EXTENSIVO 2021.2

MATEMÁTICA PARA EEAR

TRIGONOMETRIA II

Prof. Victor So

AULA 01

06 DE OUTUBRO DE 2020

Sumário

INTRODUÇÃO 3

1. EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 4

1.1. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS 4

1.2. EQUAÇÕES CLÁSSICAS 7

2. INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 16

3. RESUMO 26

3.1. TABELA DE ÂNGULOS TRIGONOMÉTRICOS 26

3.2. EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 27

3.3. INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 27

4. LISTA DE QUESTÕES 29

4.1. GABARITO 37

6. LISTA DE QUESTÕES RESOLVIDAS E COMENTADAS 38

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA 63

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 63

12. VERSÕES DAS AULAS 64

INTRODUÇÃO

Olá!

Vamos continuar o estudo de trigonometria. Nessa aula, veremos como resolver equações e inequações trigonométricas. Também estudaremos o valor de algumas razões trigonométricas não triviais que podem ser cobradas na prova.

Se você já possui um bom conhecimento de trigonometria, vá direto para a lista de questões e treine!

Sempre que você tiver dúvidas, críticas ou sugestões nos procure no fórum de dúvidas ou entre em contato comigo:

1. EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1.1. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

Vamos aprender a resolver equações trigonométricas. A maioria das equações trigonométricas podem ser resolvidas se conhecermos as equações fundamentais. Vamos apresentá-las:

Equações Fundamentais	
(I)	$sen\alpha = sen\beta$
(II)	$cos\alpha = cos\beta$
(III)	$tg\alpha = tg\beta$

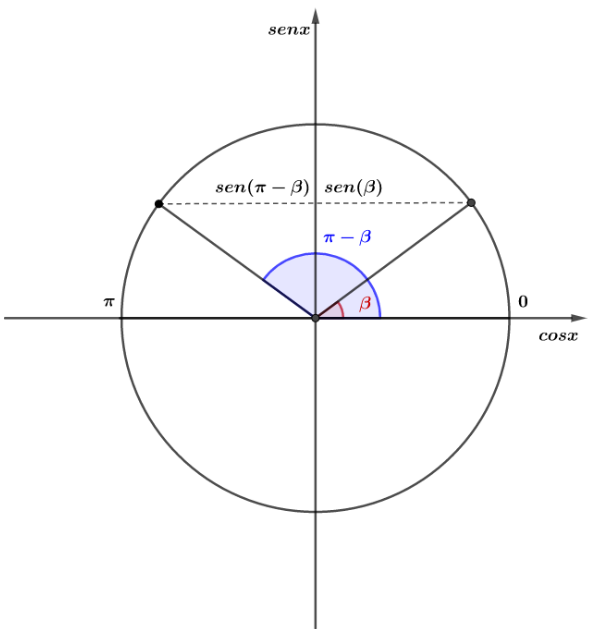
(I) $sen\alpha = sen\beta$

Para resolver essa equação, temos que considerar dois casos:

1) α e β são congruentes, então $\alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Perceba que temos que somar o termo $2k\pi$ para encontrar todos os ângulos que tornam essa igualdade verdadeira. $2k\pi$ é o termo que representa k voltas completas na circunferência trigonométrica.

2) α e β são suplementares, então $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Nesse caso, devemos lembrar que a função seno repete seu valor no primeiro e segundo quadrantes e, por isso, temos que considerar o caso desses ângulos serem suplementares um do outro.

Vamos usar o ciclo trigonométrico para melhor visualização:



$(II)\ cos\alpha = cos\beta$

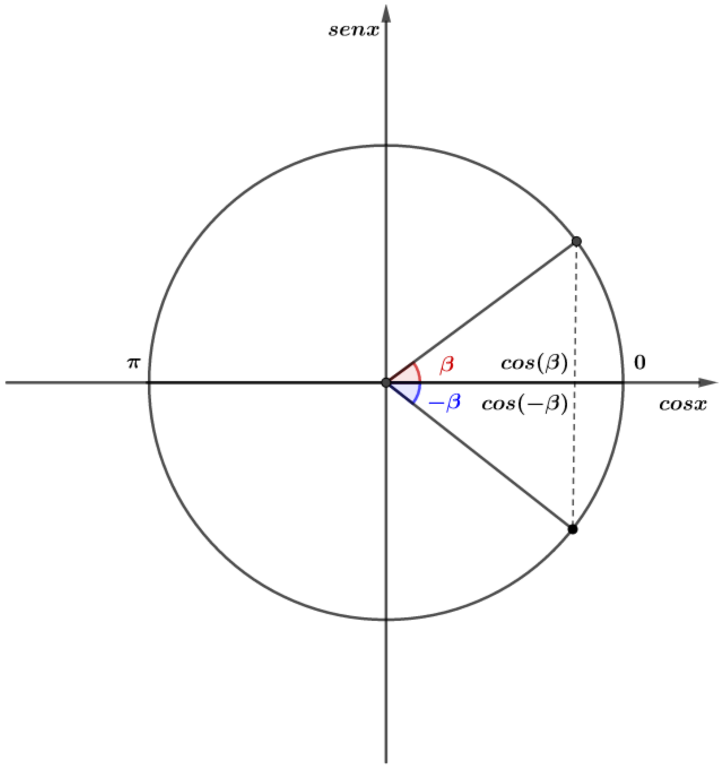
Nesse caso, também temos duas possibilidades:

1) α e β são congruentes, então $\alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2) α e β são replementares (replementares são ângulos que a relação $\alpha = 2\pi - \beta$). Assim, temos $\alpha = 2\pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Perceba que podemos incluir o termo 2π em $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Dessa forma:

$\alpha = -\beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ciclo trigonométrico dos casos:



$(III)\ tg\alpha = tg\beta$

A função tangente repete seu valor para dois casos:

