OBJETIVO

ITA
Matemática
Livro do Professor

10

MÓDULO 37

Inequação

1. **(ITA)** – Considere as seguintes afirmações sobre números reais positivos:

I. Se $x > 4$ e $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.
II. Se $x > 4$ ou $y < 2$, então $x^2 - 2y > 12$.
III. Se $x^2 < 1$ e $y^2 > 2$, então $x^2 - 2y < 0$.

Então, destas é (são) verdadeira(s)

a) apenas I. b) apenas I e II.
c) apenas II e III. d) apenas I e III.
e) todas.

RESOLUÇÃO:

I. Verdadeira, pois

$x > 4$ e $y < 2 \Rightarrow x^2 > 16$ e $-2y > -4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2y > 16 - 4 \Rightarrow x^2 - 2y > 12$.

II. Falsa, pois para x = 3 e y = 1, temos que

$x^2 - 2y = 3^2 - 2 \cdot 1 = 7 < 12$.

III. Verdadeira, pois se x e y são positivos, então:

$$\left.\begin{matrix} x^2 < 1 \\ y^2 > 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \\ y > \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 1 \\ 2y > 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2y < 0$$

2. **(ITA)** – Uma vez que, para todo $x \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, vale a desigualdade $x^n > n(x - 1)$, temos como consequência que, para $0 < x < 1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

a) $x^{n-1} < [n(1 + x)]^{-1}$ b) $x^{n-1} < [(n + 1)(1 + x)]^{-1}$
c) $x^{n-1} < [n^2(1 - x)]^{-1}$ d) $x^{n-1} < [(n + 1)(1 - x)]^{-1}$
e) $x^{n-1} < [n(1 - x)]^{-1}$

RESOLUÇÃO:

Se para todo $x \geq 1$ e $n \in N$ tem-se $x^n > n(x - 1)$, então:

$$0 < x < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)^n > n\left(\frac{1}{x} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^n} > n\left(\frac{1 - x}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{x^{n-1}} > n(1 - x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{n-1} < [n(1 - x)]^{-1}$$

Resposta: E

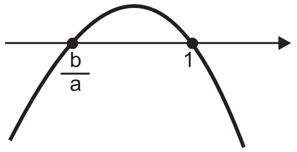
3. Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\dfrac{a \cdot x^2 - b}{ax - b} < x$, sabendo-se que **a** e **b** são números reais de sinais contrários.

RESOLUÇÃO:

$$\frac{a \cdot x^2 - b}{ax - b} < x \Leftrightarrow \frac{ax^2 - b}{ax - b} - x < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax^2 - b - ax^2 + bx}{ax - b} < 0 \Leftrightarrow \frac{bx - b}{ax - b} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (bx - b)(ax - b) < 0$$



Como ab < 0, o gráfico de (bx – b)(ax – b) é o exposto acima.

Assim, $x < \dfrac{b}{a}$ ou $x > 1$.

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{b}{a} \text{ ou } x > 1\right\}$$

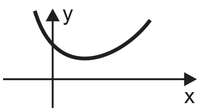
4. Encontrar todos os valores reais de m, de modo que $(m^2 - 1) \,.\, x^2 + 2 \,.\, (m - 1)x + 1 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

RESOLUÇÃO:

1) **Para $m = -1$, tem-se**
$(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 1 = -4x + 1$
que não é maior que zero para $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) **Para $m = 1$, tem-se**
$(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 1 = 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

3) **Para $m \neq \pm 1$, tem-se que**
$(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $m^2 - 1 > 0$ e $\Delta = [2(m - 1)]^2 - 4 \,.\, (m^2 - 1) \,.\, 1 = -8m + 8 < 0$, pois o gráfico de $(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 1$ deverá ser do tipo



Assim,

$$\begin{cases} m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow m < -1 \text{ ou } m > 1 \\ -8m + 8 < 0 \Leftrightarrow m > 1 \end{cases} \Rightarrow m > 1$$

4) **Das conclusões dos itens (2) e (3), tem-se $m \in \mathbb{R} \mid m \geq 1$.**

MÓDULO 38

Inequação

1. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2, \text{ para todo x real?}$$

RESOLUÇÃO:

