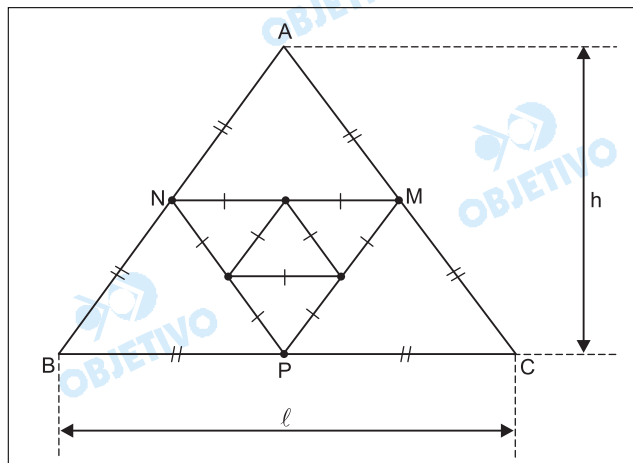


1

Considere um triângulo equilátero T_1 de área $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Unindo-se os pontos médios dos lados desse triângulo, obtém-se um segundo triângulo equilátero T_2 , que tem os pontos médios dos lados de T_1 como vértices. Unindo-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo obtém-se um terceiro triângulo equilátero T_3 , e assim por diante, indefinidamente. Determine:

- a) as medidas do lado e da altura do triângulo T_1 , em centímetros;
 b) as áreas dos triângulos T_2 e T_7 , em cm^2 .

Resolução



- a) O lado ℓ e a altura h do triângulo equilátero T_1 , representado na figura por ABC , em cm , são tais que:

$$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ e } h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell = 8 \text{ e } h = 4\sqrt{3}$$

- b) As áreas dos triângulos T_1, T_2, T_3, \dots formam uma progressão geométrica de primeiro termo

$$A_{T_1} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ e razão}$$

$$\frac{A_{T_2}}{A_{T_1}} = \left(\frac{MN}{BC} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

Desta forma,

$$A_{T_2} = A_{T_1} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^1 =$$

$$= 16\sqrt{3} \text{ cm}^2 \cdot \frac{1}{4} = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ e}$$

$$A_{T_7} = A_{T_1} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^6 =$$

$$= 16\sqrt{3} \text{ cm}^2 \cdot \frac{1}{4096} = \frac{\sqrt{3}}{256} \text{ cm}^2$$

Respostas: a) 8 cm e $4\sqrt{3} \text{ cm}$

$$b) 4\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ e } \frac{\sqrt{3}}{256} \text{ cm}^2$$

2

Considere os números complexos $z = 2 - i$ e $w = -3 - i$, sendo i a unidade imaginária.

- a) Determine $z \cdot w$ e $|w - z|$.
 b) Represente z e w no plano complexo (Argand-Gauss) e determine $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$, de modo que os números complexos z , w e $t = bi$ sejam vértices de um triângulo, no plano complexo, cuja área é 20.

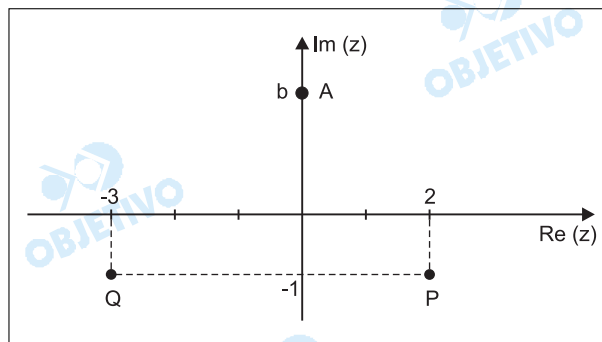
Resolução

Se $z = 2 - i$ e $w = -3 - i$ então

$$a) z \cdot w = (2 - i) \cdot (-3 - i) = -6 - 2i + 3i - 1 = -7 + i$$

$$|w - z| = |(-3 - i) - (2 - i)| = |-5| = 5$$

- b) Sejam P , Q e A os afixos dos números complexos $z = 2 - i$, $w = -3 - i$ e $t = bi$, respectivamente.



A área do triângulo APQ é 20 e portanto:

$$\frac{[2 - (-3)] \cdot [b - (-1)]}{2} = 20 \Leftrightarrow 5(b + 1) = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b + 1 = 8 \Leftrightarrow b = 7$$

Respostas: a) $z \cdot w = -7 + i$

$$|w - z| = 5$$

$$b) b = 7$$

3

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 1 - \frac{x}{2} \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$.

O determinante de A é um polinômio $p(x)$.

- a) Verifique se 2 é uma raiz de $p(x)$.
 b) Determine todas as raízes de $p(x)$.

Resolução

$$\text{Sendo } A = \begin{bmatrix} x & 1 & x \\ 0 & x & 1 - \frac{x}{2} \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}, \text{ então}$$

$$\det A = p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$a) 2 \text{ é raiz de } p(x), \text{ pois } p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 + 2 = 0$$

$$b) p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 \Leftrightarrow p(x) = x^2 \cdot (x - 2) - (x - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(x) = (x - 2) \cdot (x^2 - 1)$$

As raízes de $p(x)$ são tais que:

$$x - 2 = 0 \text{ ou } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = \pm 1$$

Respostas: a) 2 é raiz, pois $p(2) = 0$

b) As raízes de $p(x)$ são: -1 ; 1 e 2 .

Considere todos os números formados por 6 algarismos distintos obtidos permutando-se, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

- Determine quantos números é possível formar (no total) e quantos números se iniciam com o algarismo 1.
- Escrevendo-se esses números em ordem crescente, determine qual posição ocupa o número 512346 e que número ocupa a 242ª posição.

Resolução

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- A quantidade total de números de seis algarismos distintos que podem ser formados permutando-se os algarismos de A é $P_6 = 6! = 720$.