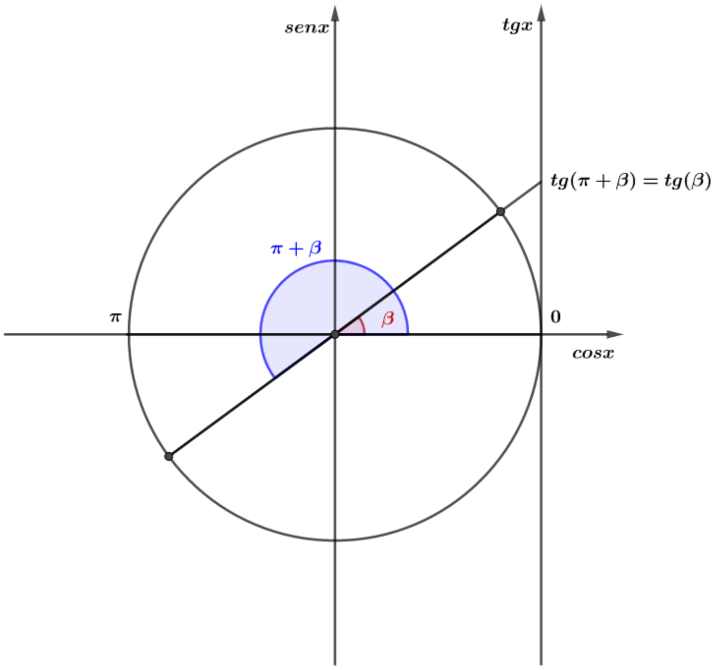
1) α e β são congruentes, então, $\alpha = \beta + 2k\pi$

2) α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo, então, $\alpha = \pi + \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Essas duas soluções podem ser escritas em uma só:

$x = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ciclo trigonométrico dos casos:



RESUMINDO

Equações Fundamentais	Solução
$sen\alpha = sen\beta$	$\alpha = \beta + 2k\pi \ ou \ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$cos\alpha = cos\beta$	$\alpha = \pm\beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$tg\alpha = tg\beta$	$\alpha = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

1.2. EQUAÇÕES CLÁSSICAS

Além das equações fundamentais, temos as equações clássicas. Vamos aprender a resolvê-las.

Equações Clássicas	
(I)	$asenx + bcosx = c\ (a, b, c \in \mathbb{R}^*)$
(II)	$a(senx + cosx) + bsenxcosx = c\ (a, b, c \in \mathbb{R}^*)$
(III)	$sen^4 x + \cos^4 x = a\ (a \in \mathbb{R})$
(IV)	$sen^6 x + \cos^6 x = a\ (a \in \mathbb{R})$

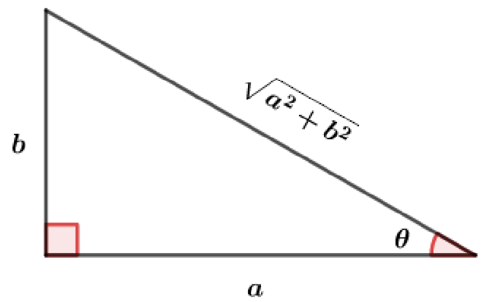
$(I)\ asenx + bcosx = c$

Método 1:

Se $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$, podemos dividir essa equação por $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{asenx}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{bcosx}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Essa divisão se baseia no seguinte triângulo retângulo:



Assim, podemos escrever:

$$sen\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$\cos\theta \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}\theta \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A expressão à esquerda é a fórmula da soma do seno, assim, temos:

$$\operatorname{sen}(x + \theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Com essa equação, basta encontrar o valor dos ângulos que satisfazem essa equação.

A solução é dada por:

$$x + \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$x + \theta = \pi - \operatorname{arcsen}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para usar esse método, devemos nos atentar à condição de existência:

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leq 1$$

Que é o mesmo que dizer:

$$-1 \leq \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$$

Método 2:

Podemos usar as seguintes identidades:

$$\operatorname{sen}x = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\cos x = \frac{\left(1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Fazendo $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$senx = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Substituindo na equação:

$$a\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) + b\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = c$$

$$2at + b - bt^2 = c + ct^2$$

$$(b+c)t^2 - 2at + c - b = 0$$

Para encontrar as soluções, basta resolver a equação do segundo grau acima.

$(II)\ a(senx + cosx) + bsenxcosx = c$

Podemos fazer $z = senx + cosx$ e, assim, obtermos:

$$z = senx + cosx$$

Elevando ao quadrado:

$$z^2 = sen^2x + 2senxcosx + \cos^2 x \Rightarrow z^2 = 1 + 2senxcosx \Rightarrow senxcosx = \frac{z^2-1}{2}$$

Substituindo na equação:

$$az + \frac{b(z^2-1)}{2} = c$$

$$bz^2 + 2az - b - 2c = 0$$

Dessa forma, a solução é dada pelas raízes da equação do segundo grau acima.

Para encontrar a solução em x, devemos resolver $sen(2x) = z^2 - 1$.

A solução é dada por:

$$2x = arcsen(z^2 - 1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$2x = \pi - arcsen(z^2 - 1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$(III)\ sen^4x + cos^4x = a$

Podemos fatorar essa equação:

$$\left(\underbrace{sen^2x + \cos^2 x}_{1}\right)^2 - 2sen^2xcos^2x = a$$

$$1 - 2(senxcosx)^2 = a$$

$$\left[\frac{sen(2x)}{2}\right]^2 = \frac{1-a}{2}$$

$$|sen(2x)| = \sqrt{2(1-a)}$$

$$sen(2x) = \pm\sqrt{2(1-a)}$$

Devemos analisar a condição de existência:

Condição do radical:

$$1 - a \geq 0 \Rightarrow a \leq 1$$

Condição do seno:

$$0 \leq \sqrt{2(1-a)} \leq 1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}$$

Intersecção das condições:

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$$

A solução é dada por:

$$2x = arcsen\left(\pm\sqrt{2(1-a)}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$2x = \pi - arcsen\left(\pm\sqrt{2(1-a)}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$(IV)\ sen^6x + \cos^6 x = a$

Podemos usar a seguinte identidade:

$$sen^6x + \cos^6 x = \left(\underbrace{sen^2x + \cos^2 x}_{1}\right)(sen^4x - sen^2xcos^2x + \cos^4 x)$$

$$sen^6x + \cos^6 x = \underbrace{sen^4x + \cos^4 x}_{1-2sen^2xcos^2x} - sen^2xcos^2x$$

$$sen^6x + \cos^6 x = 1 - 3sen^2xcos^2x$$

Assim, substituindo na equação, obtemos:

$$1 - 3sen^2xcos^2x = a$$

$$1 - a = 3\left(\frac{sen(2x)}{2}\right)^2$$

$$sen^2(2x) = \frac{4(1-a)}{3}$$

$$|sen(2x)| = \sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}$$

$$sen(2x) = \pm\sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}$$

Devemos analisar a condição de existência:

$$1 - a \geq 0 \Rightarrow a \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{\frac{4(1-a)}{3}} \leq 1$$

$$4(1-a) \leq 3 \Rightarrow 1 - a \leq \frac{3}{4} \Rightarrow a \geq \frac{1}{4}$$

