
OBJETIVO
ITA
Matemática
Livro do Professor
11
1º CENTENÁRIO DO SÊLO NO BRASIL
1843
1943

MÓDULO 41

Funções II

1. **(OPM)** – Seja f uma função de domínio ℝ dada por $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$. Determine o conjunto-imagem da função.

RESOLUÇÃO:
O conjunto-imagem da função f é tal que se $y \in Im(f)$, então existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

Assim sendo, $f(x) = y \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = y \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - x + 1 = yx^2 + yx + y \Rightarrow (y - 1)x^2 + (y + 1)x + (y - 1) = 0$
Essa equação só admite valor de x real se
$\Delta = (y + 1)^2 - 4 . (y - 1) . (y - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -3y^2 + 10y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \leq y \leq 3$. Portanto, $Im(f) = \left[\dfrac{1}{3}; 3\right]$

2. Considere a função f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 5x + 1}{x^2}.$$

O conjunto-imagem de f é:

a) $[-3; +\infty[$

b) $[-6; +\infty[$

c) $\left[-\dfrac{25}{4}; +\infty\right[$

d) $]-\infty; -6]$

e) $\left[-\infty; \dfrac{25}{4}\right]$

RESOLUÇÃO:

$f(x) = \dfrac{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 5x + 1}{x^2} \Rightarrow f(x) = x^2 - 5x + 2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 2$

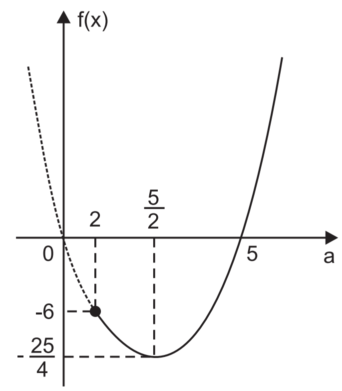
Fazendo $x + \dfrac{1}{x} = a$, tem-se, para $x > 0$, que:

1) $a \geq 2$

2) a função g: $\mathbb{R}_+^* \to [2; +\infty[$ definida por $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ é sobrejetora, pois se $a \in [2; +\infty[$, existe $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $x + \dfrac{1}{x} = a$

3) Se $x + \dfrac{1}{x} = a$, então $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = a^2 - 2$ e $f(x) = a^2 - 5a$

Assim sendo, o gráfico da função f, em função de a, é o mostrado abaixo e o conjunto-imagem de f é $\left[-\dfrac{25}{4}; +\infty\right[$



Resposta: C

MÓDULO 42

Funções II

1. **(ITA)** – Considere os conjuntos $S = \{0,2,4,6\}$, $T = \{1,3,5\}$ e $U = \{0,1\}$ e as afirmações:

I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \varnothing$.

II. $\{2\} \subset S \backslash U$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.

III. Existe uma função $f: S \to T$ injetiva.

IV. Nenhuma função $g: T \to S$ é sobrejetiva.

Então, é(são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas IV.
c) apenas I e IV. d) apenas II e III.
e) apenas III e IV.

RESOLUÇÃO:

Se $S = \{0; 2; 4; 6\}$, $T = \{1; 3; 5\}$ e $U = \{0; 1\}$, então

I) é falsa, pois $0 \in S$, mas $\{0\} \notin S$ e $S \cap U = \{0\} \neq \varnothing$

II) é falsa, pois
$S \setminus U = S - U = \{2; 4; 6\}$ e $\{2\} \subset S\backslash U$, mas
$S \cap T \cap U = \varnothing$

III) é falsa, pois
para $f: S \to T$ ser injetiva, deveríamos ter
$f(0) \neq f(2) \neq f(4)$, $f(0) \neq f(4) \neq f(6)$ e
$f(0) \neq f(6) \neq f(2)$ e, para isto, é necessário que
$n(T) \geq 4$

IV) é verdadeira, pois
para $g: T \to S$ ser sobrejetiva, deveríamos ter
$Im(g) = CD(g) = S$, o que é impossível posto que
$n[Im(g)] \leq 3$ e $n(S) = 4$

Resposta: B

2. **(ITA)** – Seja $f: \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+1}.$$

a) Mostre que f é injetora.

b) Determine $D = \{f(x);\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$ e $f^{-1}: D \to \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

RESOLUÇÃO:

Sendo:

$f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{2x+3}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$$

conclui-se:

a) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, temos:

$$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow x_1 + 1 \neq x_2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1+1} \neq \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x_1+1} \neq 2 + \frac{1}{x_2+1} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ e, portanto, *f* é injetora.

