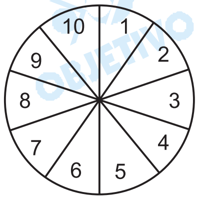
MATEMÁTICA

1

Um jogo consiste num dispositivo eletrônico na forma de um círculo dividido em 10 setores iguais numerados, como mostra a figura.



Em cada jogada, um único setor do círculo se ilumina. Todos os setores com números pares têm a mesma probabilidade de ocorrer, o mesmo acontecendo com os setores com números ímpares. Além disso, a probabilidade de ocorrer o número 3 é o dobro da probabilidade de ocorrer o número 4. Denotando por *p*(i) a probabilidade de, numa jogada, ocorrer o número i, determine:

a) *p*(3) e *p*(4).

b) a probabilidade de, numa jogada, ocorrer um número primo maior ou igual a 2.

Resolução

Sendo p(ímpar) e p(par), respectivamente, a probabilidade de ocorrer um número ímpar e um número de par, numa jogada, temos:

$$\begin{cases} p(\text{ímpar}) + p(\text{par}) = 1 \\ p(\text{ímpar}) = 2p(\text{par}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(\text{ímpar}) = \dfrac{2}{3} \\ p(\text{par}) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$a)\ p(3) = \frac{1}{5} \cdot p(\text{ímpar}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

$$p(4) = \frac{1}{5} \cdot p(\text{par}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

b) A probabilidade de, numa jogada, ocorrer um número primo maior ou igual a 2 é

$$p = p(2) + p(3) + p(5) + p(7) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) =$$

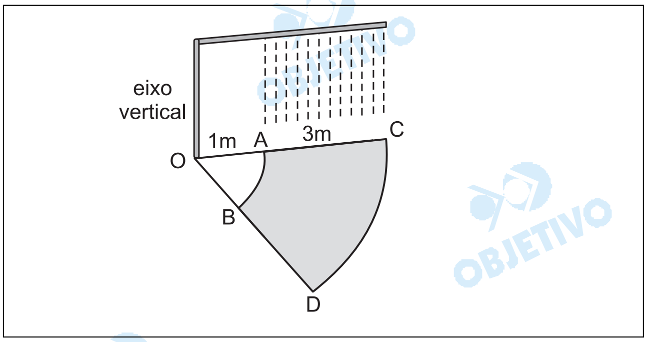
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{15}$$

Respostas: *a)* $p(3) = \dfrac{2}{15}$ *e* $p(4) = \dfrac{1}{15}$

b) $\frac{7}{15}$

2

A figura mostra um sistema rotativo de irrigação sobre uma região plana, que gira em torno de um eixo vertical perpendicular à região. Se denotarmos a medida em radianos do ângulo AÔB por θ, a área irrigada, representada pela parte cinza do setor circular, será uma função A, que dependerá do valor de θ, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



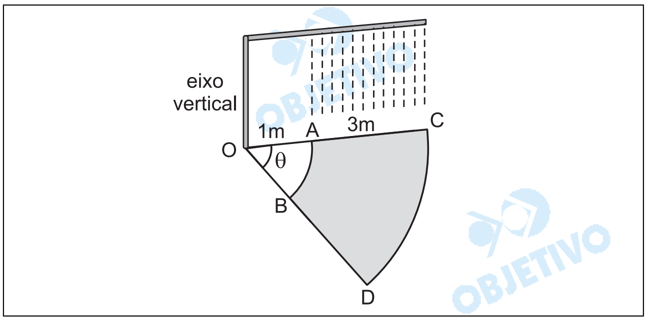
Se $OA = 1$ m e $AC = 3$ m, determine:

a) a expressão matemática para a função $A(\theta)$.

b) o valor de θ, *em graus*, se a área irrigada for de 8 m^2.

(Para facilitar os cálculos, use a aproximação $\pi = 3$.)

Resolução



a) 1) A área S_{OAB} do setor circular OAB é tal que

$$S_{OAB} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi \, 1^2 = \frac{\theta}{2}$$

2) A área S_{OCD} do setor circular OCD é tal que

$$S_{OCD} = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi \, 4^2 = 8\theta$$

3) A expressão matemática para a função que fornece a área irrigada, em metros quadrados, é:

$$A(\theta) = 8\theta - \frac{\theta}{2} = \frac{15\theta}{2}, \text{ com } \theta \text{ em radianos e}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

$$b)\ A(\theta) = 8 = \frac{15\theta}{2} \Rightarrow \theta = \frac{16}{15} \text{ rad.}$$

Em graus, tem-se:

$$\theta = \frac{16}{15} \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{16}{15} \cdot \frac{180°}{3} = 64°$$

Respostas: *a)* $A(\theta) = \dfrac{15\theta}{2}$

b) $64°$

3

Considere os números complexos w = 2i e z = (1 + i). Determine:

a) z^2 e ($w^2 . \bar{z} + w$), onde $\bar{z}$ indica o conjugado de z.

b) |z| e |w|. Mostre que a seqüência (1, |z|, |w|, |zw|, $|w^2|$) é uma progressão geométrica, determinando todos os seus termos e a sua razão.

Resolução

Sendo w = 2i e z = 1 + i tem-se:

a) $z^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$

$w^2 . \bar{z} + w = (2i)^2 . (1 - i) + (2i) =$

$= -4 . (1 - i) + 2i = -4 + 6i$

b) $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|w| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$|zw| = |z| . |w| = 2\sqrt{2}$

$|w^2| = |w|^2 = 4$

A seqüência $(1; |z|; |w|; |zw|; |w^2|)$ *é equivalente a* $(1; \sqrt{2}; 2; 2\sqrt{2}; 4)$. *Trata-se de uma progressão geométrica de razão* $q = \sqrt{2}$, *pois* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{2}$, $\forall n \in \{1;2;3;4\}$ *e com* a_n *termo da seqüência.*

Respostas: a) $z^2 = 2i$ e $w^2 . \bar{z} + w = -4 + 6i$

b) $|z| = \sqrt{2}$, $|w| = 2$. A seqüência é $(1;\sqrt{2};2;2\sqrt{2};4)$ que é uma progressão geométrica de razão $\sqrt{2}$.

