

## Exercícios de Matemática Retas e Planos

### TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO

(Ufpe) Na(s) questão(ões) a seguir escreva nos parênteses (V) se for verdadeiro ou (F) se for falso.

1. Analise as seguintes afirmações:

- ( ) Existem dois planos distintos, passando ambos por um mesmo ponto e perpendiculares a uma reta.  
 ( ) Se dois planos forem perpendiculares, todo plano perpendicular a um deles será paralelo ao outro.  
 ( ) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.  
 ( ) Se dois planos forem perpendiculares, toda reta paralela a um deles será perpendicular ao outro.  
 ( ) Uma reta perpendicular a duas retas concorrentes de um plano é perpendicular a esse plano.

### TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO

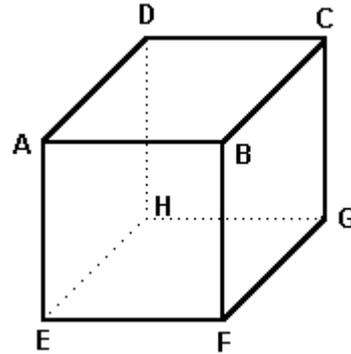
(Ufba) Na(s) questão(ões) a seguir escreva nos parênteses a soma dos itens corretos.

2. Sobre pontos, retas e planos, pode-se afirmar:

- (01) Por três pontos, passa uma única reta.  
 (02) Por três pontos, passa um único plano.  
 (04) Por um ponto fora de um plano, passa uma única reta perpendicular a esse plano.  
 (08) Planos paralelos interceptam duas retas distintas quaisquer, determinando sobre elas segmentos proporcionais.  
 (16) O plano que contém uma perpendicular a outro plano é perpendicular a esse segundo plano.  
 (32) Toda reta paralela a um plano é paralela a qualquer reta desse plano.

Soma ( )

3. (Unesp) Considere o cubo da figura adiante. Das alternativas a seguir, aquela correspondente a pares de vértices que determinam três retas, duas a duas reversas, é:



- a) (A,D); (C,G); (E,H).  
 b) (A,E); (H,G); (B,F).  
 c) (A,H); (C,F); (F,H).  
 d) (A,E); (B,C); (D,H).  
 e) (A,D); (C,G); (E,F).

4. (Unesp) Entre todas as retas suportes das arestas de um certo cubo, considere duas,  $r$  e  $s$ , reversas.

Seja  $t$  a perpendicular comum a  $r$  e a  $s$ . Então:

- a)  $t$  é a reta suporte de uma das diagonais de uma das faces do cubo.  
 b)  $t$  é a reta suporte de uma das diagonais do cubo.  
 c)  $t$  é a reta suporte de uma das arestas do cubo.  
 d)  $t$  é a reta que passa pelos pontos médios das arestas contidas em  $r$  e  $s$ .  
 e)  $t$  é a reta perpendicular a duas faces do cubo, por seus pontos médios.

5. (Fuvest) Os segmentos  $VA$ ,  $VB$  e  $VC$  são arestas de um cubo. Um plano  $\alpha$ , paralelo ao plano  $ABC$ , divide esse cubo em duas partes iguais. A intersecção do plano  $\alpha$  com o cubo é um:

- a) triângulo.  
 b) quadrado.  
 c) retângulo.  
 d) pentágono.  
 e) hexágono.

6. (Fuvest) Dada uma circunferência de diâmetro  $\overline{AB}$ , levanta-se por A um segmento  $\overline{AD}$  perpendicular ao plano da circunferência e une-se D a um ponto C qualquer da circunferência, C distinto de B.

- Prove que as retas BC e DC são perpendiculares.
- Sabendo que  $AB=AD=8$  e que C é o ponto médio do arco AB, determine a medida do ângulo CDB.

7. (Unicamp) É comum encontrarmos mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas se a quisermos firme. Explique usando argumentos de geometria, por que isso não acontece com uma mesa de 3 pernas.

