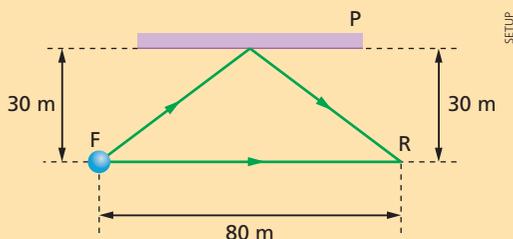


# 1. Cálculo de defasagem quando há inversão de fase

No item 1 do capítulo anterior calculamos a diferença de fase entre dois pontos de uma onda. Vamos agora apresentar alguns exercícios de cálculo de defasagem entre duas ondas que atingem um ponto, tendo uma delas sofrido inversão de fase numa reflexão.

## Exercícios

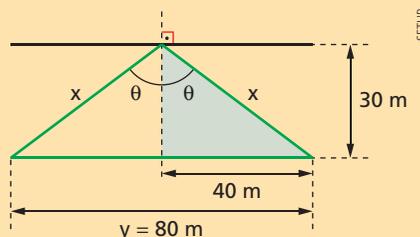
1. Uma fonte sonora  $F$  emite som de comprimento de onda 3,0 metros, que atinge o ponto  $R$  tanto diretamente como por reflexão na parede  $P$ . Calcule a diferença de fase no ponto  $R$ , entre a onda direta e a onda refletida.



### Resolução:

1ª modo:

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo sombreado na figura, temos:



$$x^2 = 30^2 + 40^2 \Rightarrow x = 50 \text{ m}$$

Portanto, a diferença de percurso entre a onda direta e a onda refletida é:

$$\Delta d = 2x - y = 2(50 \text{ m}) - 80 \text{ m} = 20 \text{ m}$$

A defasagem devida à diferença de percurso é:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\Delta d}{\lambda} \cdot (2\pi \text{ rad}) = \frac{20}{3,0} \cdot 2\pi \text{ rad} = \frac{40\pi}{3,0} \text{ rad}$$

Porém, ao ser refletida na parede, a onda sofre uma inversão de fase, havendo portanto, uma defasagem adicional  $\Delta\varphi_2$ , tal que  $\Delta\varphi_2 = \pi \text{ rad}$ . Assim, a defasagem total  $\Delta\varphi$  é:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \frac{40\pi}{3} + \pi = \frac{43\pi}{3}$$

$$\Delta\varphi = \frac{43\pi}{3} \text{ rad}$$

Como observamos no item 1 do capítulo 16 do CD, essa defasagem é equivalente a uma defasagem reduzida  $\Delta\varphi_R$ , tal que  $0 \leq \Delta\varphi_R < 2\pi$  e  $\Delta\varphi_R = \Delta\varphi + k(2\pi)$ , sendo  $k$  um número natural. Como:

$$\frac{43\pi}{3} = \frac{43}{6}(2\pi) = 7(2\pi) + \frac{2\pi}{6} = 7(2\pi) + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{temos: } \Delta\varphi_R = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

2ª modo:

Levando em conta os dados do problema, o modo de resolver acima é o mais rápido. Mas às vezes pode ser útil outro modo.

Seja  $T$  o período da onda e  $t$  a diferença de tempo entre os dois percursos, temos:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{t}{T}(2\pi)$$

Suponhamos que a velocidade do som seja  $v = 300 \text{ m/s}$ . Assim, o período da onda é dado por:

$$T = \frac{\lambda}{v} = \frac{3,0 \text{ m}}{300 \text{ m/s}} = \frac{1}{100} \text{ s}$$

Como a diferença de percurso é  $\Delta d = 20 \text{ m}$ , a diferença de tempo  $t$  é:

$$t = \frac{\Delta d}{v} = \frac{20 \text{ m}}{300 \text{ m/s}} = \frac{1}{15} \text{ s}$$

Assim:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{t}{T}(2\pi) = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{100}}(2\pi) = \frac{40\pi}{3} \text{ rad}$$

Porém, pela inversão de fase há uma diferença adicional:

$$\Delta\varphi_2 = \pi \text{ rad}$$

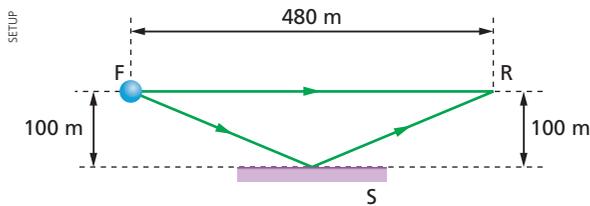
Portanto, a defasagem total é:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 = \frac{40\pi}{3} + \pi = \frac{43\pi}{3} \text{ rad}$$

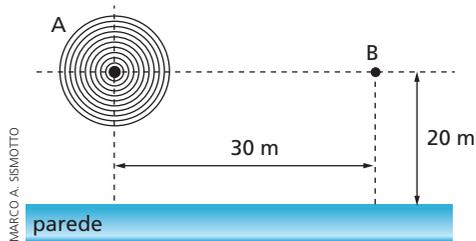
e a defasagem reduzida é:

$$\Delta\varphi_R = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

2. Um receptor  $R$  recebe ondas sonoras geradas por uma fonte  $F$  (veja a figura) tanto diretamente como por reflexão em uma superfície  $S$ . Sabendo que o comprimento de onda dessas ondas é  $15\text{ m}$ , calcule a diferença de fase em  $R$ , entre a onda direta e a refletida.

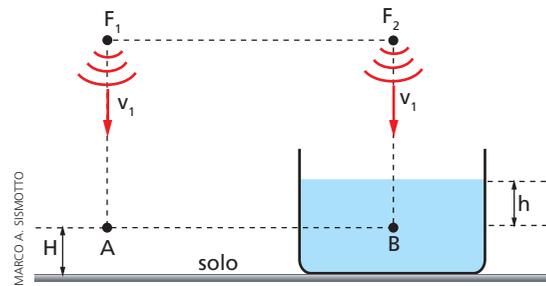


3. (Fuvest-SP) Uma fonte sonora, em repouso no ponto  $A$  da figura, emite, num gás, ondas esféricas de frequência  $50\text{ Hz}$  e comprimento de onda  $6,0\text{ m}$ , que se refletem em uma parede rígida. Considere o ponto  $B$  da figura e as ondas que se propagam entre  $A$  e  $B$  diretamente (sem reflexão) e refletindo-se na parede.