4

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Determine todos os números reais λ para os quais se tem det $(A - \lambda I) = 0$, onde I é a matriz identidade de ordem 3.

b) Tomando $\lambda = -2$, dê todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} (6-\lambda)\,x - 3y = 0 \\ -3x + (6-\lambda)\,y = 0 \\ x - y + (2-\lambda)\,z = 0 \end{cases}$$

Resolução

a) Se $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

então $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 6-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 6-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

Portanto:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 6-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (2-\lambda)\,.\,[(6-\lambda)^2 - 9] = 0 \Leftrightarrow 2 - \lambda = 0$ *ou* $(6-\lambda)^2 = 9$

$\Leftrightarrow \lambda = 2$ *ou* $6 - \lambda = \pm 3 \Leftrightarrow \lambda = 2$ *ou* $\lambda = 3$ *ou* $\lambda = 9$

b) Se $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ *ou* $\lambda = 3$ *ou* $\lambda = 9$ *então, para* $\lambda = -2$*, temos:*

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 6-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \neq 0$$

Assim sendo, o sistema homogêneo

$$\begin{cases} (6-\lambda)x - 3y = 0 \\ -3x + (6-\lambda)y = 0 \\ x - y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6-\lambda)x - 3y + 0z = 0 \\ -3x + (6-\lambda)y + 0z = 0 \\ x - y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

é determinado e a única solução é $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Respostas: *a)* $\lambda = 2$ *ou* $\lambda = 3$ *ou* $\lambda = 9$

b) (0;0;0)

5

Considere função dada por $f(x) = 3^{2x+1} + m\,3^x + 1$.

a) Quando $m = -4$, determine os valores de x para os quais $f(x) = 0$.

b) Determine todos os valores reais de m para os quais a equação $f(x) = m + 1$ não tem solução real x.

Resolução

$f(x) = 3^{2x+1} + m \cdot 3^x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = 3^{2x} \cdot 3 + m \cdot 3^x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = 3 \cdot (3^x)^2 + m \cdot (3^x) + 1$

a) $m = -4 \Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot (3^x) + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^x = \frac{4 \pm 2}{6} \Leftrightarrow 3^x = 1 \text{ ou } 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$

b) $f(x) = m + 1 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 + m \cdot (3^x) + 1 = m + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 + m \cdot (3^x) - m = 0$

Fazendo $3^x = y$ *resulta a equação*

$3y^2 + m \cdot y - m = 0.$

Essa equação não tem soluções reais se, e somente se, suas raízes y_1 *e* y_2 *não são reais* ***ou*** *se ambas forem reais negativas.*

I) As raízes y_1 *e* y_2 *não são reais* $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Delta = m^2 + 12m < 0 \Leftrightarrow -12 < m < 0.$

II) Para que as raízes y_1 *e* y_2 *sejam ambas reais e negativas devemos ter* $\Delta \geq 0$, $y_1 + y_2 = \dfrac{-m}{3} \leq 0$

e $y_1 \cdot y_2 = \dfrac{-m}{3} \geq 0$ *que se verifica apenas para*

$m = 0.$

Concluímos, então, que $-12 < m \leq 0$.

Respostas: a) $x = -1$ ou $x = 0$

b) $-12 < m \leq 0$

6

Considere as funções $f(x) = \frac{x}{2}$ e $g(x) = \log_2 x$, para $x > 0$.

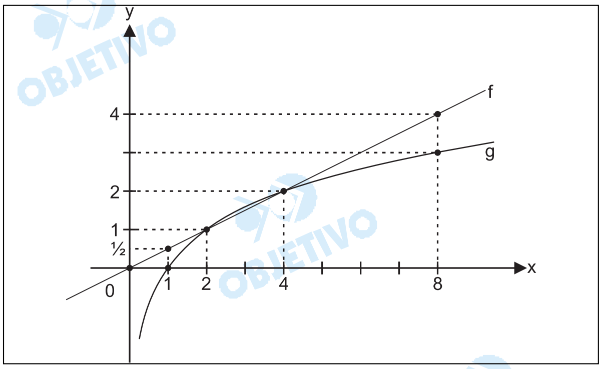
a) Represente, num mesmo sistema de coordenadas retangulares, os gráficos das duas funções, colocando os pontos cujas abscissas são $x = 1$, $x = 2$, $x = 4$ e $x = 8$.

b) Baseado na representação gráfica, dê o conjunto solução da inequação $\frac{x}{2} < \log_2 x$, e justifique por que $\frac{\pi}{2} < \log_2 \pi$.

Resolução

$f(x) = \frac{x}{2}$ $\qquad$ $g(x) = \log_2 x$

a)



x	1	2	4	8
f(x)	1/2	1	2	4

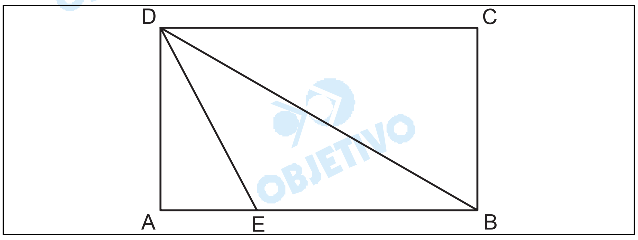
x	1	2	4	8
g(x)	0	1	2	3

b) $\frac{x}{2} < \log_2 x \Leftrightarrow 2 < x < 4$

Sendo: $2 < \pi < 4 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \log_2 \pi$

7

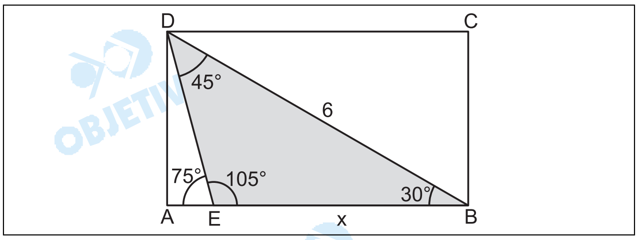
Na figura, *ABCD* é um retângulo, *BD* = 6 cm, a medida do ângulo $A\hat{B}D$ é α = 30º, a medida do ângulo $A\hat{E}D$ é β e *x* = *BE*. Determine:



a) a área do triângulo *BDE*, em função de *x*.
b) o valor de *x*, quando β = 75°.

Resolução

a)



$$S_{\Delta BDE} = \frac{x \cdot 6 \cdot sen\ 30°}{2} = \frac{3x}{2}$$

b) $sen\ 105° = sen(60° + 45°) =$

$= sen\ 60° \cdot cos\ 45° + cos\ 60° \cdot sen\ 45° =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Da Lei dos Senos, temos:

$$\frac{x}{sen\ 45°} = \frac{6}{sen\ 105°} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 6(\sqrt{3} - 1)$$

Respostas: *a)* $\frac{3x}{2}$ cm^2 *b)* $6(\sqrt{3} - 1)$ *cm*

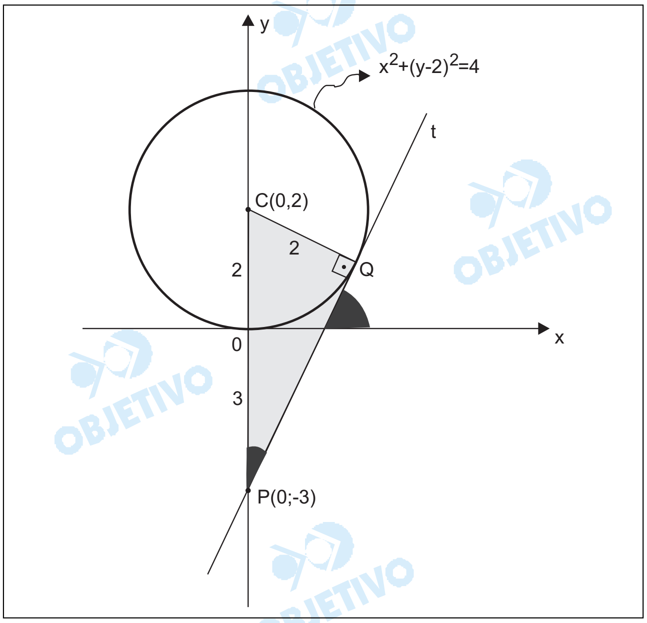
8

Considere a circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ e o ponto $P(0, -3)$.

a) Encontre uma equação da reta que passe por P e tangencie a circunferência num ponto Q de abscissa positiva.

b) Determine as coordenadas do ponto Q.