Intersecção das condições:

$$\frac{1}{4} \leq a \leq 1$$

A solução é dada por:

$$2x = arcsen\left(\pm\sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$2x = \pi - arcsen\left(\pm\sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

1. Resolva as seguintes equações:

a) $senx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $cosx = 1$

c) $tgx = \sqrt{3}$

d) $cossecx = 2$

e) $tg(5x) = tg\left(\frac{\pi}{5}\right)$

f) $sen^2x = 1 + cosx$

g) $4cosx + 3secx = 8$

h) $2 - 2cosx = senx \cdot tgx$

i) $1 + 3tg^2x = 5secx$

j) $cos3x - cosx = 0$

l) $sen3x + cos3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

a) $\boldsymbol{senx = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Sabemos que $sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então a solução é dada por:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ } ou \text{ } x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ } ou \text{ } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\boldsymbol{cosx = 1}$

Sabemos que $\cos(0) = 1$, então:

$$x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

c) $\boldsymbol{tgx = \sqrt{3}}$

Sabemos que $tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, desse modo:

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\boldsymbol{cossecx = 2}$

$cossecx = 2 \Rightarrow \frac{1}{senx} = 2 \Rightarrow senx = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ ou\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

e) $\boldsymbol{tg(5x) = tg\left(\frac{\pi}{5}\right)}$

$5x = \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{25} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

f) $\boldsymbol{sen^2x = 1 + cosx}$

$1 - \cos^2 x = 1 + cosx$

$\cos^2 x + cosx = 0$

$cosx(cosx + 1) = 0$

$cosx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ou

$cosx = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi$

g) $\boldsymbol{4cosx + 3secx = 8}$

Condição de existência: $cosx \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$4cosx + \frac{3}{cosx} = 8$

$4\cos^2 x - 8cosx + 3 = 0$

$cosx = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{3}{2}\ ou\ \frac{1}{2}$

Sabemos que $-1 \leq cosx \leq 1$, então:

$cosx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

h) $\boldsymbol{2 - 2cosx = senx \cdot tgx}$

Condição de existência: $cosx \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$2 - 2cosx = senx \cdot \frac{senx}{cosx}$

$2 - 2cosx = \frac{sen^2 x}{cosx}$

$(2 - 2cosx)cosx = 1 - \cos^2 x$

$2cosx - 2\cos^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$

$-\cos^2 x + 2cosx - 1 = 0$

$\cos^2 x - 2cosx + 1 = 0$

$(cosx - 1)^2 = 0$

$cosx = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

i) $\mathbf{1 + 3tg^2 x = 5secx}$

Podemos usar a identidade:

$\sec^2 x = 1 + tg^2 x$

$1 + 3(\sec^2 x - 1) = 5secx$

$3\sec^2 x - 5secx - 2 = 0$

$secx = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} = 2 \ ou - \frac{1}{3}$

Como $secx \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$secx = 2 \Rightarrow cosx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

j) $\mathbf{cos3x - cosx = 0}$

Usando a fórmula do arco triplo do cosseno, temos:

$cos3x = 4\cos^3 x - 3cosx$

$4\cos^3 x - 3cosx - cosx = 0$

$4\cos^3 x - 4cosx = 0$

$cosx(\cos^2 x - 1) = 0$

$cosx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ou

$\cos^2 x = 1 \Rightarrow cosx = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

l) $\boldsymbol{sen3x + cos3x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

Essa é uma equação clássica. Vamos multiplicá-la por $\sqrt{2}/2$:

$\frac{\sqrt{2}}{2} sen3x + \frac{\sqrt{2}}{2} cos3x = \frac{1}{2}$

$sen3xcos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right) cos3x = \frac{1}{2}$

$sen\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow 3x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Ou

$3x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow 3x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Gabarito:

a) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ ou \ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

b) $\boldsymbol{x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

c) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

d) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ou \ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

e) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{25} + \frac{k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}}$

f) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi \ ou \ x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

g) $\boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

h) $\boldsymbol{x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

i) $\boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

j) $\boldsymbol{x = k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

l) $\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \ ou \ x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$

2. INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

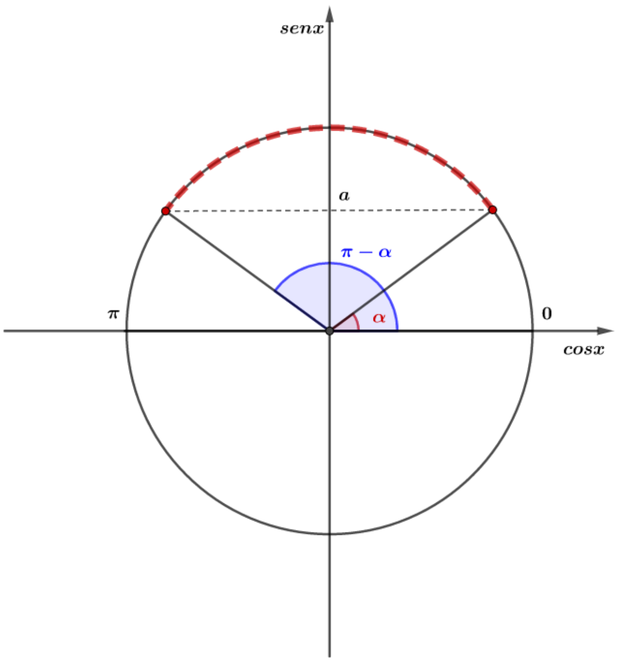
Para resolver inequações trigonométricas, devemos aprender a resolver os 6 tipos diferentes de inequações.

