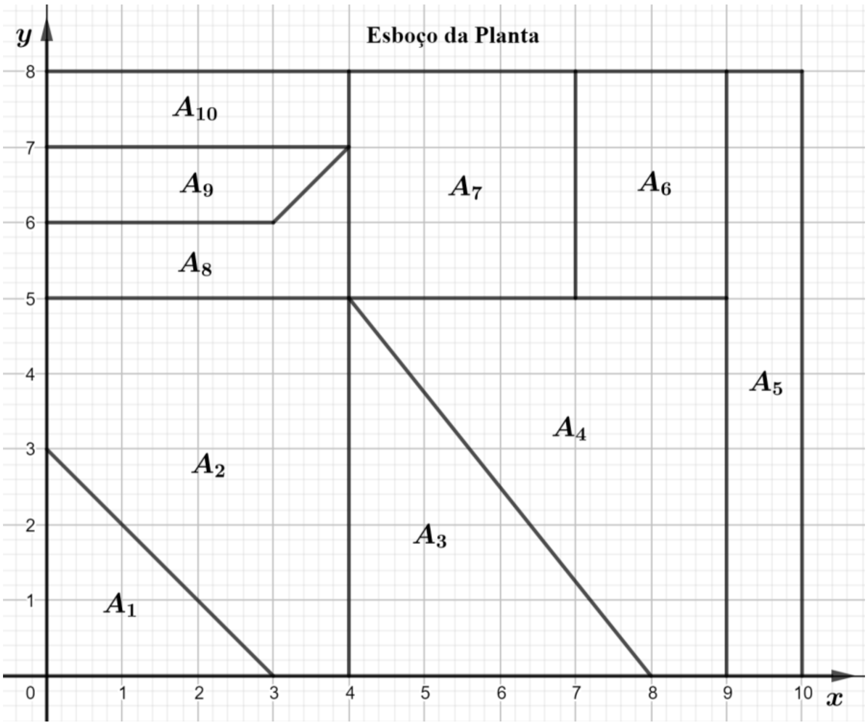
Gabarito: "d".

---

82. (AFA/2021)

Para construir um viaduto, a prefeitura de uma cidade precisará desapropriar alguns locais de uma determinada quadra da cidade.

Para identificar o que precisará ser desapropriado, fez-se um esboço da planta dessa quadra no qual os locais foram representados em um plano cartesiano e nomeados de A_1 até A_{10}, conforme figura a seguir.



O viaduto estará representado pela região compreendida entre as retas de equações $r: -\frac{1}{2}x - y + 8 = 0$ e $s: -x - 2y + 10 = 0$.

Um local será inteiramente desapropriado se o viaduto passar por qualquer trecho de seu território.

Se cada unidade do plano no esboço da planta equivale a 10m na situação real, então a área total dos locais dessa quadra que precisará ser desapropriada, em m^2, é igual a

a) 5950

b) 6450

c) 6950

d) 7450

Comentários

Escrevendo as retas na forma reduzida:

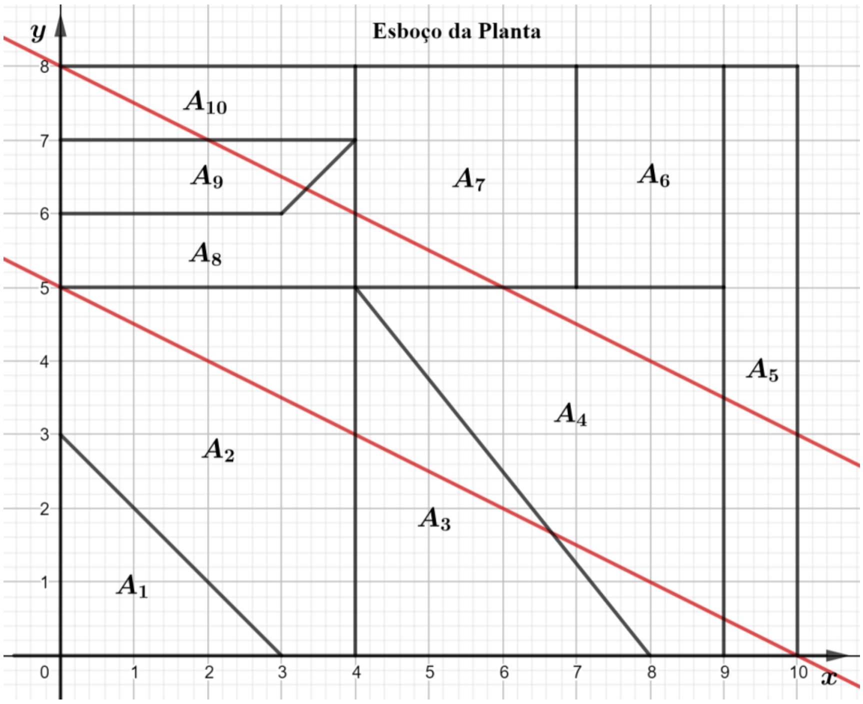
$$r: y = -\frac{x}{2} + 8$$

$$\Rightarrow (16, 0)\ e\ (0, 8) \in r$$

$$s: y = -\frac{x}{2} + 5$$

$$\Rightarrow (10, 0)\ e\ (0, 5) \in r$$

Inserindo as retas no gráfico, obtemos:



Note que os únicos locais que não precisam ser desapropriados são A_1 e A_6. Assim, a área total a ser desapropriada é:

$$A_T = (10 \cdot 8 - A_1 - A_6) \cdot 10 \cdot 10$$

$$A_T = \left(10 \cdot 8 - \frac{3 \cdot 3}{2} - 2 \cdot 3\right) \cdot 10 \cdot 10$$

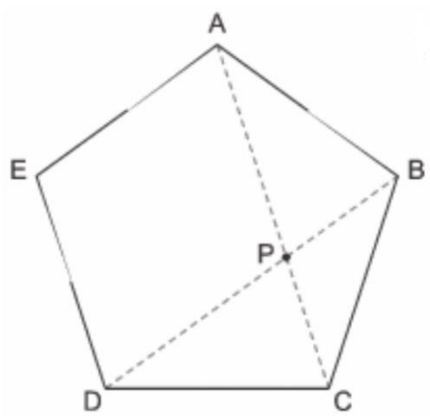
$$A_T = (80 - 4{,}5 - 6) \cdot 100$$

$$A_T = 6950\ m^2$$

Gabarito: C

83. (AFA-2018)

A figura a seguir é um pentágono regular de lado 2cm.



Os triângulos DBC e BCP são semelhantes.

A medida de $\overline{AC}$, uma das diagonais do pentágono regular, em cm, é igual a:

a) $1+\sqrt{5}$

b) $-1 + \sqrt{5}$

c) $2 + \frac{\sqrt{5}}{2}$

d) $2\sqrt{5} - 1$

Comentários

Tendo em vista o teorema de Ptolomeu (ADCB é um quadrilátero inscritível, pois os ângulos opostos somam 180°), temos:

$$AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$$

Logo,

$$d^2 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot d \Rightarrow d^2 - 2d - 4 = 0$$

Raízes:

$$d = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

Como $d > 0$:

$$\Rightarrow d = 1 + \sqrt{5}\ cm$$

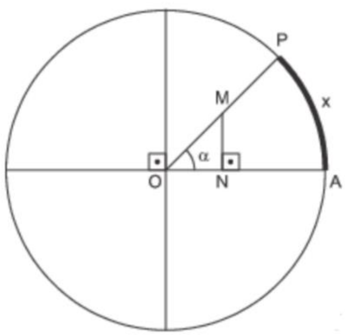
Observação: Todo polígono regular é inscritível, logo o quadrilátero ABCD também é inscritível.

Gabarito: "a".

---

84. (AFA/2018)

No círculo do centro O a seguir, $\overline{OA} = 2m$, M é o ponto médio de $\overline{OP}$ e a área y do triângulo ONM é dada em função do comprimento x do arco $\widehat{AP}$, com $0 < x < \frac{\pi}{2}$.



Assim sendo, é correto afirmar que y

a) é decrescente se $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) assume valor máximo $0,125m^2$.

c) pode assumir valor igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}m^2$.

d) é sempre um número racional.

Comentários

Inicialmente, o ângulo x (em radianos) pode ser escrito da forma:

$$\alpha = \frac{x}{R} \Rightarrow \alpha = \frac{x}{2}$$

Como M é o ponto médio de $\overline{OP}$, temos $\overline{OM} = \overline{MP} = 1m$. Assim, a área de ONM é dada por:

$$S_{ONM} = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{ON}}{2} = \frac{1 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot 1 \cdot \cos \alpha}{2} \Rightarrow S_{ONM} = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{4}$$

$$\Rightarrow S_{ONM} = \frac{\operatorname{sen}\left(2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{4} \Rightarrow S_{ONM} = y = \frac{\operatorname{sen} x}{4}\ m^2$$

A questão não possui gabarito, afinal todas as alternativas estão falsas:

a) $sen\ x$ é crescente nesse intervalo.

b) O valor máximo ocorre quando $sen\ x = 1$, logo, $S_{max} = \frac{1}{4} = 0{,}25m^2$.

c) A área não pode ter valor maior que 0,25m². Veja que:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cong \frac{1{,}4}{2} = 0{,}7 > 0{,}25$$

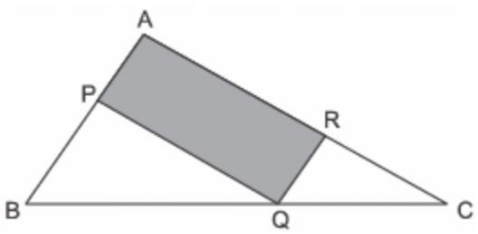
d) Se $x = \frac{\pi}{4}$, então $S = \frac{\sqrt{2}}{8} \notin \mathbb{Q}$.

Gabarito: “ANULADA”.

---

85. (AFA/2017)

Considere, no triângulo ABC abaixo, os pontos $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{BC}$, $R \in \overline{AC}$ e os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ paralelos, respectivamente, a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.



Sabendo que $\overline{BQ} = 3cm$, $\overline{QC} = 1cm$ e que a área do triângulo ABC é $8cm^2$, então a área do paralelogramo hachurado, em cm^2, é igual a

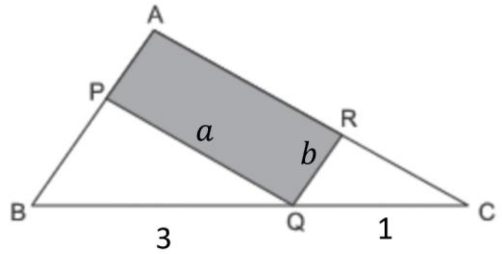
a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

Comentários



Como os segmentos são paralelos, temos que os triângulos ABC, PBQ e RQC são semelhantes.

Da semelhança de triângulos, temos:

$$\Delta PBQ \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{[PBQ]}{[ABC]} = \left(\frac{BQ}{BC}\right)^2 \Rightarrow [PBQ] = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 8 = \frac{9}{2} = 4{,}5cm^2$$

$$\Delta RQC \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{[RQC]}{[ABC]} = \left(\frac{QC}{BC}\right)^2 \Rightarrow [RQC] = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 8 = \frac{1}{2} = 0{,}5cm^2$$

A área pedida é dada por:

$$[APQR] = [ABC] - [PBQ] - [RQC] = 8 - 4{,}5 - 0{,}5 = 3\ cm^2$$

Gabarito: "b".

---

86. (AFA/2015)

Seja o quadrado $ABCD$ e o ponto E pertencente ao segmento $\overline{AB}$. Sabendo-se que a área do triângulo ADE, a área do trapézio $BCDE$ e a área do quadrado $ABCD$ formam juntas, nessa ordem, uma Progressão Aritmética (P.A.) e a soma das áreas desses polígonos é igual a $800cm^2$, tem-se que a medida do segmento $\overline{EB}$

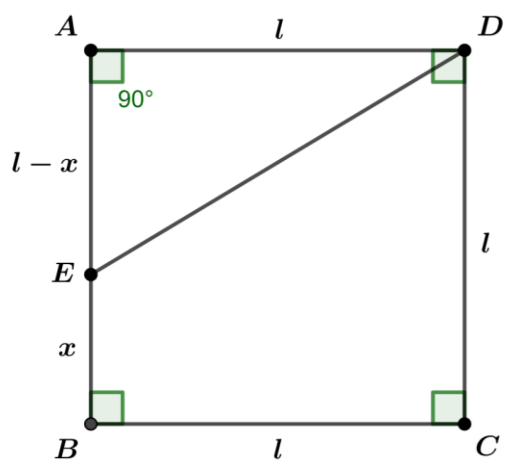
a) é fração própria.

b) é decimal exato.

c) é decimal não-exato e periódico.

d) pertence ao conjunto $A = \mathbb{R}_+^* - \mathbb{Q}_+$

Comentários



Da imagem, temos que $S_{BCDE} + S_{ADE} = S_{ABCD}$.

O enunciado afirma que $(S_{ADE}, S_{BCDE}, S_{ABCD})$ formam uma PA cuja soma é $800\ cm^2$, logo:

$$S_{ADE} + S_{BCDE} + S_{ABCD} = 800cm^2 \Rightarrow 2S_{ABCD} = 800 \Rightarrow S_{ABCD} = 400 \Rightarrow l^2 = 400 \therefore l = 20\ cm$$

Assim, como as áreas estão em PA:

$$2S_{BCDE} = S_{ADE} + S_{ABCD}$$

$$2\left[\frac{(20+x)\cdot 20}{2}\right] = \frac{20(20-x)}{2} + 400$$

$$400 + 20x = 200 - 10x + 400$$

$$30x = 200$$

$$x = \frac{20}{3} = 6{,}66\ldots$$

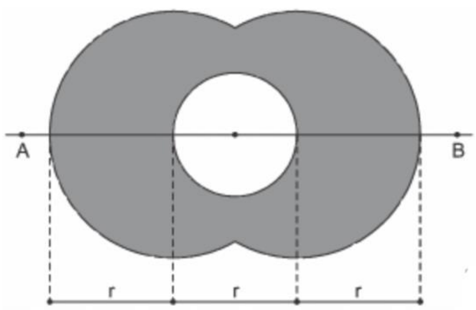
Portanto, $\overline{EB}$ é um decimal não-exato e periódico.

Gabarito: “c”.

---

87. (AFA/2014)

Na figura abaixo, os três círculos têm centro sobre a reta AB e os dois de maior raio têm centro sobre a circunferência de menor raio.



A expressão que fornece o valor da área sombreada é

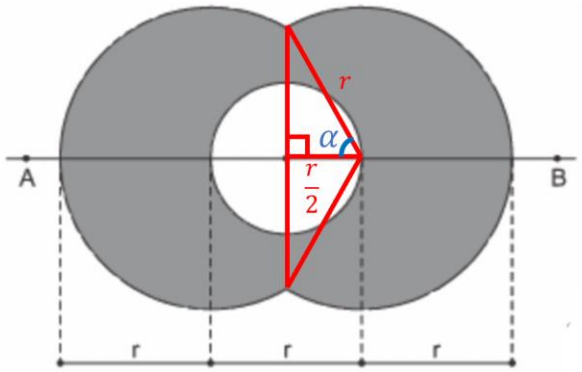
a) $\frac{17\pi - 6\sqrt{3}}{9} r^2$

b) $\frac{11\pi + 9\sqrt{3}}{12} r^2$

c) $\frac{15\pi - 4\sqrt{3}}{9} r^2$

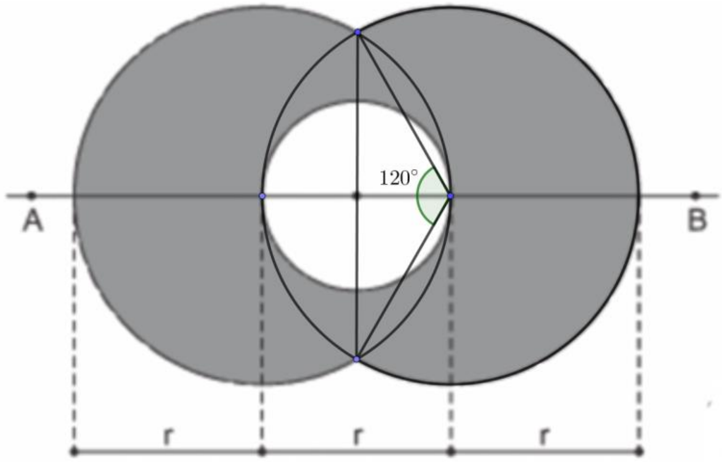
d) $\frac{13\pi + 6\sqrt{3}}{12} r^2$

Comentários



Podemos calcular o ângulo α:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{r}{2}}{r} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°$$



Observe que, quando somamos as áreas dos dois círculos maiores, as áreas dos segmentos circulares de 120° são contadas duas vezes.

Logo, a área pedida é igual à área dos dois círculos maiores menos a área de dois segmentos de 120° menos a área do círculo menor.

$$S = \pi r^2 + \pi r^2 - 2\left[\pi r^2 \frac{120°}{360°} - \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{r}{2}\right)}_{altura\ \Delta}\underbrace{\left(r\sqrt{3}\right)}_{base\ \Delta}\right] - \frac{\pi r^2}{4}$$

$$S = 2\pi r^2 - \frac{2\pi r^2}{3} + \frac{r^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi r^2}{4} = \pi r^2\left(2 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$$

$$S = \frac{\pi r^2(24 - 8 - 3)}{12} + \frac{6\sqrt{3}}{12}r^2$$

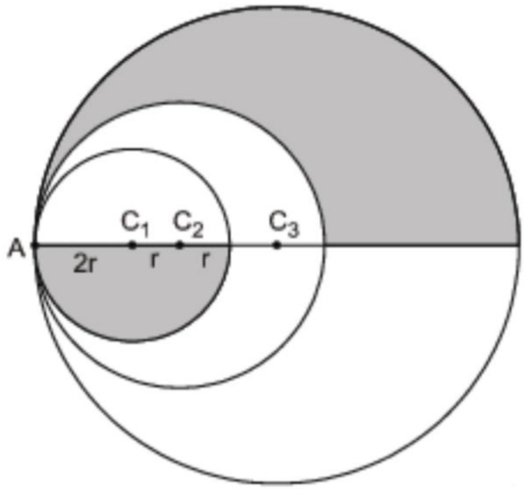
$$S = \frac{13\pi + 6\sqrt{3}}{12}r^2$$

Gabarito: “d”.

---

88. (AFA/2012)

Conforme a figura abaixo, A é o ponto de tangência das circunferências de centros C_1, C_2 e C_3. Sabe-se que os raios dessas circunferências formam uma progressão geométrica crescente.



Se os raios das circunferências de centros C_1 e C_2 medem, respectivamente, $2r$ e $3r$, então a área da região sombreada vale, em unidades de área,

a) $\frac{55}{8}\pi r^2$

b) $\frac{29}{4}\pi r^2$

c) $\frac{61}{8}\pi r^2$

d) $8\pi r^2$

Comentários

Inicialmente, como os raios estão em PG, temos:

$$(r_1, r_2, r_3) = (2r, 3r, r_3)$$

$$q = \frac{3r}{2r} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow r_3 = 3r \cdot q = \frac{9}{2}r$$

Sejam S_1, S_2, S_3 as áreas das circunferências de centros C_1, C_2, C_3, respectivamente. Logo, a área pedida é dada por:

$$S = \frac{S_1}{2} + \left(\frac{S_3}{2} - \frac{S_2}{2}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}\pi(2r)^2 + \left(\frac{1}{2}\pi\left(\frac{9}{2}r\right)^2 - \frac{1}{2}\pi(3r)^2\right)$$

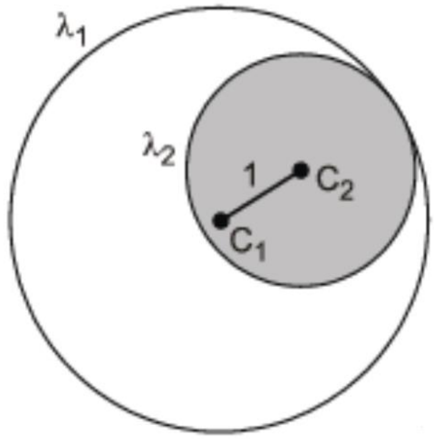
$$S = 2\pi r^2 + \frac{81}{8}\pi r^2 - \frac{9}{2}\pi r^2$$

$$S = \frac{\pi r^2(16 + 81 - 36)}{4} = \frac{61\pi r^2}{8}$$

Gabarito: “c”.

89. (AFA/2011)

As circunferências λ_1 e λ_2 da figura abaixo são tangentes interiores e a distância entre os centros C_1 e C_2 é igual a 1cm.