Como $x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, tem-se

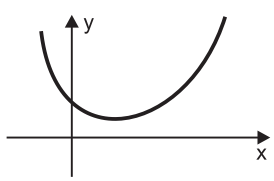
$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\,(x^2 - x + 1) < x^2 + ax - 2 < 2(x^2 - x + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3(x^2 - x + 1) < x^2 + ax - 2 \\ x^2 + ax - 2 < 2(x^2 - x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + (a - 3)x + 1 > 0 \\ x^2 - (a + 2)x + 4 > 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Assim, as funções $f(x) = 4x^2 + (a - 3)x + 1$ e $g(x) = x^2 - (a + 2)x + 4$ deverão ter gráficos do tipo



e, portanto, deve-se ter:

$$\begin{cases} (a - 3)^2 - 4 \,.\, 4 \,.\, 1 < 0 \text{ e} \\ [-(a + 2)]^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 6a - 7 < 0 \\ a^2 + 4a - 12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 7 \\ -6 < a < 2 \end{cases} \Rightarrow -1 < a < 2$$

2. **(OBM)** – Os valores reais de x que satisfazem a inequação $\sqrt{x} + \sqrt{\dfrac{1}{x}} \le 2$ são:

a) $-1 \le x \le 1$ b) $x = 1$ c) $x \le 1$
d) $x \ge 1$ e) $x \le 2$

RESOLUÇÃO:
Fazendo $\sqrt{x} = y$ tem-se

$$y + \frac{1}{y} \le 2 \Leftrightarrow y - 2 + \frac{1}{y} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2 - 2y + 1}{y} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(y-1)^2}{y} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \text{ ou } \sqrt{x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 1, \text{ pois } \sqrt{x} \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Resposta: B

3. Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação
$$\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}} \ge \frac{7}{12}$$

RESOLUÇÃO:
Condição de existência:

$$\frac{2x-1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ou } x > \frac{1}{2} \quad \text{(I)}$$

Fazendo $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}} = y$, tem-se

$$y > 0 \text{ e } \left(y - \frac{1}{y} \ge \frac{7}{12} \Leftrightarrow 12y^2 - 7y - 12 \ge 0 \Leftrightarrow \right.$$

$$\left. \Leftrightarrow y \le -\frac{3}{4} \text{ ou } y \ge \frac{4}{3} \right)$$

Assim, $y \ge \dfrac{4}{3} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}} \ge \dfrac{4}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2x-1}{x+2} - \frac{16}{9} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{2x-41}{9(x+2)} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x < -2 \text{ ou } x \ge \frac{41}{2} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), tem-se

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \ge \frac{41}{2} \right\}$$

MÓDULO 39

Inequação

1. Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 4} + \left|\frac{x-1}{x-2}\right| - 12 < 0$$

RESOLUÇÃO:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 4} + \left|\frac{x-1}{x-2}\right| - 12 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{x-1}{x-2}\right|^2 + \left|\frac{x-1}{x-2}\right| - 12 < 0$$

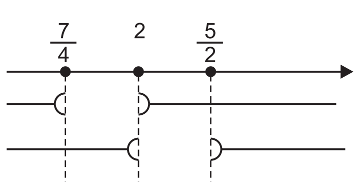
Fazendo $\left|\frac{x-1}{x-2}\right| = y$**, tem-se** $y \geq 0$ **e** $y^2 + y - 12 < 0 \Leftrightarrow 0 \leq y < 3$

Assim, $0 \leq \left|\frac{x-1}{x-2}\right| < 3 \Leftrightarrow -3 < \frac{x-1}{x-2} < 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} > -3 \\ \dfrac{x-1}{x-2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} + 3 > 0 \\ \quad \text{e} \\ \dfrac{x-1}{x-2} - 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{4x-7}{x-2} > 0 \\ \quad \text{e} \\ \dfrac{-2x+5}{x-2} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{7}{4} \text{ ou } x > 2 \\ \quad \text{e} \\ x < 2 \text{ ou } x > \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

portanto, $x < \frac{7}{4}$ **ou** $x > \frac{5}{2}$**, pois**



Resposta: $V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{7}{4} \text{ ou } x > \frac{5}{2} \right\}$

