1- Existem 10 jogadores de futebol de salão, entre eles João, que por sinal é o único que joga como goleiro. Nessas condições, quantos times de 5 pessoas podem ser escalados?

Disponíveis:

10 jogadores → 1 goleiro; 9 na linha

Formação do time:

5 jogadores → 1 goleiro; 4 na linha

Como o goleiro é sempre o mesmo:

$$n^\circ \text{ times} = C_9^4 = \frac{9!}{4!(9-4)!} = 126$$

$$\boxed{C_9^4 = 126}$$

Um grupo consta de 20 pessoas, das quais 5 matemáticos. De quantas formas podemos formar comissões de 10 pessoas de modo que:

20 pessoas
→ 5 são matemáticos
→ 15 não são matemáticos

2- Nenhum membro seja matemático?

$$C_{15}^{10} = \frac{15!}{10!(15-10)!} = 3003$$

Combinam-se apenas os que não são matemáticos

$$\boxed{C_{15}^{10}}$$

3- Todos os matemáticos participem da comissão?

$$C_5^5 \cdot C_{15}^5 = \frac{5!}{5!(5-5)!} \cdot \frac{15!}{5!\cdot(15-5)!} = 3003$$

↳ 1

Tem-se apenas 5 matemáticos dos 10 desejados

$$\boxed{C_{15}^5}$$

4- Haja exatamente um matemático na comissão.

$$C_5^1 \cdot C_{15}^9 = \frac{5!}{1!(5-1)!} \cdot \frac{15!}{9!(15-9)!} = 25025$$

↳ 5

Tem-se um matemático e nove que não são matemáticos

$$\boxed{5 \cdot C_{15}^9}$$

5- Pelo menos um membro da comissão seja matemático?

$$\underbrace{C_{20}^{10}}_{\text{Combinações totais}} - \underbrace{C_{15}^{10}}_{\text{combinações quando não há nenhum matemático na comissão}} = \frac{20!}{10!(20-10)!} - \frac{15!}{10!(15-10)!} = 181.753$$

$$\boxed{C_{20}^{10} - C_{15}^{10}}$$

6- De um grupo de 10 pessoas deseja-se formar uma comissão com 5 membros. De quantas formas isso pode ser feito, se duas pessoas (A e B) ou fazem parte da comissão, ou não?

Se A e B participarem da comissão, restarão 3 membros a serem escolhidos entre as outras 8 pessoas ⇨ C_8^3

Já se A e B não participarem da comissão, restarão todos os 5 membros a serem escolhidos entre as outras 8 pessoas ⇨ C_8^5

$$C_8^3 + C_8^5 = 56 + 56 = 112$$

↳ ou

$$\boxed{112}$$

7- Uma empresa tem 3 diretores e 5 gerentes. Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas, contendo no mínimo um diretor?

→ 3 + 5 = 8 pessoas no total

↳ Neste caso é mais interessante calcular os casos contrários e subtrair do total !

No caso de não haverem restrições: C_8^5

Casos em que das 5 pessoas, nenhuma é um diretor: C_5^5

$$C_8^5 - C_5^5 = 56 - 1 = 55$$

$$\boxed{55}$$

8- Numa classe de 10 estudantes, um grupo de 4 será selecionado para uma excursão. De quantas maneiras o grupo poderá ser formado se dois dos dez são marido e mulher e só irão juntos?

↳ ou os dois vão, ou os dois não vão:

Mais dois estudantes serão selecionados dos outros 8: C_8^2

Quatro estudantes serão selecionados dos outros 8: C_8^4

$$C_8^2 + C_8^4 = 28 + 70 = 98$$

↳ ou

$$\boxed{98}$$

Temos 5 homens e 6 mulheres. De quantas formas:

↳ total de 11 pessoas

9- Podemos formar uma comissão de 3 pessoas?

Não há nenhuma restrição: $C_{11}^3 = \frac{11!}{3!\cdot(11-3)!} = 165$

$$\boxed{165}$$

10- Podemos formar uma comissão de 3 pessoas de modo que haja 2 homens e uma mulher, na mesma?

↳ De 6 mulheres no total: C_6^1

↳ De 5 homens no total: C_5^2

$$C_5^2 \cdot C_6^1 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{6!}{1!(6-1)!} = 10 \cdot 6 = 60$$

↳ e

$$\boxed{60}$$

11- Um lote contém 50 peças boas e 10 defeituosas. Extraindo-se 8 peças (sem reposição), não levando em conta a ordem das mesmas, de quantas formas podemos obter 4 peças boas e 4 defeituosas?

