OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA

DO ESTAD0 DO RIO DE JANEIRO – 2016

24 DE SETEMBRO DE 2016

NÍVEL JUNIOR (5º ano do ensino fundamental)

Atenção:Esta prova tem 6 questões.

1.Os dois filhos de D. Maria fazem aniversário no mesmo dia. Este ano, um fez 3 anos e outro 12. Quando foi colocar as velas no bolo, D.Maria observou que estava usando e algarismos consecutivos (1,2,3). A próxima vez que isso vai acontecer será quando um fizer 14 e o outro 23. Determine todas as vezes em que teremos de novo algarismos consecutivos nas velas do bolo.

2. Ana, Beatriz, Carmen e Débora nasceram no mesmo ano. A professora das meninas sabe que os dias dos aniversários são 20 de fevereiro, 12 de abril, 12 de maio e 25 de maio, mas não se lembra quem faz aniversário que dia. Ela se lembra que Ana e Beatriz são do mesmo mês, e que Ana e Carmen são do mesmo dia, mas de meses diferentes.

Qual é o dia do aniversário de cada aluna? Quem é a mais velha e quem é a mais nova?

3. Na divisão abaixo, cada letra representa um algarismo. Determine A , B, C.

747 |B7__

7C 7

(747 dividido por B7 dá 7 com resto 7C)

4. O capitão conta que seu navio foi invadido por ratos. Veja a história:

Ratos negros e ratos vermelhos, pequenos e grandes, corriam por todo o navio. Os marinheiros trouxeram gatos negros e gatos vermelhos para caçarem os ratos. Alguns dias depois contamos os gatos e ratos que ainda estavam no navio:

Dez ratos vermelhos e dez ratos negros. Três pequenos ratos vermelhos.

Nenhum rato grande negro. Três gatos vermelhos. Quatro gatos pequenos.

Oito gatos grandes. Um só gato pequeno vermelho.

(continua do outro lado da folha)

Complete os quadros a seguir, para saber quantos animais há de cada tipo.

ratos	grandes	pequenos	total
vermelhos			
negros			
total			

gatos	grandes	pequenos	total
vermelhos			
negros			
total			

5.Manoel troca o óleo do motor do seu caminhão a cada 15.000 km rodados. Da última vez em que o óleo foi trocado, a quilometragem era 120.000 km. Em cada troca, se coloca um filtro novo e 6 litros de óleo.

a)Sabendo que o filtro custa R$38,00 e o litro de óleo custa R$42,00, quanto Manoel já gastou até hoje com essas trocas de óleo?

b)Hoje, a quilometragem é 126.789 km. Quantos quilômetro faltam para a ´próxima troca?

c)Joaquim, que tem um caminhão igual ao do Manoel, também troca de óleo e filtro a cada 15.000 km. Só que Joaquim vai num posto que, a cada troca, aumenta os preços em 10%. Se o caminhão do Joaquim está com 123.000 km rodados e na 1ª troca os preços do óleo e do filtro eram os mesmos do Manoel, quanto o Joaquim gastou até hoje?

6. A professora Zazá é fã de números binários (só se usam os algarismos 0 e 1) e resolveu fazer um mural com um quadriculado de 42x6, conforme o padrão a seguir, onde se vê as 12 primeiras colunas.

a)Quantos 0 e quantos 1 vão ser usados?

b)Desenhe a coluna 31 e a coluna 40.

	0			0			0			0	
0	1	0				0	1	0			
			0	1	0				0	1	0
	0			0			0			0	

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2016

24 de setembro de 2016

Nível 1 – (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

Parte A

QUESTÃO 1

Uma família, composta de 4 pessoas, assistiu à Cerimônia de Abertura dos Jogos Olímpicos no sofá de três lugares de sua humilde residência. Sendo assim, uma pessoa ficou de pé. Antes de tomarem seus lugares, cada um fez um pedido e somente um deles não foi atendido.

Pai: ”Eu não quero sentar no meio do sofá nem ficar em pé.”
Mãe: “Eu não fico em pé.”
Filho: “Eu sento na direita.”
Filha: “Eu sento na esquerda.”

Quem podemos garantir que não assistiu à Cerimônia de pé?