2. **(ITA)** – Considere as funções f e g definidas por $f(x) = x - \frac{2}{x}$, para $x \neq 0$, e $g(x) = \frac{x}{x+1}$, para $x \neq -1$. O conjunto de todas as soluções da inequação $(gof)(x) < g(x)$ é:

a) $[\,1, +\infty\,[$
b) $]-\infty, -2\,[$
c) $[-2, -1\,[$
d) $]-1, 1\,[$
e) $]-2, -1\,[\; \cup \;]\,1, +\infty\,[$

RESOLUÇÃO:

Sendo $f(x) = x - \frac{2}{x}$**, para** $x \neq 0$**, e** $g(x) = \frac{x}{x+1}$**, para** $x \neq -1$**, temos:**

$$(gof)(x) < g(x) \Leftrightarrow \frac{x - \dfrac{2}{x}}{x - \dfrac{2}{x} + 1} < \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow$$

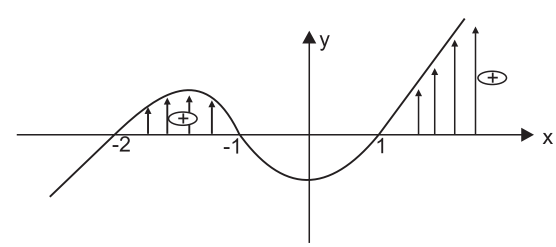
$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2}{x^2 + x - 2} < \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2}{x^2 + x - 2} - \frac{x}{x+1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-2)\,.\,(x+1) - x\,.\,(x^2+x-2)}{(x^2+x-2)\,.\,(x+1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{(x^2+x-2)\,.\,(x+1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{(x+2)\,.\,(x-1)\,.\,(x+1)} < 0 \Leftrightarrow (x+2)\,.\,(x-1)\,.\,(x+1) > 0$$

A partir do gráfico da função $h(x) = (x+2)\,.\,(x-1)\,.\,(x+1)$



podemos concluir que $h(x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < -1$ **ou** $x > 1$
Portanto, o conjunto-solução da inequação (gof) (x) < g (x) é
$S = \,]-2; -1\,[\; \cup \;]\,1; +\infty\,[$.
Resposta: E

3. **(ITA)** – Sendo I um intervalo de números reais com extremidades em a e b, com a < b, o número real b – a é chamado de comprimento de I.
Considere a inequação $6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$.
A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a

a) $\frac{3}{4}$. b) $\frac{3}{2}$. c) $\frac{7}{3}$. d) $\frac{11}{6}$. e) $\frac{7}{6}$.

RESOLUÇÃO:

$f(x) = 6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x \Leftrightarrow$

$f(x) = x(6x^3 - 5x^2 - 7x + 4) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = x(6x^3 + 6x^2 - 11x^2 - 11x + 4x + 4) \Leftrightarrow$

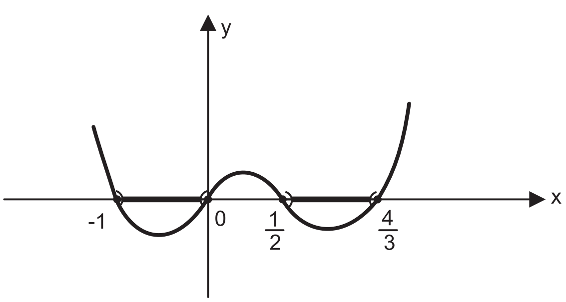
$\Leftrightarrow f(x) = x \cdot [6x^2(x + 1) - 11x(x + 1) + 4(x + 1)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = x \cdot (x + 1)(6x^2 - 11x + 4)$

Observando que $6x^2 - 11x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{11 \pm 5}{12} \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$ **ou** $x = \dfrac{1}{2}$ **temos:**

$f(x) = 6 \cdot x \cdot (x + 1) \cdot \left(x - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \dfrac{4}{3}\right)$ **cujo gráfico é do tipo**



Assim sendo:

$6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ **ou** $\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{4}{3}$

A soma dos comprimentos dos dois intervalos nos quais a inequação é verdadeira é

$$(0 - (-1)) + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$$

Resposta: D

MÓDULO 40

Inequação

1. Resolver a inequação $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$

RESOLUÇÃO:

1) Uma inequação só tem significado em $\mathbb{R}$, portanto

$\sqrt{-x^2 + 6x - 5} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$

2) Como $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} \in \mathbb{R}_+$, **podemos ter:**