b) Sendo f^{-1} a função inversa de f, temos:

$$f(f^{-1}(x)) = x \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{f^{-1}(x)+1} = x \Leftrightarrow \frac{1}{f^{-1}(x)+1} = x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) + 1 = \frac{1}{x-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3-x}{x-2}$$

O conjunto $D = \{f(x);\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$ e
$f^{-1}: D \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ é o conjunto-domínio da função f^{-1} e, portanto, $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Respostas: a) demonstração
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

MÓDULO 43

Funções II

1. **(ITA)** – Sejam f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções tais que:

a) gof: g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é injetora. Verifique se f é injetora e justifique sua resposta.

b) gof: g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é sobrejetora. Verifique se g é sobrejetora e justifique sua resposta.

RESOLUÇÃO:

Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

a) Se f não é injetora então existem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que:
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow gof(x_1) = gof(x_2)$.
O que contraria a hipótese de que gof é injetora.
Logo, f é injetora.

b) Se gof: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é sobrejetora então o conjunto imagem de gof é
$Im(gof) = \mathbb{R}$ e $Im(gof) \subset Im(g)$.
Assim, $\mathbb{R} \subset Im(g) \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(g) = \mathbb{R}$.
Logo, g é sobrejetora.

2. **(ITA)** – Seja f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijetora e ímpar. Mostre que a função inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é ímpar.

RESOLUÇÃO

Sendo f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijetora e ímpar, para todo $a \in \mathbb{R}$, temos:

$f(a) = b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$ e $f(-a) = -b$

De $f(-a) = -b$, temos $f^{-1}(-b) = -a$

Assim:

$f^{-1}(-b) = -a = -f^{-1}(b)$ e, portanto, f^{-1} é ímpar.

MÓDULO 44

Funções II

1. **(ITA)** – Mostre que toda função $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $f(xy) = f(x) + f(y)$ em todo seu domínio, é par.

RESOLUÇÃO:

$\forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

1) $x = z$ e $y = z \Rightarrow f(z^2) = f(z) + f(z) \Rightarrow f(z^2) = 2f(z)$

2) $x = -z$ e $y = -z \Rightarrow f(z^2) = f(-z) + f(-z) \Rightarrow f(z^2) = 2f(-z)$

Logo, $f(z^2) = 2f(z) = 2f(-z), \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(-z) = f(z), \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f é par, $\forall z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Resposta: Demonstração

2. **(ITA)** – Sejam a, b, c reais não nulos e distintos, $c > 0$. Sendo par a função dada por

$$f(x) = \frac{ax + b}{x + c}, -c < x < c,$$

então f(x), para $-c < x < c$, é constante e igual a:

a) a + b b) a + c c) c d) b e) a

RESOLUÇÃO:

A função $f:]-c; c[\to \mathbb{R}$, com $c > 0$, definida por

$f(x) = \dfrac{ax + b}{x + c}$, é par.

Logo: $f(-x) = f(x), \forall x \in]-c; c[\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{-ax + b}{-x + c} = \frac{ax + b}{x + c}, \forall x \in]-c; c[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ax^2 + bx - acx + bc = -ax^2 - bx + acx + bc, \forall x \in]-c; c[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2b - 2ac)\,x = 0, \forall x \in]-c; c[\Leftrightarrow 2b - 2ac = 0 \Leftrightarrow b = ac$$

Assim sendo:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{ax + b}{x + c} \\ b = ac \end{array}\right\} \Leftrightarrow f(x) = \frac{ax + ac}{x + c} \Leftrightarrow f(x) = a$$

Resposta: E

3. **(ITA)** – Denotemos por R o conjunto dos números reais. Seja g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função não nula que satisfaz, para todo x e y reais, a relação $g(x + y) = g(x) + g(y)$

Se f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for definida por: $f(x) = \text{sen}\left[\dfrac{2g(x)}{a}\right]$, $a \neq 0$

então podemos garantir que:

a) f é periódica com período π a:

b) Para a = n (n natural), temos: $f(n) = 2\,\text{sen}\,[g(1)]$

c) Se $g(1) \neq 0$ então $g(1) = f(0)$.

d) Se $g(T) = \pi$ a então T é período de f.

e) Se $g(T) = 2\pi$ então T é período de f.