Se a área sombreada é igual à área não sombreada na figura, é correto afirmar que o raio λ_2, em cm, é um número do intervalo.

a) $\left]2, \frac{11}{5}\right[$

b) $\left]\frac{11}{5}, \frac{23}{10}\right[$

c) $\left]\frac{23}{10}, \frac{5}{2}\right[$

d) $\left]\frac{5}{2}, \frac{13}{5}\right[$

Comentários

Temos que a área sombreada é igual à área não sombreada:

$$\pi R_2^2 = \pi R_1^2 - \pi R_2^2$$

$$2\pi R_2^2 = \pi R_1^2$$

$$R_2\sqrt{2} = R_1$$

Assim, pelo desenho temos também que $R_1 - R_2 = 1cm$:

$$R_2\sqrt{2} - R_2 = 1$$

$$R_2\left(\sqrt{2} - 1\right) = 1$$

$$R_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$\Rightarrow R_2 = 1 + \sqrt{2} \cong 2{,}41\ cm$$

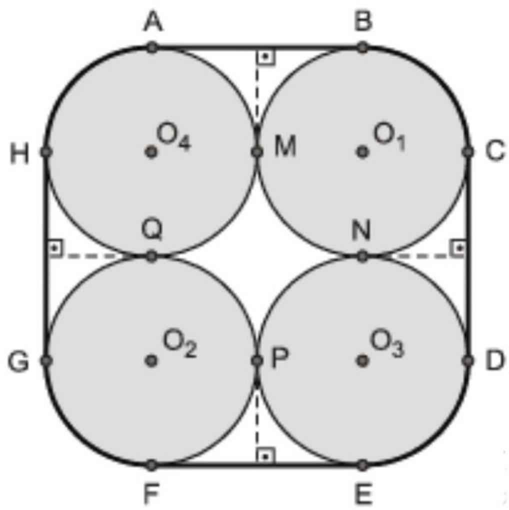
Veja que

$$\frac{23}{10} < 2{,}41 < \frac{5}{2}$$

Gabarito: "c".

90. (AFA/2011)

Na figura abaixo, têm-se quatro círculos congruentes de centros O_1, O_2, O_3 e O_4 e de raio igual a $10cm$. Os pontos M, N, P, Q são pontos de tangência entre os círculos e A, B, C, D, E, F, G, H são pontos de tangência entre os círculos e a correia que os contorna.



Sabendo-se que essa correia é inextensível, seu perímetro, em cm, é igual a

a) $2(\pi + 40)$

b) $5(\pi + 16)$

c) $20(\pi + 4)$

d) $5(\pi + 8)$

Comentários

Inicialmente, podemos dividir o perímetro em duas partes: o trecho reto e os quartos de circunferência. Perceba que o trecho reto é formado pela soma da medida dos segmentos:

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} + \overline{GH} = \overline{O_4O_1} + \overline{O_1O_3} + \overline{O_3O_2} + \overline{O_2O_4} = 2r + 2r + 2r + 2r = 8r$$

Além disso, somando-se os quartos de circunferência, temos o perímetro de 1 circunferência, veja:

$$\widehat{HA} + \widehat{BC} + \widehat{DE} + \widehat{FG} = \frac{1}{4}(2\pi r) + \frac{1}{4}(2\pi r) + \frac{1}{4}(2\pi r) + \frac{1}{4}(2\pi r) = 2\pi r$$

Portanto, o perímetro da correia é:

$$2p = 8r + 2\pi r = 80 + 20\pi = 20(\pi + 4)\ cm$$

Gabarito: "c".

6. QUESTÕES NÍVEL 3

91. (ITA/2018)

Em um triângulo de vértices A, B e C são dados $\hat{B} = \frac{\pi}{2}, \hat{C} = \frac{\pi}{3}$ e o lado $BC = 1cm$. Se o lado $\overline{AB}$ é o diâmetro de uma circunferência, então a área da parte do triângulo ABC externa à circunferência, em cm^2, é

a) $\frac{\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16}$

b) $\frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}$

c) $\frac{5\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$

d) $\frac{5\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{8}$

e) $\frac{5\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16}$

92. (ITA/2017)

Seja ABC um triângulo cujos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medem 6 cm, 8 cm e 10 cm, respectivamente. Considere os pontos M e N sobre o lado BC tais que AM é a altura relativa a $\overline{BC}$ e N é o ponto médio de $\overline{BC}$. A área do triângulo AMN, em cm², é

a) 3,36.

b) 3,60.

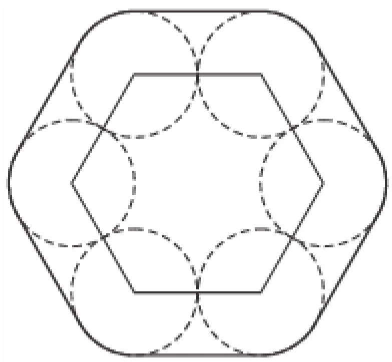
c) 4,20.

d) 4,48.

e) 6,72.

93. (ITA/2017)

Seis circunferências de raio 5 cm são tangentes entre si duas a duas e seus centros são vértices de um hexágono regular, conforme a figura abaixo.



O comprimento de uma correia tensionada que envolve externamente as seis circunferências mede, em cm,

a) $18 + 3\pi$.

b) $30 + 10\pi$.

c) $18 + 6\pi$.

d) $60 + 10\pi$.

e) $36 + 6\pi$.

94. (ITA/2016)

Um triângulo está inscrito numa circunferência de raio 1 cm. O seu maior lado mede 2 cm e sua área é de $\frac{1}{\sqrt{2}}cm^2$**. Então, o menor lado do triângulo, em cm, mede**

a) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

95. (ITA/2016)

Sejam λ **uma circunferência de raio 4 cm e** $\overline{PQ}$ **uma corda em** λ **de comprimento 4 cm. As tangentes a** λ **em** P **e em** Q **interceptam-se no ponto** R **exterior a** λ**. Então, a área do triângulo em** PQR**, em cm², é igual a**

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

96. (ITA/2016)

Um hexágono convexo regular H **e um triângulo equilátero** T **estão inscritos em circunferência de raios** R_H **e** R_T**, respectivamente. Sabendo-se que** H **e** T **têm mesma área, determine a razão** R_H/R_T**.**

97. (ITA/2016)

Seja P_n um polígono convexo regular de n lados, com $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. P_n é inscritível numa circunferência.

II. P_n é circunscritível a uma circunferência.

III. Se l_n é o comprimento de um lado de P_n e a_n é o comprimento de um apótema de P_n, então $\frac{a_n}{l_n} \leq 1$ para todo $n \geq 3$.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) apenas I e II.

e) I, II e III.

98. (ITA/2014)

Em um triângulo isósceles ABC, cuja área mede $48\ cm^2$, a razão entre as medidas da altura $\overline{AP}$ e da base $\overline{BC}$ é igual a $2/3$. Das afirmações abaixo:

I. As medianas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $\sqrt{97}\ cm$;

II. O baricentro dista $4\ cm$ do vértice A;

III. Se α é o ângulo formado pela base $\overline{BC}$ com a mediana $\overline{BM}$, relativa ao lado $\overline{AC}$, então $\cos\alpha = 3/\sqrt{97}$,

é (são) verdadeira(s)

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas III.

d) Apenas I e III.

e) Apenas II e III.

99. (ITA/2011)

Considere um triângulo equilátero cujo lado mede $2\sqrt{3}\ cm$. No interior deste triângulo existem 4 círculos de mesmo raio r. O centro de um dos círculos coincide com o baricentro do triângulo. Este círculo tangência externamente os demais e estes, por sua vez, tangenciam 2 lados do triângulo.

a) Determine o valor de r.

b) Calcule a área do triângulo não preenchida pelos círculos.

c) Para cada círculo que tangência o triângulo, determine a distância do centro ao vértice mais próximo.

100. (ITA/2011)

Sejam $ABCD$ um quadrado e E um ponto sobre $\overline{AB}$. Considere as áreas do quadrado $ABCD$, do trapézio $BEDC$ e do triângulo ADE. Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é 200 cm², a medida do segmento $\overline{AE}$, em cm, é igual a

a) $10/3$

b) 5

c) $20/3$

d) $25/3$

e) 10

101. (ITA/2011)

Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se ainda que $\overline{AB}$ é o diâmetro, $\overline{BC}$ mede 6 cm e a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ intercepta a circunferência no ponto D. Se α é a soma das áreas dos triângulos ABC e ABD e β é a área comum aos dois, o valor de $\alpha - 2\beta$, em cm², é igual a

a) 14.

b) 15.

c) 16.

d) 17.

e) 18.

102. (ITA/2008)

Considere o quadrado $ABCD$ com lados de 10m de comprimento. Seja M um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ e N um ponto sobre o lado $\overline{AD}$, equidistantes de A. Por M traça-se uma reta r paralela ao lado $\overline{AD}$ e por N uma reta s paralela ao lado $\overline{AB}$, que se interceptam no ponto O. Considere os quadrados $AMON$ e $OPCQ$, onde P é a intersecção de s com o lado $\overline{BC}$ e Q é a intersecção de r com o lado

$\overline{DC}$. Sabendo-se que as áreas dos quadrados $AMON$, $OPCQ$ e $ABCD$ constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica, então a distância entre os pontos A e M é igual, em metros, a

a) $15 + 5\sqrt{5}$

b) $10 + 5\sqrt{5}$

c) $10 - \sqrt{5}$

d) $15 - 5\sqrt{5}$

e) $10 - 3\sqrt{5}$

103. (ITA/2008)

Sejam r e s duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja P um ponto no plano definido por r e s e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de r. As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm² e cm, do triângulo equilátero PQR cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s, são iguais a

a) $\frac{175\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$

b) $\frac{175\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$

c) $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$

d) $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$

e) 700 e $10\sqrt{21}$

104. (ITA/2008)

Um triângulo acutângulo de vértices A, B e C está inscrito numa circunferência de raio $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. Sabe-se que $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{5}$ e $\overline{BC}$ mede $2\sqrt{2}$. Determine a área do triângulo ABC.

105. (ITA/2007)

Um retângulo cujos lados medem B e H, um triângulo isósceles em que a base e a altura medem, respectivamente, B e H, e o círculo inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então B/H é uma raiz do polinômio

a) $\pi^3x^3 + \pi^2x^2 + \pi x - 2 = 0.$

b) $\pi^2x^3 + \pi^3x^2 + x + 1 = 0.$

c) $\pi^3x^3 - \pi^2x^2 + \pi x + 2 = 0.$

d) $\pi x^3 - \pi^2x^2 + 2\pi x - 1 = 0.$

e) $x^3 - 2\pi^2x^2 + \pi x - 1 = 0.$

106. (ITA/2007)

Sejam P_1 e P_2 octógonos regulares. O primeiro está inscrito e o segundo circunscrito a uma circunferência de raio R. Sendo A_1 a área de P_1 e A_2 a área de P_2, então a razão A_1/A_2 é igual a

a) $\sqrt{\frac{5}{8}}$

b) $\frac{9\sqrt{2}}{16}$

c) $2\sqrt{2}-1$

d) $\frac{4(\sqrt{2}+1)}{8}$

e) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

107. (ITA/2007)

Seja P_n um polígono regular de n lados, com $n > 2$. Denote por a_n o apótema e por b_n o comprimento de um lado de P_n. O valor de n para o qual valem as desigualdades $b_n \leq a_n$ e $b_{n-1} > a_{n-1}$, pertence ao intervalo

a) $3 < n < 7$.

b) $6 < n < 9$.

c) $8 < n < 11$.

d) $10 < n < 13$.

e) $12 < n < 15$.

108. (ITA/2006)

Considere um losango $ABCD$ cujo perímetro mede 100 cm e cuja maior diagonal mede 40 cm. Calcule a área, em cm², do círculo inscrito neste losango.

109. (ITA/2005)

Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado AB e E um ponto do lado AC. Se $m(AB) = 8cm, m(AC) = 10\ cm, m(AD) = 4\ cm$ e $m(AE) = 6\ cm$, a razão das áreas dos triângulos ADE e ABC é

a) 1/2.

b) 3/5.

c) 3/8.

d) 3/10.

e) 3/4.

110. (ITA/2005)

Seja n o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de $n-1$ ângulos (internos) do polígono é $2004°$, determine o número n de lados do polígono.

111. (ITA/2004)

Duas circunferências concêntricas C_1 e C_2 têm raios de 6 cm e $6\sqrt{2}$ cm, respectivamente. Seja $\overline{AB}$ uma corda de C_2, tangente à C_1. A área da menor região delimitada pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco $\widehat{AB}$ mede, em cm²,

a) $9\,(\pi-3)$

b) $18\,(\pi+3)$

c) $18\,(\pi-2)$

d) $18\,(\pi+2)$

e) $16\,(\pi+3)$

112. (ITA/2003)

Sejam r e s duas retas paralelas distando entre si 5 cm. Seja P um ponto na região interior a estas retas, distando 4 cm de r. A área do triângulo equilátero PQR, cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s, é igual, em cm², a:

a) $3\sqrt{15}$

b) $7\sqrt{3}$

c) $5\sqrt{6}$

d) $\left(\frac{15}{2}\right)\sqrt{3}$

e) $\left(\frac{7}{2}\right)\sqrt{15}$

113. (ITA/2003)

Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a $3780°$. O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a:

a) 63

b) 69

c) 90

d) 97

e) 106

114. (ITA/2001)

De dois polígonos convexos, um tem a mais que o outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:

a) 63

b) 65

c) 66

d) 70

e) 77

115. (ITA/1999)

Duas circunferências C_1 e C_2, ambas com $1m$ de raio, são tangentes. Seja C_3 outra circunferência cujo raio mede $(\sqrt{2}-1)m$ e que tangencia externamente C_1 eC_2. A área, em m^2, da região limitada e exterior às três circunferências dadas, é:

a) $1-\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{6}$

c) $\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

d) $\left(\frac{\pi}{16}\right)\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$

e) $\pi\left(\sqrt{2}-1\right)-1$

116. (ITA/1999)

Duas circunferências de raios iguais a $9m$ e $3m$ são tangentes externamente num ponto C. Uma reta tangencia estas duas circunferências nos pontos distintos A e B. A área, em m^2, do triângulo ABC é:

a) $27\sqrt{3}$

b) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

c) $9\sqrt{3}$

d) $27\sqrt{2}$

e) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

117. (ITA/1998)

Considere as afirmações sobre polígonos convexos:

I) Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.

II) Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.

III) Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.

a) Todas as afirmações são verdadeiras.

b) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.

c) Apenas (I) é verdadeira.

d) Apenas (III) é verdadeira.

e) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

118. (ITA/1997)

Em um triângulo ABC, sabe-se que o segmento AC mede 2cm. Sejam α e β, respectivamente, os ângulos opostos aos segmentos BC e AC. A área do triângulo é (em cm^2) igual a

a) $2sen^2\alpha cotg\beta + sen(2\alpha)$

b) $2sen^2\alpha tg\beta - sen(2\alpha)$

c) $2\cos^2\alpha\, cotg\beta + sen(2\alpha)$

d) $2\cos^2\alpha\, tg\beta + sen(2\alpha)$

e) $2sen^2\alpha tg\beta - \cos(2\alpha)$

119. (ITA/1996)

Um hexágono regular e um quadrado estão inscritos no mesmo círculo de raio R e o hexágono possui uma aresta paralela a uma aresta do quadrado. A distância entre estas arestas paralelas será:

a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}R$

b) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}R$

c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}R$

d) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}R$

e) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}R$

120. (ITA/1995)

Considere C uma circunferência centrada em O e raio $2r$, e t a reta tangente a C num ponto T. Considere também A um ponto de C tal que o ângulo $A\hat{O}T = \theta$ é um ângulo agudo. Sendo B o ponto de t tal que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{OT}$, então a área do trapézio $OABT$ é igual a

a) $r^2(2\cos\theta - \cos 2\theta)$

b) $2r^2(4\cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta)$

c) $r^2(4\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta)$

d) $r^2(2\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$

e) $2r^2(2\operatorname{sen} 2\theta - \cos 2\theta)$

121. (ITA/1995)

O comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado medindo 1 unidade é igual à raiz positiva de:

a) $x^2 + x - 2 = 0$

b) $x^2 - x - 2 = 0$

c) $x^2 - 2x + 1 = 0$

d) $x^2 + x - 1 = 0$

e) $x^2 - x - 1 = 0$

122. (IME/2021)

Considere um trapézio de bases AB e CD, com o ponto I sendo a interseção de suas diagonais. Se as áreas dos triângulos AIB e CID formados pelas diagonais são 9 cm^2 e 16 cm^2, respectivamente, a área do trapézio, em cm^2, é:

a) Não é possível determinar por terem sido fornecidos dados insuficientes.

b) 63

c) 50

d) 49

e) 45

123. (IME/2021)

Sejam os pontos D, E e F pertencentes, respectivamente, aos lados AB, BC e AC do triângulo ABC, tais que $BD = 3AD, AF = 3CF$ e $CE = 3BE$. Sendo $P = AE \cap CD, Q = AE \cap BF$ e $R = BF \cap CD$, calcule $\frac{[PQR]}{[ABC]}$.

124. (IME/2018)

Seja um heptágono regular de lado l cuja menor diagonal vale d. O valor da maior diagonal satisfaz a qual das expressões?

a) $\frac{ld}{d-l}$

b) $\frac{d^2}{d-l}$

c) $\frac{ld}{d+l}$

d) $\frac{l^2}{d+l}$

e) $\frac{3d}{2}$

125. (IME/2017)

Dado um quadrado $ABCD$, de lado a, marcam-se os pontos E sobre o lado AB, F sobre o lado BC, G sobre o lado CD e H sobre o lado AD, de modo que os segmentos formados AE, BF, CG, e DH tenham comprimento igual a $\frac{3a}{4}$. A área do novo quadrilátero formado pelas interseções dos segmentos AF, BG, CH, e DE mede:

a) $\frac{a^2}{25}$

b) $\frac{a^2}{18}$

c) $\frac{a^2}{16}$

d) $\frac{a^2}{9}$

e) $\frac{2a^2}{9}$

126. (IME/2016)

Seja a equação $\frac{sen(2x)}{tgx} = \frac{1}{2}$. As soluções dessa equação para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ formam um polígono no círculo trigonométrico de área

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$

d) $\frac{1}{2}$

e) 1

127. (IME/2015)

Num triângulo ABC isósceles, com ângulos iguais em B e C, o seu incentro I se encontra no ponto médio do segmento de reta que une o seu ortocentro H a seu baricentro G. O segmento de reta AG é menor que o segmento de reta AH. Os comprimentos dos segmentos de reta HI e IG são iguais a d. Determine o perímetro e a área desse triângulo em função de d.

128. (IME/2015)

Seja um trapézio retângulo de bases a e b com diagonais perpendiculares. Determine a área do trapézio.

a) $\frac{ab}{2}$

b) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

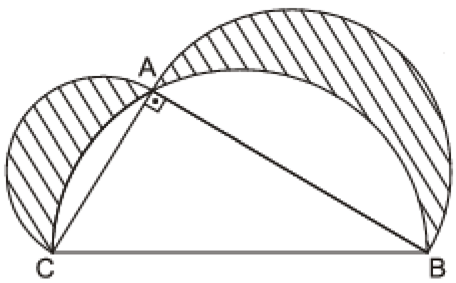
c) $\left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$

d) $\left(\frac{2a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$

e) $\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)a^2b}$

129. (IME/2011)

Seja o triângulo retângulo ABC com os catetos medindo $3\ cm$ e $4\ cm$. Os diâmetros dos três semicírculos, traçados na figura abaixo, coincidem com os lados do triângulo ABC. A soma das áreas hachuradas, em cm^2, é:



a) 6

b) 8

c) 10

d) 12

e) 14

130. (IME/2010)

Seja ABC um triângulo de lados AB, BC e AC iguais a 26, 28 e 18, respectivamente. Considere o círculo de centro O inscrito nesse triângulo. A distância AO vale:

a) $\frac{\sqrt{104}}{6}$

b) $\frac{\sqrt{104}}{3}$

c) $\frac{2\sqrt{104}}{3}$

d) $\sqrt{104}$

e) $3\sqrt{104}$

GABARITO

91. d
92. a
93. d
94. b
95. e
96. $\frac{R_H}{R_T} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
97. d
98. a
99. a) $r = \frac{1}{2}\ cm$ b) $A = \left(3\sqrt{3} - \pi\right) cm^2$ c) $1\ cm$
100. c
101. a
102. d
103. b
104. $A = 6$
105. d
106. e
107. b
108. $A = 144\pi\ cm^2$
109. d
110. $n = 14$
111. c

112. b
113. d
114. b
115. a
116. b
117. b
118. a
119. a
120. c
121. e
122. d
123. $\frac{[PQR]}{[ABC]} = \frac{4}{13}$
124. a
125. a
126. a
127. $2p = 5\sqrt{15}d$ e $S_{ABC} = \frac{15\sqrt{15}d^2}{4}$
128. c
129. a
130. d

RESOLUÇÃO

91. (ITA/2018)

Em um triângulo de vértices A, B e C são dados $\widehat{B} = \frac{\pi}{2}, \widehat{C} = \frac{\pi}{3}$ e o lado $BC = 1cm$. Se o lado $\overline{AB}$ é o diâmetro de uma circunferência, então a área da parte do triângulo ABC externa à circunferência, em cm^2, é

a) $\frac{\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16}$

b) $\frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}$

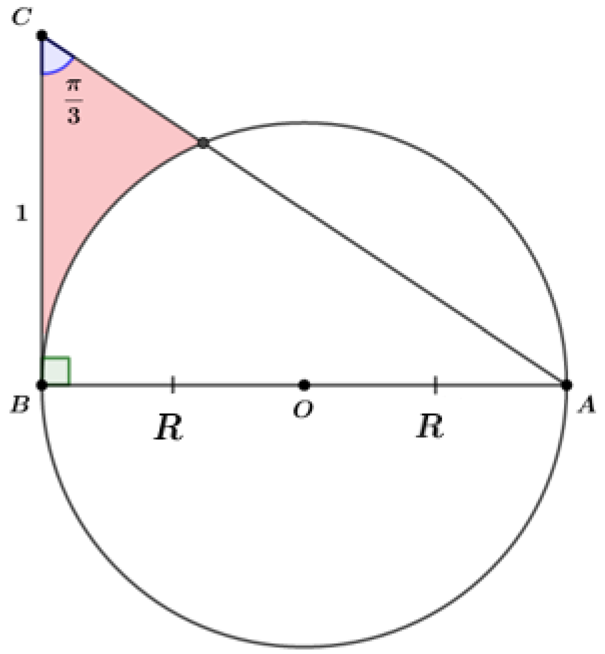
c) $\frac{5\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$

d) $\frac{5\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{8}$

e) $\frac{5\pi}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16}$

Comentários

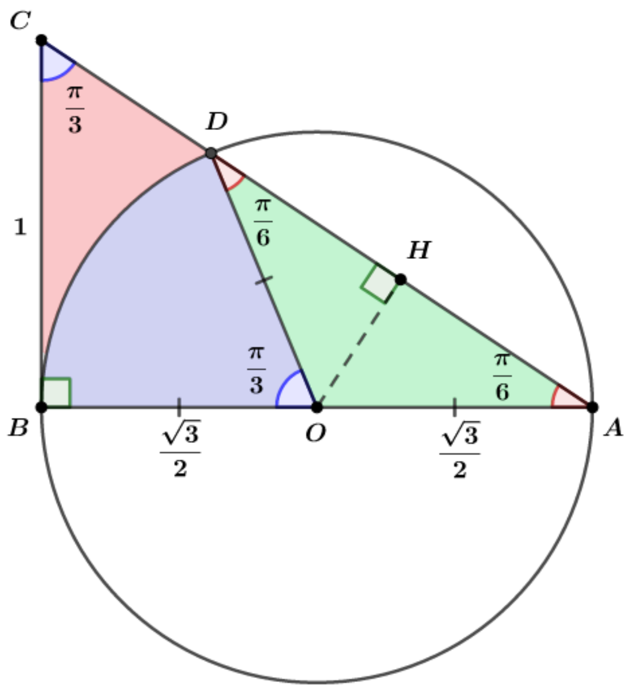
De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Podemos calcular o valor do raio da circunferência, aplicando a tangente no vértice C:

$$tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2R}{1} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser igual a π, logo, $\hat{A} = \pi/6$. Chamando o ponto de intersecção da hipotenusa AC com a circunferência de D, encontramos um triângulo isósceles AOD. Desse modo, temos:



Perceba que $D\hat{O}B = \pi/3$, pois é ângulo externo do triângulo AOD.