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 8 - 2x < 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2 \\ 1 \leq x \leq 5 \\ 8 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ x > 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} -x^2 + 6x - 5 > 64 - 32x + 4x^2 \\ 1 \leq x \leq 5 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4 < x \leq 5 \text{ ou } \begin{cases} 5x^2 - 38x + 69 < 0 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 < x \leq 5 \text{ ou } \begin{cases} 3 < x < \dfrac{23}{5} \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \leq 4 \text{ ou } 4 < x \leq 5$$

Resposta: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 5\}$

2. **(OPM)** – Determine os valores reais de r para os quais o trinômio abaixo seja positivo para todos os valores reais de x.

$y = (1 - r^2)x^2 + 2(r + 1)x + 1$

RESOLUÇÃO:

y > 0 para qualquer valor real de x se, e somente se, r = – 1 ou

$$\begin{cases} 1 - r^2 > 0 \\ [2(r+1)]^2 - 4 \cdot (1 - r^2) \cdot 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 - 1 < 0 \\ 4r^2 + 8r + 4 - 4 + 4r^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < r < 1 \\ 8r^2 + 8r < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < r < 1 \\ -1 < r < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < r < 0$$

Resposta: $r \in \mathbb{R} \mid -1 \le r < 0$

3. **(IME)** –

a) Sejam x, y e z números reais positivos. Prove que:

$\dfrac{x + y + z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz}$. Em que condições a igualdade se verifica?

b) Considere um paralelogramo (entenda paralelepípedo reto retângulo) de lados a, b e c e área total S_0. Determine o volume máximo desse paralelogramo em função de S_0. Qual a relação entre a, b e c para que esse volume seja máximo? Demonstre seu resultado.

RESOLUÇÃO:

a) **Sendo x, y e z reais positivos temos**

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \ge -\sqrt[3]{z} \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 \ge (-\sqrt[3]{z})^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^3 + (\sqrt[3]{y})^3 + 3 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) \ge -z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + y + z \ge -3 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) \qquad \text{(I)}$$

Por outro lado, se $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \ge -\sqrt[3]{z}$, **então**

$$-3 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) \ge -3 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot (-\sqrt[3]{z}) = 3 \cdot \sqrt[3]{xyz} \text{) (II)}$$

Das inequações (I) e (II) tem-se:

$$x + y + z \ge -3 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) \ge 3\sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x + y + z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz}$$

b) **Sendo a, b e c as dimensões do paralelepípedo, temos:**

$S = 2ab + 2ac + 2bc \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{S_0}{6} = \frac{ab + ac + bc}{3} \ge \sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot bc} = \sqrt[3]{(abc)^2} = \sqrt[3]{V^2}$$

onde V = abc é o volume. Desta forma,

$\sqrt[3]{V^2} \le \dfrac{S_0}{6} \Leftrightarrow V \le \sqrt{\left(\dfrac{S_0}{6}\right)^3}$ **e o volume máximo é**

$$V_{máx} = \sqrt{\left(\frac{S_0}{6}\right)^3}.$$

Quando a, b e c são iguais temos:

$V = abc = a^3 = \sqrt{(a^2)^3} = \sqrt{\left(\dfrac{S_0}{6}\right)^3} = V_{max}$, **pois com a, b e c iguais entre si temos** $S_0 = 2ab + 2ac + 2bc =$

$$= 2a \cdot a + 2a \cdot a + 2a \cdot a = 6a^2 \text{ e } a^2 = \frac{S_0}{6}.$$

Resposta: Demonstração

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 37

1. Prove que todo número de três algarismos não nulos, dividido pela soma de seus algarismos, resulta em um número menor que 100.