Determine:

- a velocidade de propagação dessas ondas;
  - a diferença entre os tempos de propagação das duas ondas entre os pontos  $A$  e  $B$ ;
  - a diferença de fase entre as duas ondas no ponto  $B$ , medida em radianos.
4. Duas fontes sonoras  $F_1$  e  $F_2$ , que estão à mesma altura acima do solo (veja a figura), emitem sons de mesma frequência e em fase, que se propagam no ar com velocidade  $v_1 = 300\text{ m/s}$ . Os dois sons atingem dois pontos  $A$  e  $B$ , que estão à mesma distância  $H$  do solo, mas o ponto  $B$  está dentro d'água, a uma profundidade  $h = 7,5\text{ m}$ .



Sejam  $\varphi_A$  e  $\varphi_{B'}$  respectivamente, as fases das ondas em  $A$  e  $B$ . Sabendo que a frequência das ondas é  $f = 125\text{ Hz}$  e que a velocidade do som na água é  $v_2 = 1\,500\text{ m/s}$ , calcule o módulo de  $\varphi_A - \varphi_{B'}$ , isto é, a defasagem entre as ondas em  $A$  e  $B$ .

## 2. O princípio de Huygens e as leis da reflexão e refração

No texto do livro vimos que, segundo Huygens, as ondas secundárias só eram efetivas no ponto de contato com a envoltória, tendo intensidade desprezível nos outros pontos. Com isso, Huygens justificou a propagação retilínea da luz. Por exemplo, consideremos uma fonte puntiforme  $F$ , emitindo ondas circulares (fig. 3), as quais incidem num anteparo com uma abertura  $AB$ .

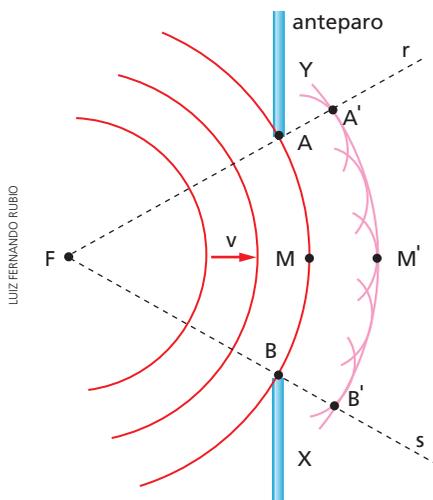


Figura 3.

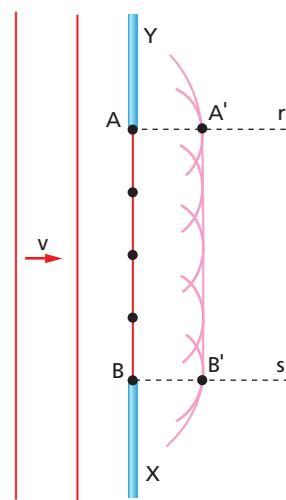


Figura 4.

De acordo com Huygens, os pontos da frente da onda  $AMB$  são fontes de ondas secundárias, de modo que, após algum tempo, a nova frente de onda é  $A'M'B'$ . Os trechos  $A'Y$  e  $B'X$  das ondas secundárias têm intensidade desprezível e, assim, após a passagem pela abertura, a onda deve manter-se na região limitada pelas retas  $r$  e  $s$ . Do mesmo modo, se uma onda reta incide num anteparo com abertura  $AB$  (fig. 4), após a passagem, a onda deverá restringir-se à região entre as retas  $r$  e  $s$ .

Algumas objeções logo foram feitas à teoria de Huygens. Em primeiro lugar, quando os pontos de uma frente de onda  $S$  emitem ondas secundárias (fig. 5), por que estas ondas se propagam apenas **para a frente**, gerando a nova frente  $S'$ , e não também **para trás**, gerando a frente  $S''$ ?

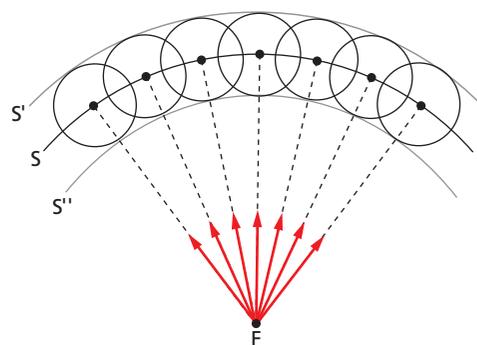


Figura 5.

Em segundo lugar, por que as ondas secundárias são efetivas apenas nos pontos de contato com a envoltória? Afinal de contas, com essa hipótese, Huygens **negava a possibilidade de difração**, pois, como já vimos, as situações ilustradas nas figuras 3 e 4 (propagação retilínea) ocorrem (aproximadamente) apenas quando o comprimento de onda é pequeno em comparação com o tamanho da abertura. No entanto, quando o comprimento de onda é da ordem de grandeza das dimensões da abertura (ou maior que a abertura), o que se observa é a difração da onda, como ilustra a figura 6. Para eliminar essas objeções, no início do século XIX, Fresnel (Augustin Jean Fresnel, francês, 1788-1827) modificou o princípio de Huygens, afirmando que as ondas secundárias são efetivas em outros pontos, além do ponto de tangência com a envoltória, mas suas amplitudes variam de acordo com a direção, tendo valor máximo na direção e sentido do raio, e valor nulo no sentido oposto. A partir dessa hipótese, ele fez o cálculo das superposições de todas as ondas secundárias, mostrando que o efeito final é o cancelamento da frente de onda que se propagaria **para trás** (caso da frente de onda  $S''$  da figura 5), restando apenas a frente de onda que se propaga **para a frente** (caso da frente de onda  $S'$  da figura 5). Mostrou, também, que situações como as das figuras 3 e 4 (propagação retilínea) ocorrem quando o comprimento de onda é pequeno em comparação com o tamanho da abertura, e situações como a da figura 6 ocorrem quando o comprimento de onda é da ordem de grandeza do tamanho da abertura (ou maior que a abertura).

Com o acréscimo da hipótese de Fresnel, o princípio de Huygens passou a ser chamado **princípio de Huygens-Fresnel**.

Embora a hipótese de Fresnel explicasse os fatos observados, ela foi encarada como "artificial". Mais tarde, Kirchhoff (Gustav Robert Kirchhoff, alemão, 1824-1887) deu uma nova formulação ao princípio de Huygens, mostrando que a hipótese de Fresnel era desnecessária, pois todos os efeitos observados podiam ser deduzidos a partir da equação de onda.