A área da região BDC é dada por:

$$A_{BDC} = A_{ABC} - A_{AOD} - A_{OBD}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta A_{AOD} \Rightarrow \begin{cases} OH = \frac{\sqrt{3}}{2} sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ AH = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow AD = 2AH \Rightarrow AD = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$A_{AOD} = \frac{1}{2}AD \cdot OH = \frac{\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

$$A_{OBD} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{6}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\pi}{24} = \frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow A_{BDC} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{8}$$

$$\therefore A_{BDC} = \frac{5\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{8}$$

Gabarito: "d".

---

92. (ITA/2017)

Seja ABC um triângulo cujos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medem 6 cm, 8 cm e 10 cm, respectivamente. Considere os pontos M e N sobre o lado BC tais que AM é a altura relativa a $\overline{BC}$ e N é o ponto médio de $\overline{BC}$. A área do triângulo AMN, em cm², é

a) 3,36.

b) 3,60.

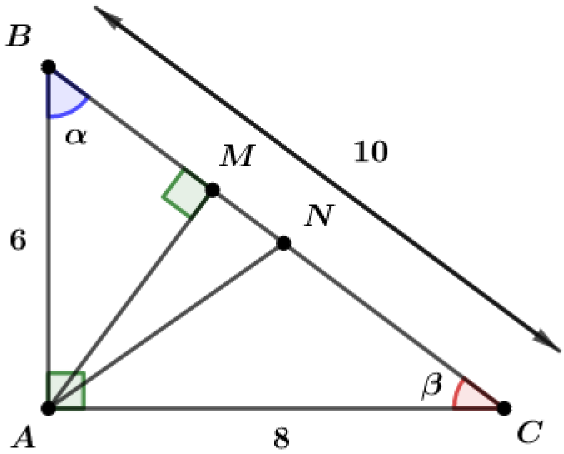
c) 4,20.

d) 4,48.

e) 6,72.

Comentários

Note que o triângulo ABC é retângulo, pois os lados satisfazem ao teorema de Pitágoras. Vamos desenhar a figura do texto:



Queremos calcular a área do triângulo AMN. Precisamos encontrar o valor da base MN e da altura AM.

Do triângulo ABC, temos:

$$sen\alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$cos\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Do triângulo ABM:

$$AM = 6 \cdot sen\alpha = 6 \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$$

$$BM = 6 \cdot cos\alpha = 6 \cdot \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$$

Como N é o ponto médio do triângulo ABC, temos $BN = NC = \frac{10}{2} = 5$. Logo, MN é dado por:

$$MN = BN - BM = 5 - \frac{18}{5} = \frac{7}{5}$$

Calculando a área do ΔAMN:

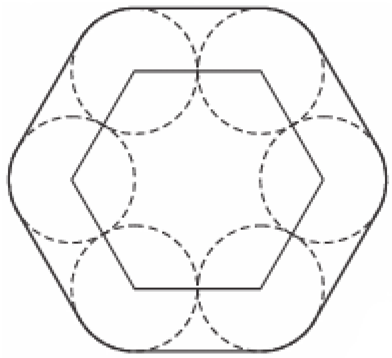
$$A_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{7}{5} = \frac{84}{25} = 3{,}36$$

Gabarito: “a”.

---

93. (ITA/2017)

Seis circunferências de raio 5 cm são tangentes entre si duas a duas e seus centros são vértices de um hexágono regular, conforme a figura abaixo.



O comprimento de uma correia tensionada que envolve externamente as seis circunferências mede, em cm,

a) $\mathbf{18 + 3\pi}$**.**

b) $\mathbf{30 + 10\pi}$**.**

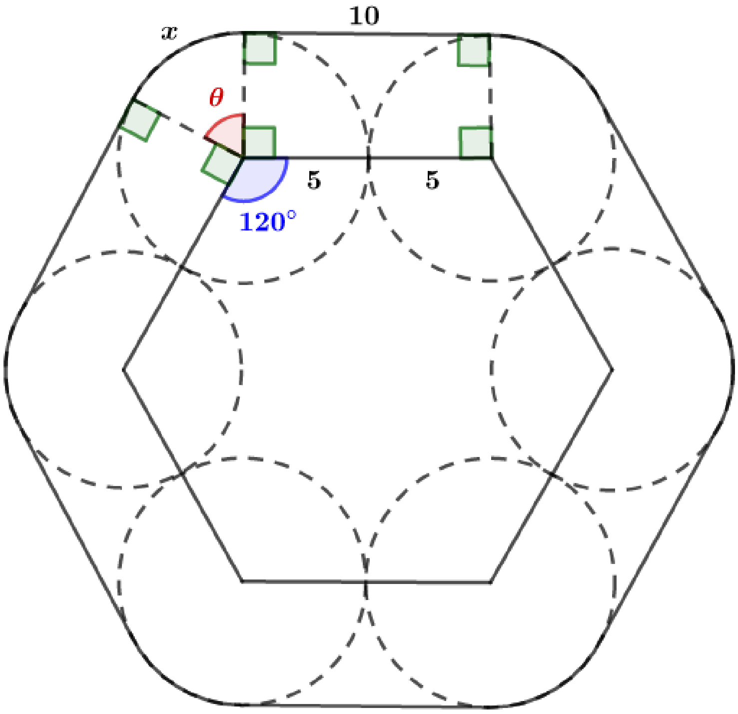
c) $\mathbf{18 + 6\pi}$**.**

d) $\mathbf{60 + 10\pi}$**.**

e) $\mathbf{36 + 6\pi}$**.**

Comentários

Como os vértices do hexágono são os centros das circunferências, temos que o seu lado será igual a dois raios de circunferência, ou seja, 10 cm. Vimos na aula teórica que os ângulos internos do hexágono regular são iguais a 120°. Desse modo, temos:



Perceba que os pontos de tangência da correia externa com a circunferência formam um retângulo com os vértices do hexágono regular. O comprimento dessa correia será dado pela soma dos 6 arcos de circunferência com os 6 lados maiores dos retângulos.

Podemos calcular o valor de θ:

$$\theta + 180° + 120° = 360° \Rightarrow \theta = 60°$$

Assim, o comprimento do arco x é dado por:

$$x = 2\pi r \cdot \frac{60°}{360°}$$

$$x = 2\pi 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5\pi}{3}\ cm$$

Calculando o comprimento da correia:

$$p_{correia} = 6 \cdot \left(\frac{5\pi}{3} + 10\right)$$

$$p_{correia} = 60 + 10\pi$$

Gabarito: “d”.

---

94. (ITA/2016)

Um triângulo está inscrito numa circunferência de raio 1 cm. O seu maior lado mede 2 cm e sua área é de $\frac{1}{\sqrt{2}}cm^2$. Então, o menor lado do triângulo, em cm, mede

a) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

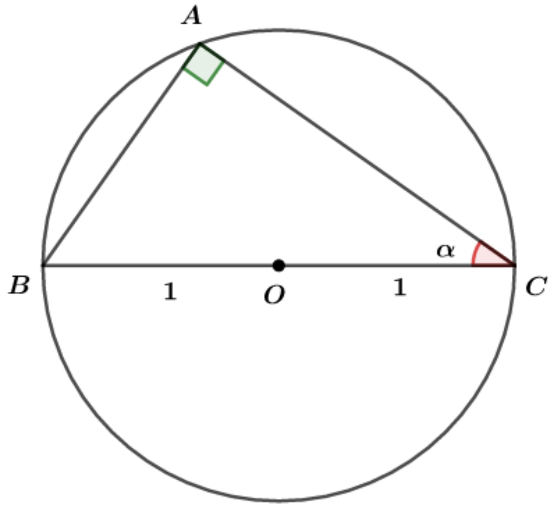
c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

Comentários

Como o triângulo está inscrito na circunferência de raio 1 cm e possui o maior lado igual a 2, temos que ele é retângulo e o maior lado é a hipotenusa. Assim, temos a seguinte figura:



O enunciado nos dá o valor da área do triângulo. Precisamos calcular o valor da base e da altura do triângulo. Vamos encontrar uma relação entre os catetos e o ângulo α.

$$AB = 2sen\alpha$$

$$AC = 2cos\alpha$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2sen\alpha \cdot 2cos\alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = sen(2\alpha)$$

$$\Rightarrow 2\alpha = 45° \Rightarrow \alpha = 22{,}5°$$

Como $\alpha = 22{,}5° < 45°$, temos que o cosseno de α é maior que o seno desse ângulo. Logo, o menor lado é dado por:

$$AB = 2\,\text{sen}\,22{,}5°$$

Lembrando que $\text{sen}(A) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2A)}{2}}$, temos:

$$AB = 2 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos(45°)}{2}} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Gabarito: "b".

---

95. (ITA/2016)

Sejam λ uma circunferência de raio 4 cm e $\overline{PQ}$ uma corda em λ de comprimento 4 cm. As tangentes a λ em P e em Q interceptam-se no ponto R exterior a λ. Então, a área do triângulo em PQR, em cm^2, é igual a

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

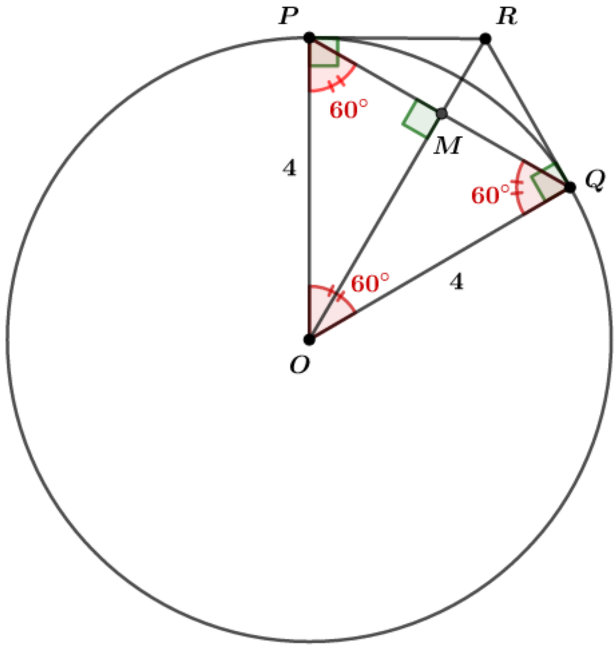
c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

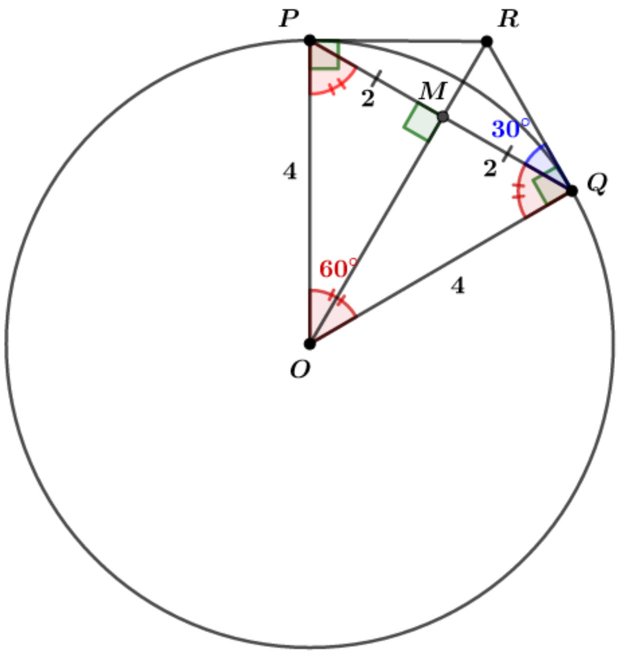
e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Comentários

Seja O o centro da circunferência λ. Como o comprimento de PQ é igual ao raio da circunferência, temos que OPQ é um triângulo equilátero de medida 4 cm. Então, temos:



Sendo P, Q tangentes à circunferência e $O\hat{P}M \equiv O\hat{Q}M \equiv 60°$, temos $M\hat{P}R \equiv M\hat{Q}R \equiv 30°$. Logo, ΔPQR é isósceles com $PR = QR$ e M é a mediatriz do triângulo PQR:



A altura RM é dada por:

$$tg30° = \frac{RM}{2} \Rightarrow RM = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ cm$$

Calculando a área do triângulo PQR:

$$A_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A_{PQR} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ cm^2$$

Gabarito: "e".

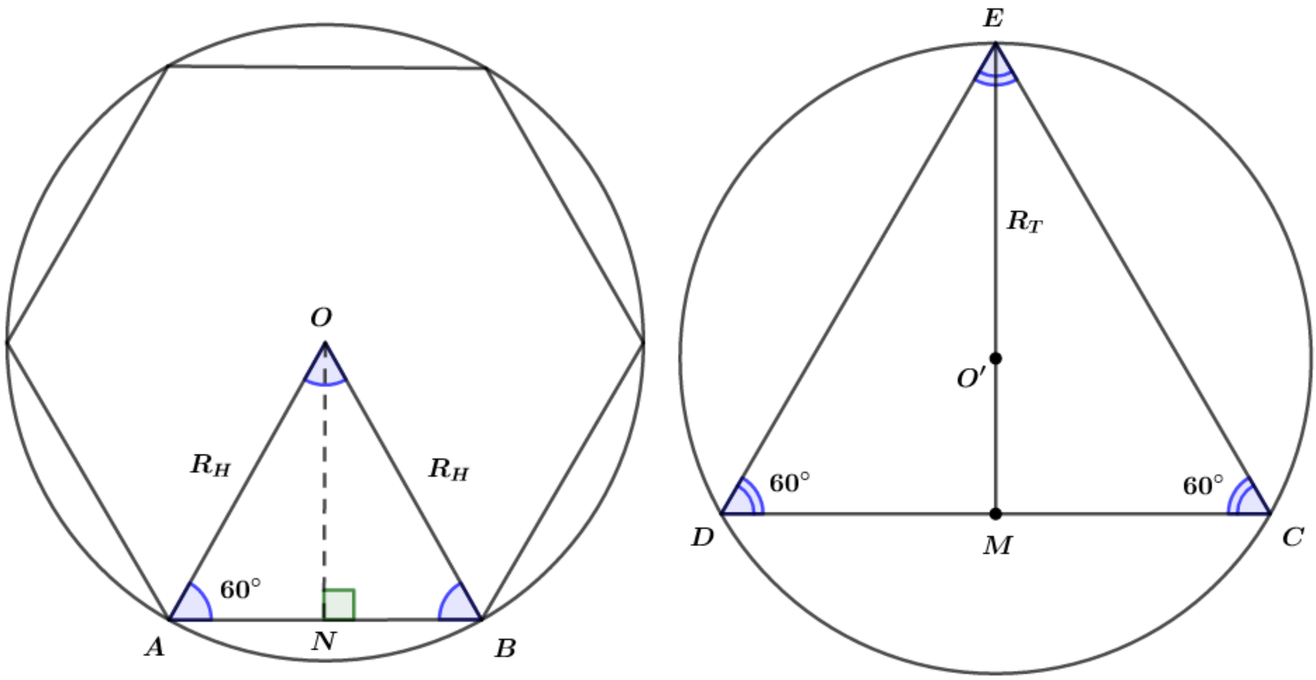
---

96. (ITA/2016)

Um hexágono convexo regular H e um triângulo equilátero T estão inscritos em circunferência de raios R_H e R_T, respectivamente. Sabendo-se que H e T têm mesma área, determine a razão R_H/R_T.

Comentários

Temos as seguintes figuras:



Sabemos que o hexágono convexo regular é composto por 6 triângulos equiláteros. Vamos calcular o valor da altura ON:

$$ON = R_H sen(60°) = \frac{R_H\sqrt{3}}{2}$$

A área do hexágono H é dada por:

$$A_H = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot R_H \cdot \frac{R_H\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A_H = \frac{3\sqrt{3}}{2} R_H^2$$

Para o triângulo equilátero T, sabemos que O' divide a altura na razão $2:1$. Assim, $O'M = EO'/2$:

$$O'M = \frac{R_T}{2} \Rightarrow EM = \frac{3}{2} R_T$$

O lado do triângulo equilátero pode ser calculando usando a tangente:

$$tg(60°) = \frac{EM}{MC} \Rightarrow MC = \frac{3}{2} R_T \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow MC = \frac{\sqrt{3}}{2} R_T \Rightarrow DC = \sqrt{3} R_T$$

A área do triângulo equilátero T é dada por:

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}R_T \cdot \frac{3}{2}R_T = \frac{3\sqrt{3}}{4}R_T^2$$

Como as áreas das duas figuras são iguais, temos:

$$A_H = A_T \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2}R_H^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R_T^2 \Rightarrow \left(\frac{R_H}{R_T}\right)^2 = \frac{2}{4} \Rightarrow \frac{R_H}{R_T} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{R_H}{R_T} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

---

97. (ITA/2016)

Seja P_n um polígono convexo regular de n lados, com $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. P_n é inscritível numa circunferência.

II. P_n é circunscritível a uma circunferência.

III. Se l_n é o comprimento de um lado de P_n e a_n é o comprimento de um apótema de P_n, então $\frac{a_n}{l_n} \leq 1$ para todo $n \geq 3$.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) apenas I e II.

e) I, II e III.

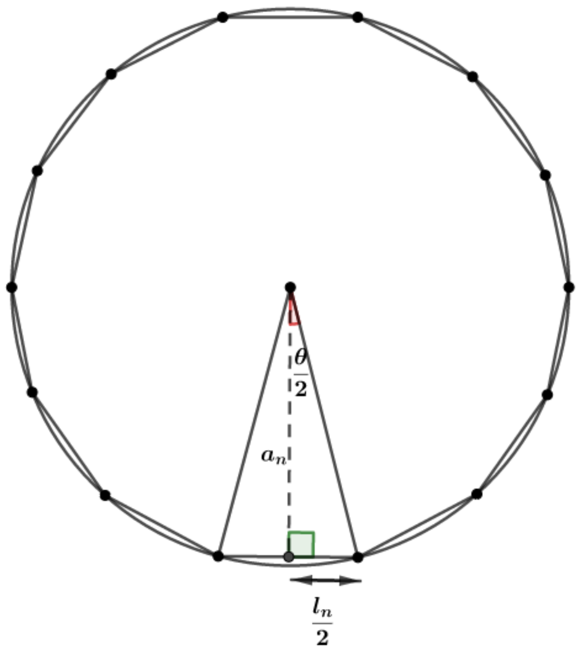
Comentários

Analisando as afirmações I e II:

$I)$ Verdadeira. Pois as bissetrizes internas do polígono se encontram em um único ponto que equidista dos vértices do polígono. Logo, é inscritível.

$II)$ Verdadeira. Pois as mediatrizes dos lados do polígono se encontram em um único ponto. Logo, esse ponto equidista dos lados do polígono. Portanto, é circunscritível.