Os números do item anterior, que começam com o algarismo 1 são os que se obtém permutando-se os algarismos $\{2;3;4;5;6\}$ e, portanto, a quantidade total é $P_5 = 5! = 120$.

1					
---	--	--	--	--	--

- A quantidade de números de 5 algarismos do item anterior, cujo primeiro algarismo é 1 ou 2 ou 3 ou 4, é $4 \cdot 120 = 480$.
 - Esses 480 números são todos menores que o número 512346.
 - O menor número de 6 algarismos do item (a) que começa com o algarismo 5 é o próprio 512346.
 - Escrevendo os números do item (a) em ordem crescente, a posição ocupada pelo número 512346 é a 481ª.
 - Existem 240 números cujo primeiro algarismo é 1 ou 2.
 - Os dois menores números cujo primeiro algarismo é 3 são 312456 e 312465.
 - Escrevendo todos os números de 6 algarismos do item (a) em ordem crescente, o número que ocupa a 242ª posição é 312465.

Respostas: a) 720; 120

b) 481ª; 312465

5

Joga-se um dado honesto. O número que ocorreu (isto é, da face voltada para cima) é o coeficiente b da equação $x^2 + bx + 1 = 0$. Determine

- a) a probabilidade de essa equação ter raízes reais.
- b) a probabilidade de essa equação ter raízes reais, sabendo-se que ocorreu um número ímpar.

Resolução

a) A equação $x^2 + bx + 1 = 0$ tem raízes reais \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow b^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow b \geq 2, \text{ pois } b \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq b \leq 6.$$

Portanto, $b \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

No lançamento do dado honesto, a probabilidade de

a equação admitir raízes reais é $\frac{5}{6}$.

- b) Sabendo-se que b é ímpar, então $b = 1$ ou $b = 3$ ou $b = 5$ e a probabilidade de a equação, nessas condições, admitir raízes reais é $\frac{2}{3}$.

Respostas: a) $\frac{5}{6}$; b) $\frac{2}{3}$.

A reta r de equação $y = \frac{x}{2}$ intercepta a circunferência

de centro na origem e raio $\sqrt{5}$ em dois pontos P e Q , sendo que as coordenadas de P são ambas positivas.

Determine:

- a equação da circunferência e os pontos P e Q ;
- a equação da reta s , perpendicular a r , passando por P .

Resolução

a) A equação da circunferência, com centro na origem e

$$\text{raio } \sqrt{5} \text{ é } x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5$$

Os pontos de intersecção da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$ e da reta de equação $y = \frac{x}{2}$ são

obtidos a partir do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2y)^2 + y^2 = 5 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Dessa forma as coordenadas dos pontos P e Q , são respectivamente, $(2; 1)$ e $(-2; -1)$, visto que as coordenadas de P são ambas positivas.

b) A reta (r) de equação $y = \frac{x}{2}$, tem coeficiente angu-

lar $m_r = \frac{1}{2}$ e a reta (s), perpendicular a (r) terá coefi-

ciente angular m_s , tal que $m_s = \frac{-1}{m_r} = \frac{-1}{1/2} = -2$.

Portanto a equação da reta (s), que passa pelo ponto

$P(2; 1)$, com coeficiente angular -2 , é:

$$y - 1 = -2 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$$

Respostas: a) $x^2 + y^2 = 5$; $P(2; 1)$ e $Q(-2; -1)$

$$b) 2x + y - 5 = 0$$

Como resultado de uma pesquisa sobre a relação entre o comprimento do pé de uma pessoa, em centímetros, e o número (tamanho) do calçado brasileiro, Carla obteve uma fórmula que dá, em média, o número inteiro n (tamanho do calçado) em função do comprimento c , do pé, em cm.

Pela fórmula, tem-se $n = [x]$, onde $x = \frac{5}{4}c + 7$ e $[x]$

indica o menor inteiro maior ou igual a x . Por exemplo, se $c = 9$ cm, então $x = 18,25$ e $n = [18,25] = 19$. Com base nessa fórmula,

- determine o número do calçado correspondente a um pé cujo comprimento é 22 cm.
- se o comprimento do pé de uma pessoa é $c = 24$ cm, então ela calça 37. Se $c > 24$ cm, essa pessoa calça 38 ou mais. Determine o maior comprimento possível, em cm, que pode ter o pé de uma pessoa que calça 38.

Resolução

- Para um pé com 22 cm de comprimento o número do calçado é

$$n = \left[\frac{5}{4} \cdot 22 + 7 \right] = [34, 5] = 35$$

- A pessoa que calça 38 tem o comprimento c , em cm, do pé de forma que

$$n = \left[\frac{5}{4} \cdot c + 7 \right] = 38 \Leftrightarrow 37 < \frac{5}{4} \cdot c + 7 \leq 38 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30 < \frac{5}{4} \cdot c \leq 31 \Leftrightarrow 120 < 5 \cdot c \leq 124 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 < c \leq 24,8$$

Desta forma, o maior comprimento possível, em cm, que pode ter o pé de uma pessoa que calça 38 é 24,8.

Respostas: a) 35

b) 24,8 cm

Considere as funções

$f(x) = \log_3(9x^2)$ e $g(x) = \log_3\left(\frac{1}{x}\right)$, definidas para todo $x > 0$.

a) Resolva as duas equações: $f(x) = 1$ e $g(x) = -3$.

b) Mostre que $1 + f(x) + g(x) = 3 + \log_3 x$.