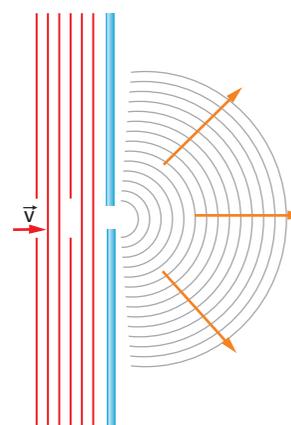


Figura 6.

## O princípio de Huygens e a Lei da Reflexão

Vamos justificar a Segunda Lei da Reflexão (ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão), a partir do princípio de Huygens, para o caso particular de uma onda reta, que se reflete em uma superfície plana.

A figura 7 representa uma frente de onda reta, que incide numa superfície plana  $S$ . O ângulo  $i$  entre o raio incidente  $S$  e a normal  $n$  é o ângulo de incidência, o qual é também igual ao ângulo que a frente de onda forma com  $S$ .

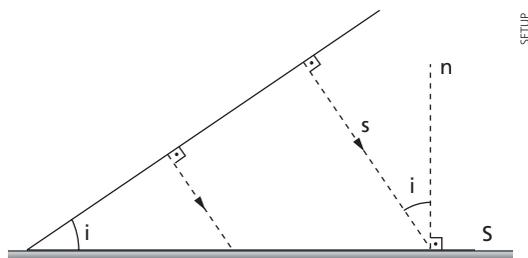


Figura 7.

Na figura 8, representamos a frente de onda num instante  $t_1$ , em que uma de suas extremidades atinge a superfície  $S$  no ponto  $A$ . De acordo com o princípio de Huygens, esse ponto torna-se uma fonte de onda secundária. Do mesmo modo, à medida que os outros pontos da frente de onda vão atingindo  $S$ , os pontos atingidos vão se tornando fontes de ondas secundárias.

Seja  $t_2$  o instante em que o outro extremo da frente de onda atingiu  $S$  (fig. 9).

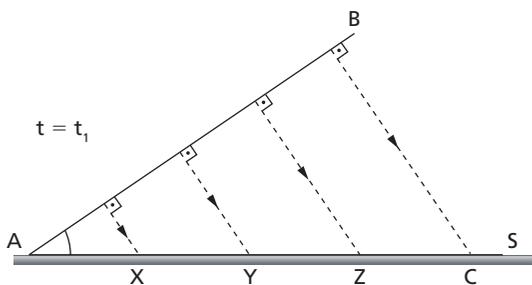


Figura 8.

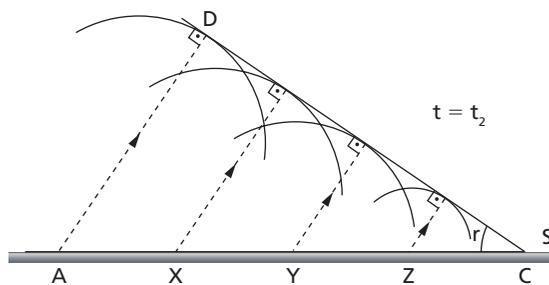


Figura 9.

Nesse instante, a envoltória  $\overline{CD}$  das ondas secundárias é a frente de onda refletida, a qual forma com  $S$  o ângulo  $r$  (ângulo de reflexão). As distâncias  $BC$  e  $AD$  foram percorridas com a mesma velocidade e no mesmo intervalo de tempo  $\Delta t$ , onde  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Assim:

$$BC = AD = v \cdot \Delta t$$

Na figura 10, representamos a frente incidente  $\overline{AB}$  e a frente refletida  $\overline{CD}$ . Podemos afirmar que os triângulos  $ABC$  e  $ACD$  são congruentes, pois são retângulos, têm a mesma hipotenusa  $\overline{AC}$  e dois catetos de mesma medida ( $BC = AD$ ). Daí, concluímos que os ângulos  $i$  e  $r$  têm a mesma medida:

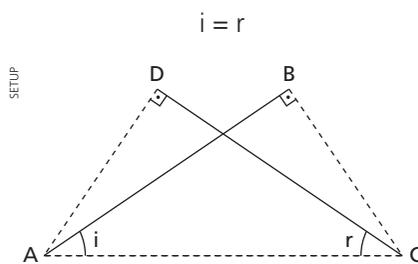


Figura 10.

## O princípio de Huygens e a Lei da Refração

Vamos agora justificar a Segunda Lei da Refração (Lei de Snell), também para o caso de uma onda reta, que passa de um meio (1) para um meio (2), os quais estão separados por uma superfície plana  $S$ . Na figura 11, representamos uma frente de onda reta num instante  $t$ , em que uma de suas extremidades atinge a superfície  $S$  no ponto  $A$ , sendo  $\theta_1$  o ângulo de incidência.

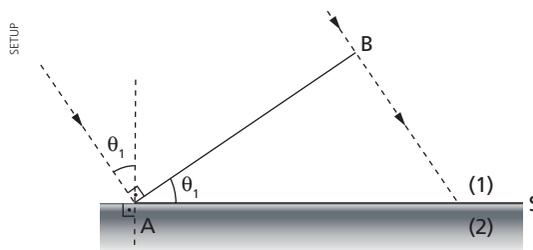


Figura 11.

De acordo com o princípio de Huygens, esse ponto torna-se uma fonte de onda secundária e, à medida que os outros pontos da frente atingem  $S$ , os pontos atingidos vão se tornando fontes de ondas secundárias.

Seja  $t_2$  o instante em que o outro extremo da frente de onda atingiu  $S$  no ponto  $D$  (fig. 12).