$III)$ Falso. Sabemos que qualquer polígono regular de n lados é formado por n triângulos isósceles. Assim, temos:



Pela figura, podemos ver que:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\frac{l_n}{2}}{a_n}\Rightarrow 2tg\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{l_n}{a_n}\Rightarrow\frac{a_n}{l_n}=\frac{1}{2tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Lembrando que o ângulo interno θ pode ser calculado como:

$$\theta=\frac{360°}{n}$$

$$\frac{a_n}{l_n}=\frac{1}{2tg\left(\frac{180°}{n}\right)}$$

Vamos ver se encontramos um polígono que contraria a hipótese da afirmação:

$$\frac{a_n}{l_n}>1\Rightarrow\frac{1}{2tg\left(\frac{180°}{n}\right)}>1\Rightarrow tg\left(\frac{180°}{n}\right)<\frac{1}{2}$$

A função tangente é crescente e $n\in\mathbb{N}$, então, quanto maior o valor de n, o valor da tangente fica mais próximo do zero. Então, tomando n grande o suficiente temos que a desigualdade $tg\left(\frac{180°}{n}\right)<\frac{1}{2}$ é satisfeita. Logo, essa afirmação é falsa.

Gabarito: "d".

---

98. (ITA/2014)

Em um triângulo isósceles ABC, cuja área mede $48\ cm^2$, a razão entre as medidas da altura $\overline{AP}$ e da base $\overline{BC}$ é igual a $2/3$. Das afirmações abaixo:

I. As medianas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $\sqrt{97}\ cm$;

II. O baricentro dista $4\ cm$ do vértice A;

III. Se α é o ângulo formado pela base $\overline{BC}$ com a mediana $\overline{BM}$, relativa ao lado $\overline{AC}$, então $\cos\alpha = 3/\sqrt{97}$,

é (são) verdadeira(s)

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas III.

d) Apenas I e III.

e) Apenas II e III.

Comentários

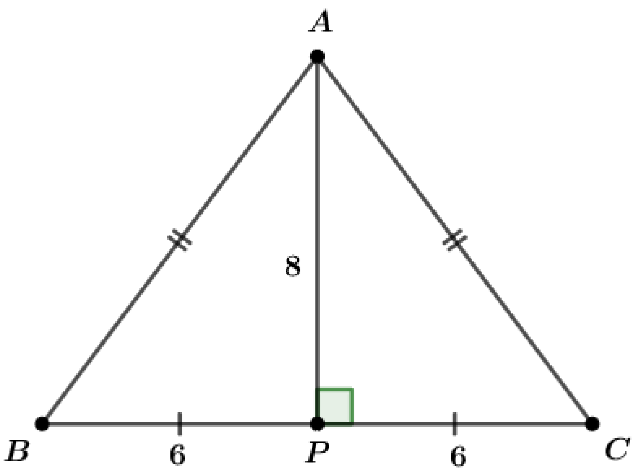
O enunciado diz que:

$$A_{ABC} = \frac{AP \cdot BC}{2} = 48 \ \ (I)$$

$$\frac{AP}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow AP = \frac{2}{3}BC \ \ (II)$$

Substituindo (II) em (I):

$$\frac{\frac{2}{3}BC \ \cdot BC}{2} = 48 \Rightarrow BC^2 = 48 \cdot 3 \Rightarrow BC = 12 \Rightarrow AP = 8$$

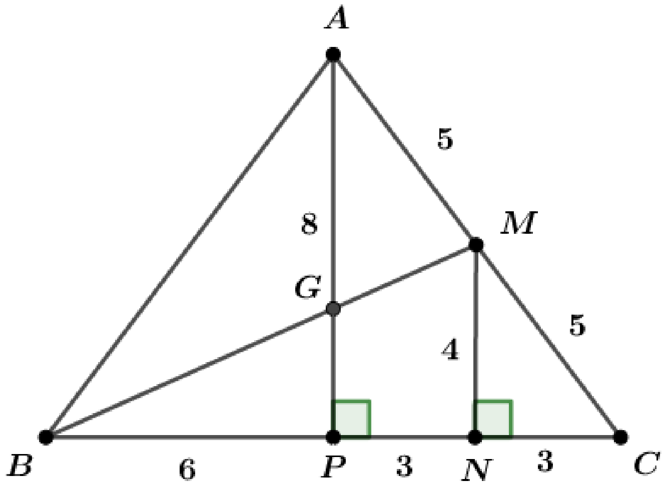


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, encontramos:

$$AC^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow AC = 10 = AB$$

Vamos analisar as afirmações:

I. Como $AB = AC$, temos que as medianas são iguais. Vamos calcular o valor de uma delas:



MN é a base média do triângulo APC, pois $AM = MC$. Então, $PN = NC = 3\ cm$ e $MN = 4\ cm$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BMN:

$$BM^2 = 9^2 + 4^2 \Rightarrow BM = \sqrt{97}\ cm$$

Portanto, afirmação verdadeira.

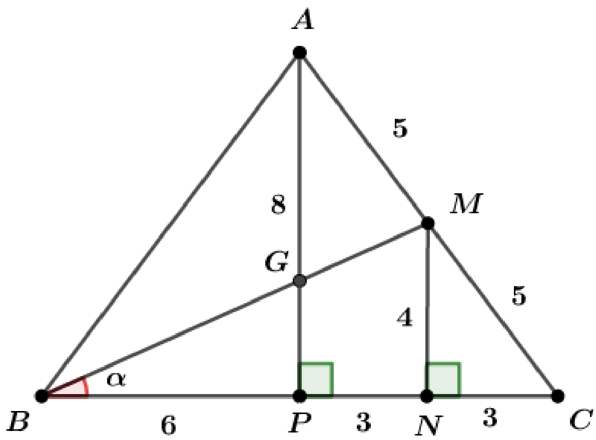
II. Perceba que $\Delta BPG \sim \Delta BNM$, desse modo, temos:

$$\frac{BP}{BN} = \frac{PG}{NM} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{PG}{4} \Rightarrow PG = \frac{24}{9}\ cm$$

$$AG = 8 - \frac{24}{9} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}\ cm$$

Portanto, afirmação falsa.

III. A afirmação diz que $\alpha = M\hat{B}C$:



O cosseno desse ângulo é dado por:

$$\cos\alpha = \frac{BN}{BM} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{97}}$$

∴Afirmação falsa.

Gabarito: “a”.

99. (ITA/2011)

Considere um triângulo equilátero cujo lado mede $2\sqrt{3}\ cm$. No interior deste triângulo existem 4 círculos de mesmo raio r. O centro de um dos círculos coincide com o baricentro do triângulo. Este círculo tangência externamente os demais e estes, por sua vez, tangenciam 2 lados do triângulo.

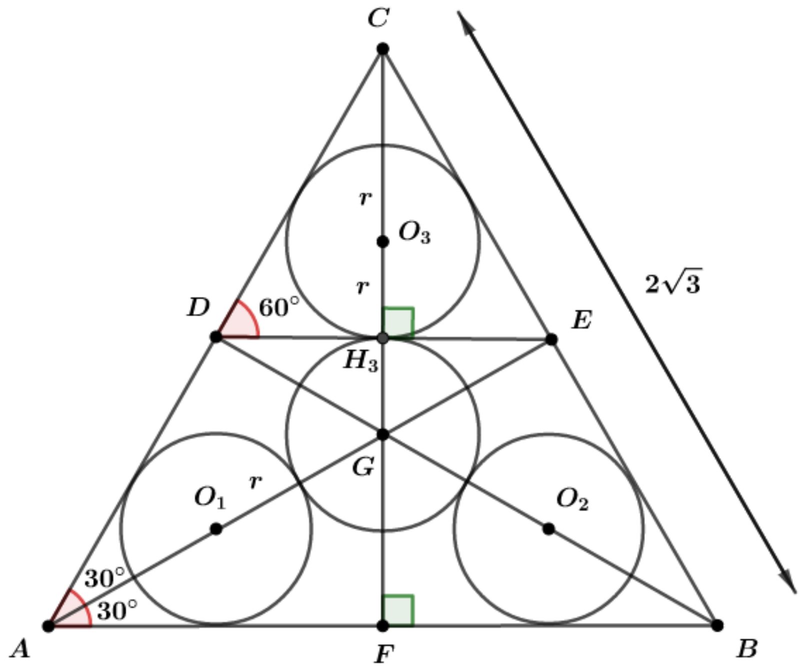
a) Determine o valor de r.

b) Calcule a área do triângulo não preenchida pelos círculos.

c) Para cada círculo que tangência o triângulo, determine a distância do centro ao vértice mais próximo.

Comentários

Vamos construir a figura do texto:



a) Note que DE é base média do triângulo equilátero. Então, $CE = CD = DE$ e ΔCDE também é triângulo equilátero. Como a circunferência de centro O_3 tangencia os lados desse triângulo, temos que H_3 é ponto de tangência da circunferência com a base DE. Logo, O_3 é baricentro do ΔCDE. Pelas propriedades do baricentro:

$$r = \frac{CH_3}{3}$$

Vamos calcular o valor de CH_3:

$$CH_3 = CD \cdot sen(60°) \Rightarrow CH_3 = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\ cm$$

Assim, o raio r é dado por:

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2}\ cm$$

b) A área do triângulo não preenchida pelos círculos é dada pela diferença entre a área do triângulo ABC com a soma das áreas dos círculos:

$$A = A_{ABC} - 4 \cdot A_C$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \left(2\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} 60°\right) \Rightarrow A_{ABC} = 3\sqrt{3}\ cm^2$$

$$A_C = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow A_C = \frac{\pi}{4}\ cm^2$$

$$A = 3\sqrt{3} - 4 \cdot \frac{\pi}{4} \Rightarrow A = \left(3\sqrt{3} - \pi\right) cm^2$$

c) Pelas propriedades do baricentro, temos:

$$CO_3 = 2O_3H_3 \Rightarrow CO_3 = 2r \Rightarrow CO_3 = 1\ cm$$

Gabarito: a) $r = \frac{1}{2}\ cm$ b) $A = \left(3\sqrt{3} - \pi\right) cm^2$ c) $1\ cm$

---

100. (ITA/2011)

Sejam $ABCD$ um quadrado e E um ponto sobre $\overline{AB}$. Considere as áreas do quadrado $ABCD$, do trapézio $BEDC$ e do triângulo ADE. Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é 200 cm², a medida do segmento $\overline{AE}$, em cm, é igual a

a) $10/3$

b) 5

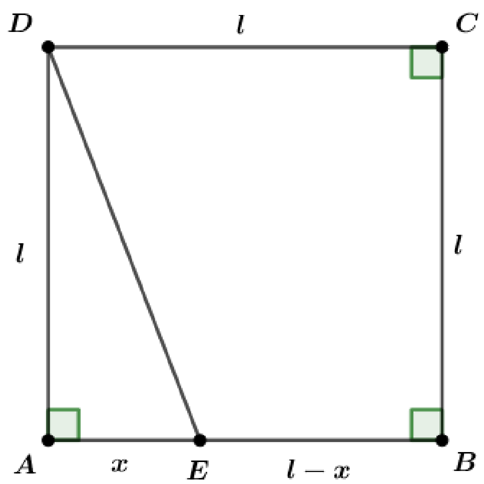
c) $20/3$

d) $25/3$

e) 10

Comentários

Desenhando a figura do texto:



As áreas das figuras são dadas por:

$$A_{ABCD} = l^2$$

$$A_{BEDC} = \frac{(l - x + l) \cdot l}{2} = \frac{2l^2 - lx}{2}$$

$$A_{ADE} = \frac{lx}{2}$$

O texto diz que $(A_{ABCD}, A_{BEDC}, A_{ADE})$ é uma PA cuja soma é $200\ cm^2$:

$$S = A_{ABCD} + A_{BEDC} + A_{ADE}$$

$$\Rightarrow 200 = l^2 + \frac{2l^2 - lx}{2} + \frac{lx}{2} \quad (I)$$

A_{BEDC} é o termo médio da PA, então:

$$A_{BEDC} = \frac{A_{ABCD} + A_{ADE}}{2}$$

$$\frac{2l^2 - lx}{2} = \frac{l^2 + \frac{lx}{2}}{2} \underset{l \neq 0}{\Longrightarrow} 2l - x = l + \frac{x}{2} \Rightarrow l = \frac{3x}{2} \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I):

$$200 = \left(\frac{3x}{2}\right)^2 + \frac{2\left(\frac{3x}{2}\right)^2 - \left(\frac{3x}{2}\right)x}{2} + \frac{\left(\frac{3x}{2}\right)x}{2}$$

$$200 = \frac{9x^2}{4} + \frac{6x^2}{4} + \frac{3x^2}{4} \Rightarrow 800 = 18x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{400}{9}}$$

$$\therefore x = \frac{20}{3}$$

Gabarito: “c”.

---

101. (ITA/2011)

Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se ainda que $\overline{AB}$ é o diâmetro, $\overline{BC}$ mede 6 cm e a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ intercepta a circunferência no ponto D. Se α é a soma das áreas dos triângulos ABC e ABD e β é a área comum aos dois, o valor de $\alpha - 2\beta$, em cm^2, é igual a

a) 14.

b) 15.

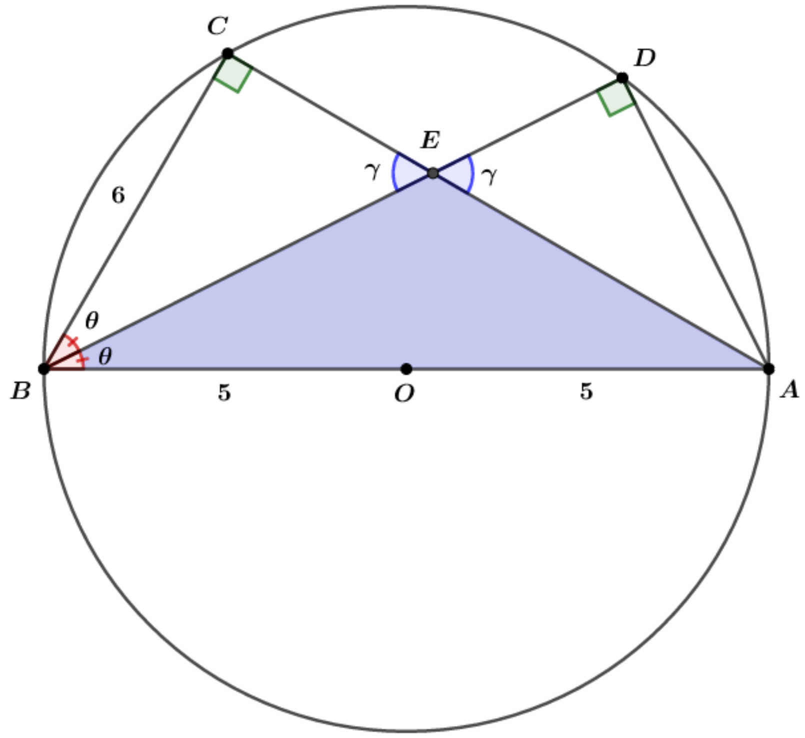
c) 16.

d) 17.

e) 18.

Comentários

Vamos desenhar a figura da questão:



Como AB é o diâmetro da circunferência, temos que ΔABC é retângulo. Aplicando o teorema de Pitágoras nesse triângulo, encontramos $AC = 8\ cm$.

Já temos os dados suficientes para calcular a área do ΔABC. Precisamos encontrar a base e a altura do ΔABD:

$$AD = 10 \cdot sen\theta$$

$$BD = 10 \cdot cos\theta$$

As áreas dos triângulos são dadas por:

$$A_{ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24\ cm^2$$

$$A_{ABD} = \frac{(10 \cdot sen\theta \cdot 10 \cdot cos\theta)}{2} \Rightarrow A_{ABD} = 25 \cdot sen(2\theta)$$

$$\Delta ABC \Rightarrow sen(2\theta) = \frac{8}{10} \Rightarrow sen(2\theta) = \frac{4}{5}$$

$$A_{ABD} = 25 \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow A_{ABD} = 20\ cm^2$$

Podemos calcular o valor de α:

$$\alpha = A_{ABC} + A_{ABD} \Rightarrow \alpha = 44\ cm^2$$

Para calcular o valor de β, precisamos encontrar o valor da área do ΔBEC:

$$tg\theta = \frac{CE}{6} \Rightarrow CE = 6 \cdot tg\theta$$

$$\Delta ABC \Rightarrow tg(2\theta) = \frac{8}{6} \Rightarrow \frac{2tg\theta}{1 - tg^2\theta} = \frac{4}{3} \Rightarrow 2tg^2\theta + 3tg\theta - 2 = 0$$

$$tg\theta = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow tg\theta = \frac{1}{2}\ ou\ tg\theta = -2$$

$$\Rightarrow CE = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3\ cm$$

Assim, a área do ΔBEC é dada por:

$$A_{BEC} = \frac{BC \cdot CE}{2} \Rightarrow A_{BEC} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9\ cm^2$$

$$A_{ABE} = A_{ABC} - A_{BEC} \Rightarrow \beta = 24 - 9 = 15\ cm^2$$

Calculando o valor da expressão da questão:

$$\alpha - 2\beta = 44 - 2 \cdot 15 = 14\ cm^2$$

Gabarito: "a".

---

102. (ITA/2008)

Considere o quadrado $ABCD$ com lados de 10m de comprimento. Seja M um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ e N um ponto sobre o lado $\overline{AD}$, equidistantes de A. Por M traça-se uma reta r paralela ao lado $\overline{AD}$ e por N uma reta s paralela ao lado $\overline{AB}$, que se interceptam no ponto O. Considere os quadrados $AMON$ e $OPCQ$, onde P é a intersecção de s com o lado $\overline{BC}$ e Q é a intersecção de r com o lado $\overline{DC}$. Sabendo-se que as áreas dos quadrados $AMON$, $OPCQ$ e $ABCD$ constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica, então a distância entre os pontos A e M é igual, em metros, a

a) $15 + 5\sqrt{5}$

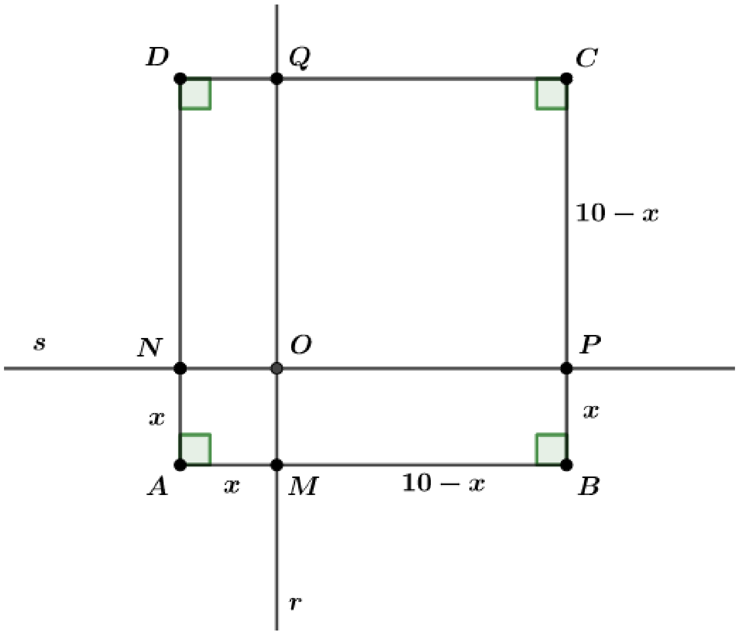
b) $10 + 5\sqrt{5}$

c) $10 - \sqrt{5}$

d) $15 - 5\sqrt{5}$

e) $10 - 3\sqrt{5}$

Comentários



O enunciado diz que $(A_{AMON}, A_{OPCQ}, A_{ABCD})$ é uma PG. Queremos calcular o valor de $AM = x$.

A_{OPCQ} é o termo médio da PG, então:

$$A_{OPCQ}^2 = A_{AMON} \cdot A_{ABCD} \Rightarrow [(10-x)^2]^2 = x^2 \cdot 10^2 \Rightarrow (10-x)^2 = |10x|$$

Como $(10-x)^2 > 0$, temos:

$$x^2 - 20x + 100 = 10x \Rightarrow x^2 - 30x + 100 = 0$$

$$x = 15 \pm \sqrt{125} \Rightarrow x = 15 \pm 5\sqrt{5}$$

Como $x < 10$, temos:

$$x = 15 - 5\sqrt{5}$$

Gabarito: "d".