Resolução

Sejam V_f e V_g os conjuntos-verdade das respectivas equações

a) Para $x > 0$ temos:

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \log_3(9x^2) = 1 \Leftrightarrow 9x^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V_f = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

$$g(x) = -3 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{1}{x}\right) = -3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 3^{-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow x = 27 \Leftrightarrow V_g = \{27\}$$

$$b) 1 + f(x) + g(x) = 1 + \log_3(9x^2) + \log_3\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= 1 + \log_3\left(9x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) = 1 + \log_3(9x) =$$

$$= 1 + \log_3 9 + \log_3 x = 1 + 2 + \log_3 x = 3 + \log_3 x$$

Respostas: a) $V_f = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$ e $V_g = \{27\}$

b) demonstração

A temperatura, em graus celsius ($^{\circ}\text{C}$), de uma câmara frigorífica, durante um dia completo, das 0 hora às 24 horas, é dada aproximadamente pela função:

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right), 0 \leq t \leq 24,$$

com t em horas. Determine:

- a) a temperatura da câmara frigorífica às 2 horas e às 9 horas (use as aproximações $\sqrt{2} = 1,4$ e $\sqrt{3} = 1,7$);
 b) em quais horários do dia a temperatura atingiu 0°C .

Resolução

- a) A partir do enunciado, sendo $f(t)$ em graus celsius ($^{\circ}\text{C}$), temos:

$$\begin{aligned} f(2) &= \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot 2\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 2\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1,7 - 1}{2} = 0,35$$

$$\begin{aligned} f(9) &= \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot 9\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 9\right) = \\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 = -\frac{1,4}{2} = -0,7 \end{aligned}$$

- b) Se $f(t) = 0$, temos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

A igualdade é verificada, quando:

$$\mathbf{1^a possibilidade:} \quad \frac{\pi}{6} \cdot t = \frac{\pi}{12} \cdot t + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = n \cdot 24, n \in \mathbb{Z}$$

Para $0 \leq t \leq 24$, resulta $t = 0$ ou $t = 24$

$$\mathbf{2^a possibilidade:} \quad \frac{\pi}{6} \cdot t = -\frac{\pi}{12} \cdot t + n \cdot 2\pi, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = n \cdot 8, n \in \mathbb{Z}$$

Para $0 \leq t \leq 24$, resulta $t = 0$ ou $t = 8$ ou $t = 16$ ou $t = 24$

Portanto, a temperatura atingiu 0°C nos seguintes horários:

0 hora
 8 horas
 16 horas
 24 horas

- Respostas:** a) $f(2) = 0,35^{\circ}\text{C}$; $f(9) = -0,7^{\circ}\text{C}$
 b) 0h, 8h, 16h e 24h

Considere um cilindro circular reto de altura x cm e raio da base igual a y cm.

Usando a aproximação $\pi = 3$, determine x e y nos seguintes casos:

- a) o volume do cilindro é 243 cm^3 e a altura é igual ao triplo do raio;
 b) a área da superfície lateral do cilindro é 450 cm^2 e a altura tem 10 cm a mais que o raio.

Resolução

a) O volume V do cilindro é dado por $V = \pi \cdot y^2 \cdot x$.

Assim, para $V = 243 \text{ cm}^3$, $\pi = 3$ e $x = 3 \cdot y$ temos
 $3 \cdot y^2 \cdot 3y = 243 \Leftrightarrow y^3 = 27 \Leftrightarrow y = 3$ e, portanto,
 $x = 3 \cdot 3 = 9$

b) A área lateral A_L do cilindro é dada por

$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot y \cdot x$$

Assim, para $A_L = 450 \text{ cm}^2$, $\pi = 3$ e $x = y + 10$ temos:

$$2 \cdot 3 \cdot y (y + 10) = 450 \Leftrightarrow y^2 + 10y - 75 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 5, \text{ pois } y > 0$$

$$\text{Logo, } x = y + 10 = 5 + 10 = 15$$

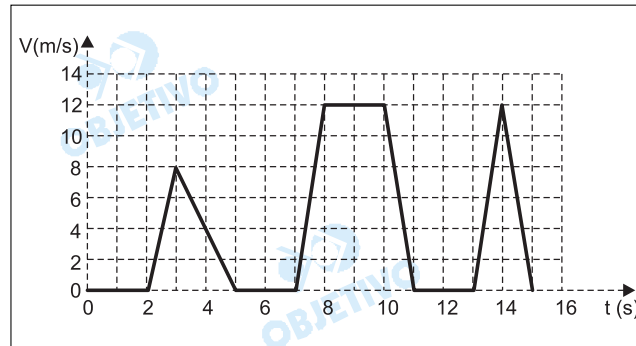
Respostas: a) $x = 9$ e $y = 3$

b) $x = 15$ e $y = 5$

Comentário

Com questões bem enunciadas, quase todas relacionadas a algum problema prático e envolvendo dois ou mais assuntos do programa, a Banca Examinadora apresentou uma prova criativa e de bom nível.

O gráfico na figura descreve o movimento de um caminhão de coleta de lixo em uma rua reta e plana, durante 15s de trabalho.



- a) Calcule a distância total percorrida neste intervalo de tempo.
b) Calcule a velocidade média do veículo.

Resolução

a) $\Delta s = \text{área} (V \times t)$

$$0 \rightarrow 2s: \quad \Delta s_1 = 0$$

$$2s \rightarrow 5s: \quad \Delta s_2 = \frac{3 \cdot 8}{2} (m) = 12m$$

$$5s \rightarrow 7s: \quad \Delta s_3 = 0$$

$$7s \rightarrow 11s: \quad \Delta s_4 = (4 + 2) \cdot \frac{12}{2} (m) = 36m$$

$$11s \rightarrow 13s: \quad \Delta s_5 = 0$$

$$13s \rightarrow 15s: \quad \Delta s_6 = 2 \cdot \frac{12}{2} (m) = 12m$$

$$\Delta s = 12m + 36m + 12m \Rightarrow \boxed{\Delta s = 60m}$$

b) $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

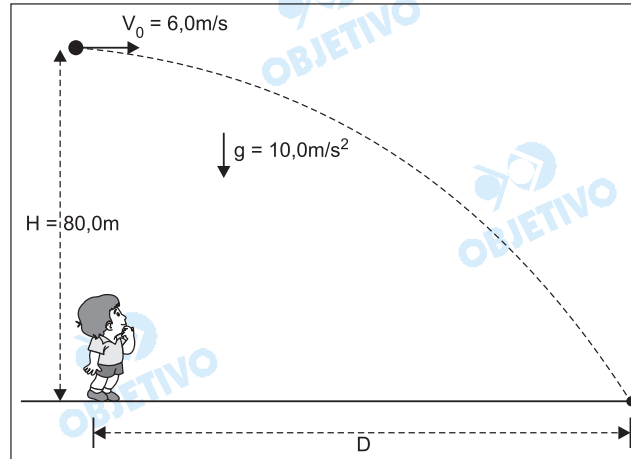
$$V_m = \frac{60m}{15s} \Rightarrow \boxed{V_m = 4m/s}$$