Nesse instante, a envoltória  $\overline{CD}$  das ondas secundárias é a frente de onda refratada, a qual forma com  $S$  o ângulo  $\theta_2$  (ângulo de refração). As distâncias  $BD$  e  $AC$  foram percorridas no mesmo intervalo de tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Assim, sendo  $v_1$  e  $v_2$  as velocidades de propagação da onda nos meios (1) e (2), respectivamente, temos:

$$BD = v_1 \cdot \Delta t \quad \text{e} \quad AC = v_2 \cdot \Delta t$$

Portanto,

$$\frac{BD}{AC} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{①}$$

Dos triângulos retângulos  $ABD$  e  $ACD$ , tiramos:

$$\left. \begin{aligned} BD &= AD \cdot \text{sen } \theta_1 \\ AC &= AD \cdot \text{sen } \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{②}$$

Substituindo ② em ①, temos:

$$\frac{AD \cdot \text{sen } \theta_1}{AD \cdot \text{sen } \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

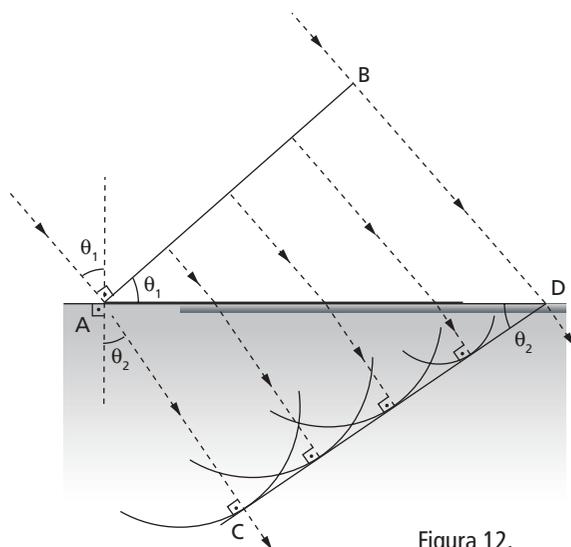


Figura 12.

### 3. Interferência em cunhas e anéis de Newton

#### Interferência em cunhas de ar

Vamos descrever um experimento que permite determinar se duas lâminas de vidro (ou outro material sólido e transparente) são totalmente lisas e, também, determinar o diâmetro de fios muito finos ou a espessura de lâminas muito finas, como, por exemplo, uma folha de papel.

Consideremos duas lâminas de vidro retangulares de mesmo tamanho e superpostas. Em seguida, levantamos um pouco uma delas (figura 13a) pela introdução de um fio muito fino, de diâmetro  $d$ . Na figura 14 temos uma visão de perfil da situação da figura 13a.

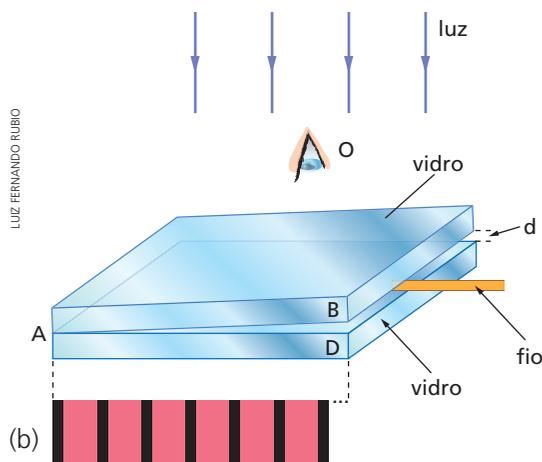


Figura 13.

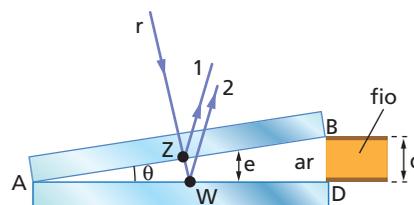


Figura 14. Visão de perfil do dispositivo da figura 13a.

Entre as lâminas forma-se uma película de ar em forma de cunha (fig. 15). Nas três figuras o ângulo  $\theta$  e a distância  $d$  estão exagerados para facilitar o desenho, pois, como dissemos,  $d$  tem a ordem de grandeza da espessura de uma folha de papel.

Suponhamos que um feixe de luz monocromática ilumine o conjunto como ilustra a figura 13a. Na cunha de ar haverá interferência entre a luz incidente e a luz refletida de modo semelhante ao que acontece com a lâmina de faces paralelas que analisamos no texto do livro. Porém, aqui a espessura da lâmina de ar é variável, de modo que, para algumas espessuras teremos interferência construtiva e para outras, interferência destrutiva. A consequência é que o observador  $O$  da figura, que observa a interferência por luz refletida, enxergará uma série de faixas (fig. 13b) alternadamente claras e escuras, denominadas **franjas de interferência**. Porém isso só ocorrerá se as lâminas de vidro forem perfeitamente lisas. Se as lâminas tiverem irregularidades, em vez de franjas observaremos desenhos irregulares. Se um outro observador estiver olhando o conjunto por baixo, enxergará a interferência por luz transmitida, que também formará franjas alternadamente claras e escuras mas com uma diferença: onde o observador de cima vê uma faixa clara, o observador de baixo observa uma faixa escura e vice-versa.

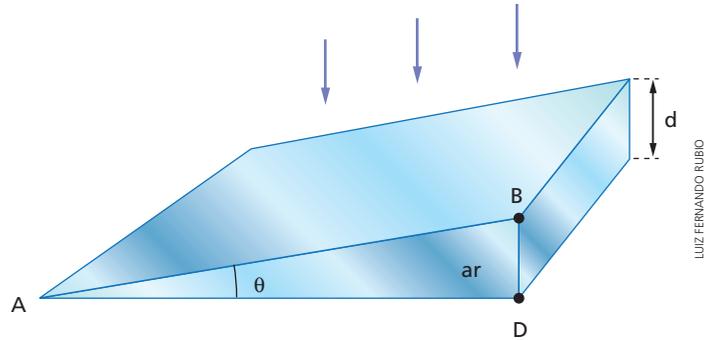


Figura 15. Cunha de ar entre as lâminas de vidro da figura 13a.

Vamos analisar a interferência por reflexão, que é a que vê o observador  $O$ .