---

103. (ITA/2008)

Sejam r e s duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja P um ponto no plano definido por r e s e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de r. As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm² e cm, do triângulo equilátero PQR cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s, são iguais a

a) $\frac{175\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$

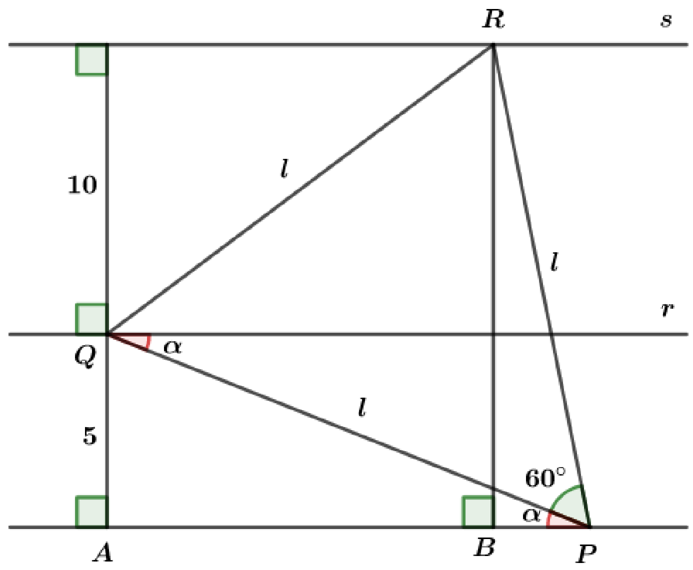
b) $\frac{175\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$

c) $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$

d) $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$

e) 700 e $10\sqrt{21}$

Comentários



Precisamos calcular o valor do lado do triângulo equilátero. Analisando a figura, podemos ver que:

$$\Delta APQ \Rightarrow sen\alpha = \frac{5}{l} \Rightarrow cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{l^2}}$$

$$\Delta BPR \Rightarrow sen(\alpha + 60°) = \frac{15}{l} \Rightarrow sen\alpha cos60° + sen60° cos\alpha = \frac{15}{l}$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$\frac{5}{l} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{25}{l^2}} = \frac{15}{l} \Rightarrow \frac{5}{2l} + \frac{\sqrt{3(l^2 - 25)}}{2l} = \frac{15}{l} \Rightarrow \sqrt{3(l^2 - 25)} = 25$$

Elevando ao quadrado:

$$3(l^2 - 25) = 625 \Rightarrow l^2 = \frac{625}{3} + 25 \Rightarrow l = \sqrt{\frac{700}{3}} \Rightarrow l = \frac{10\sqrt{21}}{3}\ cm$$

Calculando a área e o perímetro:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{10\sqrt{21}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = \frac{175\sqrt{3}}{3}\ cm^2$$

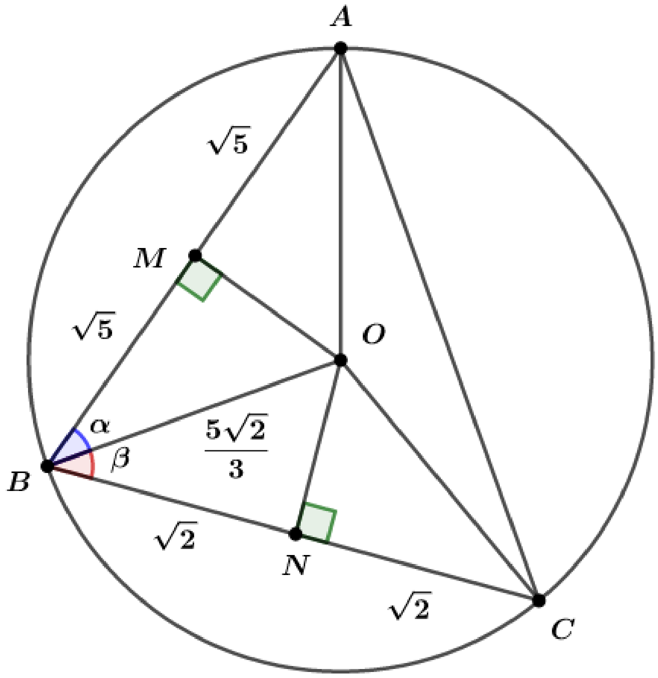
$$2p = 3l = 3 \cdot \frac{10\sqrt{21}}{3} \Rightarrow 2p = 10\sqrt{21}\ cm$$

Gabarito: "b".

104. (ITA/2008)

Um triângulo acutângulo de vértices A, B e C está inscrito numa circunferência de raio $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. Sabe-se que $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{5}$ e $\overline{BC}$ mede $2\sqrt{2}$. Determine a área do triângulo ABC.

Comentários



Sabemos que o ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo é o circuncentro.

OM e ON são as mediatrizes dos lados AB e BC. Então, OBM e ONB são triângulos retângulos.

Aplicando o teorema de Pitágoras nesses triângulos, obtemos:

$$\Delta OBM \Rightarrow OM^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\Delta ONB \Rightarrow ON^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow ON = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Para calcular a área do triângulo, precisamos calcular sua altura. Se tomarmos como base o segmento BC, a altura será dada por:

$$h = AB \cdot sen(\alpha + \beta) \Rightarrow h = AB \cdot (sen\alpha cos\beta + sen\beta cos\alpha)$$

Analisando os triângulos OBM e ONB, podemos escrever:

$$sen\beta = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{\frac{5\sqrt{2}}{3}} = \frac{4}{5} \text{ e } cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{\frac{5\sqrt{2}}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$sen\alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{5\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \text{ e } cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{\frac{5\sqrt{2}}{3}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Substituindo na expressão de h:

$$h = 2\sqrt{5}\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \Rightarrow h = 3\sqrt{2}$$

A área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{BC\cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 6$$

Gabarito: $A = 6$

---

105. (ITA/2007)

Um retângulo cujos lados medem B e H, um triângulo isósceles em que a base e a altura medem, respectivamente, B e H, e o círculo inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então B/H é uma raiz do polinômio

f) $\pi^3x^3 + \pi^2x^2 + \pi x - 2 = 0.$

g) $\pi^2x^3 + \pi^3x^2 + x + 1 = 0.$

h) $\pi^3x^3 - \pi^2x^2 + \pi x + 2 = 0.$

i) $\pi x^3 - \pi^2x^2 + 2\pi x - 1 = 0.$

j) $x^3 - 2\pi^2x^2 + \pi x - 1 = 0.$

Comentários

Primeiramente, vamos estabelecer os termos da progressão geométrica. Sejam eles:

$$(A_1, A_2, A_3)$$

Do enunciado, temos que:

$$A_1 = BH$$

$$A_2 = \frac{BH}{2}$$

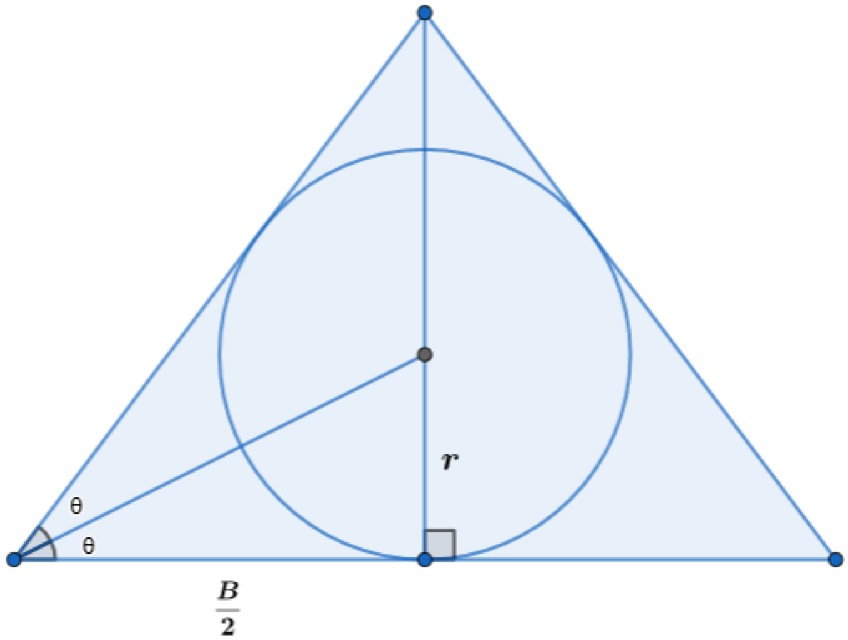
Disso, observamos que a razão da progressão é $\frac{1}{2}$, do que segue que:

$$A_3 = \frac{BH}{4}$$

Seja r o raio da circunferência inscrita no triângulo. Disso, temos que:

$$\pi r^2 = \frac{BH}{4} \Rightarrow r^2 = \frac{BH}{4\pi}$$

Observe a seguinte figura:



Dela, podemos escrever que:

$$tg(\theta) = \frac{2r}{B} \ e \ tg(2\theta) = \frac{2H}{B}$$

Da trigonometria, temos que:

$$tg(2\theta) = \frac{2tg(\theta)}{1 - tg^2(\theta)}$$

Ou seja:

$$\frac{2H}{B} = \frac{\frac{4r}{B}}{1 - \frac{4r^2}{B^2}} \Rightarrow 2H = \frac{2rB^2}{B^2 - 4r^2} \Rightarrow H(B^2 - 4r^2) = 2rB^2$$

Substituindo r^2 na equação acima, para simplificar, temos:

$$H\left(B^2 - \frac{4BH}{4\pi}\right) = 2rB^2 \Rightarrow H\left(\frac{B}{H} - \frac{1}{\pi}\right) = 2r\left(\frac{B}{H}\right)$$

Elevando ao quadrado, membro a membro, temos:

$$H^2\left(\left(\frac{B}{H}\right)^2 - 2\left(\frac{B}{H}\right)\cdot\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right) = 4r^2\left(\frac{B}{H}\right)^2$$

Substituindo r^2 novamente, temos:

$$H^2\left(\left(\frac{B}{H}\right)^2 - 2\left(\frac{B}{H}\right)\cdot\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right) = 4\left(\frac{BH}{4\pi}\right)\left(\frac{B}{H}\right)^2$$

Logo:

$$\left(\left(\frac{B}{H}\right)^2 - 2\left(\frac{B}{H}\right)\cdot\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{B}{H}\right)^3$$

Faça $\frac{B}{H} = x$, logo:

$$x^2 - \frac{2x}{\pi} + \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{\pi}x^3$$

Ou ainda:

$$\pi x^3 - \pi^2 x^2 + 2\pi x - 1 = 0$$

Gabarito: "d".

---

106. (ITA/2007)

Sejam P_1 e P_2 octógonos regulares. O primeiro está inscrito e o segundo circunscrito a uma circunferência de raio R. Sendo A_1 a área de P_1 e A_2 a área de P_2, então a razão A_1/A_2 é igual a

a) $\sqrt{\frac{5}{8}}$

b) $\frac{9\sqrt{2}}{16}$

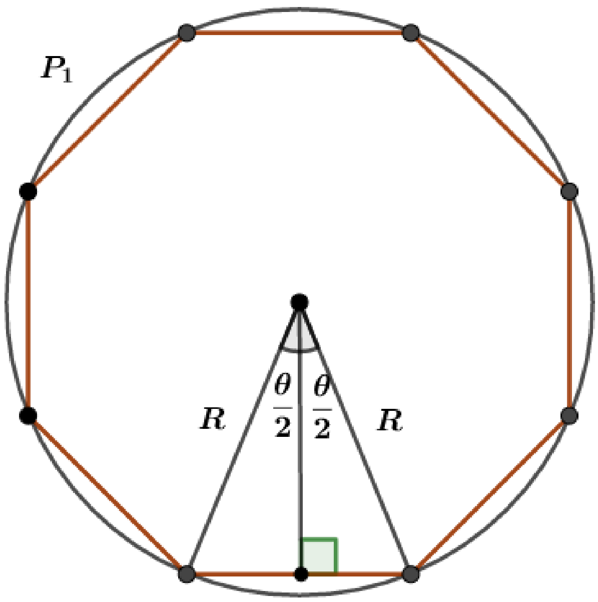
c) $2\sqrt{2} - 1$

d) $\frac{4(\sqrt{2}+1)}{8}$

e) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Comentários

Vimos que qualquer polígono regular de n lados é formado por n triângulos isósceles. Vamos representar o polígono P_1:



O ângulo θ dos triângulos isósceles do octógono é dado por:

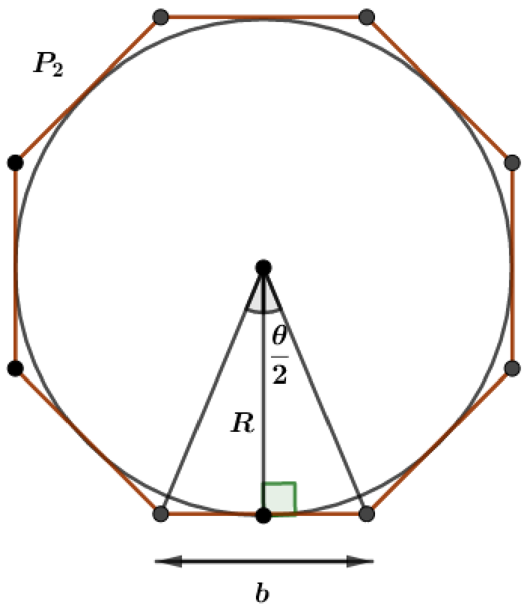
$$\theta = \frac{360°}{n} \Rightarrow \theta = \frac{360°}{8} = 45°$$

Como o octógono possui 8 triângulos isósceles, sua área é dada por 8 vezes a área de cada triângulo. Vamos calcular A_1:

$$A_1 = 8 \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} \cdot R \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{altura} \cdot \left(\underbrace{2 \cdot R \cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{base} \right) \right) \Rightarrow A_1 = 4R^2 sen(\theta)$$

$$\theta = 45° \Rightarrow A_1 = 4R^2 sen(45°) \Rightarrow A_1 = 2\sqrt{2}R^2$$

Para calcular A_2, precisamos encontrar a base do triângulo isósceles.



Observando a figura, vemos que:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{b}{2}}{R} \Rightarrow tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{2R} \Rightarrow b = 2Rtg\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Lembrando que a tangente do arco metade pode ser calcular através da seguinte fórmula:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{sen\theta}{1 + cos\theta} \Rightarrow tg\left(\frac{45°}{2}\right) = \frac{sen45°}{1 + cos45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} - 1$$

$$\Rightarrow b = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)R$$

Agora, podemos calcular A_2:

$$A_2 = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2\left(\sqrt{2} - 1\right)R \Rightarrow A_2 = 8\left(\sqrt{2} - 1\right)R^2$$

A razão pedida é dada por:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2\sqrt{2}R^2}{8\left(\sqrt{2} - 1\right)R^2} = \frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} + 1\right)}{8}$$

$$\therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

Gabarito: “e”.

107. (ITA/2007)

Seja P_n um polígono regular de n lados, com $n > 2$. Denote por a_n o apótema e por b_n o comprimento de um lado de P_n. O valor de n para o qual valem as desigualdades $b_n \leq a_n$ e $b_{n-1} > a_{n-1}$, pertence ao intervalo

a) $3 < n < 7$.

b) $6 < n < 9$.

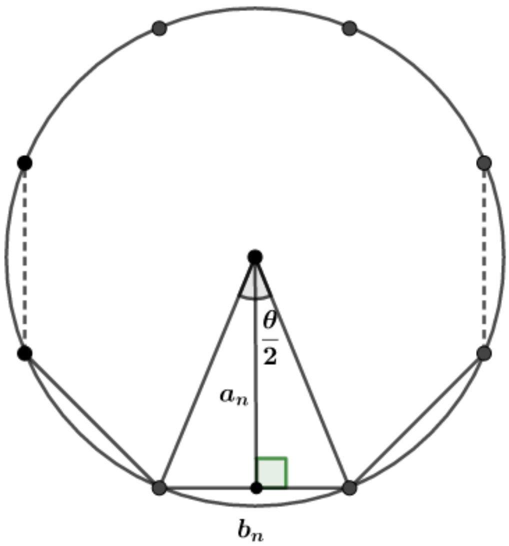
c) $8 < n < 11$.

d) $10 < n < 13$.

e) $12 < n < 15$.

Comentários

Vamos representar genericamente um polígono regular de n lados:



O ângulo interno θ do polígono regular é dado por:

$$\theta = \frac{360°}{n}$$

Vamos encontrar uma relação entre a_n e b_n. Analisando a figura, podemos escrever:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{b_n}{2}}{a_n} \Rightarrow tg\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{b_n}{2a_n} \Rightarrow b_n = 2a_n tg\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Queremos $b_n \leq a_n$ e $b_{n-1} > a_{n-1}$, então, temos:

$$b_n \leq a_n \Rightarrow 2a_n tg\left(\frac{180°}{n}\right) \leq a_n \underset{a_n>0}{\Longrightarrow} 2tg\left(\frac{180°}{n}\right) \leq 1 \Rightarrow tg\left(\frac{180°}{n}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$b_{n-1} > a_{n-1} \Rightarrow 2a_{n-1} tg\left(\frac{180°}{n-1}\right) > a_{n-1} \Rightarrow tg\left(\frac{180°}{n-1}\right) > \frac{1}{2}$$

Precisamos encontrar uma aproximação de tangente para fazer as comparações acima. Sabemos que $tg(45°) = 1$ e a função tangente é crescente para ângulos positivos, então, o ângulo que procuramos deve ser menor que $45°$.

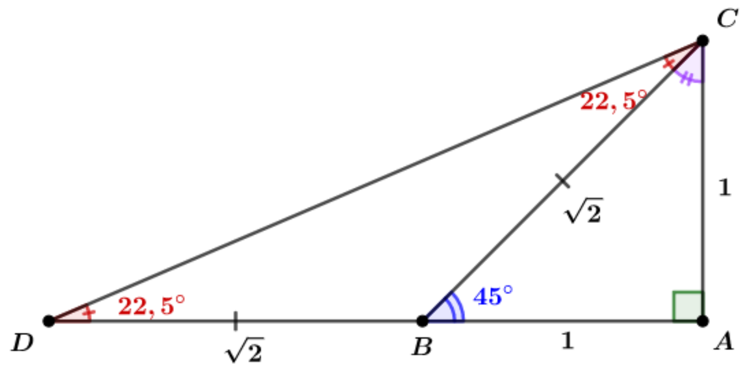
Vamos testar o valor da $tg(30°)$:

$$tg(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}57 > \frac{1}{2}$$

Esse valor é maior que $1/2$. Então:

$$tg\left(\frac{180°}{n}\right) \leq \frac{1}{2} < tg(30°) \Rightarrow \frac{180°}{n} < 30° \Rightarrow n > 6$$

Para a outra desigualdade, podemos usar o triângulo retângulo abaixo, podemos calcular o valor da $tg(22{,}5°)$:



$$tg(22{,}5°) = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow tg(22{,}5°) = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4 < \frac{1}{2}$$

$$tg\left(\frac{180°}{n-1}\right) > \frac{1}{2} > tg(22{,}5°) \Rightarrow \frac{180°}{n-1} > 22{,}5° \Rightarrow (n-1) < \frac{180°}{22{,}5°} \Rightarrow n < 9$$

$$\therefore 6 < n < 9$$

Gabarito: "b".

---

108. (ITA/2006)

Considere um losango $ABCD$ cujo perímetro mede 100 cm e cuja maior diagonal mede 40 cm. Calcule a área, em cm², do círculo inscrito neste losango.

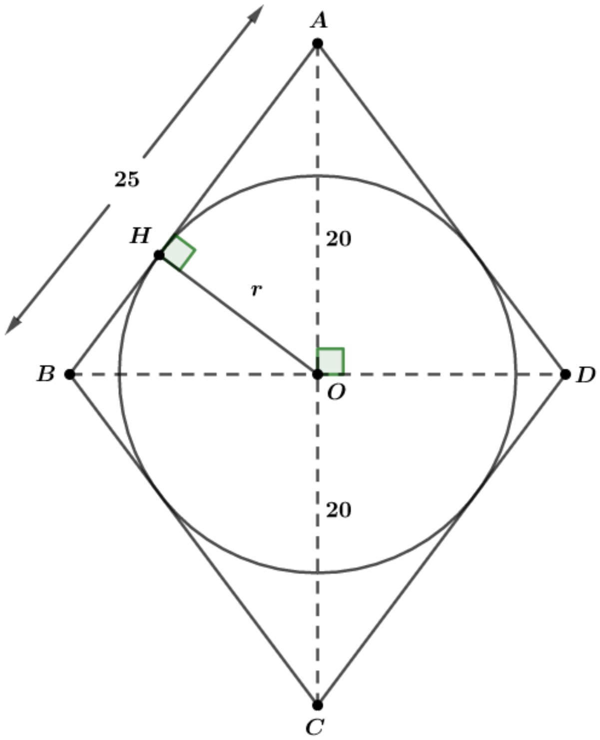
Comentários

Sabemos que um losango é um quadrilátero equilátero. O enunciado nos dá o perímetro do losango, logo, podemos calcular o lado do losango:

$$AB = BC = CD = DA = l$$

$$p_{ABCD} = l + l + l + l \Rightarrow 100 = 4l \Rightarrow l = 25\ cm$$

Para calcular a área do círculo inscrito no losango, precisamos encontrar o raio desse círculo. Vamos desenhar a figura:



Perceba que o triângulo retângulo ABO é o clássico triângulo retângulo $3:4:5$. Então, o lado BO é igual a $15\ cm$.

Os triângulos ABO e AOH são semelhantes, vamos calcular o valor de r:

$$\Delta ABO \sim \Delta AOH \Rightarrow \frac{AB}{BO} = \frac{AO}{OH} \Rightarrow \frac{25}{15} = \frac{20}{r} \Rightarrow r = 12\ cm$$

Desse modo, a área do círculo é dada por:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 12^2 \Rightarrow A = 144\pi\ cm^2$$

Gabarito: $A = 144\pi\ cm^2$

---

109. (ITA/2005)

Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado AB e E um ponto do lado AC. Se $m(AB) = 8cm, m(AC) = 10\ cm, m(AD) = 4\ cm$ e $m(AE) = 6\ cm$, a razão das áreas dos triângulos ADE e ABC é

a) 1/2.

b) 3/5.