→ Combinação

Relacionando as peças boas do lote com as peças boas escolhidas e da mesma forma com as peças defeituosas:

$$C_{50}^4 \cdot C_{10}^4 = \frac{50!}{4!(50-4)!} \cdot \frac{10!}{4!(10-4)!} = 48.363.000$$

↳ e

$$\boxed{C_{50}^4 \cdot C_{10}^4}$$

12- Em uma urna existem 12 bolas, das quais 7 são pretas e 5 brancas. De quantos modos podemos tirar 6 bolas da urna, das quais 2 são brancas?

12 bolas → 7 pretas; 5 brancas

Tirando da urna: 4 pretas (C_7^4) 2 brancas (C_5^2) ⇨ 6 bolas

$$C_7^4 \cdot C_5^2 = \frac{7!}{4!(7-4)!} \cdot \frac{5!}{2!(5-2)!} = 350$$

$$\boxed{350}$$

13- Uma urna contém 10 bolas brancas e 6 pretas. De quantos modos é possível tirar 7 bolas, das quais pelo menos 4 sejam pretas?

↳ Ou 4 ou 5 ou 6 bolas sejam pretas

10 bolas brancas	6 bolas pretas	
3	4	⇨ $C_{10}^3 \cdot C_6^4$
2	5	⇨ $C_{10}^2 \cdot C_6^5$
1	6	⇨ $C_{10}^1 \cdot C_6^6$

$$C_{10}^3 \cdot C_6^4 \overset{\text{ou}}{+} C_{10}^2 \cdot C_6^5 + C_{10}^1 \cdot C_6^6 = 1800 + 270 + 10 = 2080$$

$$\boxed{2080}$$

14- Em um congresso há 30 professores de Matemática e 12 de Física. Quantas comissões poderíamos organizar compostas de 3 professores de Matemática e 2 de Física?

Relacionando professores de matemática com professores de matemática e da mesma forma com os professores de Física:

$$C_{30}^3 \overset{e}{\cdot} C_{12}^2 = \frac{30!}{3!(30-3)!} \cdot \frac{12!}{2!(12-2)!} = 267.960$$

$$\boxed{267.960}$$

15- Quer-se criar uma comissão constituída de um presidente e mais 3 membros. Sabendo que as escolhas devem ser feitas dentre um grupo de 8 pessoas, quantas comissões diferentes podem ser formadas com essa estrutura?

Primeiramente é escolhido o presidente dentre 8 pessoas e em seguida os outros 3 membros dentre as 7 pessoas restantes:

$$C_8^1 \overset{e}{\cdot} C_7^3 = \frac{8!}{1!(8-1)!} \cdot \frac{7!}{3!(7-3)!} = 280$$

$$\boxed{280}$$

16- Existem 5 pontos, entre os quais não existem 3 colineares. Quantas retas eles determinam?

→ Existem apenas 2 colineares!

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

$$\boxed{10}$$

17- Num plano existem 20 pontos, dos quais 3 nunca são colineares, exceto 6 que estão sobre uma mesma reta. Encontre o número de retas que esses pontos determinam.

↳ Existem apenas dois colineares: C_{20}^2 (caso total)

↳ Nesta reta formada por 6 pontos, também haveriam retas de dois em dois pontos como as do caso geral: C_6^2 (repetidas)

Então o número de retas: Caso total − Casos repetidos + reta de 6 pontos

$$C_{20}^2 - C_6^2 + 1$$

$$\boxed{C_{20}^2 - C_6^2 + 1}$$

18- São dadas 2 retas paralelas. Marcam-se 10 pontos distintos sobre uma e 8 pontos distintos sobre a outra. Quantos triângulos podemos formar ligando 3 quaisquer desses 18 pontos?

→ 3 pontos em uma mesma reta formariam uma reta

↳ Para formar um triângulo é necessário que 2 de seus pontos estejam em uma das retas e que o terceiro ponto esteja na outra.

Ou seja:

Nº de triângulos = Total de possibilidades − Possibilidades de 3 pontos em uma das retas − Possibilidades de 3 pontos na outra reta.

$$N^\circ \text{ de triângulos} = C_{18}^3 - C_{10}^3 - C_8^3$$

$$\boxed{C_{18}^3 - C_{10}^3 - C_8^3}$$