QUESTÃO 2

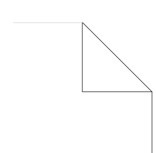
A Grécia foi o berço dos primeiros Jogos Olímpicos da Era Moderna, em 1896. Empolgado com as Olimpíadas no Rio e com a cultura grega, Fred G. Ninho resolveu criar um jogo matemático usando letras gregas para representar algarismos de nosso sistema de numeração. Neste jogo , as letras α, β e γ representam 3 algarismos diferentes. A soma dos algarismos do número de 3 algarismos $\alpha\beta\alpha$ é o número de 2 algarismos $\beta\gamma$. A soma dos algarismos do número de 2 algarismos $\beta\gamma$ é o número de 1 algarismo β. Qual é o algarismo representado pelo símbolo α?

QUESTÃO 3

Seis atletas australianos dividem o mesmo quarto na Vila Olímpica com 2 chuveiros. Durante os jogos, a partir das 7 horas, todos usam um dos chuveiros e nunca dois deles usam o mesmo chuveiro ao mesmo tempo. Os tempos que eles gastam no chuveiro são: 8, 10, 12, 17, 21 e 22 minutos, respectivamente. A que horas os chuveiros estarão livres o mais cedo possível?

QUESTÃO 4

Uma das arenas olímpicas instaladas na Barra da Tijuca tem formato poligonal. Usando um simples pedaço de papel, Severino Sombra apresentou para seus netos a forma da arena. Ele mostrou que o papel tinha formato de quadrado. Ele pegou um canto do quadrado e dobrou de modo que um dos vértices passasse a coincidir com o centro do mesmo, obtendo-se o pentágono irregular, como mostra a figura abaixo. Sabendo-se que as medidas das áreas do pentágono e do quadrado são números naturais consecutivos, qual é a medida da área do quadrado que Severino usou para representar a arena olímpica?



Parte B

QUESTÃO 5

Os irmãos Ari e Jupira foram à Vila Olímpica para conhecer as instalações dos atletas e acabaram comprando algumas lembranças da Rio 2016. Ari comprou 3 mascotes iguais e pagou sua compra com desconto de 10%, enquanto Jupira comprou 2 mascotes iguais às de Ari com desconto de 5%. Ari gastou 60 reais a mais que sua irmã. Qual era, em reais, o preço sem desconto de cada mascote?

QUESTÃO 6

No intervalo das competições de judô da Rio-2016, alguns atletas japoneses divertiam-se resolvendo questões de Matemática. Eles pesquisaram em alguns sites de Olimpíadas de Matemática e viram que um inteiro positivo n é chamado de *invocado* quando existem inteiros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dois a dois distintos, tais que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

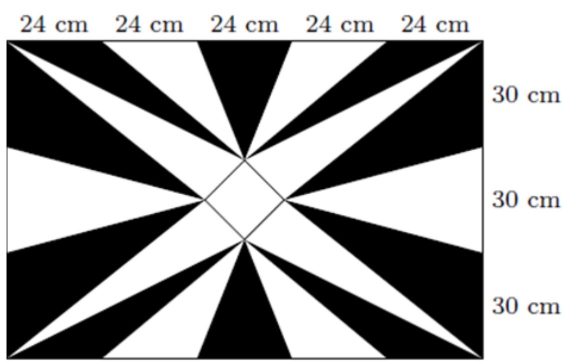
O inteiro positivo 3, por exemplo, é invocado, porque

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

O desafio maior para os japoneses foi confirmar que o 8 também é invocado. Mostre que eles estavam certos.

QUESTÃO 7

Alguns moradores da pequena cidade de Tribobó do Norte ficaram entusiasmados com a inédita participação de uma delegação de refugiados nas Olimpíadas Rio 2016. Por isso, eles resolveram criar uma bandeira para o time de futebol da cidade com as cores dos países que participaram daquela delegação. Para isso, eles compraram um pano branco retangular de dimensões 120 x 90 centímetros. Eles vão pintar conforme o modelo baixo, onde o quadrado interior tem diagonais de medidas 20 cm paralelas aos lados da bandeira.



Se o centro da bandeira e o centro do quadrado coincidem, determine a área não pintada da bandeira.