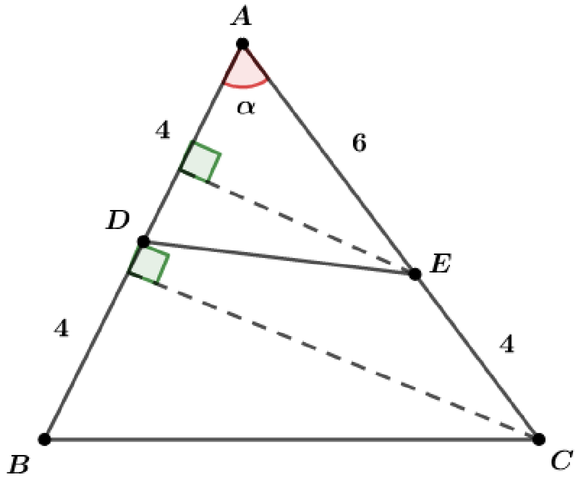
c) 3/8.

d) 3/10.

e) 3/4.

Comentários

Do enunciado, temos a seguinte figura:



A área de cada triângulo é dada por:

$$A_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \underbrace{6 \cdot sen\alpha}_{altura} = 12 \cdot sen\alpha$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \underbrace{10 \cdot sen\alpha}_{altura} = 40 \cdot sen\alpha$$

Calculando a razão pedida, encontramos:

$$\frac{A_{ADE}}{A_{ABC}} = \frac{12 \cdot sen\alpha}{40 \cdot sen\alpha} = \frac{3}{10}$$

Gabarito: "d".

---

110. (ITA/2005)

Seja n o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de $n - 1$ ângulos (internos) do polígono é $2004°$, determine o número n de lados do polígono.

Comentários

Lembrando que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dada por:

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

O enunciado da questão diz que a soma de $n - 1$ ângulos do polígono é igual a $2004°$. Chamando de θ os ângulos internos do polígono, temos:

$$S_i - \theta = 2004° \Rightarrow \theta = S_i - 2004°$$

Substituindo a fórmula da soma na equação acima:

$$(n-2) \cdot 180° - 2004° = \theta$$

Como o polígono é convexo, o ângulo interno deve satisfazer a seguinte desigualdade:

$$0 < \theta < 180°$$

$$0 < (n-2) \cdot 180° - 2004° < 180°$$

$$2004° < (n-2) \cdot 180° < 2184°$$

$$\frac{2004°}{180°} + 2 < n < \frac{2184°}{180°} + 2$$

$$13{,}13 < n < 14{,}13$$

Como $n \in \mathbb{N}$, temos que o único valor possível é $n = 14$.

Gabarito: $\boldsymbol{n = 14}$

---

111. (ITA/2004)

Duas circunferências concêntricas C_1 e C_2 têm raios de 6 cm e $6\sqrt{2}$ cm, respectivamente. Seja $\overline{AB}$ uma corda de C_2, tangente à C_1. A área da menor região delimitada pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco $\widehat{AB}$ mede, em cm²,

a) $9\,(\pi - 3)$

b) $18\,(\pi + 3)$

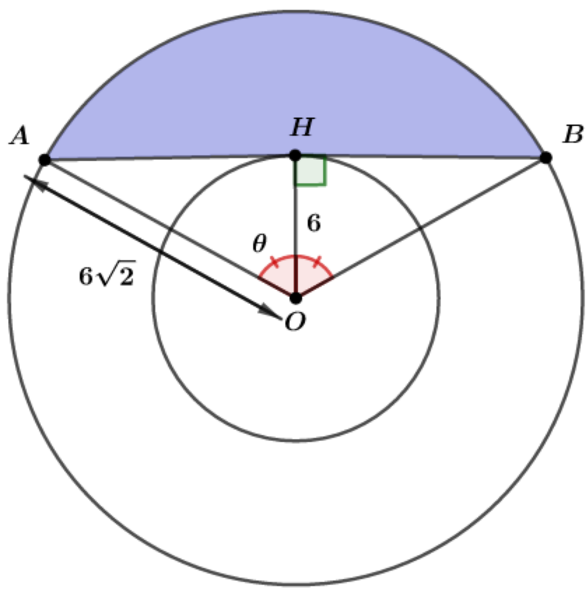
c) $18\,(\pi - 2)$

d) $18\,(\pi + 2)$

e) $16\,(\pi + 3)$

Comentários

Duas circunferências são concêntricas quando possuem o mesmo centro. Vamos desenhar a figura do enunciado:



Como AB é tangente à C_1, temos que OH é a mediatriz do triângulo AOB. Então, AOH é retângulo. Vamos calcular o valor de θ:

$$cos\theta = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45°$$

Portanto, $AH = HB = 6$ e ΔAOB é retângulo isósceles.

A área da menor região delimitada pela corda $\overline{AB}$ é dada pela diferença entre o setor circular AOB e o triângulo AOB:

$$A = \underbrace{\frac{2 \cdot 45°}{360°} \cdot \pi \cdot \left(6\sqrt{2}\right)^2}_{área\ do\ setor\ circular} - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}}_{área\ do\ triângulo} \Rightarrow A = 18(\pi - 2)\ cm^2$$

Gabarito: "c".

---

112. (ITA/2003)

Sejam r e s duas retas paralelas distando entre si 5 cm. Seja P um ponto na região interior a estas retas, distando 4 cm de r. A área do triângulo equilátero PQR, cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s, é igual, em cm², a:

a) $3\sqrt{15}$

b) $7\sqrt{3}$

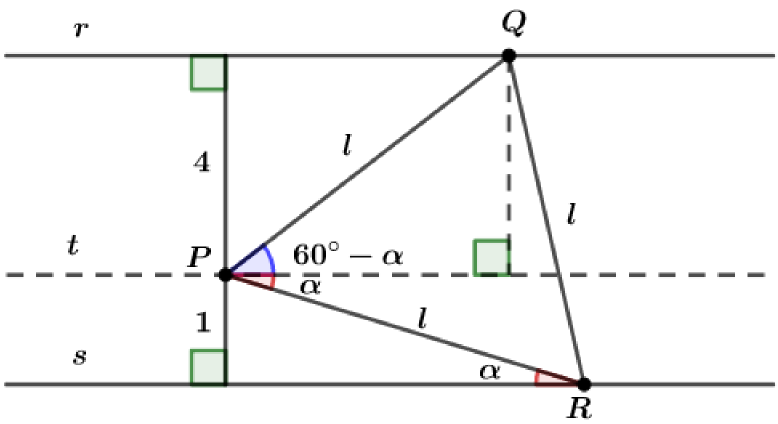
c) $5\sqrt{6}$

d) $\left(\frac{15}{2}\right)\sqrt{3}$

e) $\left(\frac{7}{2}\right)\sqrt{15}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



t é a reta tangente a r e s que passa pelo ponto P. Usando as relações trigonométricas, encontramos:

$$sen\alpha = \frac{1}{l} \Rightarrow cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{l^2}}$$

$$sen(60° - \alpha) = \frac{4}{l} \Rightarrow sen(60°)cos\alpha - sen\alpha\cos(60°) = \frac{4}{l}$$

Substituindo os valores:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{l^2}}-\frac{1}{l}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{l}\Rightarrow\frac{\sqrt{3(l^2-1)}-1}{2l}=\frac{4}{l}\underset{l\neq 0}{\Longrightarrow}\frac{\sqrt{3(l^2-1)}-1}{2}=4\Rightarrow\sqrt{3(l^2-1)}=9$$

$$3l^2-3=81\Rightarrow l^2=28\Rightarrow l=2\sqrt{7}$$

A área do triângulo equilátero é dada por:

$$A=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow A=\frac{\left(2\sqrt{7}\right)^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow A=7\sqrt{3}$$

Gabarito: "b".

---

113. (ITA/2003)

Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a $3780°$. O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a:

a) 63

b) 69

c) 90

d) 97

e) 106

Comentários

Sejam n_1, n_2 e n_3 os lados dos polígonos tais que (n_1, n_2, n_3) formam uma PA. Então, podemos escrever os lados como:

$$(n_1, n_2, n_3)=(n-r, n, n+r)$$

Sabemos que a fórmula da soma dos ângulos internos é dada por:

$$S_i=(n-2)\cdot 180°$$

De acordo com o enunciado:

$$(n-r-2)\cdot 180°+(n-2)\cdot 180°+(n+r-2)\cdot 180°=3780°$$

$$n-r-2+n-2+n+r-2=\frac{3780°}{180°}$$

$$3n-6=21\Rightarrow n=9$$

Temos também os dados do produto dos lados:

$$P=(n-r)\cdot n\cdot(n+r)=585\Rightarrow(9-r)(9+r)=\frac{585}{9}$$

$$81-r^2=65\Rightarrow r=4$$

Portanto, os lados são:

$$(n_1, n_2, n_3)=(5, 9, 13)$$

Lembrando que o número de diagonais de um polígono é dado por:

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Vamos calcular o total de diagonais:

$$d_T = \frac{5 \cdot (5-3)}{2} + \frac{9 \cdot (9-3)}{2} + \frac{13 \cdot (13-3)}{2} \Rightarrow d_T = 5 + 27 + 65 = 97$$

Gabarito: “d”.

---

114. (ITA/2001)

De dois polígonos convexos, um tem a mais que o outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:

a) 63

b) 65

c) 66

d) 70

e) 77

Comentários

Sejam n_1 e n_2 os lados dos polígonos convexos tais que $n_1 < n_2$. Então, de acordo com o enunciado:

$$n_2 = n_1 + 6$$
$$d_2 = d_1 + 39$$

Sabendo que o número de diagonais é dado por:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Temos:

$$\frac{n_2(n_2-3)}{2} = \frac{n_1(n_1-3)}{2} + 39 \Rightarrow (n_1+6)(n_1+6-3) = n_1(n_1-3) + 78$$
$$n_1^2 + 9n_1 + 18 = n_1^2 - 3n_1 + 78 \Rightarrow 12n_1 = 60 \Rightarrow n_1 = 5 \Rightarrow n_2 = 11$$

O número de vértices de um polígono convexo é igual ao número de lados. Vamos calcular o número total de vértices e de diagonais dos dois polígonos:

$$S = n_1 + n_2 + d_1 + d_2 \Rightarrow S = 5 + 11 + \frac{5(5-3)}{2} + \frac{11(11-3)}{2} \Rightarrow S = 65$$

Gabarito: “b”.

---

115. (ITA/1999)

Duas circunferências C_1 e C_2, ambas com $1m$ de raio, são tangentes. Seja C_3 outra circunferência cujo raio mede $(\sqrt{2}-1)m$ e que tangencia externamente C_1 eC_2. A área, em m^2, da região limitada e exterior às três circunferências dadas, é:

a) $1-\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{6}$

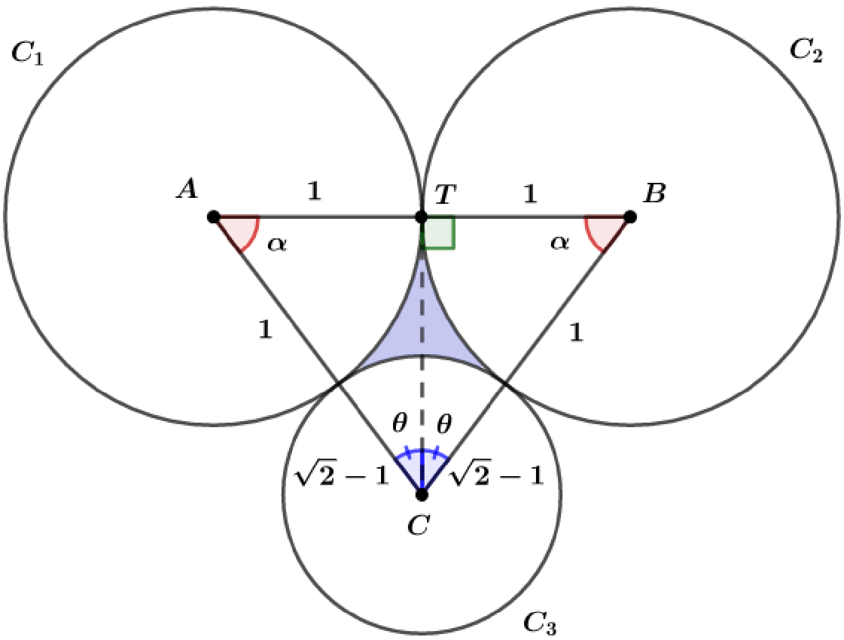
c) $\left(\sqrt{2}-1\right)^2 3$

d) $\left(\frac{\pi}{16}\right)\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$

e) $\pi\left(\sqrt{2}-1\right)-1$

Comentários

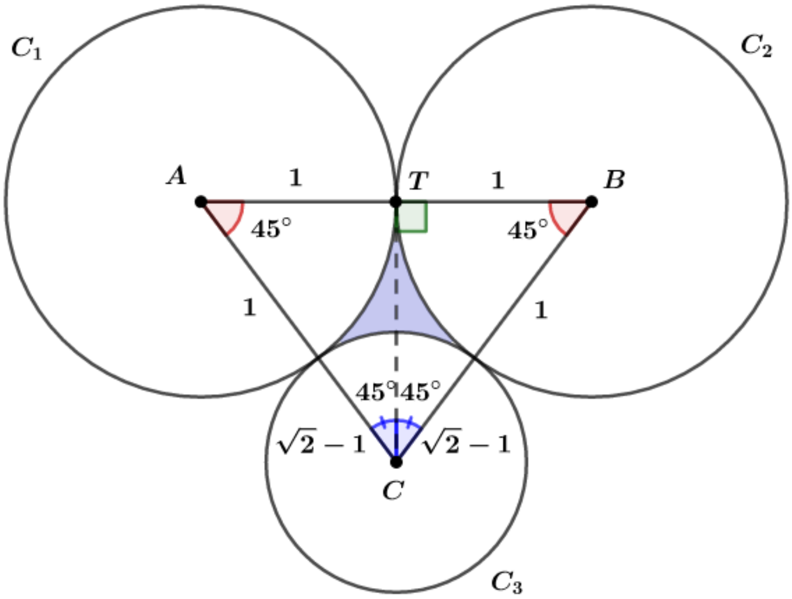
De acordo com os dados do enunciado:



A, B, C são os centros das circunferências. Note que ΔABC é isósceles. Então, CT é bissetriz do triângulo no vértice C. Vamos calcular o valor do ângulo $\hat{C}$:

$$sen\theta=\frac{1}{\sqrt{2}-1+1}\Rightarrow sen\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\theta=45°\Rightarrow\hat{C}=90°$$

Portanto, ΔABC é retângulo em C. Como ΔABC é isósceles, temos $A\equiv B\equiv 45°$.



A área da região limitada é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - \left(2 \cdot \frac{45°}{360°} \cdot \pi \cdot 1^2 + \frac{90°}{360°} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)^2\right)$$

$$A = 1 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\right) \Rightarrow A = 1 - \frac{\pi}{4}\left(4 - 2\sqrt{2}\right) \Rightarrow A = 1 - \pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) m^2$$

Gabarito: "a".

---

116. (ITA/1999)

Duas circunferências de raios iguais a $9m$ e $3m$ são tangentes externamente num ponto C. Uma reta tangencia estas duas circunferências nos pontos distintos A e B. A área, em m^2, do triângulo ABC é:

a) $27\sqrt{3}$

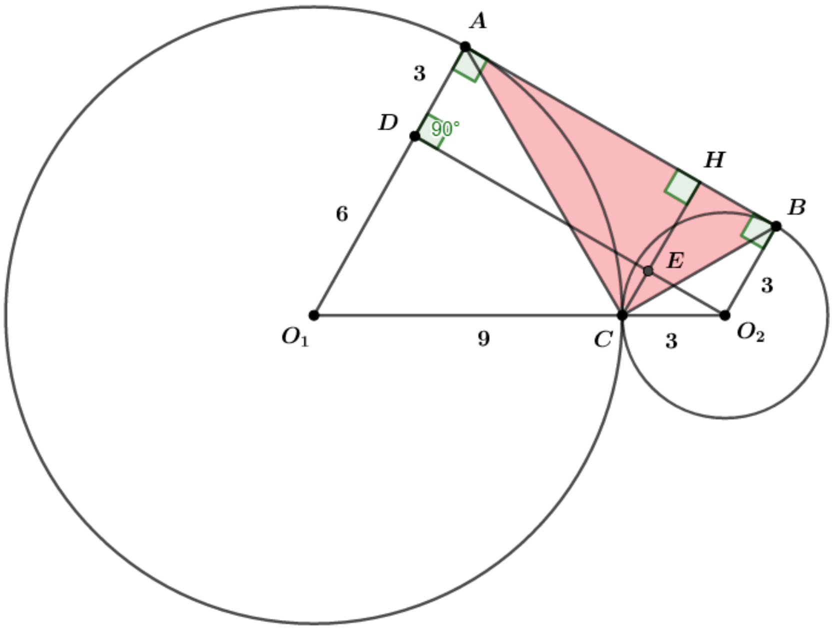
b) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

c) $9\sqrt{3}$

d) $27\sqrt{2}$

e) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

Comentários



$\overline{CH}$ é altura do triângulo ABC e é paralelo a $\overline{AO_1}$ e $\overline{BO_2}$. Assim, $AD = HE = BO_2 = 3\ m$. Vamos calcular CE:

$$\Delta O_1O_2D \sim \Delta CO_2E \Rightarrow \frac{12}{6} = \frac{3}{CE} \Rightarrow CE = \frac{3}{2}\ m$$

$$CH = CE + HE = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}\ m$$

Analisando a figura, podemos ver que $DO_2 = AB$. Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔO_1DO_2:

$$12^2 = 6^2 + DO_2^2 \Rightarrow DO_2 = 6\sqrt{3} = AB$$

A área do triângulo é dada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}\ m^2$$

Gabarito: "b".

---

117. (ITA/1998)

Considere as afirmações sobre polígonos convexos:

I) Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.

II) Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.

III) Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.

a) Todas as afirmações são verdadeiras.

b) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.

c) Apenas (I) é verdadeira.

d) Apenas (III) é verdadeira.

e) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

Comentários

I) Verdadeira.

Igualando o número de diagonais com o número de lados:

$$d = n \Rightarrow \frac{n(n-3)}{2} = n \underset{n \neq 0}{\Longrightarrow} n = 5$$

Logo, o único polígono que satisfaz essa condição é o pentágono.

II) Falsa.

$$d = 4n \Rightarrow \frac{n(n-3)}{2} = 4n \underset{n \neq 0}{\Longrightarrow} n = 11$$

Logo, existe um polígono que satisfaz essas condições.

III) Verdadeira.

Calculando a razão entre o número de diagonais e o número de lados de um polígono de n lados:

$$\frac{d}{n} = \frac{\frac{n(n-3)}{2}}{n} = \frac{n-3}{2} = k \Rightarrow n = 2k + 3$$

$\therefore n$ é ímpar

Gabarito: "b".

---

118. (ITA/1997)

Em um triângulo ABC, sabe-se que o segmento AC mede 2cm. Sejam α e β, respectivamente, os ângulos opostos aos segmentos BC e AC. A área do triângulo é (em cm^2) igual a

a) $2sen^2\alpha cotg\beta + sen(2\alpha)$

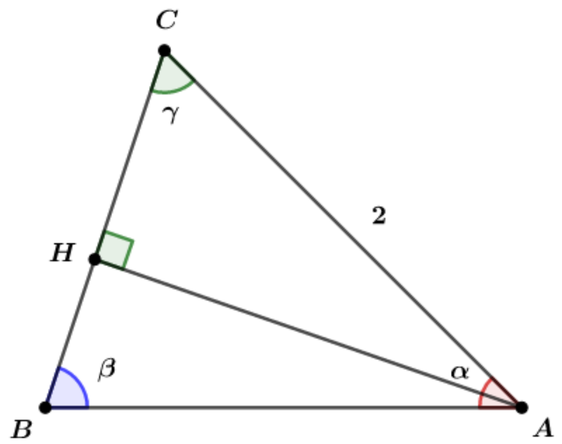
b) $2sen^2\alpha tg\beta - sen(2\alpha)$

c) $2\cos^2\alpha\, cotg\beta + sen(2\alpha)$

d) $2\cos^2\alpha\, tg\beta + sen(2\alpha)$

e) $2sen^2\alpha tg\beta - \cos(2\alpha)$

Comentários



Aplicando a lei dos senos no triângulo ABC:

$$\frac{BC}{sen\alpha}=\frac{2}{sen\beta}\Rightarrow BC=\frac{2sen\alpha}{sen\beta}$$

Calculando a altura AH:

$$AH=2sen\gamma\Rightarrow AH=2sen\left(180°-(\alpha+\beta)\right)\Rightarrow AH=2sen(\alpha+\beta)$$

A área do triângulo é dada por:

$$A=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AH\Rightarrow A=\frac{1}{2}\left(\frac{2sen\alpha}{sen\beta}\right)\left(2sen(\alpha+\beta)\right)$$

$$A=\frac{sen\alpha}{sen\beta}[2(sen\alpha cos\beta+sen\beta cos\alpha)]\Rightarrow A=2sen^2\alpha cotg\beta+sen(2\alpha)$$

Gabarito: "a".