Na figura 14 representamos um raio  $r$  que incide no conjunto. Como vimos no texto do livro, nas lâminas de vidro, que têm espessura muito maior que o comprimento da onda de luz, o padrão de interferência é destruído e, assim, só precisamos analisar a interferência entre os raios que se refletem nas superfícies da cunha de ar. O raio  $r$  atinge a face superior da lâmina no ponto  $Z$ . Como nesse ponto a luz está indo de um meio mais refringente (vidro) para um menos refringente (ar), o raio refletido 1 não sofre inversão de fase. Porém, no ponto  $W$ , a luz está indo de um meio menos refringente (ar) para um mais refringente (vidro); assim, o raio refletido 2 sofre inversão de fase. Portanto, os raios refletidos 1 e 2 estão em **oposição de fase**. Para esse caso, sendo  $e$  a espessura da cunha na região dos pontos  $Z$  e  $W$ , e sendo  $\lambda$  o comprimento de onda da luz no ar, temos:

$$\begin{cases} \text{Interferência destrutiva} \Rightarrow 2e = k\lambda \text{ ou } e = k \frac{\lambda}{2} & \textcircled{1} \\ \text{Interferência construtiva} \Rightarrow 2e = i \frac{\lambda}{2} \text{ ou } e = i \frac{\lambda}{4} & \textcircled{2} \end{cases}$$

sendo  $k$  um número natural qualquer e  $i$  um número natural **ímpar**. Porém, para facilitar a análise que faremos adiante, é interessante lembrar que um número natural ímpar  $i$  pode ser representado por:

$$i = 2k + 1$$

com  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Com isso a equação  $\textcircled{2}$  transforma-se do seguinte modo:

$$e = i \frac{\lambda}{4} = (2k + 1) \frac{\lambda}{4} = \frac{2k + 1}{2} \cdot \frac{\lambda}{2} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$$

Em resumo, as condições para os dois tipos de interferência são:

$$\text{Interferência destrutiva} \Rightarrow e = k \frac{\lambda}{2} \quad \textcircled{1}$$

$$\text{Interferência construtiva} \Rightarrow \begin{cases} e = i \frac{\lambda}{4} & \textcircled{2} \\ \text{ou} \\ e = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} & \textcircled{3} \end{cases}$$

sendo  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Na aresta da cunha que passa pelo ponto A a espessura é nula e, como vimos no texto do livro, aí devemos ter interferência destrutiva e uma franja escura (fig. 13b). Como vemos, a equação 1 inclui esse caso, fazendo  $k = 0$ .

Usando as equações anteriores vemos que as espessuras correspondentes às franjas escuras são (fig. 16a):

$$0; \frac{\lambda}{2}; \lambda; 3\frac{\lambda}{2}; 2\lambda; \dots$$

e as espessuras correspondentes às franjas claras são (fig. 16b):

$$\frac{\lambda}{4}; 3\frac{\lambda}{4}; 5\frac{\lambda}{4}; 7\frac{\lambda}{4}; \dots$$

Podemos também observar que a distância entre duas franjas escuras adjacentes ( $t$ ) é igual à distância entre duas faixas claras adjacentes e, mais adiante, vamos calcular  $t$ .

Nos exercícios veremos que, às vezes, há referência, por exemplo, à 7ª franja escura ou 9ª franja clara, etc. Nesses casos usaremos as equações 1 e 3 e, nesse caso, devemos observar que:

1º pela equação 1:	2º pela equação 3:
$\begin{cases} 1^\text{ª} \text{ franja escura} \Rightarrow k = 0 \\ 2^\text{ª} \text{ franja escura} \Rightarrow k = 1 \\ 3^\text{ª} \text{ franja escura} \Rightarrow k = 2 \\ \dots \\ m^\text{ª} \text{ franja escura} \Rightarrow k = m - 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 1^\text{ª} \text{ franja clara} \Rightarrow k = 0 \\ 2^\text{ª} \text{ franja clara} \Rightarrow k = 1 \\ 3^\text{ª} \text{ franja clara} \Rightarrow k = 2 \\ \dots \\ m^\text{ª} \text{ franja clara} \Rightarrow k = m - 1 \end{cases}$

Assim, por exemplo, se quisermos a 7ª franja (clara ou escura), fazemos  $k = 6$ . Observando a figura 16a, percebemos que:

$$\text{tg } \theta = \frac{\frac{\lambda}{2}}{t} = \frac{\lambda}{2t}$$

Mas, como  $\theta$  é muito pequeno, se ele for expresso em radianos, temos:

$$\theta = \text{tg } \theta$$

Assim:

$$\theta = \frac{\lambda}{2t} \quad \textcircled{6}$$

### Cálculo do espaçamento $t$

Na figura 17 fazemos uma simplificação da figura 14. Sendo  $d$  o diâmetro do fio e  $L$  o comprimento de cada lâmina, vamos calcular a abscissa  $x$  de uma franja qualquer em relação ao eixo dado na figura. Da figura, tiramos:

$$\frac{e}{x} = \frac{d}{L} \text{ ou } x = \frac{Le}{d} \quad \textcircled{5}$$

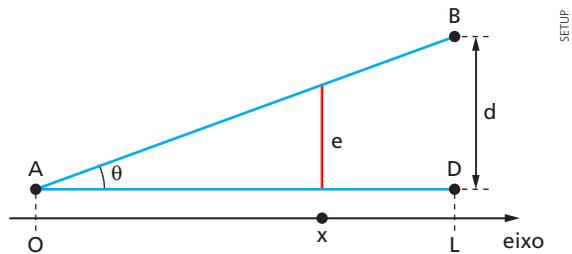


Figura 17.

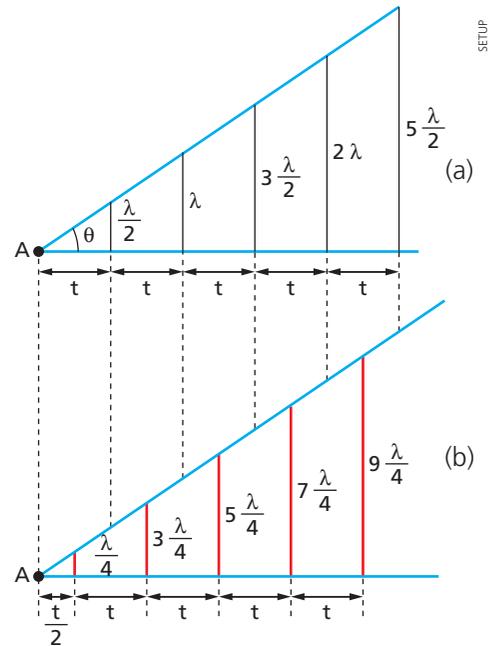


Figura 16. Espessuras correspondentes às franjas escuras (a) e às franjas claras.