- Respostas:** a) 60m
b) 4m/s

Um balão se desloca horizontalmente, a 80,0 m do solo, com velocidade constante de 6,0 m/s. Quando passa exatamente sobre um jovem parado no solo, um saquinho de areia é abandonado do balão. Desprezando qualquer atrito do saquinho com o ar e considerando $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, calcule

- o tempo gasto pelo saquinho para atingir o solo, considerado plano.
- a distância entre o jovem e o ponto onde o saquinho atinge o solo.

Resolução



- a) O tempo gasto é calculado pelo movimento vertical (MUV):

$$\Delta s_y = V_{0y} t + \frac{\gamma_y}{2} t^2 \downarrow \oplus$$

$$80,0 = 0 + \frac{10,0}{2} T^2$$

$$T^2 = 16,0 \Rightarrow T = 4,0\text{s}$$

- b) Analisando-se o movimento horizontal (MU), vem:

$$\Delta x = V_x t$$

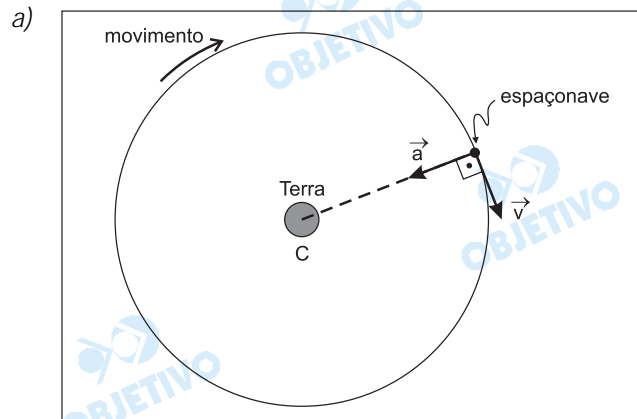
$$D = 6,0 \cdot 4,0 \text{ (m)} \Rightarrow D = 24,0\text{m}$$

- Respostas:** a) 4,0s
b) 24,0m

Uma espaçonave de massa m gira em torno da Terra com velocidade constante, em uma órbita circular de raio R . A força centrípeta sobre a nave é $1,5 GmM/R^2$, onde G é a constante de gravitação universal e M a massa da Terra.

- a) Desenhe a trajetória dessa nave. Em um ponto de sua trajetória, desenhe e identifique os vetores velocidade \vec{v} e aceleração centrípeta \vec{a} da nave.
 b) Determine, em função de M , G e R , os módulos da aceleração centrípeta e da velocidade da nave.

Resolução



A velocidade vetorial \vec{v} é tangente à trajetória e tem o sentido do movimento.

A aceleração centrípeta é dirigida para o centro da trajetória e tem direção radial.

- b) 1) A força gravitacional que a Terra aplica no satélite faz o papel de resultante centrípeta e, portanto:

$$F_{cp} = F_G = \frac{GMm}{R^2} = m a_{cp}$$

$$a_{cp} = \frac{GM}{R^2}$$

$$2) a_{cp} = \frac{GM}{R^2} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

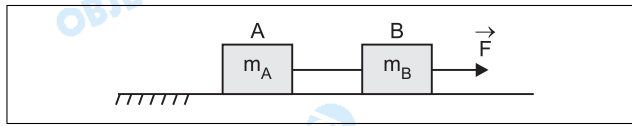
Contudo, o enunciado apresentou a força centrípeta com um misterioso fator 1,5 multiplicando a força gravitacional entre a Terra e a espaçonave. Imaginando a presença de um misterioso propulsor que aumenta a intensidade da força centrípeta (o que não foi citado no enunciado), escrevemos:

$$1,5 \frac{GMm}{R^2} = m a_{cp} \Rightarrow a_{cp} = 1,5 \frac{GM}{R^2}$$

$$a_{cp} = \frac{1,5 GM}{R^2} = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{1,5 GM}{R}}$$

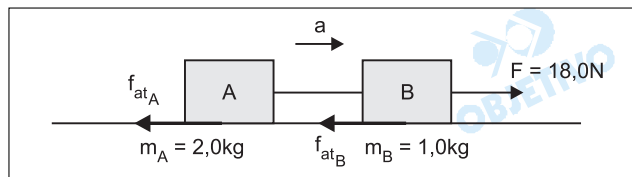
14

A figura ilustra um bloco A, de massa $m_A = 2,0$ kg, atado a um bloco B, de massa $m_B = 1,0$ kg, por um fio inextensível de massa desprezível. O coeficiente de atrito cinético entre cada bloco e a mesa é μ_c . Uma força $F = 18,0$ N é aplicada ao bloco B, fazendo com que ambos se desloquem com velocidade constante.



Considerando $g = 10,0$ m/s², calcule

- o coeficiente de atrito μ_c .
- a tração T no fio.