2. Os valores reais de k e p que tornam a inequação $\dfrac{-x^2 + (2-k)x + (p+4)}{x^2 - 5x + (2p+1)} > 0$ verdadeira qualquer que seja x real, são tais que k + p é igual a:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

■ MÓDULO 38

1. Resolver, em $\mathbb{R}$, o sistema $1 < \dfrac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} \leq 2$

2. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação

$$\sqrt{\frac{2x-5}{2x+5}} + \sqrt{\frac{2x+5}{2x-5}} < \frac{13}{6}$$

■ MÓDULO 39

1. Resolver, em $\mathbb{R}$, a inequação

$$\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 2x + 1} - 7 \cdot \left(\frac{x+3}{x-1}\right) + 10 \geq 0$$

2. A soma e o produto dos valores inteiros de x que satisfazem a inequação $x^3 - 14x^2 + 49x - 36 \geq 0$ e são menores que 12, são, respectivamente:

a) 30 e 32070 b) 35 e 73620 c) 38 e 12630
d) 40 e 23760 e) 42 e 37260

■ MÓDULO 40

1. Dado o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}; \sqrt{3x^2 + 2x} < x^2\}$, expresse-o como união de intervalos da reta real.

2. Demonstre que para qualquer valor de n natural e maior que 1 tem-se

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

3. **(OPM)** – Prove que, para quaisquer reais x e y maiores ou iguais a $\frac{1}{2}$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x + y + 1}$

resolução dos exercícios-tarefa

■ MÓDULO 37

1) Sejam *a*, *b* e *c*, distintos entre si, algarismos do número "abc" de três algarismos distintos. Temos:

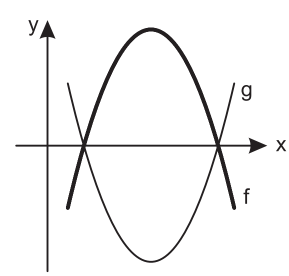
$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{100a = 100a} \\ \mathbf{10b < 100b} \\ \mathbf{1c < 100c} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{100a + 10b + 1c < 100a + 100b + 100a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{“abc”} < 100 \cdot (a + b + c) \Leftrightarrow \frac{\text{“abc”}}{a+b+c} < 100, \text{ pois}$$

"abc" = 100a + 10b + 1c e a + b + c > 0
Resposta: Demonstração

2) Para que a inequação $\dfrac{-x^2 + (2-k)x + (p+4)}{x^2 - 5x + (2p+1)} > 0$ seja verdadeira qualquer que seja x real, e tal que $x^2 - 5x + (2p+1) \neq 0$, as funções $f(x) = -x^2 + (2-k) + (p+4)$ e $g(x) = x^2 - 5x + (2p+1)$ deverão ter as mesmas raízes e gráficos como os expostos abaixo.
Desta forma, a soma das raízes de *f* deve ser igual a soma das raízes de *g* e o produto das raízes de *f* deve ser igual ao produto das raízes de *g*.



Assim, – (2 – k) = 5 e p + 4 = 2p + 1 ⇔
⇔ k = 7 e p = 3 ⇒ k + p = 10.
Resposta: C

■ MÓDULO 38

1) $1 < \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} \le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} - 2 \le 0 \\ \dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-7x+6}{x^2+1} \le 0 \\ \dfrac{2x^2-7x+7}{x^2+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+6 \le 0 \text{ (I)} \\ 2x^2-7x+7 > 0 \text{ (II)} \end{cases}$, pois $x^2+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$

De (I) tem-se $1 \le x \le 6$ e de (II) tem-se $\forall x \in \mathbb{R}$.

De (I) e (II) tem-se $1 \le x \le 6$.

Resposta: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 6\}$

2) Fazendo $\sqrt{\dfrac{2x-5}{2x+5}} = y \ge 0$, temos:

$\sqrt{\dfrac{2x-5}{2x+5}} + \sqrt{\dfrac{2x+5}{2x-5}} < \dfrac{13}{6} \Leftrightarrow y + \dfrac{1}{y} < \dfrac{13}{6} \Leftrightarrow 6y^2 - 13y + 6 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3} < y < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} < \sqrt{\dfrac{2x-5}{2x+5}} < \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{9} < \dfrac{2x-5}{2x+5} < \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{4}{9} < \dfrac{2x-5}{2x+5} \Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{2x+5} - \dfrac{4}{9} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{10x-65}{9(2x+5)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-13}{2x+5} > 0 \\ \dfrac{2x-5}{2x+5} < \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{2x+5} - \dfrac{9}{4} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-10x-65}{4(2x+5)} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+13}{2x+5} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x-13)(2x+5) > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{5}{2} \text{ ou } x > \dfrac{13}{2} \\ (2x+13)(2x+5) > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{13}{2} \text{ ou } x > -\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < -\dfrac{13}{2} \text{ ou } x > \dfrac{13}{2}$$