Suponhamos que a franja seja escura. Das equações ⑤ e ① concluímos:

$$x = \frac{L}{d}e = \frac{L}{d}\left(k \frac{\lambda}{2}\right) \quad \text{ou} \quad x_e = \frac{L\lambda}{2d} \cdot k \quad \text{⑥ (abscissa de uma franja escura)}$$

$$k = 0; 1; 2; \dots$$

Se quisermos a abscissa de uma franja clara, consideramos as equações ⑤ e ③ e obtemos:

$$x = \frac{L}{d}e = \frac{L}{d}\left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} \quad \text{ou} \quad x_c = \frac{L\lambda}{2d}\left(k + \frac{1}{2}\right) \quad \text{⑦ (abscissa de uma franja clara)}$$

$$k = 0; 1; 2; 3; \dots$$

Para obtermos o espaçamento  $t$  entre duas franjas escuras consecutivas ou entre duas franjas claras consecutivas fazemos  $k$  variar de uma unidade na equação ⑥ ou na equação ⑦. Nos dois casos obtemos o mesmo resultado:

$$\Delta x = \frac{L\lambda}{2d} \quad \text{ou} \quad t = \frac{L\lambda}{2d} \quad \text{⑧}$$

Usando a equação ⑧, as equações ⑥ e ⑦, que dão as abscissas das franjas escuras ( $x_e$ ) e as abscissas das franjas claras ( $x_c$ ), podem ser alteradas para:

$$x_e = t \cdot k, \quad \text{com } k = 0; 1; 2; \dots \quad \text{(abscissa de uma franja escura)} \quad \text{⑨}$$

$$x_c = t\left(k + \frac{1}{2}\right), \quad \text{com } k = 0; 1; 2; \dots \quad \text{(abscissa de uma franja clara)} \quad \text{⑩}$$

O problema que acabamos de analisar admite variações. Uma das variações é preencher o espaço entre as lâminas com um líquido transparente, de índice de refração  $n_L$ . Neste caso o comprimento de onda a ser usado é:

$$\lambda^1 = \frac{\lambda}{n_L}$$

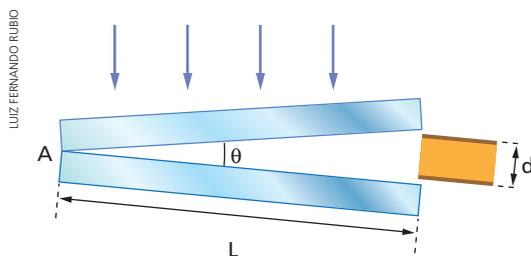
Outra variação possível é usar lâminas de materiais diferentes (mas ainda transparentes).

Nos dois casos a análise é semelhante à que fizemos, mas, em cada situação apresentada, deve ser verificada a questão da inversão de fase nas reflexões. Dependendo das relações entre os três índices de refração (duas lâminas e o líquido), as condições de interferência construtiva e destrutiva podem ser inversas às que obtivemos acima.

Se, em vez de usarmos luz monocromática, usarmos luz branca, observaremos faixas de várias cores.

## Exercícios

5. Duas lâminas de vidro, de comprimento  $L = 8,00$  cm, tocam-se em uma aresta e nas arestas opostas estão separadas por um fio de diâmetro  $d = 1,00 \cdot 10^{-2}$  mm. O conjunto é iluminado por cima por um feixe de luz monocromática, de comprimento de onda  $\lambda = 500$  nm.



Determine:

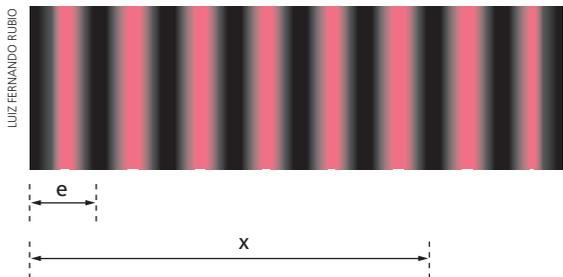
- o ângulo entre as lâminas, em radianos e em graus;
- o espaçamento entre duas franjas claras consecutivas;

- o número de franjas escuras;
- o número de franjas claras;
- a espessura da cunha no local em que se forma a segunda franja escura;
- a espessura da cunha no local em que se forma a primeira franja clara;
- a espessura da cunha no local em que se forma a 11ª franja clara;
- a distância entre a 11ª franja clara e a aresta onde as lâminas de vidro se tocam.

6. Suponha que o espaço entre as lâminas de vidro do exercício anterior seja preenchido com água, cujo índice de refração é 1,33. Sabendo que o índice de refração do vidro é 1,50, determine:

- o comprimento de onda da luz na água;
- a distância entre duas franjas escuras consecutivas.

7. (ITA-SP) Uma lâmina de vidro com índice de refração  $n$  em forma de cunha é iluminada perpendicularmente por uma luz monocromática de comprimento de onda  $\lambda$ . Os raios refletidos pela superfície superior e pela inferior apresentam uma série de franjas escuras com espaçamento e entre elas, sendo que a  $m$ -ésima encontra-se a uma distância  $x$  do vértice. Assinale o ângulo  $\theta$ , em radianos, que as superfícies da cunha formam entre si.



- a)  $\theta = \frac{\lambda}{2ne}$   
 b)  $\theta = \frac{\lambda}{4ne}$   
 c)  $\theta = \frac{(m+1)\lambda}{2nme}$   
 d)  $\theta = \frac{(2m+1)\lambda}{4nme}$   
 e)  $\theta = \frac{(2m-1)\lambda}{4nme}$

8. Num experimento de cunha de ar foi usada luz monocromática de comprimento de onda 656 nm e lâminas de vidro de comprimento 25,0 cm. Determine a espessura do fio usado sabendo que se formaram 102 franjas claras.

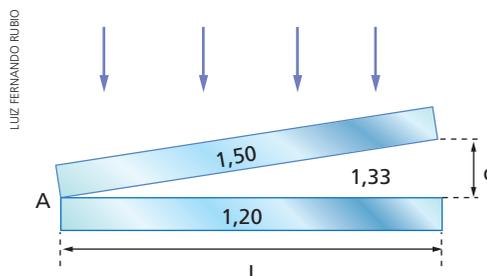
9. Um fio de diâmetro  $7,35 \cdot 10^{-3}$  mm e luz de comprimento de onda 600 nm foram usados num experimento de cunha de ar. Determine o número de:

- a) franjas escuras;  
 b) franjas claras.

10. Num experimento de cunha de ar, em que se usou luz de comprimento de onda 670 nm, foram obtidas 28 franjas escuras. Qual o diâmetro do fio usado?

11. Usando-se luz de comprimento de onda 550 nm num experimento de cunha de ar, foram obtidas 12 franjas claras por centímetro. Sabendo que as lâminas de vidro têm comprimento 20,0 cm, calcule o diâmetro do fio usado.