QUESTÃO 8

Super campeão olímpico, o americano Michael Phelps ganhou mais agumas medalhas nas Olimpíadas Rio 2016. Ele tem 4 caixas numeradas de 0 a 3 para guardar algumas de suas medalhas. Ele colocou nas caixas com o número 0, 1, 2 e 3, respectivamente, 1, 2, 1 e 0 medalhas. Phelps percebeu que, com esta distribuição, o número de caixas com 0, 1, 2 e 3 medalhas, respectivamente, é também 1, 2, 1, 0.
Assim, na distribuição de Phelps, na caixa com o número n há tantas medalhas quanto o número de caixas com n medalhas. Se Phelps quiser fazer uma dsitribuição de medalhas em 10 caixas, numeradas de 0 a 9, com a mesma propriedade, de quantas formas ele pode fazer isso?

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2016

24 de setembro de 2016

Nível 2 – (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

QUESTÃO 1

Com 1000 cubinhos unitários montamos um cubo de aresta 10. As faces do cubo de aresta 10 são pintadas de azul. Seja q o número de cubos unitários, com exatamente uma face pintada de azul. Seja p o número de cubos unitários com exatamente duas faces pintadas de azul.

Determine a fração p/q .

QUESTÃO 2

Um número inteiro positivo é *educado* se pode ser escrito como a soma de dois ou mais inteiros positivos consecutivos. Por exemplo, 7 e 24 são números educados pois $7 = 3 + 4$ e $24 = 7 + 8 + 9$. Se um número inteiro não é educado, ele é chamado de *mal-educado*.

Encontre o menor número mal-educado maior que 2016.

QUESTÃO 3

Na soma abaixo, cada letra representa um algarismo diferente, sendo que nenhum deles vale zero.

$$\begin{array}{rl} & CROSS \\ + & ROADS \\ & ------ \\ & DANGER \end{array}$$

Determine o valor da soma ("DANGER").

QUESTÃO 4

O imperador Augusto César, soberano da cidade de Rioma, gostava de resolver problemas de matemática. Após solucionar um novo problema, sempre colocava fogo no papiro que continha a resolução e dormia. Essa era a única situação em que ele queimava papel, pois tinha medo de incendiar Rioma. Devido a esse estranho hábito, e pelas horas de sono que se seguiam, ganhou dos súditos o apelido de Imperador Morgado o Bota Fogo. Recentemente arqueólogos encontraram um papiro antigo, que acreditam ter sido escrito pelo imperador ao final de seu reinado. Esse documento forneceria uma pista para descobrir o número total de problemas que ele resolveu. No papiro encontra-se o seguinte texto:

"Nos últimos 5840 dias coloquei fogo em muitos manuscritos e dormi em seguida. Devido a muitos compromissos, no primeiro ano queimei um único manuscrito e no ano seguinte nenhum. Depois disso, ao final de cada novo ano, a quantidade de manuscritos queimados (desde o início da minha regência) foi aumentando. Hoje, fim de mais um ano e meu último dia como soberano, acabo de notar algo interessante. A partir do terceiro ano, o número de manuscritos queimados, do início do reinado até o fim do respectivo ano, é igual à soma entre os manuscritos queimados até o fim do penúltimo ano e o total de manuscritos queimados no último ano."

Se o papiro foi realmente escrito pelo Imperador Morgado, quantos problemas de matemática ele resolveu durante seu reinado?

QUESTÃO 5

Uma vila tem 4 casas. Em cada casa mora uma pessoa, e cada pessoa tem um cachorro e um gato. As pessoas se chamam Alberto, Bárbara, Carlos e David. Os animais também se chamam Alberto, Bárbara, Carlos e David, e em cada casa os três nomes são diferentes. O cachorro do Davi e o gato do Carlos têm o mesmo nome do dono do gato Carlos. O gato da Bárbara tem o mesmo nome do dono do gato cujo nome é o mesmo do dono do cachorro Alberto.

Ache os nomes dos animais de cada morador. Atenção para não confundir gato Carlos com gato do Carlos ou cachorro Alberto com cachorro do Alberto.