Resolução



a) ΔPQC *é retângulo:*

$$PQ^2 = 5^2 - 2^2 = 21 \Rightarrow PQ = \sqrt{21}$$

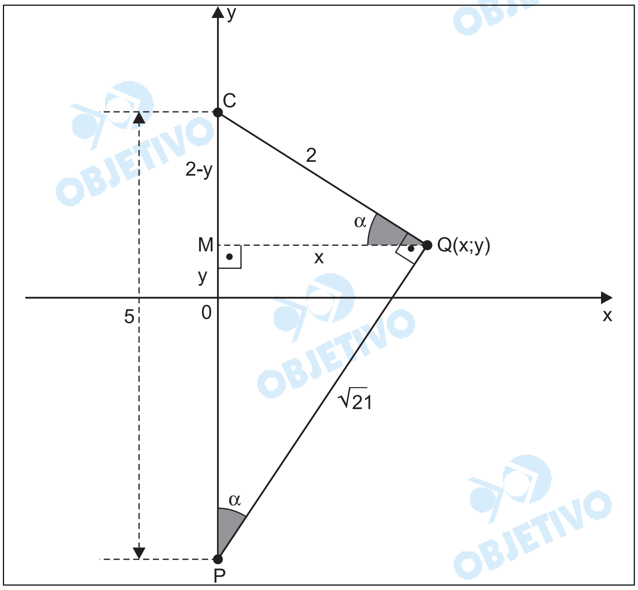
$$\text{Então } tg\ \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}} \Rightarrow cotg\ \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\ \theta = cotg\ \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow m_t = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{A equação da reta } \mathbf{t} \text{ é: } y + 3 = \frac{\sqrt{21}}{2}\, x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{21}x - 2y - 6 = 0$$

b)



$\Delta PQC \sim \Delta QMC$

$$\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{21}}{5}$$

$$\frac{2-y}{2} = \frac{2}{5} \Rightarrow y = \frac{6}{5}$$

Então: $Q\left(\dfrac{2\sqrt{21}}{5}\ ;\ \dfrac{6}{5}\right)$

Respostas: a) $\sqrt{21}x - 2y - 6 = 0$

b) $Q\left(\dfrac{2\sqrt{21}}{5}\ ;\ \dfrac{6}{5}\right)$

9

Do solo, você observa um amigo numa roda gigante. A altura *h* em metros de seu amigo em relação ao solo é dada pela expressão $h(t) = 11{,}5 + 10 \text{ sen}\left[\dfrac{\pi}{12}(t - 26)\right]$, onde o tempo *t* é dado em segundos e a medida angular em radianos.

a) Determine a altura em que seu amigo estava quando a roda começou a girar ($t = 0$).

b) Determine as alturas mínima e máxima que seu amigo alcança e o tempo gasto em uma volta completa (período).

Resolução

a) A altura, em metros, em que seu amigo estava quando a roda começou a girar (t = 0), é dada por:

$$h(0) = 11{,}5 + 10 \text{ sen}\left[\frac{\pi}{12}(0 - 26)\right] =$$

$$= 11{,}5 \,.\, 10 \,.\, \text{sen}\left(-\frac{13\pi}{6}\right) =$$

$$= 11{,}5 + 10 \,.\, \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 11{,}5 + 10 \,.\, \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 11{,}5 - 5 = 6{,}5$$

b) Sendo h' e H, respectivamente, as alturas (em metros) mínima e máxima que seu amigo alcança, T o tempo (em segundos) gasto em uma volta completa, tem-se:

1º) $h' = 11{,}5 + 10 \,.\, (-1) = 11{,}5 - 10 = 1{,}5$

2º) $H = 11{,}5 + 10 \,.\, (+1) = 11{,}5 + 10 = 21{,}5$

3º) T é o período da função h(t)

$$\text{Assim: } T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = \frac{24\pi}{\pi} = 24$$

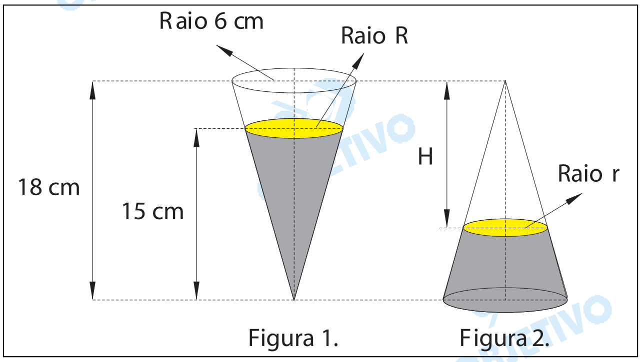
Respostas:

a) 6,5 metros.

b) altura mínima: 1,5 metro
altura máxima: 21,5 metros
período: 24 segundos

10

Um recipiente tampado, na forma de um cone circular reto de altura 18 cm e raio 6 cm, contém um líquido até a altura de 15 cm (figura 1). A seguir, a posição do recipiente é invertida (figura 2).



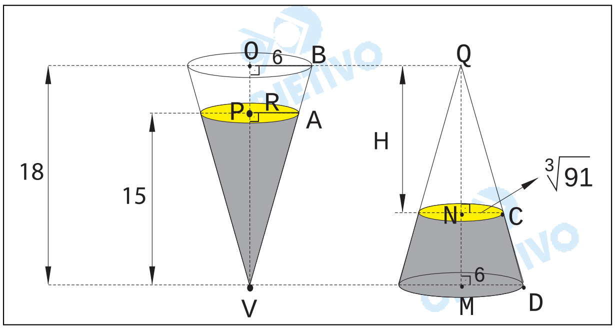
Sendo R e r os raios mostrados nas figuras,

a) determine R e o volume do líquido no cone em cm^3 (figura 1), como múltiplo de π.

b) dado que $r = \sqrt[3]{91}$, determine a altura H da parte sem líquido do cone na figura 2. (Use a aproximação $\sqrt[3]{91} \cong 9/2$.)