Resolução

- Sendo a velocidade constante, a força resultante no sistema é nula.

$$F = f_{atA} + f_{atB}$$

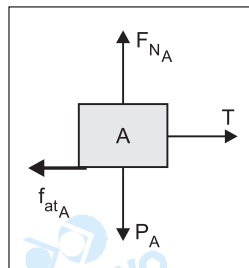
$$F = \mu P_A + \mu P_B$$

$$F = \mu (P_A + P_B)$$

$$18,0 = \mu 30,0$$

$$\mu = 0,60$$

- Isolando-se o bloco A:



$$F_{N_A} = P_A = 20,0N$$

Sendo a velocidade constante:

$$T = f_{atA} = \mu P_A \Rightarrow T = 0,60 \cdot 20,0 (N)$$

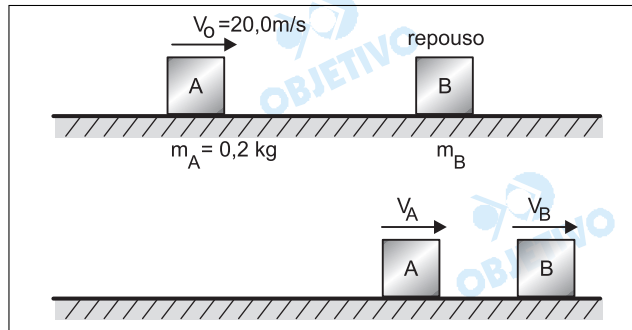
$$T = 12,0N$$

- Respostas:** a) 0,60
b) 12,0N

Uma partícula A, com massa $m = 0,2 \text{ kg}$, colide frontalmente com uma partícula B, com massa maior que a de A, e que inicialmente se encontra em repouso. A colisão é totalmente elástica e a energia cinética final da partícula A cai para 64% de seu valor inicial. Se a velocidade inicial da partícula A for $v_0 = 20,0 \text{ m/s}$, calcule

- a) a velocidade final da partícula A.
- b) a quantidade de movimento da partícula B após a colisão.

Resolução



$$a) E'_{cinA} = 0,64 E_{cinA}$$

$$\frac{m_A v_A^2}{2} = 0,64 \frac{m_A v_0^2}{2}$$

$$v_A^2 = 0,64 v_0^2 \Rightarrow v_A = -0,80 v_0 = -0,80 \cdot 20,0 \text{ (m/s)}$$

$$v_A = -16,0 \text{ m/s}$$

Como a massa de B é maior que a de A, o bloco A inverte o sentido de seu movimento após a colisão, o que justifica o sinal negativo de v_A .

- b) No ato da colisão, o sistema é isolado e teremos a conservação da quantidade de movimento total:

$$Q_{após} = Q_{antes}$$

$$m_A v_A + Q_B = m_A v_0$$

$$Q_B = m_A (v_0 - v_A) = 0,2 [20,0 - (-16,0)] \text{ (SI)}$$

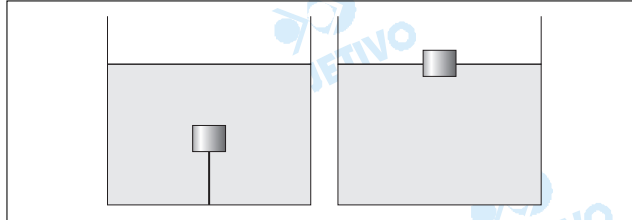
$$Q_B = 7,2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

- Respostas:** a) $-16,0 \text{ m/s}$
b) $7,2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$

Um bloco de madeira de volume $V = 60 \text{ cm}^3$, totalmente submerso, está atado ao fundo de um recipiente cheio de água por meio de um fio de massa desprezível. O fio é cortado e o bloco emerge na superfície com $1/4$ de seu volume fora da água. Sendo $g = 10 \text{ m/s}^2$ a aceleração da gravidade e $D = 1 \text{ g/cm}^3$ a massa específica da água, calcule

- a) a massa específica do bloco.
b) a tração no fio, antes de ser cortado.

Resolução



- a) Para o bloco flutuando na superfície do líquido, temos:

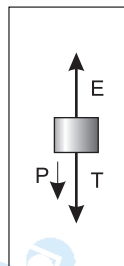
$$E = P$$

$$\mu_L V_i g = \mu_B V_B g$$

$$\frac{\mu_B}{\mu_L} = \frac{V_i}{V} = \frac{3}{4}$$

$$\mu_B = \frac{3}{4} \mu_L = \frac{3}{4} 1,0 \text{ g/cm}^3 \Rightarrow \boxed{\mu_B = 0,75 \text{ g/cm}^3}$$

- b) Para o equilíbrio do bloco, temos:



$$E = P + T$$

$$\mu_L V_B g = \mu_B V_B g + T$$

$$T = (\mu_L - \mu_B) V_B g$$

$$T (1,0 - 0,75) \cdot 10^3 \cdot 60 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \text{ (N)}$$

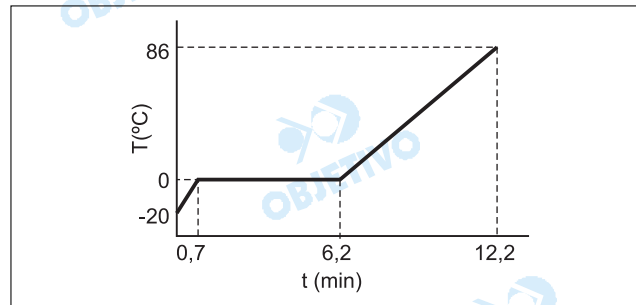
$$T = 1,5 \cdot 10^{-1} \text{ N}$$

$$\boxed{T = 0,15 \text{ N}}$$

Respostas: a) $0,75 \text{ g/cm}^3$ ou $7,5 \cdot 10^2 \text{ kg/m}^3$

b) $0,15 \text{ N}$ ou $1,5 \cdot 10^{-1} \text{ N}$

Uma quantidade de 1,5 kg de certa substância encontra-se inicialmente na fase sólida, à temperatura de -20°C . Em um processo a pressão constante de 1,0 atm, ela é levada à fase líquida a 86°C . A potência necessária nessa transformação foi de 1,5 kJ/s. O gráfico na figura mostra a temperatura de cada etapa em função do tempo.