Seja a um número real dado:

Inequações Fundamentais	
(I)	$senx \geq a$
(II)	$senx \leq a$
(III)	$cosx \geq a$
(IV)	$cosx \leq a$
(V)	$tgx \geq a$
(VI)	$tgx \leq a$

$(I)\ senx \geq a$

Sempre que resolvemos inequações, podemos usar o gráfico para nos ajudar a ver o resultado. Vamos usar o ciclo trigonométrico e inserir $sen\alpha = a$:

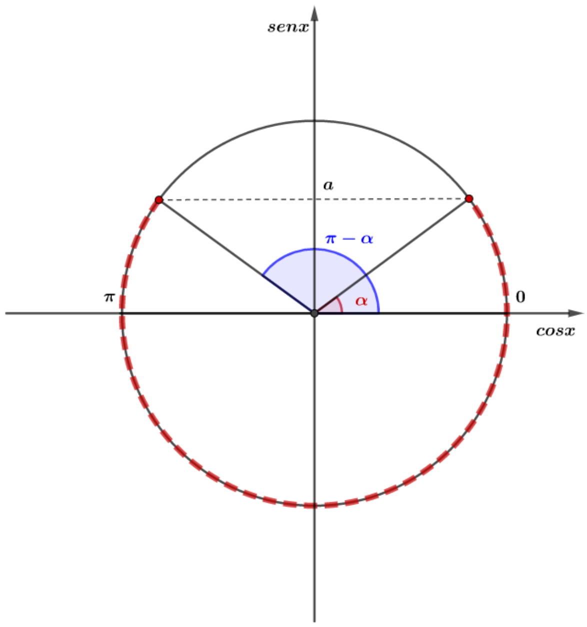


Observando o ciclo, podemos afirmar que os valores do seno que são maiores ou iguais a a devem pertencer ao intervalo:

$$\boldsymbol{arcsen(a) + 2k\pi \leq x \leq \pi - arcsen(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(II)\ senx \leq a$

Sendo $sen\alpha = a$, podemos usar o ciclo trigonométrico:



Observando a figura, podemos afirmar que os valores de x que satisfazem a inequação são dados por:

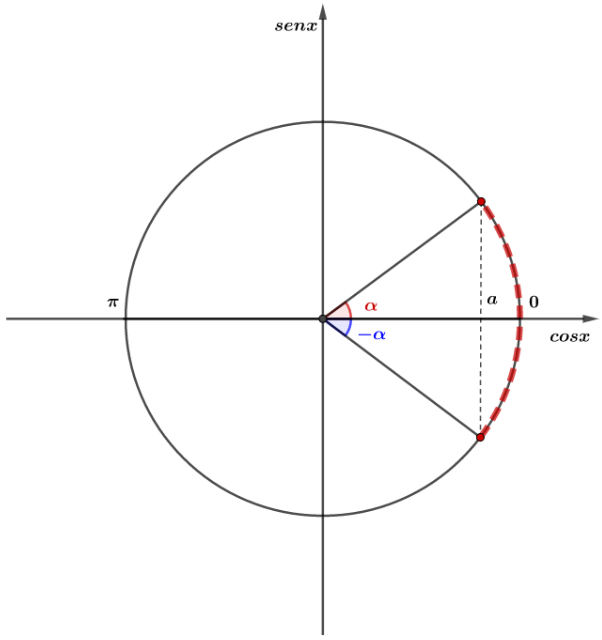
$$\boldsymbol{0 + 2k\pi \leq x \leq arcsen(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

Ou

$$\boldsymbol{\pi - arcsen(a) + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(III)\ cosx \geq a$

Usando o ciclo trigonométrico e considerando $cos\alpha = a$, temos:

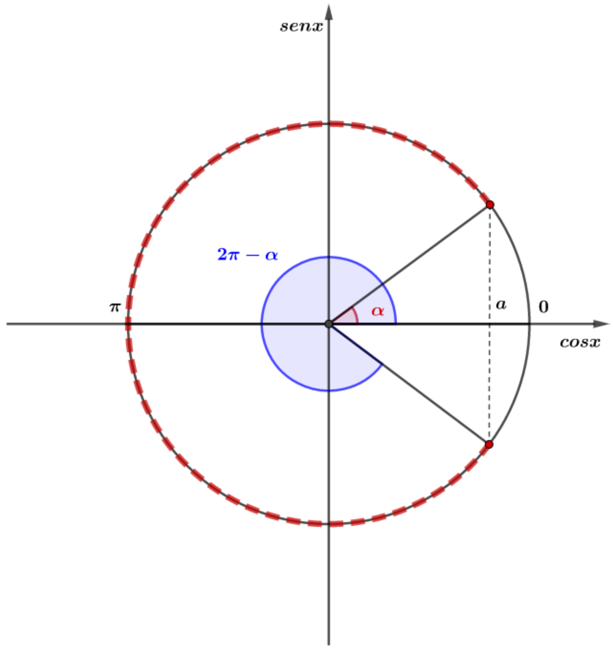


Pela figura, podemos ver que as soluções em x são dadas por:

$$-\boldsymbol{arccos(a) + 2k\pi \leq x \leq arccos(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(IV)\ cosx \leq a$

Usando o ciclo trigonométrico e considerando $cos\alpha = a$:

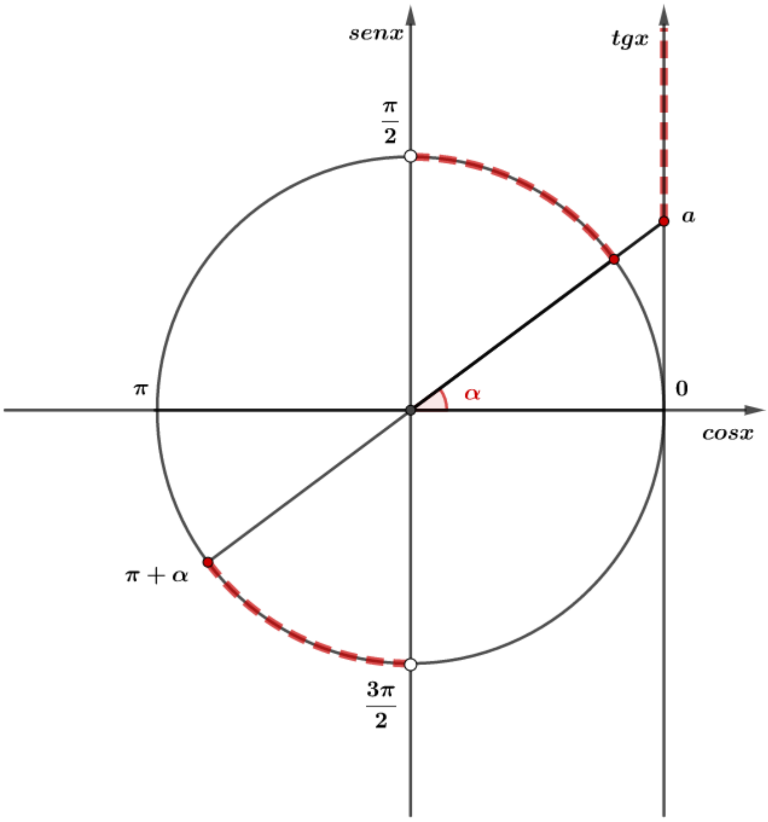


Podemos ver que a solução é dada por:

$$\boldsymbol{arccos(a) + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - arccos(a) + 2k\pi}$$