Resolução

a)



1º) Da semelhança dos triângulo retângulo PAV e OBV, tem-se:

$$\frac{R}{6} = \frac{15}{18} \Rightarrow R = 5$$

2º) Sendo V_L o volume, em centímetros cúbicos, do líquido no cone da figura 1, tem-se:

$$V_L = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot 15 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 15 = 125\pi$$

b) Da semelhança dos triângulos retângulos NCQ e MDQ, tem-se:

$$\frac{H}{18} = \frac{\sqrt[3]{91}}{6} \Leftrightarrow H = 3 \cdot \sqrt[3]{91} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H \cong 3 \cdot \frac{9}{2} \Leftrightarrow H \cong \frac{27}{2}$$

Respostas:

a) $R = 5\ cm$ e $V_L = 125\pi\ cm^3$

b) $H \cong \dfrac{27}{2}\ cm$

FÍSICA

11

Um veículo está rodando à velocidade de 36 km/h numa estrada reta e horizontal, quando o motorista aciona o freio. Supondo que a velocidade do veículo se reduz uniformemente à razão de 4 m/s em cada segundo a partir do momento em que o freio foi acionado, determine

a) o tempo decorrido entre o instante do acionamento do freio e o instante em que o veículo pára.

b) a distância percorrida pelo veículo nesse intervalo de tempo.

Resolução

a) 1) $V_0 = 36 \dfrac{km}{h} = \dfrac{36}{3{,}6} (m/s) = 10m/s$

2) *Sendo o movimento uniformemente variado, vem:*

$V = V_0 + \gamma t$

$0 = 10 - 4{,}0 \,.\, T$

$\boxed{T = 2{,}5s}$

b) *Usando-se a equação da velocidade escalar média, vem:*

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{V_0 + V}{2}$$

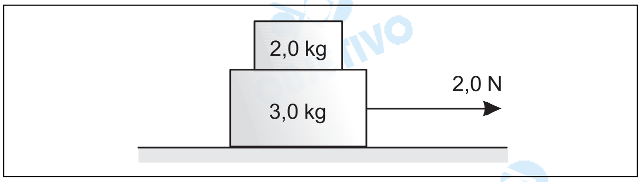
$$\frac{D}{2{,}5} = \frac{10 + 0}{2}$$

$$\boxed{D = 12{,}5m}$$

Respostas: *a) 2,5s*
b) 12,5m

12

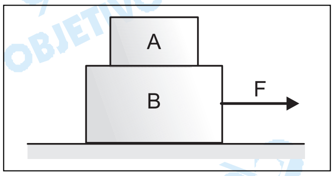
Um bloco de massa 2,0 kg repousa sobre outro de massa 3,0 kg, que pode deslizar sem atrito sobre uma superfície plana e horizontal. Quando uma força de intensidade 2,0 N, agindo na direção horizontal, é aplicada ao bloco inferior, como mostra a figura, o conjunto passa a se movimentar sem que o bloco superior escorregue sobre o inferior.



Nessas condições, determine
a) a aceleração do conjunto.
b) a intensidade da força de atrito entre os dois blocos.

Resolução

a) *Aplicando-se a 2ª Lei de Newton ao conjunto dos dois blocos, vem:*

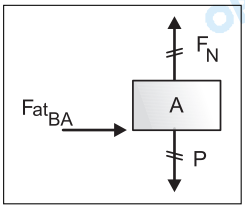


$F = (m_A + m_B)\ a$

$2{,}0 = 5{,}0\ .\ a$

$\boxed{a = 0{,}40 m/s^2}$

b) *Isolando-se o bloco superior (A), vem:*



2ª Lei de Newton no bloco A

$F_{at_{BA}} = m_A\ a$

$F_{at_{BA}} = 2{,}0\ .\ 0{,}40\ (N)$

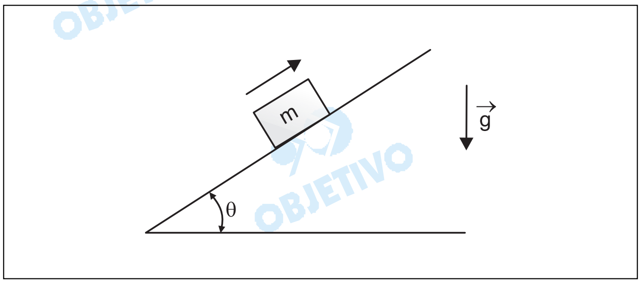
$\boxed{F_{at_{BA}} = F_{at_{AB}} = 0{,}80N}$

(ação e reação)

Respostas: *a) a aceleração tem módulo 0,40m/s², direção horizontal e sentido para a direita*
b) 0,80N

13

A figura mostra um bloco de massa m subindo uma rampa sem atrito, inclinada de um ângulo θ, depois de ter sido lançado com uma certa velocidade inicial.



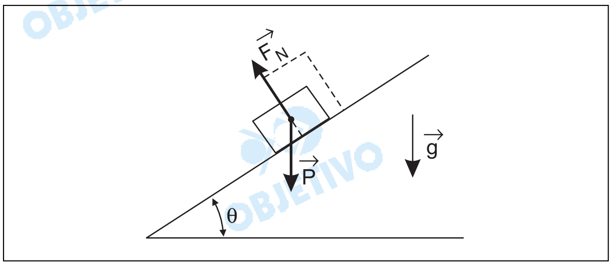
Desprezando a resistência do ar,

a) faça um diagrama vetorial das forças que atuam no bloco e especifique a natureza de cada uma delas.

b) determine o módulo da força resultante no bloco, em termos da massa m, da aceleração g da gravidade e do ângulo θ. Dê a direção e o sentido dessa força.

Resolução

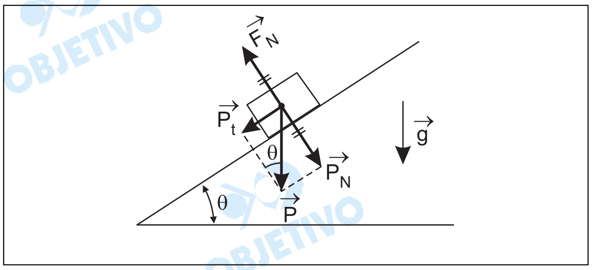
a)



*$\vec{P}$: peso do bloco, aplicado pelo planeta Terra, e é uma **força gravitacional**.*

*$\vec{F}_N$: reação normal de apoio, aplicada pelo plano inclinado, e é uma **força eletromagnética**.*

b)

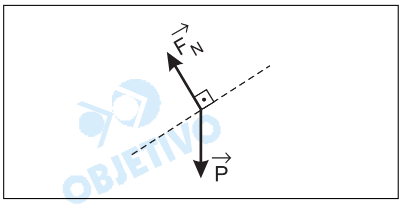


O peso é decomposto em uma parcela tangencial $\vec{P}_t$ (paralela ao plano inclinado) e outra normal $\vec{P}_N$ (perpendicular ao plano inclinado).
A componente normal $\vec{P}_N$ é equilibrada pela reação normal de apoio $\vec{F}_N$ e a força resultante no bloco é a componente tangencial do peso $\vec{P}_t$.