Calcule

- o calor latente de fusão L_F .
- o calor necessário para elevar a temperatura de 1,5 kg dessa substância de 0 a 86°C .

Resolução

- Usando-se a expressão da potência, temos:

$$Pot = \frac{Q}{\Delta t}$$

A fusão da substância ocorre no trecho representado no gráfico pelo patamar (entre 0,7 min. e 6,2 min) e, assim:

$$Pot = \frac{m L_F}{\Delta t}$$

$$1,5 = \frac{1,5 \cdot L_F}{(6,2 - 0,7) \cdot 60}$$

$$L_F = 330 \text{ kJ/kg}$$

- O aquecimento da substância de 0°C a 86°C é indicado no diagrama no trecho entre 6,2 min. e 12,2 min.

Portanto:

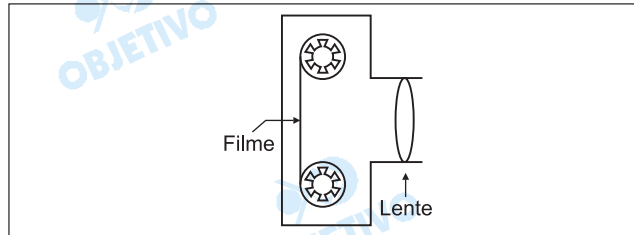
$$Q = Pot \Delta t$$

$$Q = 1,5 \cdot (12,2 - 6,2) \cdot 60 \text{ (kJ)}$$

$$Q = 540 \text{ kJ}$$

- Respostas:** a) 330 kJ/kg
b) 540 kJ

Uma câmara fotográfica rudimentar utiliza uma lente convergente de distância focal $f = 50$ mm para focalizar e projetar a imagem de um objeto sobre o filme. A distância da lente ao filme é $p' = 52$ mm. A figura mostra o esboço dessa câmara.

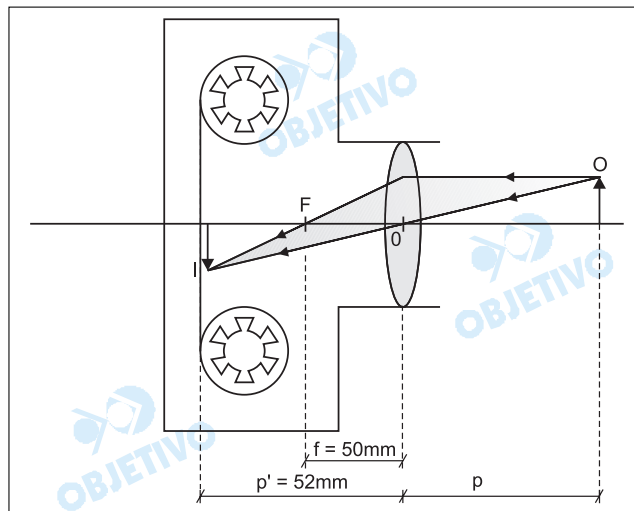


Para se obter uma boa foto, é necessário que a imagem do objeto seja formada exatamente sobre o filme e o seu tamanho não deve exceder a área sensível do filme. Assim:

- Calcule a posição que o objeto deve ficar em relação à lente.
- Sabendo-se que a altura máxima da imagem não pode exceder a 36,0 mm, determine a altura máxima do objeto para que ele seja fotografado em toda a sua extensão.

Resolução

A formação da imagem sobre o filme está esquematizada (fora de escala) abaixo.



- a) **Equação de Gauss:**

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

$$\frac{1}{50} = \frac{1}{p} + \frac{1}{52} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{50} - \frac{1}{52}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{52 - 50}{50 \cdot 52} \Rightarrow p = \frac{50 \cdot 52}{2} \text{ (mm)}$$

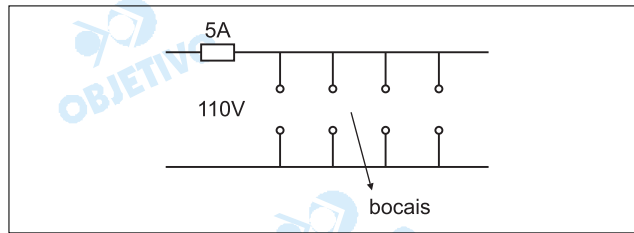
$$p = 1300 \text{ mm} = 1,3 \text{ m}$$

b) $\frac{y'}{y} = -\frac{p'}{p} \Rightarrow \frac{36,0}{y} = -\frac{52}{1300}$

$$y = -900 \text{ mm} \Rightarrow h = 900 \text{ mm} = 90 \text{ cm}$$

Respostas: a) 1,3m
b) 90cm

Uma luminária, com vários bocais para conexão de lâmpadas, possui um fusível de 5 A para proteção da rede elétrica alimentada com uma tensão de 110 V, como ilustrado na figura.



Calcule

- a) a potência máxima que pode ser dissipada na luminária.
- b) o número máximo de lâmpadas de 150 W que podem ser conectadas na luminária.