---

119. (ITA/1996)

Um hexágono regular e um quadrado estão inscritos no mesmo círculo de raio R e o hexágono possui uma aresta paralela a uma aresta do quadrado. A distância entre estas arestas paralelas será:

a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}R$

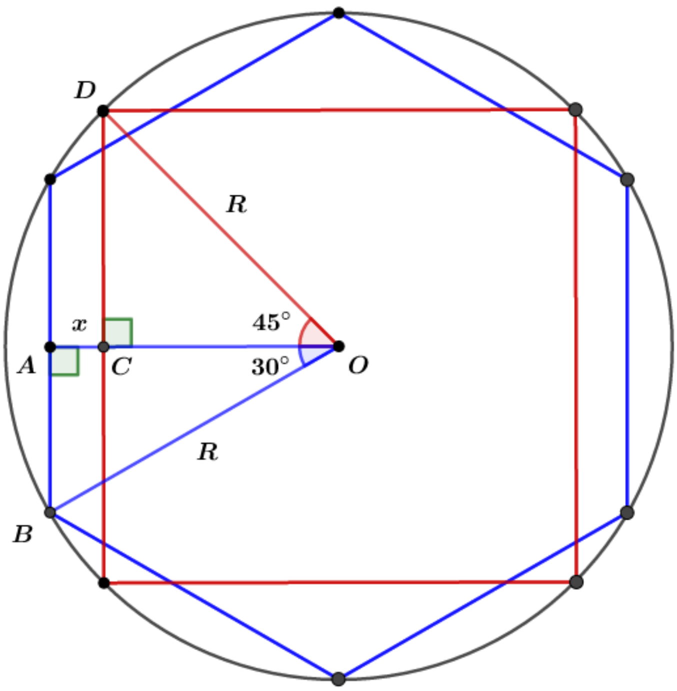
b) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}R$

c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}R$

d) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}R$

e) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}R$

Comentários



Queremos calcular o valor do x. Esse valor é dado pela diferença entre os apótemas AO e CO:

$$\Delta OCD \Rightarrow OC = R\cos 45° \Rightarrow OC = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$\Delta OAB \Rightarrow AO = R\cos 30° \Rightarrow AO = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow x = AO - OC = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}R$$

Gabarito: "a".

120. (ITA/1995)

Considere C uma circunferência centrada em O e raio $2r$, e t a reta tangente a C num ponto T. Considere também A um ponto de C tal que o ângulo $A\hat{O}T = \theta$ é um ângulo agudo. Sendo B o ponto de t tal que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{OT}$, então a área do trapézio $OABT$ é igual a

a) $r^2(2\cos\theta - \cos 2\theta)$

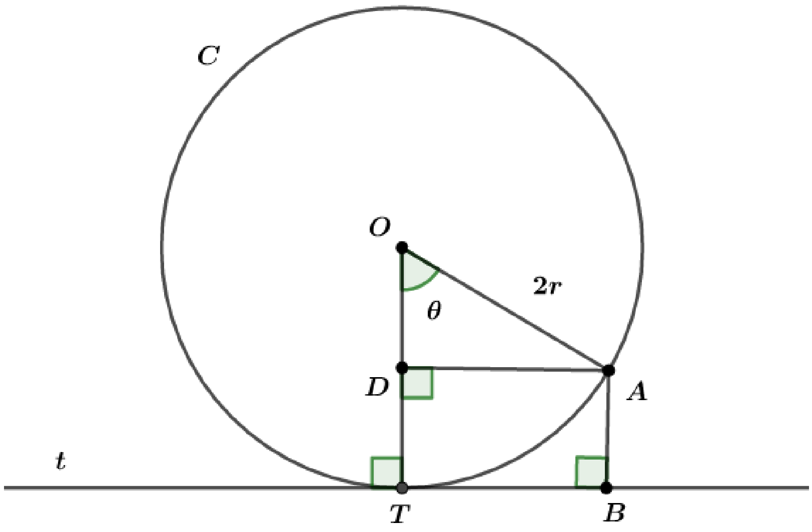
b) $2r^2(4\cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta)$

c) $r^2(4\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta)$

d) $r^2(2\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$

e) $2r^2(2\operatorname{sen} 2\theta - \cos 2\theta)$

Comentários



A área do trapézio é dada por:

$$A_{OABT} = \frac{(AB + OT) \cdot BT}{2}$$

Vamos calcular o valor dos segmentos:

$$OD = 2rcos\theta \Rightarrow DT = 2r - 2rcos\theta = AB$$

$$AD = 2rsen\theta = BT$$

Substituindo os valores na expressão da área, encontramos:

$$A_{OABT} = \frac{(2r - 2rcos\theta + 2r) \cdot 2rsen\theta}{2} \Rightarrow A_{OABT} = (4r - 2rcos\theta) \cdot rsen\theta$$

$$A_{OABT} = r^2\big(4sen\theta - sen(2\theta)\big)$$

Gabarito: "c".

---

121. (ITA/1995)

O comprimento da diagonal de um pentágono regular de lado medindo 1 unidade é igual à raiz positiva de:

a) $x^2 + x - 2 = 0$

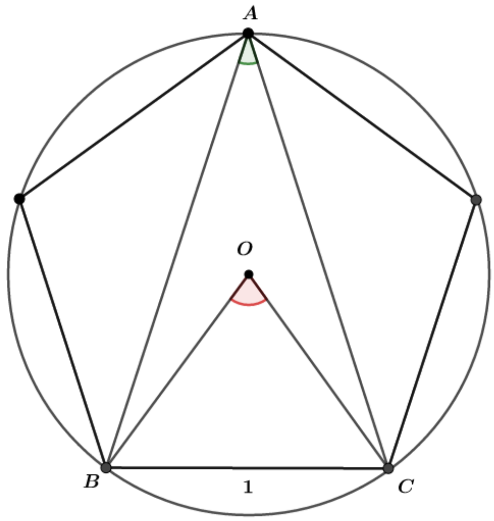
b) $x^2 - x - 2 = 0$

c) $x^2 - 2x + 1 = 0$

d) $x^2 + x - 1 = 0$

e) $x^2 - x - 1 = 0$

Comentários

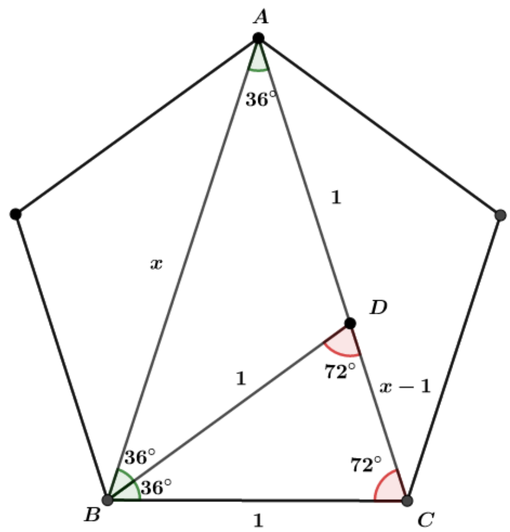


Como $B\hat{O}C$ e $B\hat{A}C$ "enxergam" o mesmo segmento BC, temos que $B\hat{A}C = B\hat{O}C/2$.

$$B\hat{O}C = \frac{360°}{5} = 72° \Rightarrow B\hat{A}C = 36°$$

ΔABC é isósceles, então $ABC \equiv ACB \equiv 72°$.

Vamos desenhar o pentágono regular e usar as relações métricas dos triângulos isósceles que estão contidos nele:



Note que $\Delta ABC \sim \Delta BCD$, então, temos:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $x > 0$:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Analisando as alternativas, encontramos o gabarito na letra e.

Gabarito: “e”.

122. (IME/2021)

Considere um trapézio de bases AB e CD, com o ponto I sendo a interseção de suas diagonais. Se as áreas dos triângulos AIB e CID formados pelas diagonais são 9 cm² e 16 cm², respectivamente, a área do trapézio, em cm², é:

a) Não é possível determinar por terem sido fornecidos dados insuficientes.

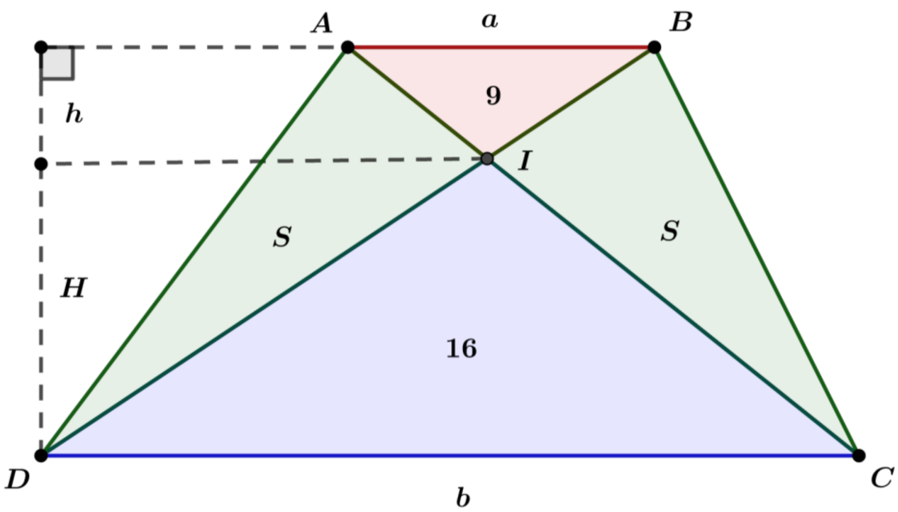
b) 63

c) 50

d) 49

e) 45

Comentários



As áreas verdes são iguais, pois possuem a mesma base e altura, basta ver $[ABD]=[ABC]$ ou $[ADC]=[BCD]$.

Note que $\Delta AIB \sim \Delta CID$, logo:

$$\frac{[AIB]}{[CID]}=\frac{9}{16}=\left(\frac{a}{b}\right)^2=\left(\frac{h}{H}\right)^2 \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{h}{H}=\frac{3}{4}$$

Calculando-se a área dos triângulos ACD e ABD:

$$[ABD]=S+9=\frac{1}{2}a(h+H)$$

$$[ACD]=S+16=\frac{1}{2}b(h+H)$$

Dividindo-se as relações:

$$\frac{S+9}{S+16}=\frac{a}{b}=\frac{3}{4}\Rightarrow 4S+36=3S+48 \therefore S=12$$

A área do trapézio é $S_T=2\cdot 12+9+16=49$.

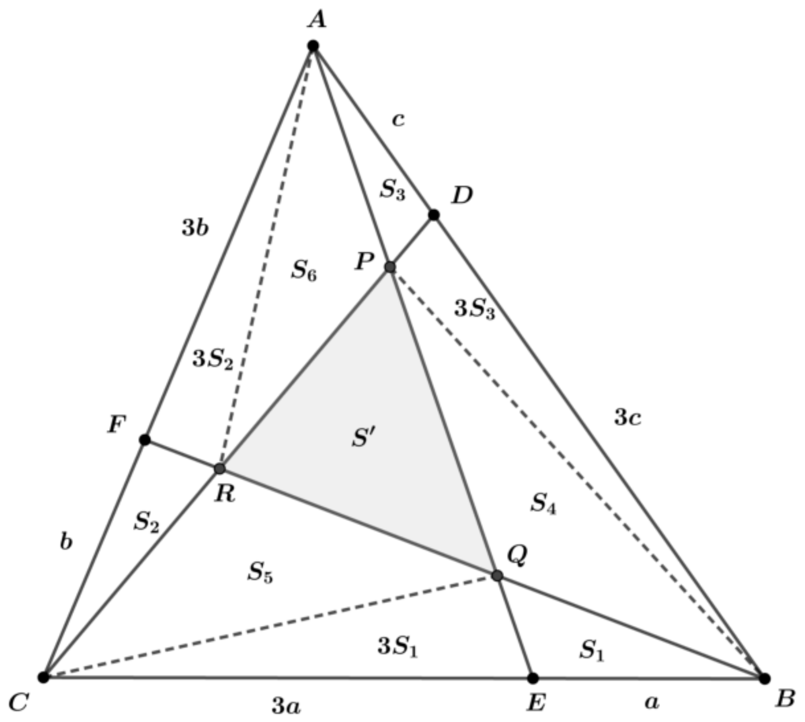
Gabarito: D

123. (IME/2021)

Sejam os pontos D, E e F pertencentes, respectivamente, aos lados AB, BC e AC do triângulo ABC, tais que $BD = 3AD$, $AF = 3CF$ e $CE = 3BE$. Sendo $P = AE \cap CD$, $Q = AE \cap BF$ e $R = BF \cap CD$, calcule $\frac{[PQR]}{[ABC]}$.

Comentários

Do enunciado, temos a seguinte figura:



Nesse triângulo, temos diversas áreas. Precisamos encontrar uma relação para as áreas envolvidas. Note que $[CEQ] = 3[BEQ]$, pois $CE = 3EB$ e a altura desses triângulos é a mesma. Analogamente, temos $[PBD] = 3[PDA]$ e $[ARF] = 3[RCF]$.

Aplicando o teorema de Menelaus no triângulo ACE e usando a reta BF, temos:

$$\frac{QA}{QE} \cdot \frac{EB}{BC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

Substituindo o valor dos segmentos:

$$\frac{QA}{QE} \cdot \frac{a}{4a} \cdot \frac{b}{3b} = 1 \Rightarrow \boxed{QA = 12QE}$$

Analogamente para o triângulo BCD e reta AE:

$$\frac{CE}{EB} \cdot \frac{BA}{AD} \cdot \frac{DP}{PC} = 1 \Rightarrow \frac{3a}{a} \cdot \frac{4c}{c} \cdot \frac{DP}{PC} = 1 \Rightarrow \boxed{PC = 12DP}$$

Analogamente para o triângulo ABF e reta CD:

$$\frac{CF}{CA}\cdot\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BR}{RF}=1\Rightarrow\frac{b}{4b}\cdot\frac{c}{3c}\cdot\frac{BR}{RF}=1\Rightarrow\boxed{BR=12RF}$$

Analisando o triângulo ABE, temos:

$$\frac{[ABQ]}{[BEQ]}=\frac{QA}{QE}=\frac{12QE}{QE}=12\Rightarrow[ABQ]=12[BEQ]=12S_1$$

Analisando o triângulo ABC, temos:

$$\frac{[ACE]}{[ABE]}=\frac{3a}{a}=3\Rightarrow[ACE]=3([ABQ]+[BEQ])=3(12S_1+S_1)=39S_1$$

Portanto, $[ABC]=39S_1+13S_1=52S_1$.

Seja $[ABC]=S$, logo:

$$S_1=\frac{S}{52}$$

Fazendo de forma análoga para S_2 e S_3, encontramos:

$$S_2=S_3=\frac{S}{52}$$

Do triângulo ABE:

$$[ABE]=13S_1\Rightarrow S_1+4S_3+S_4=13S_3$$

$$S_4=13\frac{S}{52}-\frac{S}{52}-4\frac{S}{52}=\frac{8S}{52}=\frac{2S}{13}$$

Analogamente, temos $S_5=S_6=2S/13$. Portanto:

$$[ABC]=S'+4(S_1+S_2+S_3)+(S_4+S_5+S_6)$$

$$S=S'+4\frac{3S}{52}+3\cdot\frac{2S}{13}$$

$$S-\frac{12S}{52}-\frac{6S}{13}=S'$$

$$\frac{S(52-12-24)}{52}=S'$$

$$\therefore\frac{S'}{S}=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$$

$$\therefore\boxed{\frac{[PQR]}{[ABC]}=\frac{4}{13}}$$

Gabarito: $\frac{[PQR]}{[ABC]}=\frac{4}{13}$

---

124. (IME/2018)

Seja um heptágono regular de lado l cuja menor diagonal vale d. O valor da maior diagonal satisfaz a qual das expressões?

a) $\frac{ld}{d-l}$

b) $\frac{d^2}{d-l}$

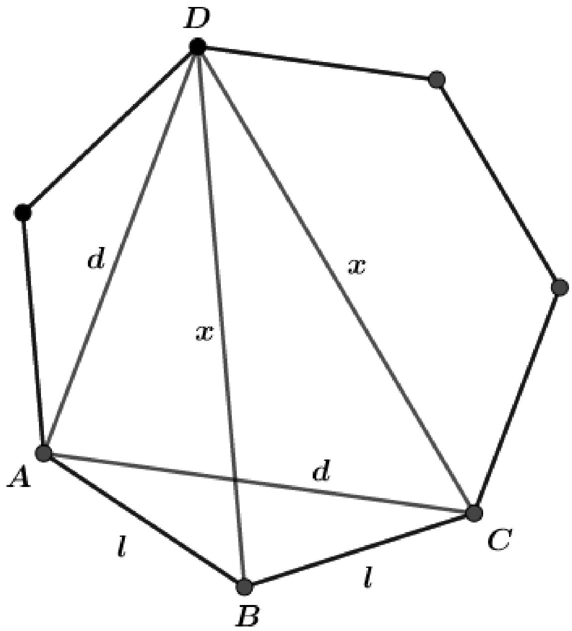
c) $\frac{ld}{d+l}$

d) $\frac{l^2}{d+l}$

e) $\frac{3d}{2}$

Comentários

O bizu nessa questão é desenhar as diagonais do polígono de modo a obter um quadrilátero e aplicar o teorema de Ptolomeu:



Como o heptágono é regular, ele é inscritível em uma circunferência. Logo, o quadrilátero $ABCD$ também é inscritível em uma circunferência. Assim, podemos aplicar o teorema de Ptolomeu:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

$$dx = lx + dl \Rightarrow dx - lx = dl \Rightarrow x = \frac{dl}{d-l}$$

Gabarito: "a".

---

125. (IME/2017)

Dado um quadrado $ABCD$, de lado a, marcam-se os pontos E sobre o lado AB, F sobre o lado BC, G sobre o lado CD e H sobre o lado AD, de modo que os segmentos formados AE, BF, CG, e DH tenham comprimento igual a $\frac{3a}{4}$. A área do novo quadrilátero formado pelas interseções dos segmentos AF, BG, CH, e DE mede:

a) $\frac{a^2}{25}$

b) $\frac{a^2}{18}$

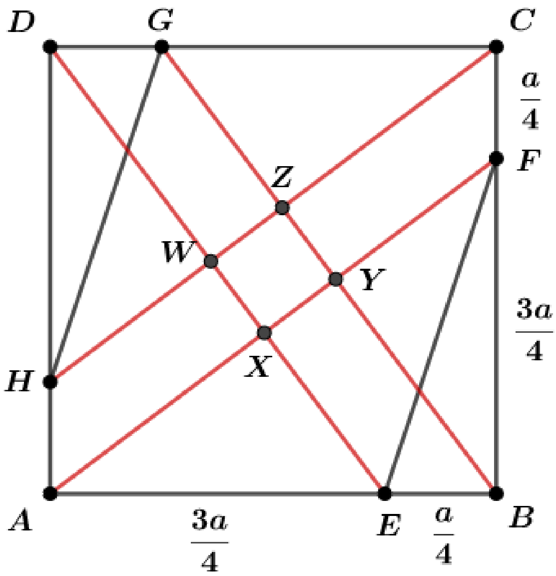
c) $\frac{a^2}{16}$

d) $\frac{a^2}{9}$

e) $\frac{2a^2}{9}$

Comentários

De acordo com os dados do enunciado:



Queremos calcular a área do quadrilátero $XYZW$.

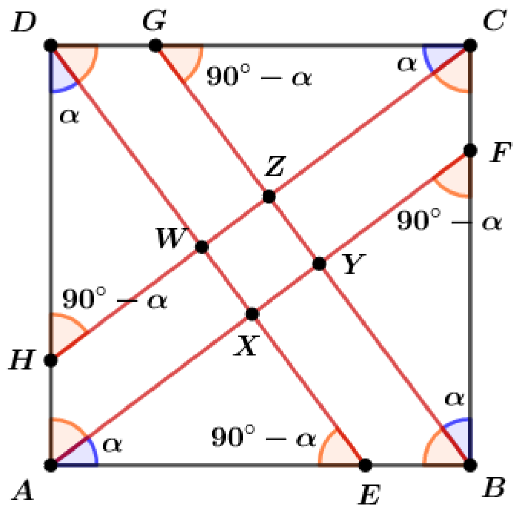
Vamos analisar o quadrado maior. Note que os triângulos AED, BFA, CDH, DAE são retângulos e congruentes, então, como a medida dos lados desses triângulos são iguais, temos:

$$A\hat{D}E \equiv B\hat{A}F \equiv C\hat{B}G \equiv D\hat{C}H \equiv \alpha$$

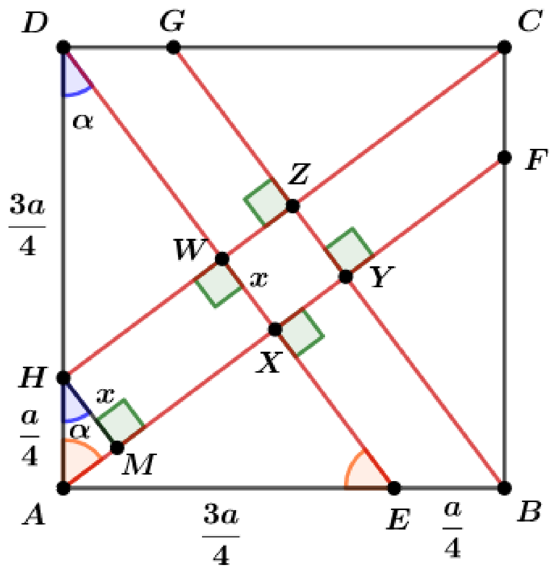
$$A\hat{E}D \equiv B\hat{F}A \equiv C\hat{G}B \equiv D\hat{H}C \equiv 90° - \alpha$$

Sendo $ABCD$ um quadrado:

$$X\hat{A}D \equiv Y\hat{B}A \equiv Z\hat{C}B \equiv W\hat{D}C \equiv 90° - \alpha$$



Os triângulos AXE, BYF, CZG, DWH são retângulos. Como $AF//CH$ e $DE//BG$ com $AH = BE = CF = DG$, temos que $XYZW$ possui lados iguais e, portanto, é um quadrado. Então, para calcular sua área, temos que encontrar o valor do seu lado. Seja x a medida do lado do quadrado interior:



Note que $\Delta DAE \sim \Delta HMA$, então, pela semelhança dos triângulos:

$$\frac{AH}{DE} = \frac{HM}{AD} \Rightarrow \frac{\frac{a}{4}}{\frac{5a}{4}} = \frac{x}{a} \Rightarrow x = \frac{a}{5}$$

$$\therefore A_{XYZW} = \frac{a^2}{25}$$

Gabarito: "a".