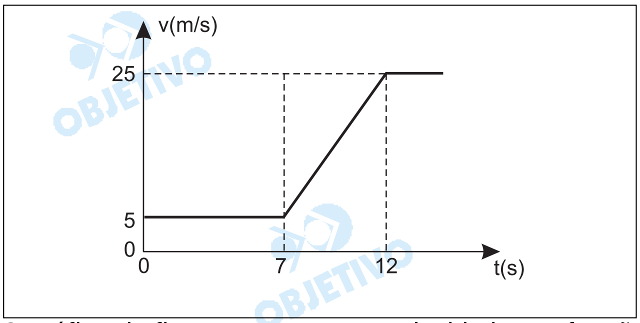
Da figura: $\text{sen}\,\theta = \dfrac{P_t}{P} \Rightarrow P_t = P\,\text{sen}\,\theta$

$$\boxed{P_t = m\,g\,sen\,\theta}$$

Respostas: *a) Peso: natureza gravitacional*
Reação normal de apoio: natureza eletromagnética



b) A resultante tem módulo ***m g sen*** θ*, direção paralela ao plano e sentido para baixo.*



O gráfico da figura representa a velocidade em função do tempo de um veículo de massa 1,2 x 10^3 kg, ao se afastar de uma zona urbana.

a) Determine a variação da energia cinética do veículo no intervalo de 0 a 12 segundos.

b) Determine o trabalho da força resultante atuando no veículo em cada um dos seguintes intervalos: de 0 a 7 segundos e de 7 a 12 segundos.

Resolução

a) *A variação da energia cinética é dada por:*

$$\Delta E_{cin} = \frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \frac{m}{2}\,(V^2 - V_0^2)$$

Do gráfico dado, temos: $V_0 = 5m/s$ *e* $V = 25m/s$

Portanto:

$$\Delta E_{cin} = \frac{1,2 \,.\, 10^3}{2}\,[(25)^2 - (5)^2]\ (J)$$

$$\Delta E_{cin} = 0,60 \,.\, 10^3\ (600)\ (J)$$

$$\boxed{\Delta E_{cin} = 3,6 \,.\, 10^5 J}$$

b) *1) De 0 a 7s, a energia cinética é constante e o trabalho total realizado sobre o veículo é nulo.*

2) De 7s a 12s, a variação de energia cinética vale $3,6 \,.\, 10^5 J$ *e o trabalho total realizado sobre o veículo vale* $3,6 \,.\, 10^5 J$*, de acordo com o teorema da energia cinética.*

Obs.: *Nesse caso, cumpre ressaltar o seguinte: se o veículo em questão for um carro, caminhão, trem ou equivalente, deslocando-se em um plano horizontal e desprezando-se o efeito do ar, a força resultante que acelera o veículo é a força de atrito aplicada pelo chão, que, supondo não haver derrapagem, é do tipo estática e o trabalho dela é nulo. Neste caso, a variação de energia cinética é proveniente de um trabalho interno das forças ligadas ao motor do veículo e* ***o trabalho da força resultante (atrito) é nulo****.*

Respostas: *a)* $\Delta E_{cin} = 3,6 \,.\, 10^5 J$

b) 1) o trabalho total é nulo de 0 a 7s

2) o trabalho total vale $3,6 \,.\, 10^5 J$ *de 7s a 12s (ver observação no texto)*

15

Duas peças metálicas de massas iguais, uma de ferro e a outra de chumbo, inicialmente a 100°C, são colocadas em contacto térmico com um grande bloco de gelo a 0°C. Após o equilíbrio térmico das peças com o gelo, o calor fornecido pela peça de ferro deixa m_F gramas de gelo fundido, enquanto que o calor fornecido pela peça de chumbo deixa m_C gramas de gelo fundido. O calor específico do ferro vale aproximadamente 0,45 J/g·°C e o do chumbo, 0,15 J/g·°C.

a) Qual o valor da razão m_F/m_C?

b) Sabendo que m_F = 90 g e que o calor latente de fusão do gelo vale 320 J/g, qual o valor da massa M de cada peça metálica?

Resolução

a) *O equilíbrio térmico das peças metálicas com o bloco de gelo acontecerá a 0°C. Assim, o calor recebido para a fusão do gelo é igual ao calor fornecido pelas peças metálicas para esfriarem de 100°C a 0°C.*

$$\frac{Q_F}{Q_C} = \frac{m_F \,.\, L}{m_c \,.\, L} = \frac{M\, c_{Fe} \,.\, \Delta\theta}{M\, c_{Pb} \,.\, \Delta\theta}$$

$$\frac{m_F}{m_c} = \frac{c_{Fe}}{c_{Pb}} = \frac{0,45}{0,15} = 3$$

$$\boxed{\frac{m_F}{m_c} = 3}$$

b) ***Cálculo de M***

$$Q_F = m_F\, L = M \,.\, c_{Fe} \,.\, \Delta\theta$$

$$90 \,.\, 320 = M \,.\, 0,45 \,.\, 100$$

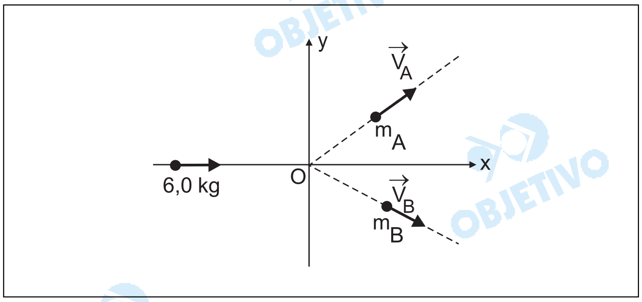
$$\boxed{M = 640g}$$

Respostas: *a) 3*

b) 640 g

16

Um corpo de 6,0 kg, deslocando-se com velocidade $\vec{v}$ na direção e sentido de um eixo x e livre de forças externas, explode, separando-se em dois pedaços, A e B, de massas m_A e m_B, respectivamente. Após a explosão, A e B passam a se deslocar no plano xOy, afastando-se do ponto O com velocidades $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$, respectivamente, segundo as direções representadas esquematicamente por linhas pontilhadas na figura.



a) Sendo v o módulo de $\vec{v}$ e sabendo que os módulos das componentes vetoriais de $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ na direção de x valem, respectivamente, v/2 e 2v, determine as massas m_A e m_B.

b) Sendo v_{AY} e v_{BY}, respectivamente, os módulos das componentes de $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ na direção de y, determine a razão v_{AY}/v_{BY}.