Resolução

- a) Sendo de 5A a intensidade máxima de corrente elétrica suportada pelo fusível e de 110V a tensão elétrica da rede, temos:

$$P_{\text{máx}} = i_{\text{máx}} \cdot U$$

$$P_{\text{máx}} = 5 \cdot 110 \text{ (W)}$$

$$P_{\text{máx}} = 550\text{W}$$

- b) O número máximo de lâmpadas pode ser calculado por:

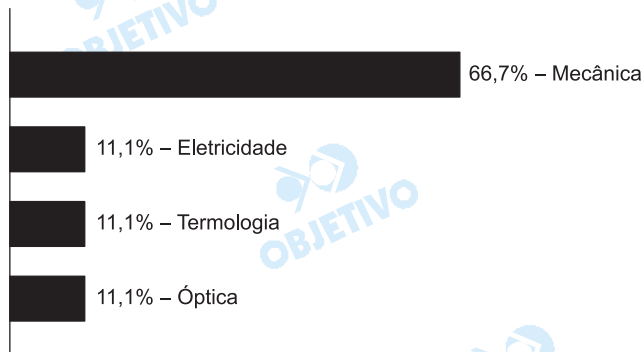
$$n = \frac{P_{\text{máx}}}{P} = \frac{550}{150}$$

$$n \cong 3,7 \Rightarrow n_{\text{máx}} = 3 \text{ lâmpadas}$$

- Respostas:** a) 550W
b) 3 lâmpadas

Física

A prova de Física apresentou questões simples de nível médio, bem distribuídas e tradicionais. Lamentamos apenas que na questão 13 apareceu um fator 1,5 multiplicando a força gravitacional sem nenhuma explicação para o candidato.



A Bolívia é um grande produtor de gás natural (metano) e celebrou com o Brasil um acordo para a utilização deste importante recurso energético. Para seu transporte até os centros consumidores, há um gasoduto ligando os dois países, já tendo chegado ao interior do Estado de São Paulo.

- a) Escreva a fórmula mínima e calcule a massa molar para o metano. Dadas as massas molares, em $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$: C = 12 e H = 1.
- b) Escreva a equação para a reação de combustão do metano e o nome dos produtos formados.

Resolução

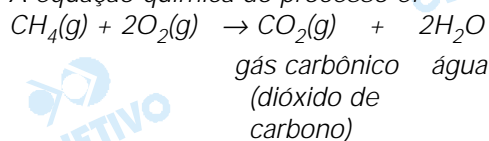
- a) A fórmula mínima coincide com a fórmula molecular do metano (CH_4).

CH_4 : fórmula mínima

$$M = (1 \cdot 12 + 4 \cdot 1) \text{ g/mol}$$

$$M = 16 \text{ g/mol}$$

- b) A equação química do processo é:



Considere os seguintes compostos, todos contendo cloro:

$BaCl_2$; CH_3Cl ; CCl_4 e $NaCl$.

Sabendo que o sódio pertence ao grupo 1, o bário ao grupo 2, o carbono ao grupo 14, o cloro ao grupo 17 da Tabela Periódica e que o hidrogênio tem número atômico igual a 1:

- transcreva a fórmula química dos compostos iônicos para o caderno de respostas e identifique-os, fornecendo seus nomes.
- apresente a fórmula estrutural para os compostos covalentes e identifique a molécula que apresenta momento dipolar resultante diferente de zero (molécula polar).

Resolução

- a) *Um composto iônico é formado por um metal unido a um não-metal ou hidrogênio.*

$BaCl_2$: cloreto de bário

$NaCl$: cloreto de sódio

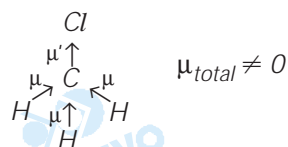
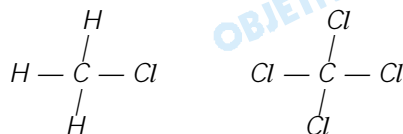
Metais citados: sódio (grupo 1) e bário (grupo 2)

Não-metais citados: carbono (grupo 14) e cloro (grupo 17)

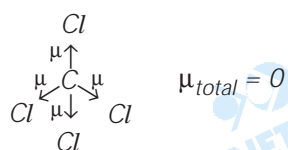
- b) *Carbono é tetravalente (grupo 14)*

Cloro é monovalente (grupo 17)

Hidrogênio é monovalente



Cloreto de metila (polar)



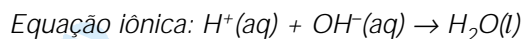
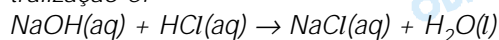
Tetracloro de carbono (apolar)

A soda cáustica (hidróxido de sódio) é um dos produtos utilizados na formulação dos limpadores e desentupidores de pias domésticas, tratando-se de uma base forte. O ácido muriático (ácido clorídrico com concentração de $12 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$) é muito utilizado na limpeza de pisos e é um ácido forte. Ambos devem ser manuseados com cautela, pois podem causar queimaduras graves se entrarem em contato com a pele.

- a) Escreva a equação química para a neutralização do hidróxido de sódio com o ácido clorídrico, ambos em solução aquosa.
- b) Dadas as massas molares, em $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$: $\text{H} = 1$; $\text{O} = 16$ e $\text{Na} = 23$, calcule o volume de ácido muriático necessário para a neutralização de 2L de solução de hidróxido de sódio com concentração de $120 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$. Apresente seus cálculos.

Resolução

- a) A equação química que representa a reação de neutralização é:



- b) Cálculo da massa de NaOH presente em 2L de solução:

Volume (L)	-----	massa (g)
1	-----	120
2	-----	x
$x = 240\text{g de NaOH}$		

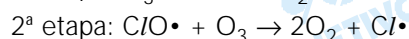
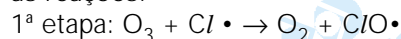
Cálculo da quantidade, em mol, de HCl:

Massa de NaOH(g)	-----	mols de HCl
40	-----	1
240	-----	y
$y = 6 \text{ mol de HCl}$		

Cálculo do volume de solução de HCl:

Volume (L)	-----	mol
1	-----	12
z	-----	6
$z = 0,5\text{L}$		

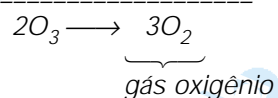
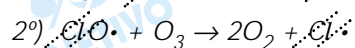
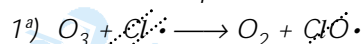
Há décadas são conhecidos os efeitos dos CFCs, ou freons, na destruição da camada de ozônio da atmosfera terrestre. Acredita-se que a diminuição da quantidade de O_3 na atmosfera seja responsável pelo aumento na incidência de câncer de pele, pois a radiação ultravioleta não mais é bloqueada com a mesma eficiência. A ação destes gases, como o CF_2Cl_2 , inicia-se com a produção de átomos de cloro livres ($Cl\cdot$), pela interação das moléculas do gás com a radiação solar, seguindo-se as reações:



- a) Escreva a equação global para esta reação e identifique o produto formado.
- b) Considere a afirmação: "O mecanismo proposto para a destruição da camada de ozônio equivale a uma reação catalisada". Justifique esta afirmação e identifique o catalisador.