RESOLUÇÃO:

1) $g(x + y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow g(x + T) = g(x) + g(T), \forall x, T \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = \text{sen}\left[\dfrac{2g(x)}{a}\right]$, $a \neq 0$ **e**

$$f(x + T) = \text{sen}\left[\dfrac{2g(x + T)}{a}\right]$$

3) De (1) e (2) tem-se:

$$f(x + T) = \text{sen}\left[\dfrac{2g(x)}{a} + \dfrac{2g(T)}{a}\right]$$

4) Se $T \in \mathbb{R}^*$ **e** $g(T) = \pi a$ **então em (3) tem-se:**

$$f(x + T) = \text{sen}\left[\dfrac{2g(x)}{a} + \dfrac{2\pi a}{a}\right] = \text{sen}\left[\dfrac{2g(x)}{a} + 2\pi\right] =$$

$$= \text{sen}\left[\dfrac{2g(x)}{a}\right] = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

5) Se $T \in \mathbb{R}^*$ **e** $f(x + T) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ **então f é periódica e T é** ***UM*** **período de f.**

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 41

1. O conjunto-imagem da função f definida em $\mathbb{R}^*$ tal que $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{3x}$ é

a) $\{0; 1\}$

b) $\{a \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} < a \leq 1\}$

c) $\left\{ a \in \mathbb{R} \mid a \leq -\frac{2}{3} \text{ ou } a \geq \frac{2}{3} \right\}$

d) $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

e) $\mathbb{R}$

2. Seja f uma função de domínio R / {– 1} dada por $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$. Determine o conjunto-imagem da função f.

■ MÓDULO 42

1. **(ITA)** – Se Q e I representam, respectivamente, o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais, considere as funções f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \in Q \\ 1, \text{ se } x \in I \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in Q \\ 0, \text{ se } x \in I \end{cases}$$

Seja J a imagem da função composta fog: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Podemos afirmar que:

a) J = R b) J = Q c) J = {0}
d) J = {1} e) J = {0,1}

2. **(ITA)** – Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$, não vazios, possuindo B mais de um elemento.
Dada uma função f: A → B, definimos L : A → A × B por L(a) = (a, f(a)), para todo a ∈ A. Podemos afirmar que:

a) A função L sempre será injetora.
b) A função L sempre será sobrejetora.
c) Se f for sobrejetora, então L também o será.
d) Se f for injetora, então L também não o será.
e) Se f for bijetora, então L será sobrejetora.

■ MÓDULO 43

1. **(ITA)** – Seja a função f: $\mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x - 2} + 1$. Sobre a sua inversa podemos garantir que:

a) não está definida pois f é injetora.

b) não está definida pois f não é sobrejetora.

c) está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{y - 2}{y - 3}$, $y \neq 3$.

d) está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{y + 5}{y - 3} - 1$, $y \neq 3$.

e) está definida por $f^{-1}(y) = \dfrac{2y - 5}{y - 3}$, $y \neq 3$.

2. **(IME)** – Seja uma função f: $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais, tal que f(a / b) = f(a) – f(b) para a e b pertencentes ao domínio de f. Demonstre que f é uma função par.

■ MÓDULO 44

1. **(ITA)** – Sejam f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que f é par e g é ímpar. Das seguintes afirmações:
I. f . g é ímpar,
II. f o g é par,
III. g o f é ímpar,
é (são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III.
d) apenas I e II. e) todas.

2. **(ITA)** – Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por
f(x) = 2sen 2x – cos 2x.
Então:

a) f é ímpar e periódica de período π.
b) f é par e periódica de período π/2.
c) f não é par nem ímpar e é periódica de período π.
d) f não é par e é periódica de período π/4.
e) f não é ímpar e não é periódica.

■ MÓDULO 41

1) Como $Im(f) = \{a \in \mathbb{R} \mid \exists\, x \in \mathbb{R}^* \text{ e } f(x) = a\}$, tem-se

$$f(x) = \frac{x^2+1}{3x} = a \Leftrightarrow x^2 - 3ax + 1 = 0$$

Para existir $x \in \mathbb{R}^*$, deve-se ter

$\Delta = (-3a)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 1 \geq 0$ e, portanto,

$9a^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -\dfrac{2}{3}$ ou $a \geq \dfrac{2}{3}$

Resposta: C

2) Fazendo $f(x) = y$ temos $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = y \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = yx^2 + 2yx + y \Rightarrow$

$\Rightarrow (y-1)x^2 + (2y+2)x + (y-1) = 0$

Para que esta equação admita $x \in \mathbb{R} \mid \{-1\}$ devemos ter

$\Delta = (2y+2)^2 - 4 \,.\, (y-1) \,.\, (y-1) = 16y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$

Assim, $Im(f) = \mathbb{R}_+$

Resposta: $\mathbb{R}_+$

■ MÓDULO 42

1) $(fog)(x) = f\,[g(x)]$

De acordo com o enunciado $g(x) = 0$ ou $g(x) = 1$, então $g(x) \in \mathbb{Q}$. Assim $(fog)(x) = f[g(x)] = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

A imagem J é: $\{0\}$.