Resolução

a) *Explosão: sistema isolado de forças externas.*
Conservação da quantidade de movimento (momento linear) na direção Ox:

$$\vec{Q}_{x_{final}} = \vec{Q}_{x_{inicial}} \Rightarrow m_A V_{A_x} + m_B V_{B_x} = mv$$

$$m_A \frac{v}{2} + m_B\, 2v = 6{,}0v \Rightarrow m_A + 4m_B = 12{,}0 \quad (1)$$

Mas: $m_A + m_B = 6{,}0 \quad (2)$

Fazendo-se (1) − (2), *vem:*

$3m_B = 6{,}0$

$\boxed{m_B = 2{,}0kg}$

Logo: $\boxed{m_A = 4{,}0kg}$

b) ***Conservação da quantidade de movimento (momento linear) na direção Oy***.

b) $\vec{Q}_{y_{final}} = \vec{Q}_{y_{inicial}} \Rightarrow m_A V_{A_y} = m_B V_{B_y}$

$$4{,}0\, V_{A_y} = 2{,}0\, V_{B_y} \Rightarrow \boxed{\frac{V_{Ay}}{V_{By}} = \frac{1}{2}}$$

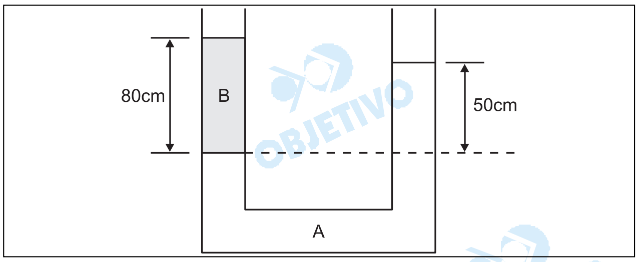
Respostas: *a)* $m_A = 4{,}0kg$

$m_B = 2,0kg$

b) $\frac{V_{Ay}}{V_{By}} = \frac{1}{2}$

17

O tubo aberto em forma de U da figura contém dois líquidos não miscíveis, A e B, em equilíbrio. As alturas das colunas de A e B, medidas em relação à linha de separação dos dois líquidos, valem 50 cm e 80 cm, respectivamente.

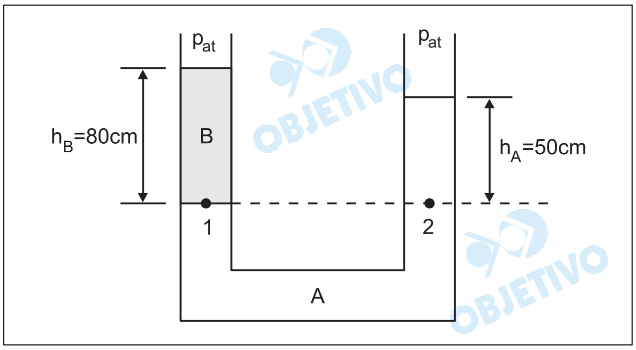


a) Sabendo que a massa específica de A é 2,0 x 10^3 kg/m^3, determine a massa específica do líquido B.

b) Considerando g = 10 m/s^2 e a pressão atmosférica igual a 1,0 x 10^5 N/m^2, determine a pressão no interior do tubo na altura da linha de separação dos dois líquidos.

Resolução

a) As pressões nos pontos 1 e 2 são iguais: $p_1 = p_2$.



Sendo $p_1 = p_{at} + \mu_B \cdot g \cdot h_B$ *e* $p_2 = p_{at} + \mu_A \cdot g \cdot h_A$,

vem: $p_{at} + \mu_B \cdot g \cdot h_B = p_{at} + \mu_A \cdot g \cdot h_A$

$$\mu_B \cdot h_B = \mu_A \cdot h_A$$

$$\mu_B \cdot 80 = 2,0 \cdot 10^3 \cdot 50$$

$$\boxed{\mu_B = 1,25 \cdot 10^3 \ kg/m^3}$$

b) A pressão no interior do tubo na altura da linha de separação é p_1*, que é igual a* p_2.

De $p_1 = p_{at} + \mu_B \cdot g \cdot h_B$*, vem:*

$$p_1 = 1,0 \cdot 10^5 + 1,25 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0,80 \ (N/m^2)$$

$$p_1 = 1,0 \cdot 10^5 + 0,1 \cdot 10^5 \ (N/m^2)$$

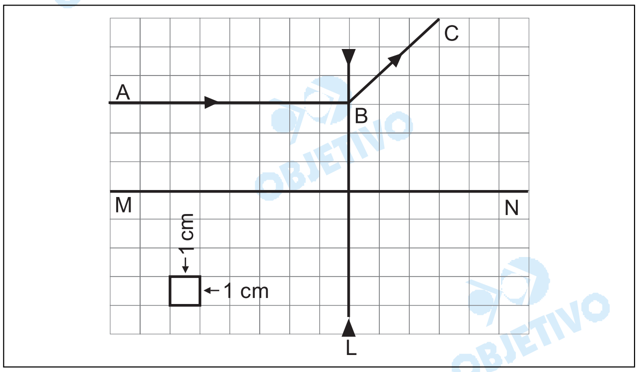
$$\boxed{p_1 = 1,1 \cdot 10^5 \ N/m^2}$$

Respostas: *a)* $1,25 \cdot 10^3$ *kg/*m^3

b) $1,1 \cdot 10^5$ *N/*m^2

18

Na figura, MN representa o eixo principal de uma lente divergente L, AB o trajeto de um raio luminoso incidindo na lente, paralelamente ao seu eixo, e BC o correspondente raio refratado.

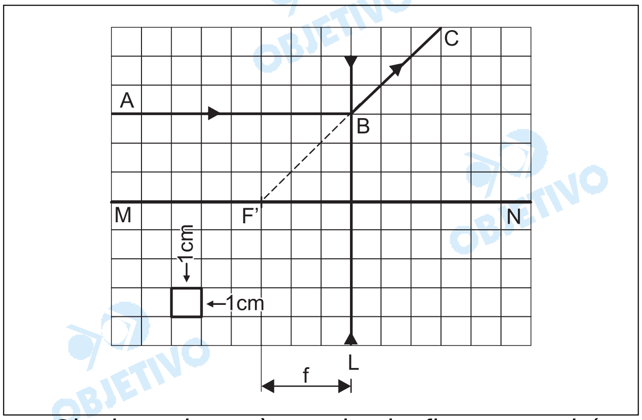


a) A partir da figura, determine a distância focal da lente.

b) Determine o tamanho e a posição da imagem de um objeto real de 3,0 cm de altura, colocado a 6,0 cm da lente, perpendicularmente ao seu eixo principal.

Resolução

a) *O raio incidente (AB), paralelo ao eixo óptico (MN) da lente, deve refratar-se alinhado com o foco imagem F', conforme representamos abaixo.*



Obedecendo-se à escala da figura, concluímos que:

$$\boxed{|f| = 3{,}0cm}$$

Como F' é um foco virtual, atribuímos sinal negativo a f.

b) *Equação de Gauss:*

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

$$-\frac{1}{3{,}0} = \frac{1}{6{,}0} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{p'} = -\frac{1}{3{,}0} - \frac{1}{6{,}0}$$

$$\frac{1}{p'} = \frac{-2{,}0 - 1{,}0}{6{,}0} \Rightarrow \boxed{p' = -2{,}0cm}$$

A imagem virtual situa-se a 2,0cm da lente, do mesmo lado do objeto.