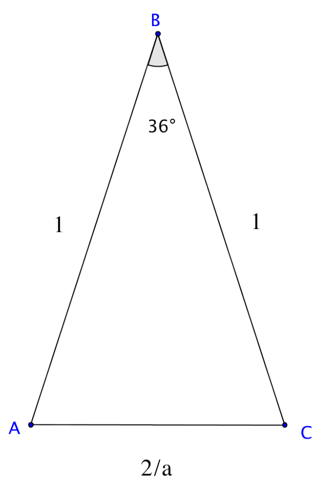
QUESTÃO 6

Dona maria faz cocada e rapadura para vender na feira. A cocada vem em pacote de 200g e ela vende cada pacote por 5 reais. A rapadura vem em pacote de 500g e ela vende cada pacote por 12 reais. Ela põe tudo em sacolas e pode carregar no máximo 20 kg.

Como ela ganha mais (levando só cocada, só rapadura, ou um pouco de cada) ?

QUESTÃO 7

Considere o triângulo isósceles ABC exibido na figura abaixo.



a) Calcule a.

b) Considere o número $x = (4-a)(\sqrt{2}+a)(\sqrt[3]{a})(\sqrt[6]{3a+4})$.

Mostre que $x + 2 = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$.

QUESTÃO 8

Em um triângulo ABC o ângulo $\widehat{BAC}$ é o dobro do ângulo $\widehat{ACB}$. Considere um ponto D, no segmento AC, de modo que o ângulo $\widehat{DBA}$ é o dobro do ângulo $\widehat{BAD}$.

Calcule o valor do ângulo $\widehat{ACB}$, sabendo que a medida do segmento CD é igual à soma entre o dobro da medida do segmento BD e o comprimento do segmento AD.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2016

24 de setembro de 2016

Nível 3 (1^o e 2^o anos do ensino médio)

1. A professora de Joãozinho escreveu no quadro um sistema de equações. Joãozinho, quando copiou do quadro o sistema, escreveu errado um, e somente um, coeficiente do sistema. Esse foi o sistema que Joãozinho escreveu em seu caderno:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 6 \\ 3x + 2y + z &= 7 \\ 4x + 2y + 3z &= 12 \end{aligned}$$

   Sabendo que o sistema original tem todos os coeficientes inteiros e sua solução é $(\frac{5}{11}, \frac{21}{11}, \frac{20}{11})$, encontre o sistema original.

2. A parte inteira de um número real x, denotada por $\lfloor x \rfloor$, é definida como o maior inteiro menor ou igual a x, ou seja $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Por exemplo $\lfloor 2,475 \rfloor = 2, \lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor 7 \rfloor = 7$. Já a parte fracionária de x, denotada por $\{x\}$, é definida como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Por exemplo $\{2,475\} = 0,475$, $\{\pi\} = \pi - 3 = 0,141592...$, $\{7\} = 0$.
   Um número real é dito **replicante** se $x = \{10x\}$. Encontre a soma de todos os números replicantes.

3. Encontre o número de sequências $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ satisfazendo $a_n \in \{1, 2, 3, 4\}$ para todo $n = 1, 2, \ldots, 10$ e $a_{n+1} \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots, 9$.

4. Sejam x, y e z reais satisfazendo $x, y, z \geq -1$ e $x + y \geq 2$, $x + z \geq 2$, $y + z \geq 2$. Prove que $xy + xz + yz \geq 3$.

5. Seja Γ uma circunferência de centro O e seja P um ponto no interior de Γ. Seja O' o ponto tal que P é ponto médio de $\overline{OO'}$. Suponha que a circunferência Γ' de centro O' que passa por P é secante a Γ e seja A um ponto na interseção de Γ com Γ'. Se B é o outro ponto de interseção da reta AP com Γ, calcule $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$.

6. Seja $p > 3$ um número primo. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ números inteiros tais que a_1 não é múltiplo de p e $a_1^k + a_2^k + \ldots + a_{p-1}^k$ é múltiplo de p para todo $k = 1, \ldots, p-2$. Prove que a_i não é múltiplo de p para todo $i = 1, 2, \ldots, p-1$, e que $a_i - a_j$ não é múltiplo de p para todos $i, j = 1, 2, \ldots, p-1$ com $i \neq j$.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2016

24 de setembro de 2016

Nível 4 (3^o ano do ensino médio)

1. Escrevendo-se a representação decimal de 40! da esquerda para direita, qual o último digito não nulo que foi escrito? (Por exemplo 11!=39916800, logo o último dígito não nulo de 11! é 8.)