Resposta: C

2) Se f é uma função de A em B então f(a) é único para todo $a \in A$ e $\{a, f(a))$ será único para todo $a \in A$.

Pode-se afirmar que $L: A \to A \times B$ é sempre injetora pois: $L(a_1) = L(a_2) \Leftrightarrow (a_1, f(a_1)) = (a_2, f(a_2)) \Rightarrow a_1 = a_2$, $\forall a_1, a_2 \in A$

Resposta: A

■ MÓDULO 43

1)

a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-2} + 1 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3x-5}{x-2}$

b) $y = \dfrac{3x-5}{x-2} \Rightarrow (y-3)x = 2y - 5 \Rightarrow x = \dfrac{2y-5}{y-3}$

Portanto:

$$f^{-1}(y) = \frac{2y-5}{y-3}\ ;\ y \neq 3$$

Resposta: E

2)

a) $f\left(\dfrac{1}{1}\right) = f(1) - f(1) = 0$

b) $f(-1) = f\left(\dfrac{1}{-1}\right) = f(1) - f(-1) = 0 - f(-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \,.\, f(-1) = 0 \Leftrightarrow f(-1) = 0$

c) $f(-x) = f\left(\dfrac{x}{-1}\right) = f(x) - f(-1) = f(x) - 0 = f(x)$,

para todo $x \in D(f)$. Portanto f é Par

Resposta: Demonstração.

■ MÓDULO 44

1) $f(-x) = f(x)$ e $g(-x) = -g(x)$, pois f e g são respectivamente funções par e ímpar.

I. *Verdadeira*.

$f(-x) \,.\, g(-x) = f(x) \,.\, (-g(x)) = -f(x) \,.\, g(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f \,.\, g$ é ímpar.

II. *Verdadeira*.

$(fog)(-x) = f[g(-x)] = f[-g(x)] = f[g(x)] = (fog)(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow fog$ é par.

III. *Falsa*.

$(gof)(-x) = g[f(-x)] = g[f(x)] = (gof)(x) \Leftrightarrow gof$ é par.

Resposta: D

2)

I) $f(x) = 2 \text{ sen } 2x - \cos 2x =$

$$= \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ sen } 2x - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2x\right)$$

Existe $\alpha \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$ independente de x tal que

$\cos \alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ e $\text{sen } \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Assim,

$f(x) = \sqrt{5}\,(\cos\alpha \,.\, \text{sen } 2x - \text{sen } \alpha \,.\, \cos 2x) \Rightarrow$

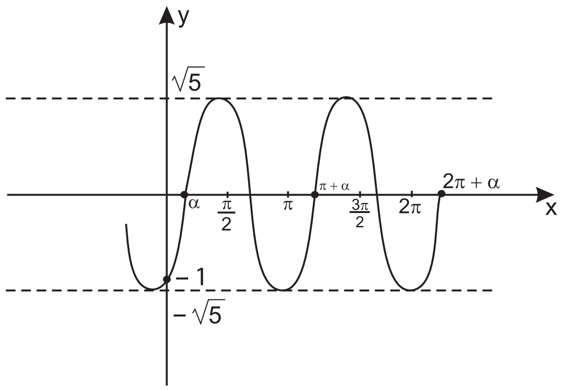
$\Rightarrow f(x) = \sqrt{5} \,.\, \text{sen }(2x - \alpha)$

II) **f não é par nem ímpar, pois existe** $x \in \mathbb{R}$ **tal que**

$f(-x) = \sqrt{5} \,.\, \text{sen}[2(-x) - \alpha] = -\sqrt{5} \,.\, \text{sen }(2x + \alpha)$

e, portanto, $f(-x) \neq f(x)$ **e** $f(-x) \neq -f(x)$

III) **f é periódica de período** $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$ **e o gráfico de f é**



Resposta: C