$(V)\ tgx \geq a$

Fazendo $tg\alpha = a$ e usando o ciclo trigonométrico, temos:



Analisando a figura, podemos ver que as soluções são dadas por:

$$arctg(a) + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

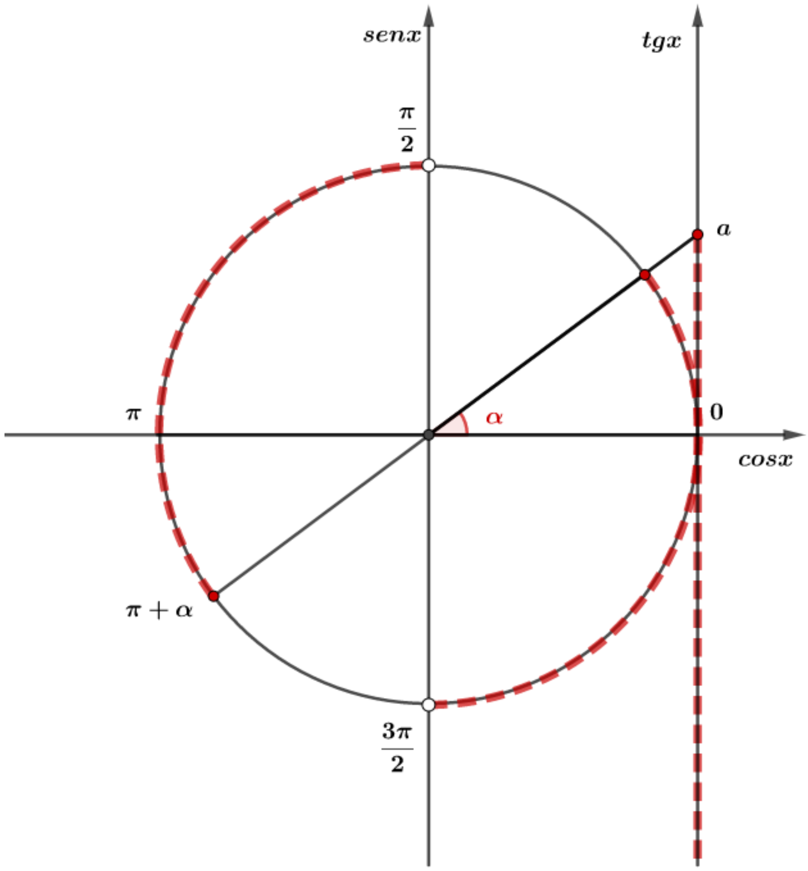
$$\pi + arctg(a) + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Podemos resumir essas duas soluções:

$$\boldsymbol{arctg(a) + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(VI)\ tgx \leq a$

Fazendo $tg\alpha = a$ e usando o ciclo trigonométrico:



Pela figura, podemos ver que a solução é dada por:

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + arctg(a) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

2. Resolva as seguintes inequações:

a) $|senx| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $senx + cosx \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos^2 x \geq \frac{1}{2}$

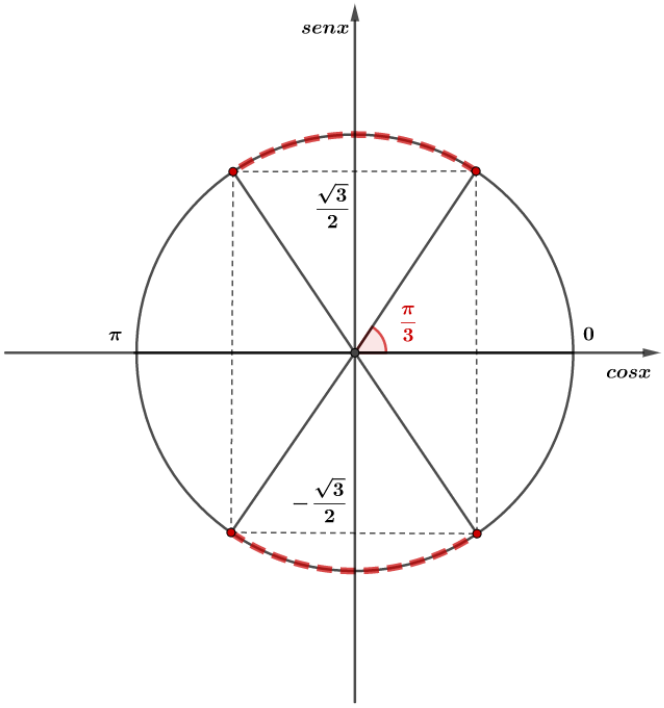
d) $tg^3x + 3 > 3tgx + tg^2x$

Resolução:

a) $|\boldsymbol{senx}| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vamos usar o círculo trigonométrico para nos auxiliar:

Sabemos que $sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, então, temos:



Podemos ver que os valores de x que satisfazem essa inequação é:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $\boldsymbol{senx} + \boldsymbol{cosx} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

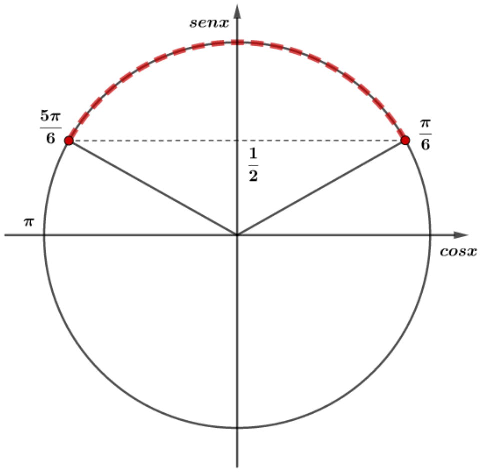
Vamos multiplicar a inequação por $\sqrt{2}/2$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}senx + \frac{\sqrt{2}}{2}cosx \geq \frac{1}{2}$$

$$senxcos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right)cosx \geq \frac{1}{2}$$

$$sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



Assim, a solução é dada por:

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$-\frac{\pi}{12} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