8. (Unicamp) Uma esfera de raio 1 é apoiada no plano xy de modo que seu pólo sul toque a origem desse plano. Tomando a reta que liga o pólo norte dessa esfera a qualquer outro ponto da esfera, chamamos de "projeção estereográfica" desse outro ponto ao ponto em que a reta toca o plano xy. Identifique a projeção estereográfica dos pontos que formam o hemisfério sul da esfera.

9. (Unesp) Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  planos perpendiculares,  $\alpha \cap \beta = r$ .

Em  $\alpha$  considera-se uma reta s perpendicular a r,  $s \cap r = \{A\}$ , e em  $\beta$  considera-se t oblíqua a r,  $t \cap r = \{A\}$ . Dentre as afirmações:

- s é perpendicular a  $\beta$ .
- t é perpendicular a s.
- O plano determinado por s e t é perpendicular a  $\beta$ .
- Todo plano perpendicular a s e que não contém A é paralelo a  $\beta$ .

pode-se garantir que:

- somente I é falsa.
- somente II é falsa.
- somente III é falsa.
- somente IV é falsa.
- nenhuma é falsa.

10. (Unesp) No espaço tridimensional consideram-se duas retas r e s e os conjuntos: A, de todos os planos por r, B, de todos os planos por s. Descrever o conjunto  $A \cap B$ , nos seguintes casos:

- r e s são paralelas;
- r e s são reversas.

11. (Unesp) Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois planos não paralelos distintos. Prove que por todo ponto  $P \in \alpha$ ,  $P \notin \alpha \cap \beta$ , existe em  $\alpha$  uma única reta paralela a  $\beta$ .

12. (Cesgranrio) A é um ponto não-pertencente a um plano P. O número de retas que contêm A e fazem um ângulo de  $45^\circ$  com P é igual a:

- 0.
- 1.
- 2.
- 4.
- infinito.

13. (Ufpe) Em quantas regiões quatro retas distintas dividem o plano, sabendo-se que não há duas retas paralelas nem três concorrentes no mesmo ponto?

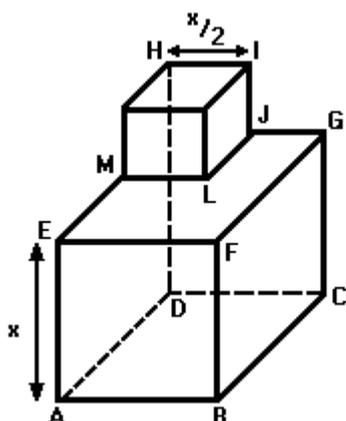
14. (Puccamp) Considere as afirmações a seguir.

- Duas retas distintas determinam um plano.
- Se duas retas distintas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.
- Se dois planos são paralelos, então toda reta de um deles é paralela a alguma reta do outro.

É correto afirmar que

- apenas II é verdadeira.
- apenas III é verdadeira.
- apenas I e II são verdadeiras.
- apenas I e III são verdadeiras.
- I, II e III são verdadeiras.

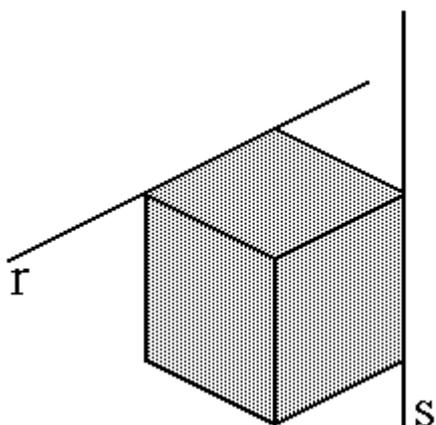
15. (Uel) O sólido representado na figura a seguir é formado por um cubo de aresta de medida  $x/2$  que se apóia sobre um cubo de aresta de medida  $x$ .



A intersecção do plano EGC com o plano ABC é

- vazia.
- a reta  $\overline{AC}$ .
- o segmento de reta  $\overline{AC}$ .
- o ponto C.
- o triângulo AGC.

16. (Uel) As retas  $r$  e  $s$  foram obtidas prolongando-se duas arestas de um cubo, como está representado na figura a seguir.