2. Encontre o número de sequências $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ satisfazendo que $a_n \in \{1,2,3,4\}$ para todo $n = 1,2,\ldots,10$ e que $a_{n+1} \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ para todo $n = 1,2,\ldots,9$.

3. A parte inteira de um número real x, denotada por $\lfloor x \rfloor$, é definida como o maior inteiro menor ou igual a x, ou seja $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor$. Por exemplo, $\lfloor 2,475 \rfloor = 2, \lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor 7 \rfloor = 7$. Já a parte fracionária de x, denotada por $\{x\}$, é definida como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Por exemplo $\{2,475\} = 0,475$, $\{\pi\} = \pi - \lfloor \pi \rfloor = 0,141592...$, $\{7\} = 0$.
   Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \{10x\}$. Um número é dito **tri-replicante** se ele satisfaz
   $$(f \circ f \circ f)(x) = x.$$
   Encontre a soma de todos os números tri-replicantes.

4. Seja Γ uma circunferência de centro O e seja P um ponto no interior de Γ. Seja O' o ponto tal que P é ponto médio de $\overline{OO'}$. Suponha que a circunferência Γ' de centro O' que passa por P é secante a Γ e seja A um ponto na interseção de Γ com Γ'. Se B é o outro ponto de interseção da reta AP com Γ, calcule $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$.

5. Encontre todos os polinômios P com coeficientes reais tais que
   $$xP(x) + yP(y) \geq 2P(xy)$$
   para todos x e y reais.

6. Sejam ABC um triângulo acutângulo e Γ sua circunferência circunscrita. Sejam D, E e F os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Sejam A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 os pontos de interseção de Γ com as retas DE, DF e EF de modo que A_1 e A_2 se encontram no arco menor $\widehat{BC}$, B_1 e B_2 se encontram no arco menor $\widehat{AC}$, e C_1 e C_2 se encontram no arco menor $\widehat{AB}$. Se $\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = \overline{C_1C_2}$, prove que o triângulo ABC é equilátero.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2016

24 de setembro de 2016

Nível U

1. Encontre todos os polinômios P com coeficientes reais tais que

$$xP(x) + yP(y) \geq 2P(xy)$$

para todos x e y reais.

2. Seja A uma matriz complexa $n \times n$ tal que $A^3 = \mathrm{Id}$ e $n + \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(A^2) = 0$, onde id é a matriz dentidade e $\mathrm{Tr}(B)$ é o traço da matriz B, isto é, a soma dos elementos da diagonal principal de B.

   (a) Prove que, se $n = 2$, então $\mathrm{Id} + A + A^2$ é a matriz nula.

   (b) Prove que $\mathrm{Id} + A + A^2$ é a matriz nula para todo n.

3. Seja $f : [0, 1) \to [0, 1)$ a função definida por $f(x) = \{10x\}$, onde $\{y\}$ é a parte fracionária de y. Seja f^n a n-ésima iterada da função f, ou seja $f^0(x) = x$ e $f^n = f \circ f^{n-1}$. A órbita do ponto x é o conjunto $O(x) = \{f^n(x) | n = 0, 1, \ldots\}$.

   (a) Encontre todos os $x \in [0, 1)$ tais que $O(x)$ é finito.

   (b) Prove que existe x tal que $O(x)$ é denso em $[0, 1)$, ou seja, para todo $y \in [0, 1)$ e para todo $\varepsilon > 0$, existe n natural tal que $|y - f^n(x)| < \varepsilon$.

   Lembrando, dado x real, sua parte inteira $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x, e sua parte fracionária satisfaz $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

4. Seja a_n uma sequência de reais positivos, satisfazendo $a_{m+n} \leq a_n a_m$. Prove que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existe e é finito.

5. Calcule

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\ln(|(x + y)(1 - xy)|)}{(1 + x^2)(1 + y^2)} dxdy.$$