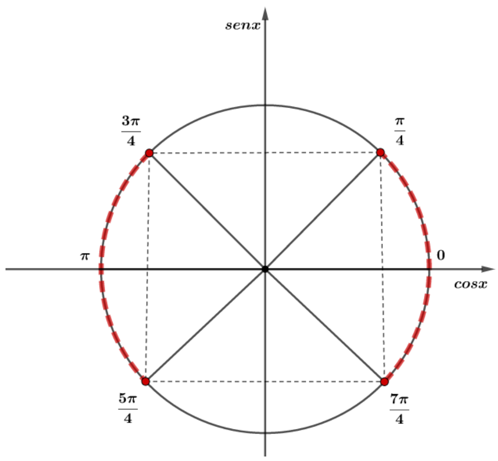
c) $\mathbf{cos^2}\,\boldsymbol{x} \geq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Como ambos os lados são positivos, podemos escrever:

$$\sqrt{\cos^2 x} \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$cosx \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \; ou \; cosx \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esboçando o ciclo trigonométrico:



A solução é dada por:

$$-\frac{\pi}{4}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$\frac{3\pi}{4}+2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Podemos resumir essa solução em uma única:

$$-\frac{\pi}{4}+k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{4}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) $\boldsymbol{tg^3x+3>3tgx+tg^2x}$

Vamos fatorar as expressões:

$$tg^3x-tg^2x+3-3tgx>0$$

$$tg^2x(tgx-1)+3(1-tgx)>0$$

$$(tgx-1)(tg^2x-3)>0$$

Possibilidades:

$$\begin{cases} tgx-1>0 \\ tg^2x-3>0 \end{cases} ou \begin{cases} tgx-1<0 \\ tg^2x-3<0 \end{cases}$$

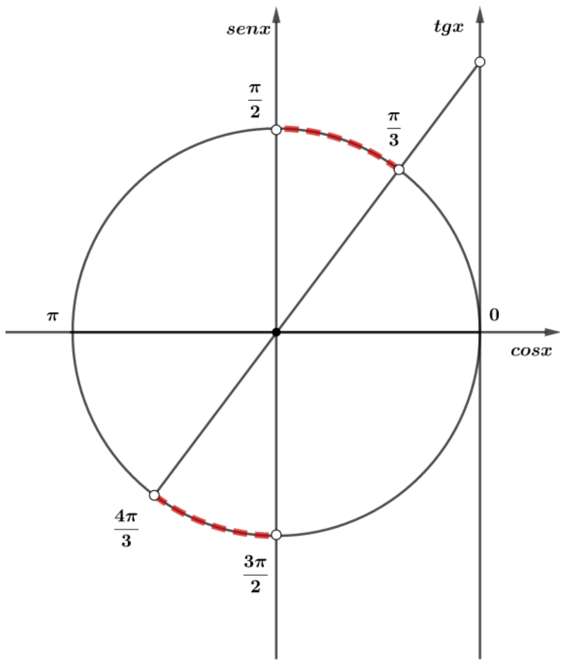
Para o primeiro caso:

$$tgx-1>0 \Rightarrow tgx>1$$

$$tg^2x-3>0 \Rightarrow tgx>\sqrt{3}\ ou\ tgx<-\sqrt{3}$$

Fazendo a intersecção das condições, temos:

$$tgx>\sqrt{3}$$



A solução é dada por:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para o segundo caso:

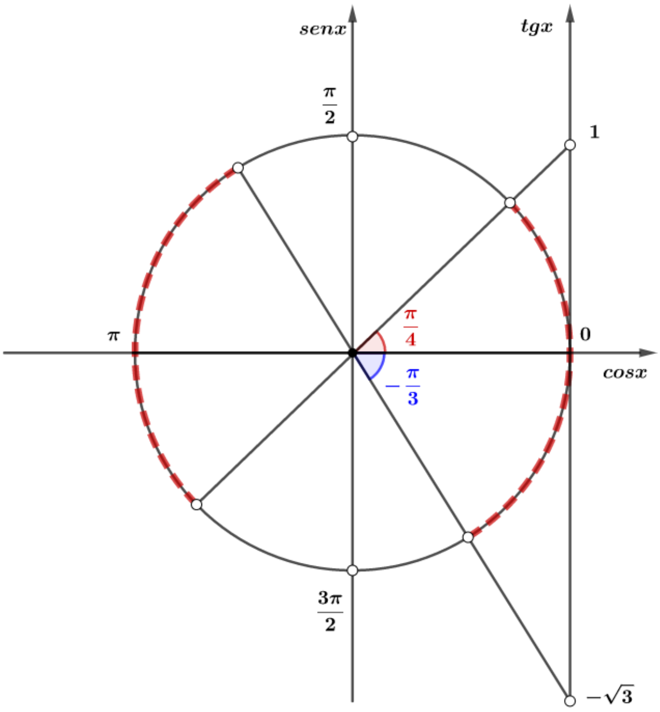
$$tgx < 1$$

E

$$-\sqrt{3} < tgx < \sqrt{3}$$

Fazendo a intersecção:

$$-\sqrt{3} < tgx < 1$$



A solução é dada por:

$$-\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Portanto, a solução completa é:

$$\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi \ ou \ -\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Gabarito:

a) $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq x\leq\frac{2\pi}{3}+2k\pi \ ou \ \frac{4\pi}{3}+2k\pi\leq x\leq\frac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}}$

b) $\boldsymbol{-\frac{\pi}{12}+2k\pi\leq x\leq\frac{7\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}}$

c) $\boldsymbol{-\frac{\pi}{4}+k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}}$

d) $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi \ ou \ -\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}}$

3. RESUMO

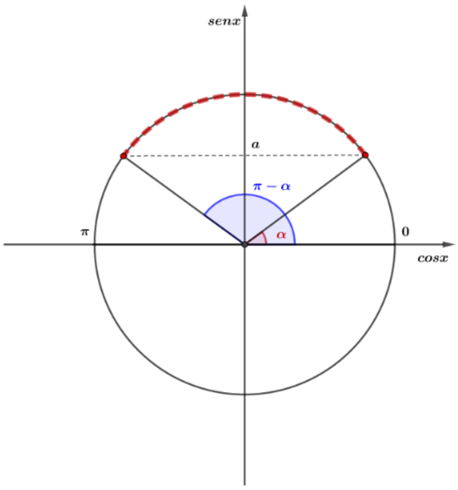
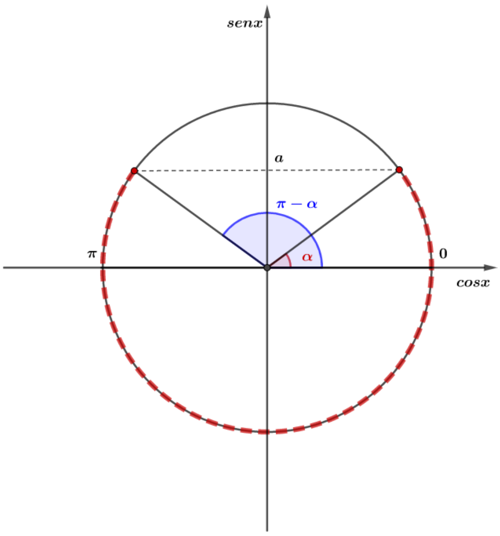
3.1. TABELA DE ÂNGULOS TRIGONOMÉTRICOS