12. Na figura esquematizamos um experimento semelhante ao da cunha de ar mas com algumas alterações. A lâmina de cima é de vidro, cujo índice de refração é 1,50; a lâmina de baixo é de um plástico transparente, cujo índice de refração é 1,20; e a região entre as lâminas é preenchida com água, cujo índice de refração é 1,33. A luz usada tem comprimento de onda 532 nm. Calcule a espessura da cunha na região onde se forma a primeira franja escura depois da aresta de contato das lâminas.



## Anéis de Newton

Há outro experimento em que ocorre interferência numa película de ar de espessura variável. Uma lente planoconvexa, de grande raio de curvatura ( $R$ ), é colocada com a face convexa apoiada numa lâmina de vidro (fig. 18) e faz-se incidir um feixe de luz monocromática, de cima para baixo. Na figura 19 apresentamos uma visão de perfil do conjunto da figura 18.

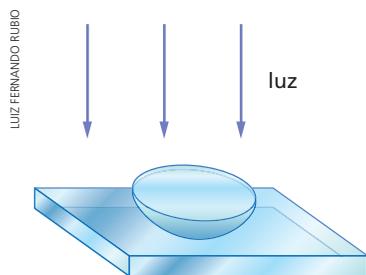


Figura 18.

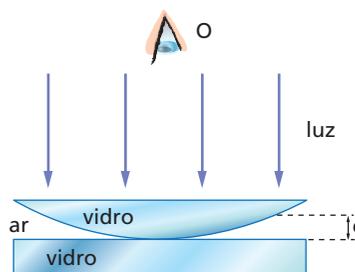


Figura 19.

Na película de ar entre a lente e a lâmina de vidro ocorre interferência dos raios refletidos de modo semelhante ao que ocorre na cunha de ar, mas com duas diferenças. A primeira é que, em vez de faixas retas, aparecem faixas circulares (fig. 20) alternadamente claras e escuras. Na figura 20 apresentamos o que vê o observador  $O$  da figura 19, que observa interferência por reflexão, havendo um círculo central escuro. Um observador que estivesse abaixo do conjunto observaria interferência por transmissão e, onde o observador de cima enxerga região escura, o observador de baixo enxergaria região clara e vice-versa.

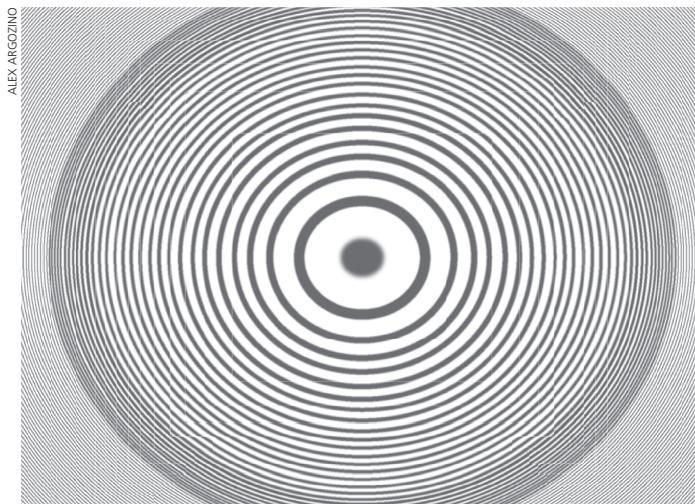


Figura 20. Anéis de Newton por reflexão.

A segunda diferença é que, pelo fato de a variação da espessura não ser uniforme (como no caso da cunha), o espaçamento entre faixas circulares consecutivas vai diminuindo à medida que consideramos faixas que se afastam do centro.

Esse tipo de interferência foi estudado em detalhe, pela primeira vez, por Newton, que chamou as faixas circulares de **anéis**. Por isso, hoje, essas faixas são chamadas **anéis de Newton**.

As condições de interferência aqui são idênticas às da cunha de ar. Porém, como na região central não temos um anel, mas sim um círculo escuro, isso simplifica a maneira de ordenar os anéis, como veremos a seguir.

## Anéis escuros

Sendo  $e$  a espessura da camada de ar (fig. 19) num ponto por onde passa um anel escuro, temos:

$$2e = k\lambda \quad (1)$$

com  $k = 1, 2, 3, \dots$

Assim, para obtermos o valor de  $e$  por onde passa:

- o 1º anel escuro, fazemos  $k = 1$  na equação (1);
- o 2º anel escuro, fazemos  $k = 2$  na equação (2);

e assim por diante.

## Anéis claros

Os anéis claros são obtidos para espessuras  $e$  tais que:

$$2e = i \frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

sendo  $i$  um número natural ímpar. Agora, em vez de expressar  $i$  por  $2k + 1$ , como fizemos no caso da cunha de ar, faremos:

$$i = 2k - 1$$

com  $k = 1, 2, 3, \dots$

Desse modo, a equação ② transforma-se do seguinte modo:

$$2e = (2k - 1) \frac{\lambda}{2} = \frac{2k-1}{2} \lambda$$

$$\text{Ou: } 2e = \left(k - \frac{1}{2}\right) \lambda \quad \text{③}$$

com  $k = 1, 2, 3, \dots$

Portanto para obtermos o valor de  $e$  por onde passa:

- o 1º anel claro, fazemos  $k = 1$  na equação ③;
- o 2º anel claro, fazemos  $k = 2$  na equação ③;

e assim por diante.

Se a região entre a lente e a lâmina de vidro for preenchida com um líquido transparente, de índice de refração  $n$ , substituímos  $\lambda$  por  $\lambda'$ , sendo:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{n}$$

Se, em vez de usarmos luz monocromática, usarmos luz branca, haverá uma série de anéis de cores diferentes.

### Cálculo do raio de um anel qualquer

Seja  $r$  o raio de um anel qualquer (claro ou escuro) que se forma na região em que a espessura da camada de ar é  $e$  (fig. 21).

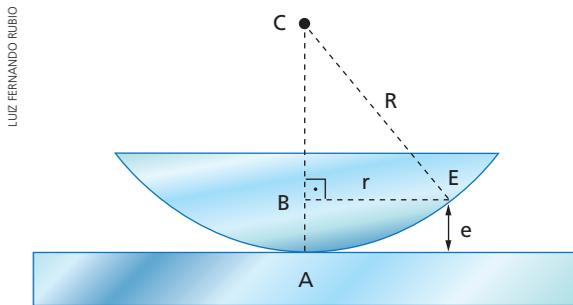


Figura 21.