Resolução

a) Somando as etapas, temos:



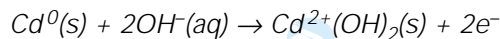
- b) O catalisador é $Cl\cdot$ (cloro livre), pois é consumido na 1ª etapa e regenerado na 2ª etapa do processo.

Pilhas recarregáveis, também denominadas células secundárias, substituem, com vantagens para o meio ambiente, as pilhas comuns descartáveis. Um exemplo comercial são as pilhas de níquel-cádmio (Nicaid), nas quais, para a produção de energia elétrica, ocorrem os seguintes processos:

- I. O cádmio metálico, imerso em uma pasta básica contendo íons OH^- (aq), reage produzindo hidróxido de cádmio (II), um composto insolúvel.
 - II. O hidróxido de níquel (III) reage produzindo hidróxido de níquel (II), ambos insolúveis e imersos numa pasta básica contendo íons OH^- (aq).
- a) Escreva a semi-reação que ocorre no ânodo de uma pilha de Nicaid.
 - b) Uma TV portátil funciona adequadamente quando as pilhas instaladas fornecem uma diferença de potencial entre 12,0 e 14,0 V. Sabendo-se que $E_0(\text{Cd}^{2+}, \text{Cd}) = -0,81\text{V}$ e $E_0(\text{Ni}^{3+}, \text{Ni}^{2+}) = +0,49\text{V}$, nas condições de operação descritas, calcule a diferença de potencial em uma pilha de níquel-cádmio e a quantidade de pilhas, associadas em série, necessárias para que a TV funcione adequadamente.

Resolução

a) No ânodo da pilha de Nicaid, ocorre a oxidação do cádmio:



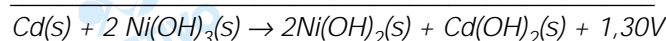
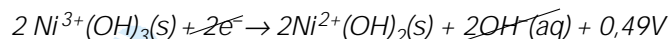
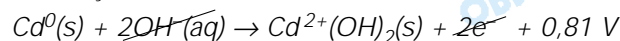
b) • Cálculo da diferença de potencial em uma pilha de níquel-cádmio:

$$\Delta V = E_{\text{RED}} \text{Ni}^{3+} - E_{\text{RED}} \text{Cd}^{2+}$$

$$\Delta V = 0,49\text{V} - (-0,81\text{V})$$

$$\Delta V = + 1,30\text{V}$$

Resolução alternativa:



- Como um aparelho de televisão portátil funciona adequadamente quando as pilhas instaladas fornecem uma diferença de potencial entre 12,0 e 14,0 V, serão necessárias 10 pilhas associadas em série:

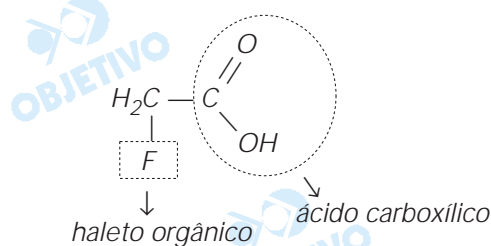
$$1,30\text{V} \times 10 = 13,0\text{V}$$

"Substância proibida no Brasil matou animais no zoológico de São Paulo". Esta notícia, estampada nos jornais brasileiros no início de 2004, se refere à morte dos animais intoxicados pelo monofluoroacetato de sódio, um derivado do ácido monofluoroacético (ou ácido monofluoroetanóico), que age no organismo dos mamíferos pela inibição da enzima aconitase, bloqueando o ciclo de Krebs e levando-os à morte.

- a) Escreva a fórmula estrutural do ácido monofluoroetanóico e identifique, indicando com setas e fornecendo seus nomes, duas funções orgânicas presentes neste composto.
- b) Quanto maior a eletronegatividade do grupo ligado ao carbono 2 dos derivados do ácido acético, maior a constante de dissociação do ácido (efeito indutivo). Considerando os ácidos monocloraacético, monofluoroacético e o próprio ácido acético, coloque-os em ordem crescente de acidez.

Resolução

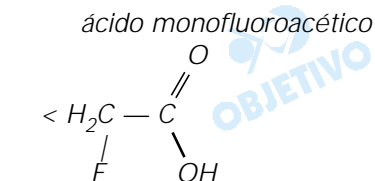
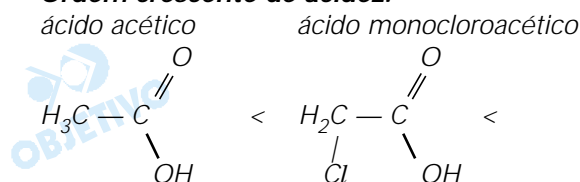
- a) A fórmula estrutural do ácido monofluoroetanóico é:



- b) Quanto maior a eletronegatividade do grupo ligado ao carbono 2 dos derivados do ácido acético, maior o efeito indutivo e maior a acidez.

- **Ordem crescente de eletronegatividade:**
 $H < Cl < F$

- **Ordem crescente de acidez:**



Comentário de Química

Parabéns à banca examinadora, que conseguiu fazer uma prova simples, clássica e sem complicações.