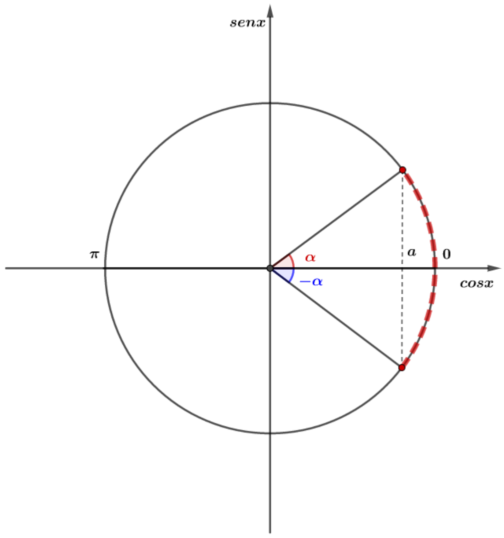
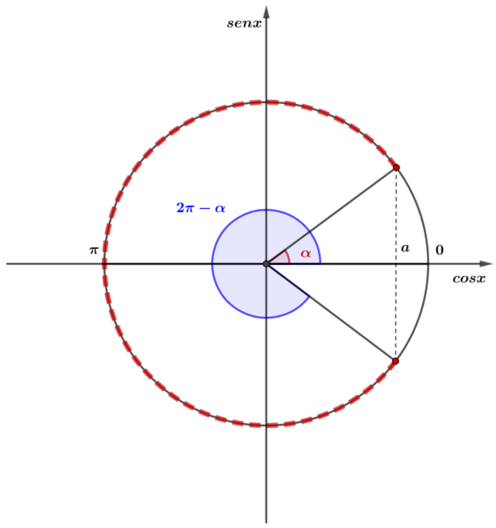
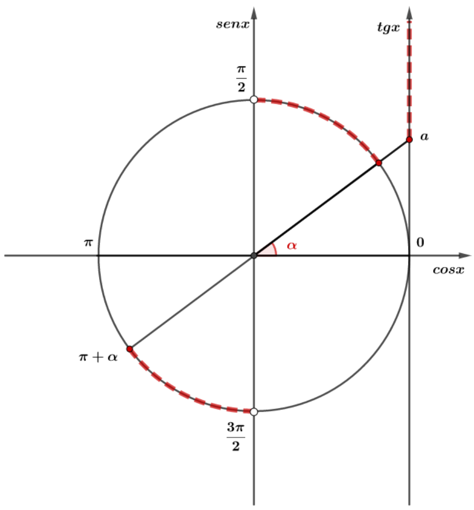
Graus	Radianos	*sen*	*cos*	*tg*
0°	0	0	1	0
15°	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
18°	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
36°	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
22,5°	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\sqrt{2}-1$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	*Não existe*
180°	π	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	*Não existe*

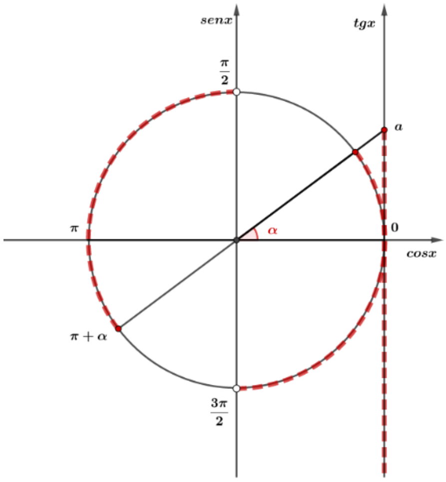
3.2. EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Equações Fundamentais	Solução
$sen\alpha = sen\beta$	$\alpha = \beta + 2k\pi$ ou $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$cos\alpha = cos\beta$	$\alpha = \pm\beta + 2k\pi$
$tg\alpha = tg\beta$	$\alpha = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3.3. INEQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Inequações Fundamentais	Ciclo Trigonométrico	Solução
$senx \geq a$		$arcsen(a) + 2k\pi \leq x$ e $x \leq \pi - arcsen(a) + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
$senx \leq a$		$0 + 2k\pi \leq x \leq arcsen(a) + 2k\pi$ Ou $\pi - arcsen(a) + 2k\pi \leq x$ $x \leq 2\pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$cosx \geq a$		$-\arccos(a) + 2k\pi \leq x$ e $x \leq \arccos(a) + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
$cosx \leq a$		$x \geq \arccos(a) + 2k\pi$ e $x \leq 2\pi - \arccos(a) + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$
$tgx \geq a$		$arctg(a) + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$tgx \leq a$		$\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \pi + arctg(a) + k\pi$

4. LISTA DE QUESTÕES

3. (EEAR/2019)

Se $0° \leq x \leq 90°$ e se $\operatorname{sen} 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, um dos possíveis valores de x é

a) $30°$

b) $45°$

c) $75°$

d) $85°$

4. (EEAR/2017)

No intervalo $[0, \pi]$, a soma das raízes da equação $3\cos^2 x - 7\operatorname{sen}^2 x + 2 = 0$ é igual a

a) 4π

b) 3π

c) 2π

d) π

5. (EEAR/2016)

No círculo trigonométrico os valores de x, tais que $\cos x \leq \frac{1}{2}$, são:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6}\ ou \frac{7\pi}{6} \leq x \leq 2\pi\right\}$

6. (EEAR/2014)

Se $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $0 \leq x < 2\pi$, então a soma dos valores possíveis para x é

a) $\frac{\pi}{2}$

b) π

c) $\frac{3\pi}{2}$

d) 2π

7. (EEAR/2014)

Se x é um arco do terceiro quadrante tal que $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$, o valor de $\operatorname{sen} x$ é

a) $\frac{\sqrt{13}}{13}$

b) $-\frac{\sqrt{13}}{13}$

c) $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$

d) $-\frac{3\sqrt{13}}{13}$

8. (EEAR/2013)

Se α é um ângulo do $1°$ quadrante, tal que $\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, a única alternativa que apresenta um possível valor para α é

a) $15°$

b) 30°

c) $50°$

d) $65°$

9. (EEAR/2013)