Aumento linear transversal*:*

$$\frac{i}{o} = -\frac{p'}{p} \Rightarrow \frac{i}{3{,}0} = -\frac{(-2{,}0)}{6{,}0}$$

$$\boxed{i = 1{,}0cm}$$

A imagem é direita, com comprimento igual a 1,0cm.

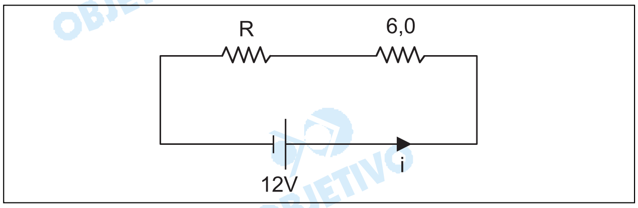
Respostas: *a) –3,0cm*

b) ***Tamanho da imagem:*** *1,0cm*

Posição da imagem: *a 2,0cm da lente, do mesmo lado do objeto.*

19

Dois resistores, um de resistência 6,0 Ω e outro de resistência R, estão ligados a uma bateria de 12 V e resistência interna desprezível, como mostra a figura.



Sabendo que a potência total dissipada no circuito é 6,0 W, determine

a) a corrente i que percorre o circuito.

b) o valor da resistência R.

Resolução

a) *A potência elétrica total dissipada é a potência que o gerador fornece:*

$P_f = U \cdot i$

$6{,}0 = 12 \cdot i$

$\boxed{i = 0{,}50A}$

b) *Os resistores de resistência R e 6,0Ω estão em série e a associação está sob tensão U = 12V. Portanto:*

$U = (R + 6{,}0) \cdot i$

$12 = (R + 6{,}0) \cdot 0{,}50$

$\boxed{R = 18\Omega}$

Respostas: *a) 0,50A*
b) 18Ω

20

O sulfato de bário ($BaSO_4$) é um sal muito pouco solúvel. Suspensões desse sal são comumente utilizadas como contraste em exames radiológicos do sistema digestivo. É importantíssimo que não ocorra dissolução de íons bário, Ba^{2+}, no estômago. Estes íons são extremamente tóxicos, podendo levar à morte. No primeiro semestre de 2003, vários pacientes brasileiros morreram após a ingestão de um produto que estava contaminado por carbonato de bário ($BaCO_3$), em uma proporção de 13,1% em massa. O carbonato de bário reage com o ácido clorídrico (HCl) presente no estômago humano, produzindo cloreto de bário ($BaCl_2$) que, sendo solúvel, libera íons Ba^{2+} que podem passar para a corrente sangüínea, intoxicando o paciente.

a) Escreva a equação química que representa a reação que ocorre no estômago quando o carbonato de bário é ingerido.

b) Sabendo que o preparado é uma suspensão 100% em massa do sólido por volume da mesma e que cada dose é de 150 mL, calcule a massa de íons Ba^{2+} resultante da dissolução do carbonato de bário na ingestão de uma dose do preparado contaminado.

Massas molares, em $g \cdot mol^{-1}$: bário = 137,3; carbono = 12,0; oxigênio = 16,0.

Resolução

a) $BaCO_3(s) + 2HCl(aq) \rightarrow BaCl_2(aq) + H_2O(l) + CO_2(g)$

b) Entende-se por uma suspensão 100% em massa do sólido por volume da mesma como aquela que apresenta 100g de sólidos em 100ml de suspensão.

100g de sólidos ——— 100ml de suspensão
x ——— 150ml de suspensão
x = 150g de sólidos

100g de sólidos ——— 13,1g de $BaCO_3$ *(13,1%)*
150g de sólidos ——— y
$y = 19,65g$ *de* $BaCO_3$

Massa molar do $BaCO_3$ =

$= (137,3 + 12,0 + 3 \times 16,0)$ *g/mol = 197,3 g/mol*

$$1 \text{ mol de } BaCO_3 \xrightarrow{\text{contém}} 1 \text{ mol de } Ba^{2+}$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$
197,3g ——— 137,3 g
19,65g ——— z

$z = 13,67g$ *de* Ba^{2+}

21

Uma das substâncias responsáveis pelo odor desagradável em banheiros muito utilizados é o gás amônia (NH_3), resultante da decomposição da uréia presente na urina. Este gás é dissolvido na água e reage com ela, produzindo íons amônio (NH_4^+) em solução.

a) Escreva a equação química para a reação da amônia com a água e informe qual o efeito dessa reação sobre o pH da solução resultante.

b) Estando disponíveis soluções aquosas de ácido clorídrico (HCl), hidróxido de sódio (NaOH) e cloreto de sódio ($NaCl$), qual delas deveria ser utilizada para a diminuição imediata do odor da amônia? Utilize o Princípio de Le Chatelier para justificar sua resposta.

Resolução

a) $\ddot{N}H_3(g) + HOH(l) \rightleftarrows NH_4^+(aq) + OH^-(aq)$

O meio resultante tornar-se-á básico devido à formação de íons OH^-. Como conseqüência, o pH aumenta.

b) *Por apresentar caráter básico, devemos utilizar uma substância ácida para neutralizá-la. Nesse caso, o HCl.*

O HCl em solução apresenta íons H^+.

$HCl(aq) \rightarrow H^+(aq) + Cl^-(aq)$

que neutralizam os íons OH^-;

$H^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_2O(l)$

Ocorrerá diminuição da concentração dos íons OH^-, deslocando o equilíbrio da ionização da amônia "para a direita".

Em função disso, $NH_3(g)$ se dissolve em água, diminuindo o odor desagradável do gás amônia.

A adição de solução de NaOH desloca o equilíbrio para a esquerda intensificando o odor desagradável do gás amônia.

A adição de solução de NaCl não desloca o equilíbrio.

22

Os fornos de microondas são aparelhos que emitem radiações eletromagnéticas (as microondas) que aquecem a água e, conseqüentemente, os alimentos que a contêm. Isso ocorre porque as moléculas de água são polares, condição necessária para que a interação com esse tipo de radiação seja significativa. As eletronegatividades para alguns elementos são apresentadas na tabela a seguir.

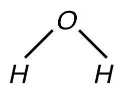
elemento químico	eletronegatividade (χ)
hidrogênio (H)	2,2
carbono (C)	2,6
oxigênio (O)	3,4

a) Com base nessas informações, forneça a fórmula estrutural e indique o momento dipolar resultante para a molécula de água.