Sobre a situação dada, assinale a afirmação INCORRETA.

- $r$  e  $s$  são retas paralelas.
- $r$  e  $s$  são retas reversas.
- $r$  e  $s$  são retas ortogonais.
- não existe plano contendo  $r$  e  $s$ .
- $r \cap s = \emptyset$

17. (Unesp) Dados um paralelepípedo retângulo, indiquemos por A o conjunto das retas que contêm as arestas desses paralelepípedos e por B o conjunto dos planos que contêm suas faces. Isso posto, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- Quaisquer que sejam os planos  $\alpha$  e  $\beta$  de B, a distância de  $\alpha$  a  $\beta$  é maior que zero.
- Se  $r$  e  $s$  pertencem a A e são reversas, a distância de  $r$  a  $s$  é maior que a medida da maior das arestas do paralelepípedo.
- Todo plano perpendicular a um plano de B é perpendicular a exatamente dois planos de B.
- Toda reta perpendicular a um plano de B é perpendicular a exatamente dois planos de B.
- A intersecção de três planos quaisquer de B é sempre um conjunto vazio.

18. (Ufsc) A ÚNICA proposição CORRETA, é:

- Dois planos que possuem 3 pontos em comum são coincidentes.
- Se duas retas  $r$  e  $s$ , no espaço, são ambas perpendiculares a uma reta  $t$ , então  $r$  e  $s$  são paralelas.
- Dois planos concorrentes determinam um único plano.
- Se dois planos A e B são ambos perpendiculares a um outro plano C, então A e B são planos paralelos.
- Se duas retas  $r$  e  $s$  são a um plano A, então  $r$  e  $s$  são paralelas.
- Duas retas são reversas quando:
  - não existe plano que contém ambas
  - existe um único plano que as contém
  - não se intersectam
  - não são paralelas
  - são paralelas, mas pertencem a planos distintos

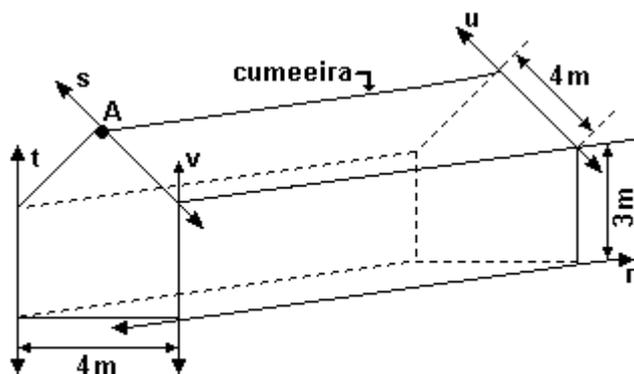


26. (Mackenzie)  $r$ ,  $s$  e  $t$  são retas distintas tais que  $s$  é perpendicular a  $r$  e  $t$  é perpendicular a  $r$ .

Relativamente às retas  $s$  e  $t$ , podemos afirmar que:

- elas podem ser unicamente paralelas ou concorrentes.
- elas podem ser unicamente paralelas ou reversas.
- elas podem ser unicamente concorrentes ou reversas.
- elas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas.
- elas podem ser unicamente reversas.

27. (Faap) O galpão da figura a seguir está no prumo e a cumeeira está "bem no meio" da parede.



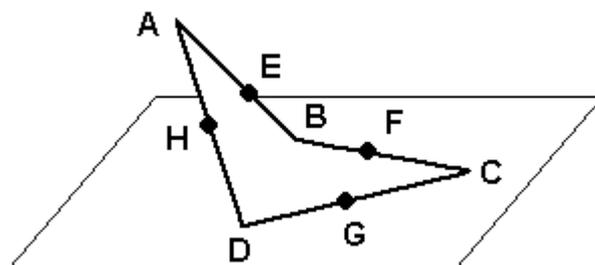
Das retas assinaladas podemos afirmar que:

- $t$  e  $u$  são reversas
- $s$  e  $u$  são reversas
- $t$  e  $u$  são concorrentes
- $s$  e  $r$  são concorrentes
- $t$  e  $u$  são perpendiculares

28. (Uff) Marque a opção que indica quantos pares de retas reversas são formados pelas retas suportes das arestas de um tetraedro.