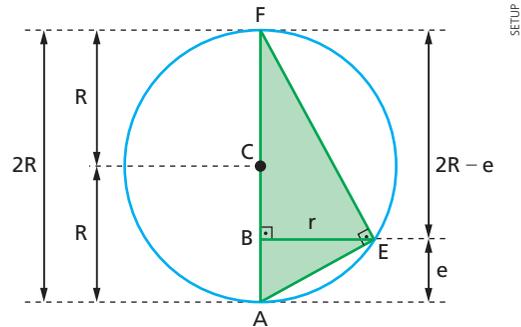


Figura 22.

Na figura 21,  $C$  e  $R$  são, respectivamente, o **centro de curvatura** e o **raio** da face convexa da lente. Vamos usar a figura 22 para recordar uma propriedade geométrica. O triângulo  $AEF$  está inscrito na circunferência de centro  $C$  e raio  $R$ , de modo que o lado  $\overline{AF}$  é um diâmetro da circunferência. Sabemos que, neste caso, o triângulo  $AEF$  é retângulo em  $E$  e:

$$r^2 = FB \cdot BA$$

ou

$$r^2 = (2R - e)(e) \quad \text{④}$$

Porém, temos  $R \gg e$ , portanto,  $2R \gg e$ . Assim, podemos considerar:

$$2R - e \cong 2R$$

Introduzindo essa aproximação na equação ④, obtemos:

$$r^2 = (2R)e \quad \text{ou} \quad r = \sqrt{2Re} \quad \text{⑤}$$

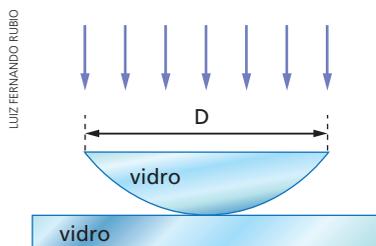
A partir das equações ⑤, ① e ③, obtemos:

- raio do  $k^{\circ}$  anel escuro  $= r_k = \sqrt{R\lambda k} \quad \text{⑥}$

- raio do  $k^{\circ}$  anel claro  $= r_k = \sqrt{R\lambda \left(k - \frac{1}{2}\right)} \quad \text{⑦}$

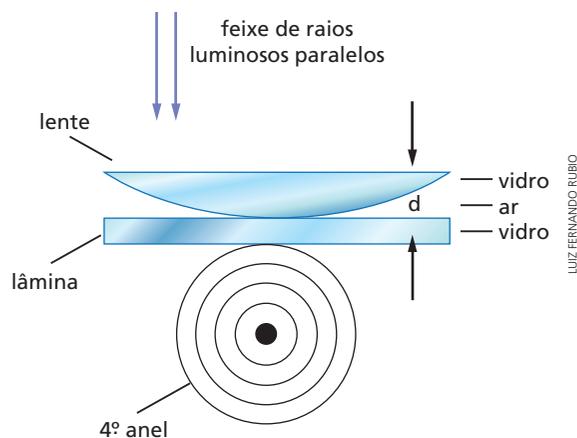
## Exercícios

13. Em um experimento para obtenção de anéis de Newton foi usada uma lente de raio de curvatura  $R = 5,00$  m e diâmetro  $D = 20,0$  mm, e luz de comprimento de onda  $\lambda = 512$  nm. Calcule:



- a espessura da camada de ar entre a lente e a lâmina onde se forma o 4º anel escuro;
  - o raio do 4º anel escuro;
  - a espessura da camada de ar entre a lente e a lâmina onde se forma o 7º anel brilhante;
  - o raio do 7º anel brilhante;
  - o número de anéis escuros;
  - o número de anéis claros;
  - o raio do 4º anel escuro se o espaço entre a lente e a lâmina de vidro for preenchido com água, cujo índice de refração é 1,33.
14. Luz monocromática de comprimento de onda 560 nm foi usada em um experimento de anéis de Newton. Sabendo que o 20º anel claro tem raio igual a 9,80 mm, determine:
- a espessura da camada de ar na posição desse anel;
  - o raio de curvatura da face convexa da lente.
15. O raio do oitavo anel escuro em um experimento de anéis de Newton é 1,80 cm. Ao colocarmos óleo no espaço entre a lente e a lâmina de vidro, o raio desse anel diminuiu para 1,64 cm. Qual é o índice de refração desse óleo?
16. Uma lente plano-convexa, cujo raio da face convexa é 4,00 m foi usada em um experimento de anéis de Newton. Sabendo que o raio do 30º anel escuro é 5,50 mm, calcule o comprimento de onda da luz usada.
17. Para determinar o raio de curvatura ( $R$ ) da face convexa de uma lente plano-convexa foi feito um experimento de anéis de Newton, usando-se luz de comprimento de onda 600 nm. Foi observado que os raios dos anéis escuros de ordem  $t$  e  $t + 7$  são, respectivamente, 3,60 mm e 4,80 mm. Qual é o valor de  $R$ ?

18. (ITA-SP) No experimento denominado “anéis de Newton”, um feixe de raios luminosos incide sobre uma lente plano-convexa que se encontra apoiada sobre uma lâmina de vidro, como mostra a figura. O aparecimento de franjas circulares de interferência, conhecidas como anéis de Newton, está associado à camada de ar, de espessura  $d$  variável, existente entre a lente e a lâmina.



Qual deve ser a distância  $d$  entre a lente e a lâmina de vidro correspondente à circunferência do quarto anel escuro ao redor do ponto escuro central? (Considere  $\lambda$  o comprimento de onda da luz utilizada.)

- $4\lambda$
  - $8\lambda$
  - $9\lambda$
  - $8,5\lambda$
  - $2\lambda$
19. (ITA-SP) Um feixe luminoso vertical, de 500 nm de comprimento de onda, incide sobre uma lente plano-convexa apoiada numa lâmina horizontal de vidro, como mostra a figura.



Devido à variação da espessura da camada de ar existente entre a lente e a lâmina, torna-se visível sobre a lente uma sucessão de anéis claros e escuros, chamados de anéis de Newton. Sabendo-se que o diâmetro do menor anel escuro mede 2 mm, a superfície convexa da lente deve ter um raio de:

- 1,0 m
- 1,6 m
- 2,0 m
- 4,0 m
- 8,0 m