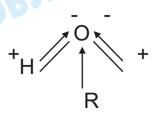
b) Sabendo que praticamente não se observam variações na temperatura do dióxido de carbono quando este é exposto à ação das radiações denominadas microondas, forneça a estrutura da molécula de CO_2. Justifique sua resposta, considerando as diferenças nas eletronegatividades do carbono e do oxigênio.

Resolução

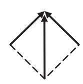
a) *A ligação hidrogênio e oxigênio é polar, pois esses elementos têm diferentes eletronegatividades. Como a molécula da água é polar, a sua geometria molecular será angular.*



fórmula estrutural



$\mu_R \neq 0$
molécula polar



b) *Como não se observa variações de temperatura quando o dióxido de carbono é exposto à ação das radiações eletromagnéticas (microondas), podemos concluir que a sua molécula é apolar. Como a ligação carbono e oxigênio é polar (diferentes eletronegatividades), a geometria molecular do dióxido de carbono é linear.*

$O = C = O$ *fórmula estrutural*

$$\overset{\delta-}{O} \overset{\overset{\mu}{\leftarrow}}{=} \overset{\delta+\delta+}{C} \overset{\overset{\mu}{\rightarrow}}{=} \overset{\delta-}{O}$$

$\leftarrow + \rightarrow = 0 \quad \mu_R = 0 \therefore$ *molécula apolar*

23

Uma solução pode ser caracterizada como ácida pela observação de sua reação com o calcário ($CaCO_3$) ou com o zinco metálico (Zn^0). Em ambas as situações observa-se, nas condições normais de temperatura e pressão, o desprendimento de gases.

a) Forneça o nome do gás formado pela reação de soluções ácidas com o calcário e o nome do outro gás formado pela reação dessas soluções com o zinco metálico.

b) Das reações descritas, escreva a equação química que representa a reação de óxido-redução e identifique qual dos reagentes é o redutor.

Resolução

a) A equação química entre $CaCO_3$ e a solução ácida é:

$$CaCO_3(s) + 2H^+(aq) \rightarrow Ca^{2+}(aq) + \underbrace{CO_2(g)}_{\text{gás carbônico / dióxido de carbono}} + H_2O(l)$$

A equação química entre o metal zinco e a solução ácida é:

$$Zn(s) + 2H^+(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + \underbrace{H_2(g)}_{\text{gás hidrogênio}}$$

b) $Zn(s) + 2H^+(aq) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + H_2(g)$

0 oxidação +2

+1 redução 0

agente redutor: Zn(s)

$$\overset{2+\,4+\,2-}{CaCO_3}(s) + 2H^+(aq) \rightarrow Ca^{2+}(aq) + \overset{4+\,2-}{CO_2}(g) + \overset{1+\,2-}{H_2O}(l)$$

não é oxidorredução

24

O gás butano (C_4H_{10}) é o principal componente do gás de cozinha, o GLP (gás liquefeito de petróleo). A água fervente (H_2O, com temperatura igual a 100°C, no nível do mar) é utilizada para diversas finalidades: fazer café ou chá, cozinhar, entre outras. Considere que para o aumento de 1 °C na temperatura de 1 g de água são necessários 4 J, que esse valor pode ser tomado como constante para a água líquida sob 1 atmosfera de pressão e que a densidade da água a 25°C é aproximadamente igual a 1,0 $g \cdot mL^{-1}$.

a) Calcule a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de 1 L de água, no nível do mar, de 25°C até o ponto de ebulição. Apresente seus cálculos.

b) Dadas as entalpias-padrão de formação (ΔH_f^0) para o butano gasoso (– 126 $kJ \cdot mol^{-1}$), para o dióxido de carbono gasoso (– 394 $kJ \cdot mol^{-1}$), para a água líquida (– 242 $kJ \cdot mol^{-1}$) e para o oxigênio gasoso (0 $kJ \cdot mol^{-1}$), escreva a equação química para a combustão do butano e calcule a entalpia-padrão de combustão (ΔH_c^0) para esse composto.

Resolução

a) Cálculo da massa de 1 litro de água:

$1g \text{ de } H_2O$ —— $1mL \text{ de } H_2O$

x —— $1000mL \text{ de } H_2O$

$x = 1000g \text{ de } H_2O$

Cálculo da variação de temperatura ($\Delta\theta$)

$\Delta\theta = 100°C - 25°C = 75°C$

Cálculo da quantidade de calor:

$1g \text{ de } H_2O$ ——— $4J$

$1000g \text{ de } H_2O$ ——— y

$y = 4000J$

$4000J$ ——— $1°C$

z ——— $75\ °C$

$\boxed{z = 300000J \text{ ou } 300kJ}$

b) Equação de combustão do butano (C_4H_{10}) e cálculo da entalpia-padrão (ΔH_C°)

$$\underbrace{C_4H_{10}(g)}_{-126kJ} + \underbrace{13/2\ O_2(g)}_{0} \rightarrow \underbrace{4CO_2(g)}_{4(-394kJ)} + \underbrace{5H_2O(l)}_{5(-242kJ)}$$

$H_R = -126kJ + 0$ $\qquad$ $H_P = -1576kJ - 1210kJ$

$H_R = -126kJ$ $\qquad$ $H_P = -2786kJ$

$\Delta H_C^\circ = H_P - H_R$

$\Delta H_C^\circ = -2786 - (-126)$

$$\boxed{\Delta H^\circ_C = -2660 kJ \cdot mol^{-1}}$$

25

Os esquemas a seguir representam as condições em que ocorrem algumas reações com o etanol e que conduzem à formação de produtos distintos.

I. $CH_3CH_2OH \xrightarrow{K_2Cr_2O_7} CH_3CHO$

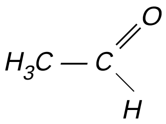
II. $CH_3CH_2OH \xrightarrow{KMnO_4} CH_3COOH$

III. $2CH_3CH_2OH \xrightarrow[140°C]{H_2SO_4} [CH_3CH_2]_2O + Y$

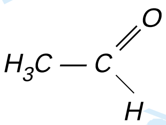
a) Os esquemas I e II representam reações de oxidação do etanol. Para cada uma delas, escreva o nome do produto e o nome da respectiva função orgânica.

b) Na reação III, são formados dois produtos, um orgânico e outro inorgânico, identificado por *Y*. Forneça os nomes desses dois compostos.

Resolução

a) Esquema I: CH_3CHO ou 

Nome: etanal ou acetaldeído (aldeído acético)
Função: aldeído

Esquema II: CH_3COOH ou 

Nome: ácido etanóico ou ácido acético
Função: ácido carboxílico

b)

$$H_3C — CH_2 — \boxed{OH + HO} — CH_2 — CH_3 \xrightarrow[140°C]{H_2SO_4} \underbrace{H_3C — CH_2 — O — CH_2 — CH_3}_{\text{etoxietano ou éter dietílico}} + \underbrace{H_2O}_{\substack{y \\ \text{água}}}$$