- Um par.
- Dois pares.
- Três pares.
- Quatro pares.
- Cinco pares.

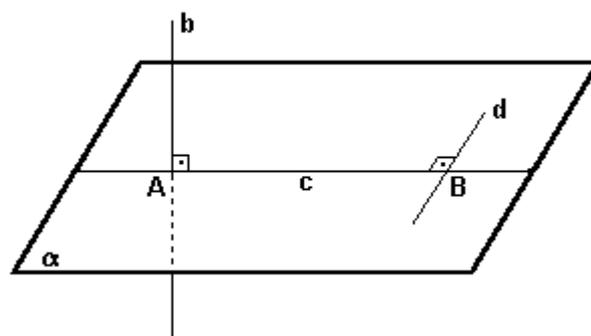
29. (Ufrj) Na figura a seguir,  $A$  não pertence ao plano determinado pelos pontos  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Os pontos  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$  são os pontos médios dos segmentos  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  e  $DA$ , respectivamente.



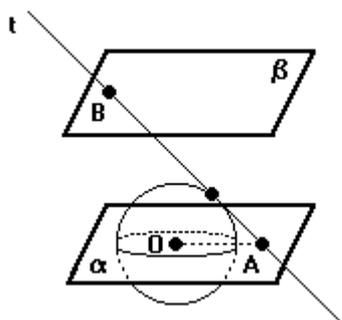
Prove que  $EFGH$  é um paralelogramo.

30. (Fatec) Na figura a seguir tem-se: o plano  $\alpha$  definido pelas retas  $c$  e  $d$ , perpendiculares entre si; a reta  $b$ , perpendicular a  $\alpha$  em  $A$ , com  $A \in c$ ; o ponto  $B$ , intersecção de  $c$  e  $d$ . Se  $X$  é um ponto de  $b$ ,  $X \notin \alpha$ , então a reta  $s$ , definida por  $X$  e  $B$ ,

- é paralela à reta  $c$ .
- é paralela à reta  $b$ .
- está contida no plano  $\alpha$ .
- é perpendicular à reta  $d$ .
- é perpendicular à reta  $b$ .



31. (Uel) Na figura a seguir têm-se uma esfera de raio 5cm e os planos paralelos  $\alpha$  e  $\beta$ . O plano  $\alpha$  contém o centro  $O$  da esfera e dista 10cm de  $\beta$ . Uma reta  $t$ , tangente à esfera, intercepta  $\alpha$  em  $A$  e  $\beta$  em  $B$ . Se o segmento  $\overline{AB}$  mede 18cm e o plano determinado pelos pontos  $A$ ,  $B$  e  $O$  é perpendicular a  $\alpha$  e a  $\beta$ , então a medida do segmento  $OA$ , em centímetros, é
- 9
  - 8,5
  - 8
  - 7,5
  - 7



32. (Unb) Uma das maneiras de se representar a Terra em uma região plana para o traçado de mapas geográficos é a "projeção estereográfica", que consiste em projetar os pontos de uma esfera sobre um plano  $\alpha$  perpendicular ao eixo norte-sul da esfera e que passa por seu pólo Sul. Mais precisamente, a projeção de um ponto  $P$  da esfera é um ponto  $P'$  de  $\alpha$ , obtido pela interseção com o plano  $\alpha$  da reta determinada por  $P$  e pelo pólo Norte. Essa construção está representada na figura a seguir, em que  $O$  é o centro da esfera,  $M$  e  $Q$  são pontos sobre um mesmo paralelo,  $A$  é o ponto médio do segmento  $M'Q'$ , sendo  $M'$  e  $Q'$  as projeções dos pontos  $M$  e  $Q$ , respectivamente.



Com base nas informações acima, julgue os itens seguintes.