126. (IME/2016)

Seja a equação $\frac{sen(2x)}{tgx} = \frac{1}{2}$. As soluções dessa equação para $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ formam um polígono no círculo trigonométrico de área

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sqrt{3}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$

d) $\frac{1}{2}$

e) 1

Comentários

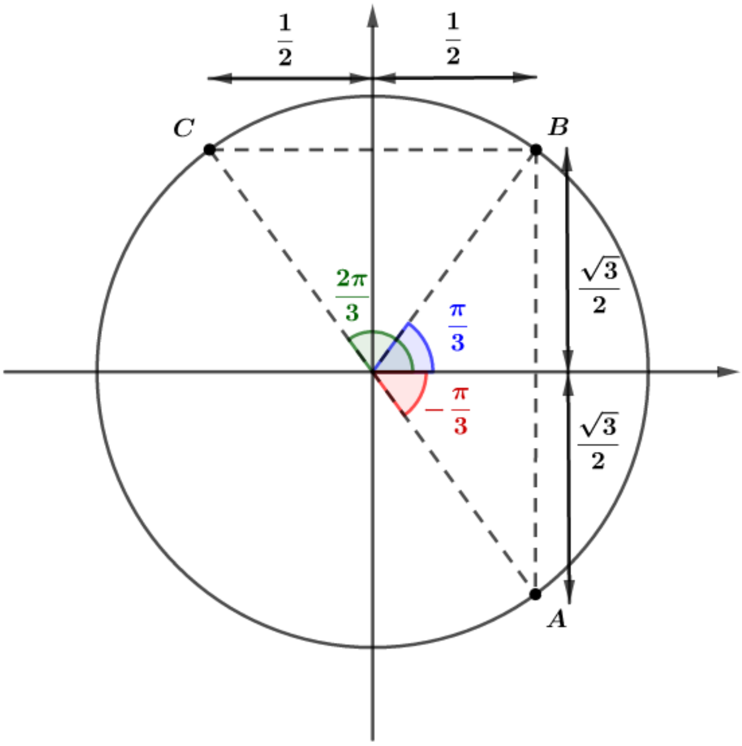
Vamos encontrar as soluções da equação:

$$\frac{sen(2x)}{tgx} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2senxcosx}{\frac{senx}{cosx}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2}$$

Como $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, temos:

$$x \in \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$$

Assim, o polígono formado é o seguinte triângulo retângulo:



A área desse triângulo é dada por:

$$A = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Gabarito: "a".

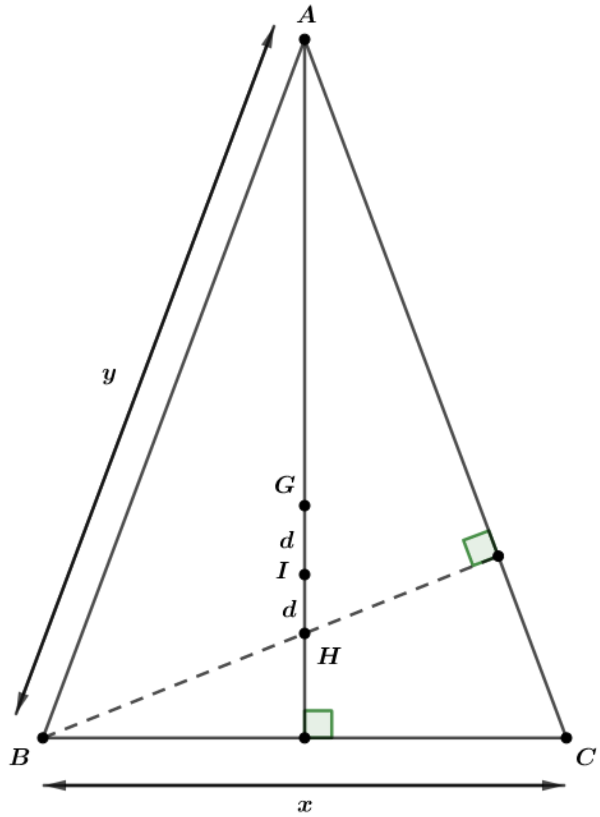
---

127. (IME/2015)

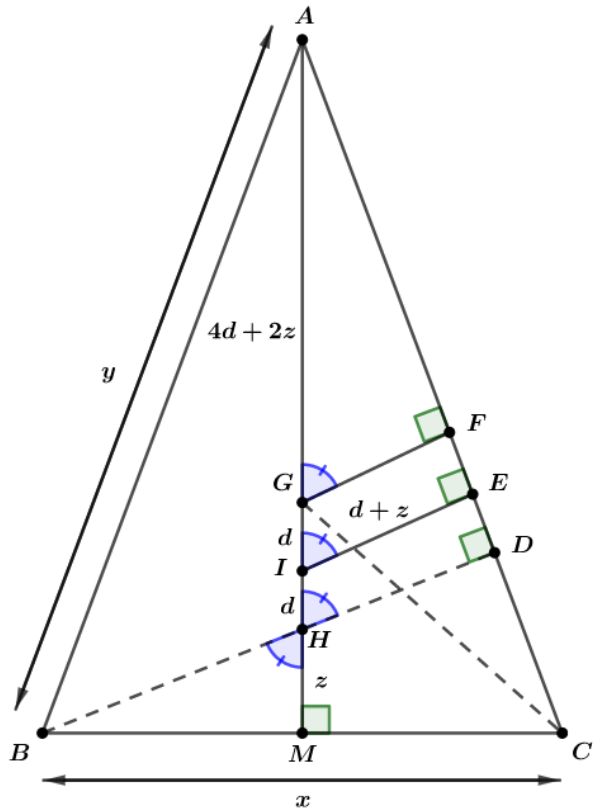
Num triângulo ABC isósceles, com ângulos iguais em B e C, o seu incentro I se encontra no ponto médio do segmento de reta que une o seu ortocentro H a seu baricentro G. O segmento de reta AG é menor que o segmento de reta AH. Os comprimentos dos segmentos de reta HI e IG são iguais a d. Determine o perímetro e a área desse triângulo em função de d.

Comentários

A figura do enunciado é dada abaixo:



Sabendo que o incentro de um triângulo equidista de seus lados e que o baricentro divide o seu segmento na razão 2: 1, temos:



$$HM = z \Rightarrow IM = IE = d + z$$

$$AG = 2GM \Rightarrow AG = 2(2d + z) \Rightarrow AG = 4d + 2z$$

Analisando as semelhanças de triângulos, temos:

$$\Delta AHD \sim \Delta AIE \Rightarrow \frac{AH}{HD} = \frac{AI}{IE} \Rightarrow \frac{6d + 2z}{HD} = \frac{5d + 2z}{d + z} \Rightarrow HD = \frac{(d + z)(6d + 2z)}{5d + 2z}$$

$$\Delta AIE \sim \Delta BHM \Rightarrow \frac{AI}{IE} = \frac{BH}{HM} \Rightarrow \frac{5d + 2z}{d + z} = \frac{BH}{z} \Rightarrow BH = \frac{z(5d + 2z)}{d + z}$$

$$\Delta AGF \sim \Delta AIE \Rightarrow \frac{AG}{GF} = \frac{AI}{IE} \Rightarrow \frac{4d + 2z}{GF} = \frac{5d + 2z}{d + z} \Rightarrow GF = \frac{(d + z)(4d + 2z)}{5d + 2z}$$

Como G é baricentro do triângulo, temos:

$$S_{ABC} = 3 \cdot S_{GCA} \Rightarrow \frac{AC \cdot BD}{2} = 3 \cdot \frac{AC \cdot GF}{2} \Rightarrow BD = 3 \cdot GF$$

Do segmento BD:

$$BD = BH + HD \Rightarrow 3 \cdot GF = BH + HD$$

Substituindo o valor das variáveis, encontramos:

$$3\left[\frac{(d + z)(4d + 2z)}{5d + 2z}\right] = \frac{z(5d + 2z)}{d + z} + \frac{(d + z)(6d + 2z)}{5d + 2z}$$

Simplificando a equação:

$$\frac{3(d + z)^2(4d + 2z)}{(5d + 2z)(d + z)} = \frac{z(5d + 2z)^2 + (d + z)^2(6d + 2z)}{(5d + 2z)(d + z)}$$

$$\Rightarrow 6(d^2 + 2dz + z^2)(2d + z) = z(25d^2 + 20dz + 4z^2) + 2(d^2 + 2dz + z^2)(3d + z)$$

$$\Rightarrow 6(2d^3 + d^2z + 4d^2z + 2dz^2 + 2dz^2 + z^3)$$
$$= 25d^2z + 20dz^2 + 4z^3 + 2(3d^3 + d^2z + 6d^2z + 2dz^2 + 3dz^2 + z^3)$$

$$\Rightarrow 12d^3 + 30d^2z + 24dz^2 + 6z^3 = 39d^2z + 30dz^2 + 6z^3 + 6d^3$$

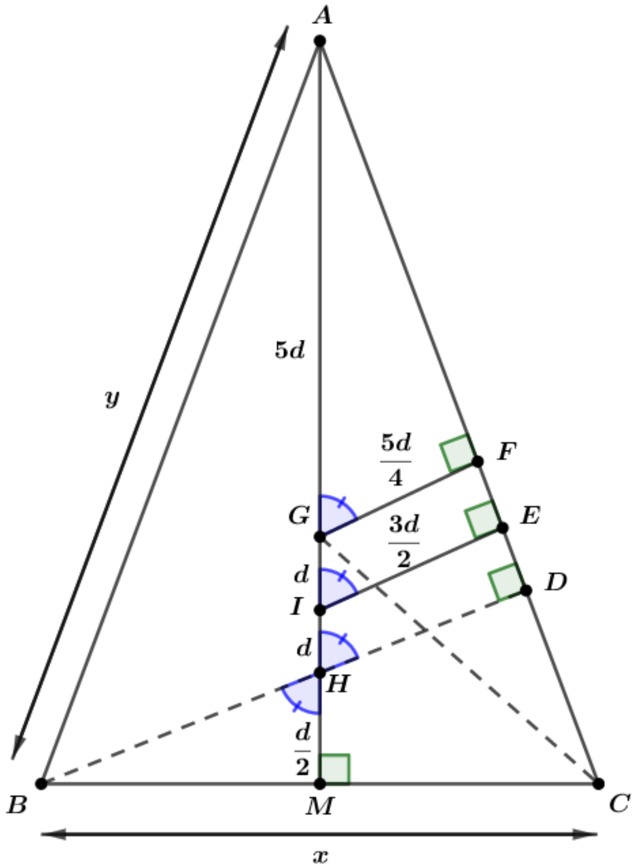
$$\Rightarrow 6d^3 = 9d^2z + 6dz^2$$

$$\Rightarrow 2z^2 + 3dz - 2d^2 = 0$$

Escrevendo z em função de d:

$$z = \frac{-3d \pm \sqrt{25d^2}}{4} \Rightarrow z = \frac{-3d \pm 5d}{4} \Rightarrow z = \frac{d}{2}$$

Dessa forma, temos a seguinte situação:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AGF:

$$(5d)^2 = \left(\frac{5d}{4}\right)^2 + AF^2 \Rightarrow AF = \frac{5\sqrt{15}}{4}d$$

Pela semelhança de triângulos:

$$\Delta AGF \sim \Delta ACM \Rightarrow \frac{AF}{GF} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{\frac{5\sqrt{15}}{4}d}{\frac{5d}{4}} = \frac{\frac{15d}{2}}{MC} \Rightarrow MC = \frac{\sqrt{15}d}{2} \Rightarrow x = \sqrt{15}d$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔAMC:

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{\left(\frac{15d}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}d}{2}\right)^2} \Rightarrow AC = 2\sqrt{15}d = y$$

Portanto, o perímetro e a área do triângulo ABC são dados por:

$$2p = x + 2y \Rightarrow 2p = 5\sqrt{15}d$$

$$S_{ABC} = \frac{AM \cdot BC}{2} = \frac{\left(\frac{15d}{2}\right)\left(\sqrt{15}d\right)}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{15\sqrt{15}d^2}{4}$$

Gabarito: $\mathbf{2p = 5\sqrt{15}d}$ **e** $\mathbf{S_{ABC} = \frac{15\sqrt{15}d^2}{4}}$

---

128. (IME/2015)

Seja um trapézio retângulo de bases a e b com diagonais perpendiculares. Determine a área do trapézio.

a) $\frac{ab}{2}$

b) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

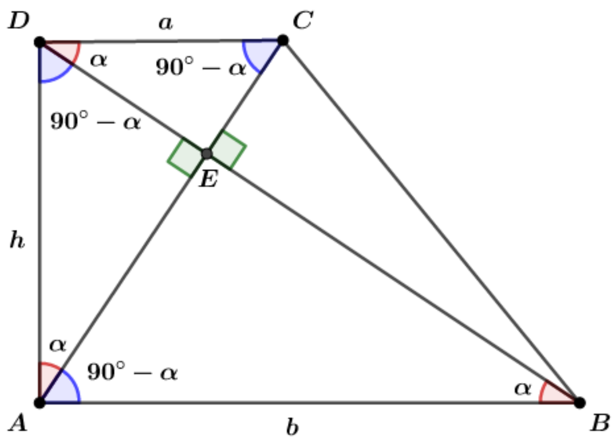
c) $\left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$

d) $\left(\frac{2a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$

e) $\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)a^2b}$

Comentários

Supondo $a < b$, sendo as diagonais perpendiculares e o trapézio retângulo, temos:



Note que $\Delta ACD \sim \Delta BAD$, então, pela semelhança de triângulos:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow \frac{h}{b} = \frac{a}{h} \Rightarrow h = \sqrt{ab}$$

A área do trapézio é dada por:

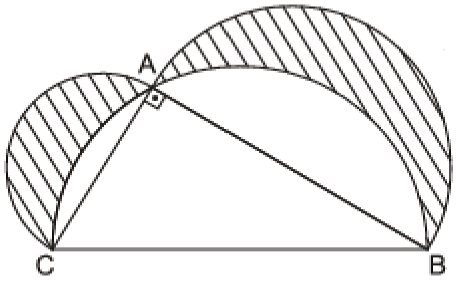
$$A_{ABCD} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}$$

Gabarito: "c".

---

129. (IME/2011)

Seja o triângulo retângulo ABC com os catetos medindo $3\ cm$ e $4\ cm$. Os diâmetros dos três semicírculos, traçados na figura abaixo, coincidem com os lados do triângulo ABC. A soma das áreas hachuradas, em cm^2, é:



a) 6

b) 8

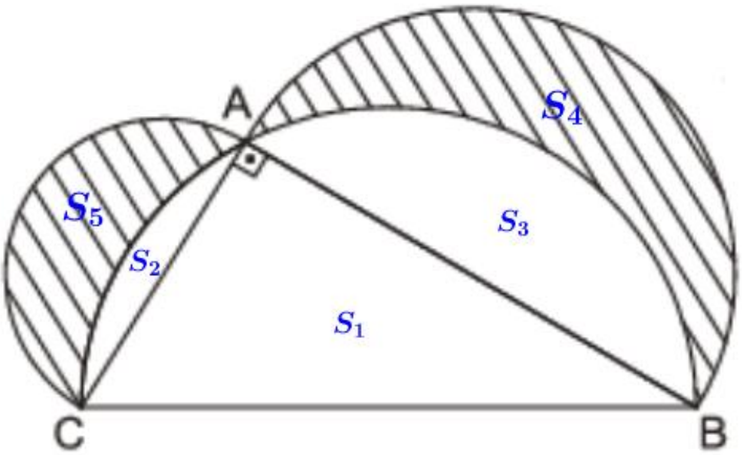
c) 10

d) 12

e) 14

Comentários

O triângulo retângulo ABC possui catetos de $3\ cm$ e $4\ cm$, então, a hipotenusa é igual a $5\ cm$.



De acordo com a figura, temos:

$$S_2 + S_5 = \frac{\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow S_2 + S_5 = \frac{9\pi}{8}$$

$$S_3 + S_4 = \frac{\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{4}{2}\right)^2 \Rightarrow S_3 + S_4 = 2\pi$$

$$S_1 = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 = \frac{25\pi}{8}$$

$$S_4 + S_5 = (S_2 + S_5) + (S_3 + S_4) + S_1 - (S_1 + S_2 + S_3)$$

$$S_4 + S_5 = \frac{9\pi}{8} + 2\pi + 6 - \frac{25\pi}{8} \Rightarrow S_4 + S_5 = 6$$

Gabarito: “a”.

---

130. (IME/2010)

Seja ABC um triângulo de lados AB, BC e AC iguais a 26, 28 e 18, respectivamente. Considere o círculo de centro O inscrito nesse triângulo. A distância AO vale:

a) $\frac{\sqrt{104}}{6}$

b) $\frac{\sqrt{104}}{3}$

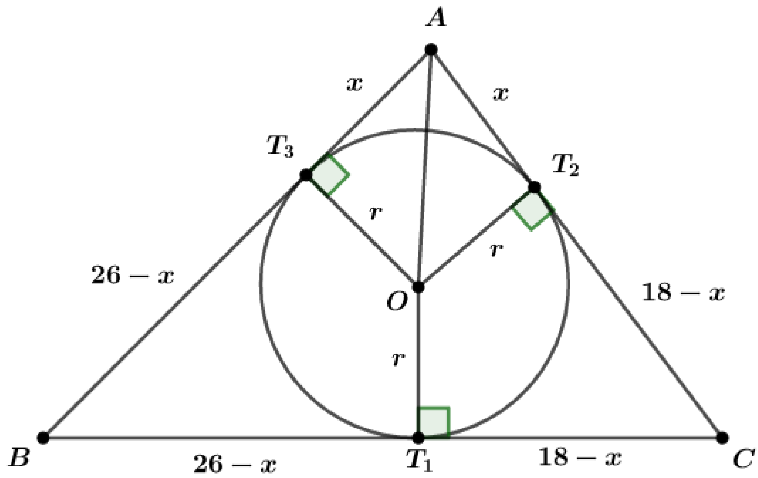
c) $\frac{2\sqrt{104}}{3}$

d) $\sqrt{104}$

e) $3\sqrt{104}$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos:



Calculando o valor de x:

$$BC = 28 \Rightarrow 26 - x + 18 - x = 28 \Rightarrow 2x = 44 - 28 \Rightarrow x = 8$$

Podemos calcular o valor da área do triângulo usando a fórmula de Heron:

$$A_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$2p = a + b + c \Rightarrow p = \frac{26 + 28 + 18}{2} = 36$$

$$A_{ABC} = \sqrt{36(36-28)(36-18)(36-26)} = \sqrt{36(8)(18)(10)} = 72\sqrt{10}$$

Sabendo que $A_{ABC} = pr$, temos:

$$A = pr \Rightarrow 72\sqrt{10} = 36r \Rightarrow r = 2\sqrt{10}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AOT_2:

$$AO^2 = x^2 + r^2 \Rightarrow AO = \sqrt{8^2 + \left(2\sqrt{10}\right)^2} \Rightarrow AO = \sqrt{104}$$

Gabarito: "d".

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Finalizamos um assunto muito cobrado nas provas militares. É muito provável que tenha algumas questões de geometria plana no seu vestibular.

Nessa aula, é importante saber trabalhar com polígonos e como calcular as medidas dos lados e os ângulos internos dessas figuras. No tópico de áreas, você deve memorizar as fórmulas das áreas das figuras planas e saber como resolver questões envolvendo esse tema.

Tente resolver todas os exercícios ao longo da teoria e dos vestibulares anteriores, sempre que tiver dúvidas consulte a resolução ou comentários das questões.

Nunca deixe uma dúvida sua passar! Caso isso aconteça, entre em contato conosco pelo fórum de dúvidas ou se preferir:

/profvictorso

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Dolce, Osvaldo. Pompeo, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana. 9. ed. Atual, 2013. 456p.

[2] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria I. 5 ed. Livraria Francisco Alves Editora, 1990. 151p.

[3] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria II. 1 ed. FC & Z Livros, 2002. 296p.

[4] Pinheiro, Plácido Rogério. *O Círculo dos 9 pontos*. Disponível em: <https://www.rpm.org.br/cdrpm/14/12.htm>