Resposta: $V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\dfrac{13}{2} \text{ ou } x > \dfrac{13}{2} \right\}$

■ MÓDULO 39

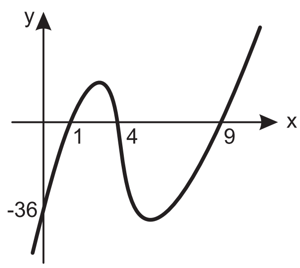
1) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-2x+1} - 7 \cdot \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right) + 10 \ge 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^2 - 7 \cdot \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right) + 10 \ge 0$. Fazendo

$\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right) = y$ temos: $\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^2 - 7 \cdot \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right) + 10 \ge 0 \Leftrightarrow y^2 - 7y + 10 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y \le 2 \text{ ou } y \ge 5 \Rightarrow \dfrac{x+3}{x-1} \le 2 \text{ ou } \dfrac{x+3}{x-1} \ge 5 \Leftrightarrow \dfrac{-x+5}{x-1} \le 0 \text{ ou } \dfrac{-4x+8}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow (x < 1 \text{ ou } x \ge 5) \text{ ou } 1 < x \le 2$

Resposta: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 1 < x \le 2 \text{ ou } x \ge 5\}$

2) Observemos que 1 é raiz da função
$f(x) = x^3 - 14x^2 + 49x - 36$, pois
$f(1) = 1^3 - 14.1^2 + 49.1 - 36 = 0$.
Fatorando a função temos:
$f(x) = x^3 - 14x^2 + 49x - 36 = x^3 - x^2 - 13x^2 + 13x +$
$+ 36x - 36 = x^2 . (x - 1) - 13x .(x - 1) + 36. (x - 1) =$
$= (x - 1) . (x^2 - 13x + 36) = (x - 1)(x - 4)(x - 9)$
Assim, as raízes da função são 1, 4 e 9 e o gráfico da função é do tipo



Do gráfico se conclui $x^3 - 14x^2 + 49x - 36 \geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$ ou $x \geq 9$. Neste intervalo são inteiros e menores que 12 os números 1, 2, 3, 4, 9, 10 e 11.
A soma e o produto desses números são, respectivamente, 40 e 23760.
Resposta: D

■ MÓDULO 40

1) I) $3x^2 + 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\dfrac{2}{3}$ ou $x \geqslant 0$

II) $\sqrt{3x^2 + 2x} < x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2x < x^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4 - 3x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x\,(x^3 - 3x - 2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (x^3 - x - 2x - 2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\,[x\,(x + 1)\,(x - 1) - 2\,(x + 1)] \Rightarrow$

$\Rightarrow x\,(x + 1)\,(x^2 - x - 2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\,(x + 1)\,(x + 1)\,(x - 2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x\,(x + 1)^2\,(x - 2) > 0 \Rightarrow x\,(x - 2) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x < 0$ ou $x > 2)$ e $x \neq -1$

De I e II, concluímos que $\left(x \leq -\dfrac{2}{3} \text{ e } x \neq -1\right)$ ou $x > 2$

Resposta: $A = \left]-\infty; -1\right[\cup \left]-1; -\dfrac{2}{3}\right] \cup \left]2; +\infty\right[$

2) Sendo cada um dos número consecutivos (n + 1), (n + 2), (n + 3), ..., (2n – 1) sempre menores que 2n, temos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{n+1} > \dfrac{1}{2n} \\ \dfrac{1}{n+2} > \dfrac{1}{2n} \\ \dfrac{1}{n+3} > \dfrac{1}{2n} \\ \quad\vdots \\ \dfrac{1}{2n-1} > \dfrac{1}{2n} \\ \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} > n.\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$$

Resposta: Demonstração

3) Sendo x e y maiores ou iguais a $\dfrac{1}{2}$, temos

$$\left.\begin{array}{l} x \geq \dfrac{1}{2} \\ y \geq \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow x\,.\,y \geq \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4xy \geq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \geq x + 1 + y \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{x})^2 \geq x + y + 1,$

pois os números envolvidos são todos positivos.

Desta forma, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x + y + 1}$

Resposta: Demonstração