- (1) A imagem de um meridiano da esfera pela projeção estereográfica está contida em uma reta que passa pelo ponto  $S$ .
- (2) A imagem do equador pela projeção estereográfica é um círculo de centro  $S$  e de raio igual ao quádruplo do raio do equador.
- (3) O plano  $NAS$  é perpendicular aos planos  $NM'Q'$  e  $\alpha$ .
- (4) Os ângulos  $M'NQ'$  e  $M'SQ'$  são iguais.

33. (Fatec) Seja  $A$  um ponto pertencente à reta  $r$ , contida no plano  $\alpha$ . É verdade que
- a) existe uma única reta que é perpendicular à reta  $r$  no ponto  $A$ .
  - b) existe uma única reta, não contida no plano  $\alpha$ , que é paralela à reta  $r$ .
  - c) existem infinitos planos distintos entre si, paralelos ao plano  $\alpha$ , que contêm a reta  $r$ .
  - d) existem infinitos planos distintos entre si, perpendiculares ao plano  $\alpha$  e que contêm a reta  $r$ .
  - e) existem infinitas retas distintas entre si, contidas no plano  $\alpha$  e que são paralelas à reta  $r$ .

34. (Ufv) Considere as afirmações a seguir:

I - Se dois ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  de um triângulo são congruentes aos ângulos  $\hat{C}$  e  $\hat{E}$ , respectivamente, de outro triângulo, então esses triângulos são congruentes.

II - Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a toda reta desse plano.

III - Se duas retas são paralelas a um plano, então elas são paralelas entre si.

IV - As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Assinalando V para as afirmações verdadeiras e F para as falsas, a alternativa que apresenta a seqüência CORRETA é:

- a) V F F V
- b) V V F F
- c) F F F V
- d) F F V V
- e) V V V F

35. (Uel) As afirmações seguintes podem ser verdadeiras ou falsas.

I. A projeção ortogonal de uma reta num plano é uma reta.

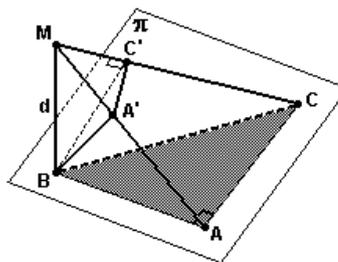
II. Distância entre duas retas reversas é a perpendicular comum a essas retas.

III. A distância entre dois planos só é definida se esses planos são paralelos.

É correto afirmar que SOMENTE

- a) II é verdadeira.
- b) III é verdadeira.
- c) I e II são verdadeiras.
- d) I e III são verdadeiras.
- e) II e III são verdadeiras.

36. (Unb) Considere um triângulo ABC, retângulo em A, contido em um plano  $\pi$  e a reta d perpendicular a  $\pi$ , passando por B. Denomine M um ponto de d que não pertence ao plano  $\pi$ . O plano que é perpendicular a MC e contém B intercepta MC em C' e MA em A', conforme ilustra a figura a seguir.



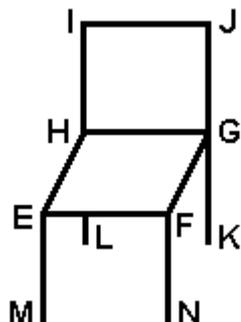
Com base nessas informações, julgue os itens a seguir.

- (1) O segmento AC é perpendicular ao plano definido pelo triângulo MBA.
- (2) O ângulo AMC é igual ao ângulo ABC.
- (3) Os pontos A, B, C e C' estão sobre uma esfera que tem seu centro no ponto médio do segmento BC.
- (4) Uma vez que BA' é ortogonal a AC e a MC, conclui-se que BA' é perpendicular a CA'.

37. (Ufscar) Considere um plano  $\alpha$  e um ponto P qualquer do espaço. Se por P traçarmos a reta perpendicular a  $\alpha$ , a intersecção dessa reta com  $\alpha$  é um ponto chamado projeção ortogonal do ponto P sobre  $\alpha$ . No caso de uma figura F do espaço, a projeção ortogonal de F sobre  $\alpha$  é definida pelo conjunto das projeções ortogonais de seus pontos. Com relação a um plano  $\alpha$  qualquer fixado, pode-se dizer que:

- a) a projeção ortogonal de um segmento de reta pode resultar numa semi-reta.
- b) a projeção ortogonal de uma reta sempre resulta numa reta.
- c) a projeção ortogonal de uma parábola pode resultar num segmento de reta.
- d) a projeção ortogonal de um triângulo pode resultar num quadrilátero.
- e) a projeção ortogonal de uma circunferência pode resultar num segmento de reta.

38. (Ufrn) Na cadeira representada na figura a seguir, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.



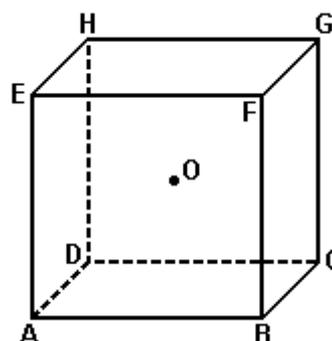
Sendo assim,

- Os planos EFN e FGJ são paralelos.
- HG é um segmento de reta comum aos planos EFN e EFH.
- Os planos HIJ e EGN são paralelos.
- EF é um segmento de reta comum aos planos EFN e EHG.

39. (Uel) Considere uma reta  $s$ , contida em um plano  $\alpha$ , e uma reta  $r$  perpendicular a  $s$ . Então, necessariamente:

- $r$  é perpendicular a  $\alpha$ .
- $r$  e  $s$  são coplanares.
- $r$  é paralela a  $\alpha$ .
- $r$  está contida em  $\alpha$ .
- Todas as retas paralelas a  $r$  interceptam  $s$ .

40. (Ufrs) A figura abaixo representa um cubo de centro  $O$ .



Considere as afirmações abaixo.

- O ponto  $O$  pertence ao plano BDE.
- O ponto  $O$  pertence ao plano ACG.
- Qualquer plano contendo os pontos  $O$  e  $E$  também contém  $C$ .

Quais estão corretas?

- Apenas I.
- Apenas II.
- Apenas I e II.
- Apenas I e III.
- Apenas II e III.

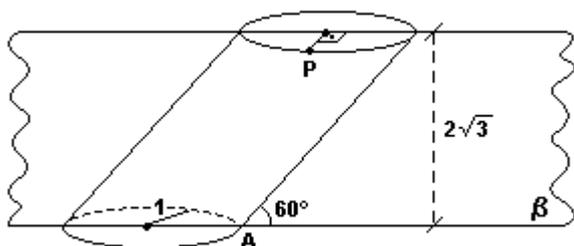
41. (Ufal) Analise as afirmativas abaixo.

- ( ) Duas retas que não têm pontos comuns sempre são paralelas.
- ( ) Duas retas distintas sempre determinam um plano.
- ( ) Uma reta pertence a infinitos planos distintos.
- ( ) Três pontos distintos sempre determinam um plano.
- ( ) Duas retas coplanares distintas são paralelas ou concorrentes.

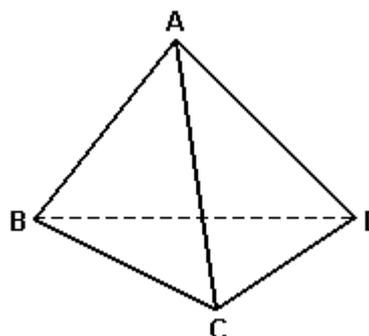
42. (Uel) Considere três planos que sejam dois a dois perpendiculares entre si e esferas com 10cm de raio. Quantas dessas esferas poderão tangenciar simultaneamente os três planos?

- a) Uma.
- b) Duas.
- c) Quatro.
- d) Oito.
- e) Infinitas.

43. (Fuvest) Um cilindro oblíquo tem raio das bases igual a 1, altura  $2\sqrt{3}$  e está inclinado de um ângulo de  $60^\circ$  (ver figura). O plano  $\beta$  é perpendicular às bases do cilindro, passando por seus centros. Se P e A são os pontos representados na figura, calcule PA.



44. (Unifesp) Dois segmentos dizem-se reversos quando não são coplanares. Neste caso, o número de pares de arestas reversas num tetraedro, como o da figura, é



- a) 6.
- b) 3.
- c) 2.
- d) 1.
- e) 0.

45. (Ufpe) Sejam  $\pi_1$  e  $\pi_2$  planos que se interceptam em uma reta  $l$  e formam um ângulo de  $45^\circ$ . Em  $\pi_1$  escolha pontos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$  distando respectivamente 3cm, 7cm, 8cm, 15cm e 21cm de  $l$ . A reta perpendicular a  $\pi_1$  passando por  $P_i$  intercepta  $\pi_2$  em um ponto  $Q_i$ . Qual o valor, em cm, de  $P_1Q_1 + P_2Q_2 + P_3Q_3 + P_4Q_4 + P_5Q_5$ ?

## GABARITO

1. F F F F V
2.  $04 + 08 + 16 = 28$
3. [E]
4. [C]
5. [E]
6. a) Hip:  
 $\overline{AD} \perp \overline{AB}$
- $C \neq B$
- Tese:  
 $\overline{BC} \perp \overline{DC}$
- Demonstração:
- Seja  $\alpha$  o plano determinado por  $\overline{AB}$  e pelo ponto C.
- Seja  $\beta$  o plano determinado por  $\overline{AD}$  e pelo ponto C.
- $\Delta ABC$  é retângulo, com ângulo reto no ponto C
- $\overline{AC} \perp \overline{BC} \rightarrow \overline{BC} \perp \beta \rightarrow \overline{BC} \perp \overline{DC} \overline{AC} \in \beta$
- Caso  $C = A$ , então  $\overline{BC} = \overline{AB}$  e  $\overline{DC} = \overline{DA}$ , como  $\overline{AD} \perp \overline{AB}$  então  $\overline{BC} \perp \overline{DC}$
- b)  $\theta = 30^\circ$
7. Mesas com três pernas não balançam pois três pontos não colineares determinam um único plano (Postulado da Determinação de Plano).
8. Círculo de Raio = 2, com centro na origem do plano.
9. [E]
10. a) Se as retas r e s são paralelas distintas existe um único plano passando por r e s; portanto  $A \cap B$  é um conjunto unitário. Se as retas são paralelas coincidentes, então  $A \cap B = A = B$ .
- b) Se r e s são retas reversas não existe um plano passando por r e s. Logo  $A \cap B = \{ \}$
11. Consideremos z a reta que é a intersecção dos planos alfa e beta. Seja  $P \in \alpha$ ,  $P \notin z$ . Então  $\alpha$  é o plano determinado por P e z. Por P é possível traçar, no plano  $\alpha$ , uma reta r paralela à reta z. Já que  $z \subset \beta$ , temos que r é paralela ao plano  $\beta$ . Suponha que, por absurdo, exista  $r' \neq r$ , passando por P,  $r'$  paralela a  $\beta$ . Como r e  $r'$  são concorrentes e estão contidas em  $\alpha$ , então o plano  $\alpha$  é determinado por elas. Como a reta r é paralela a  $\beta$  e  $r'$  é paralela a  $\beta$ , temos  $\alpha$  paralelo a  $\beta$ , o que contraria a hipótese. Está provado que r é única.
12. [E]
13. 11
14. [B]
15. [B]
16. [A]
17. [D]
18. 04
19. [A]
20. [C]
21. [B]
22. [B]
23. F F F F F
24. [A]
25. [E]
26. [D]
27. [A]
28. [C]

29. Notemos que:

no triângulo ABD, HE é paralelo a BD e  $HE = BD/2$ ;

no triângulo CBD, GF é paralelo a BD e  $GF = BD/2$ .

Portanto os segmentos HE e GF são paralelos e iguais, logo o quadrilátero EFGH é um paralelogramo.

30. [D]

31. [A]

32. V F V F

33. [E]

34. [C]

35. [B]

36. V F V V

37. [E]

38. [D]

39. [B]

40. [E]

41. F F V F V

42. [D]

43.  $PA = \sqrt{14}$

44. [B]

45. 54 cm