Se x é um arco do $3°$ quadrante tal que $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{3}$. Então o valor de $\cos x$ é

a) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

10. (EEAR/2011)

Se a e b são arcos do $2°$ quadrante tais que $\operatorname{sen} a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos b = -\frac{1}{2}$, então $\operatorname{sen}(a + b)$ é

a) $\frac{\sqrt{2}(-\sqrt{3}+\sqrt{2})}{4}$

b) $\frac{-\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$

c) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{4}$

d) $\frac{3(3-\sqrt{2})}{4}$

11. (EEAR/2008) [Adaptada]

Sendo $0 \leq x < 2\pi$, o conjunto solução da equação $\operatorname{sen} 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é

a) $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right\}$.

b) $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

c) $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right\}$.

d) $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

12. (EEAR/2007)

Se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então a maior raiz positiva da equação $(\operatorname{tg} x - 1)(4 \operatorname{sen}^2 x - 3) = 0$ é

a) $\frac{4\pi}{3}$

b) $\frac{5\pi}{4}$

c) $\frac{7\pi}{6}$

d) $\frac{7\pi}{4}$

13. (EEAR/2007)

Os valores de x, sendo $0 \leq x \leq \pi$, para os quais obtêm-se $2\cos x - 1 > 0$, são tais que

a) $0 < x < \frac{5\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{3} < x \leq \pi$

c) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

d) $\boldsymbol{0 \leq x < \frac{\pi}{3}}$

14. (EEAR/2006)

A solução real da inequação $\frac{1}{2} < \operatorname{sen} x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, é:

a) $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$

b) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$

c) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[$

d) $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[$

15. (EEAR/2003)

Uma das raízes da equação $x^2 - (2\operatorname{tg}\alpha)x - 1 = 0$ é, sendo $\alpha \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

a) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cossec}\alpha$

b) $\operatorname{tg}\alpha - \cos\alpha$

c) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{sen}\alpha$

d) $\operatorname{tg}\alpha - \sec\alpha$

16. (EEAR/2003)

A solução geral da equação $\mathrm{sen}^2\, x - 2\,\mathrm{sen}\, x \cos x + \cos^2 x = 0$, sendo $U = \mathbb{R}$, é

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$

c) $\left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$

d) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

17. (EEAR/2003)

No círculo trigonométrico, a igualdade $\mathrm{sen}(\pi x) = 0$ é verdadeira se e somente se x é um número

a) real qualquer.

b) inteiro.

c) imaginário.

d) irracional.

18. (EEAR/2002)

A inequação $\mathrm{sen}\frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}$, onde $0 \leq x \leq 2\pi$, é verdadeira se, e somente se,

a) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$

b) $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

19. (EEAR/2002)

Resolvendo a equação $\mathrm{sen}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, onde $0 \leq x \leq 2\pi$, obtemos como conjunto solução:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 60° + k \cdot 360°$ **ou** $x = 120° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 30° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 60° + k \cdot 360°$ **ou** $x = 240° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}\}$

d) $\{x = 30° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}\}$

20. (EEAR/2002) [Adaptada]

A solução da inequação $\frac{1}{2} < \cos x < 1$, no intervalo $0 \le x \le 2\pi$, é dada por x real, tal que:

a) $\left\{0 < x < \frac{\pi}{3} \ ou \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

b) $\left\{\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$

c) $\left\{0 < x < \frac{2\pi}{3} \ ou \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

d) $\left\{\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}\right\}$

21. (EEAR/2001)

O menor valor real positivo de x tal que $4^{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}$ é:

a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{7\pi}{6}$

d) $\frac{11\pi}{6}$

22. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

O conjunto solução em x para a inequação:

$$\frac{1}{4} < \operatorname{sen}^2 x < \frac{3}{4}$$

Para $0 \le x < 2\pi$, é:

a) $\left]-\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$

b) $\left]-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$

c) $\left]-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right[$

d) $\left]-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$

23. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Se x é um ângulo do 1° quadrante e $\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, então um possível valor para x é

a) $3\pi/4$

b) $\pi/3$

c) $5\pi/6$

d) $5\pi/12$

24. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

O número de soluções reais em $x \in]0, 2\pi[$ da equação: $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$, é igual a:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

25. (Espcex/2019)

O número de raízes da equação $2\cos^2 x + 3cosx + 1 = 0$ no intervalo $]0, 2\pi[$ é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

26. (Espcex/2018)

O conjunto solução da inequação $2sen^2x - cosx - 1 \geq 0$, no intervalo $]0, 2\pi]$ é

a) $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$

c) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

d) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

e) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}\right]$

27. (Espcex/2017)

A soma das soluções da equação $\cos(2x) - \cos(x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi)$, é igual a

a) $\frac{5\pi}{3}$

b) 2π

c) $\frac{7\pi}{3}$

d) π

e) $\frac{8\pi}{3}$

28. (Espcex/2015)

A soma de todas as soluções da equação $2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0$, que estão contidas no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a

a) 2π

b) 3π

c) 4π

d) 5π

e) 6π

29. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Determine o conjunto dos números reais x tais que $sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

30. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Resolver em ▯:

a) $sen^2 x = 1$

b) $sen\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

c) $\frac{1}{sen^2 x} = 1 - \frac{cosx}{senx}$

d) $sen(4x) - \cos x = 0$

e) $\sqrt{3}cosx + senx = 1$

31. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Para que valores de $m, m \in \mathbb{R}$, a equação $m \cdot senx + cosx = m$ tem solução?

32. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Resolver em $[0, 2\pi[$:

$$sen^3x \cdot cosx - senxcos^3x = \frac{1}{4}$$

33. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Resolva as seguintes inequações:

a) $|tgx| > \sqrt{3}$

b) $\frac{cosx}{1+cos2x} < 0$

34. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Se $senx + \cos x = \frac{8}{13}$ e se $tgx = -\frac{3}{4}$, então, no ciclo trigonométrico, x pertence ao _____ quadrante:

a) 1º

b) 2º

c) 3º

d) 4º

e) Não há solução real.

4.1. GABARITO

GABARITO

3. **c**
4. **d**
5. **b**
6. **b**
7. **c**
8. **d**
9. **a**
10. **b**

11. c
12. a
13. d
14. d
15. d
16. b
17. b
18. b
19. a
20. a
21. c
22. d
23. d
24. c
25. d
26. c
27. b
28. d
29. $S = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
30. a) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ b) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $x = \frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ e) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

31. $\forall m \in \mathbb{R}$
32. $S = \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{11\pi}{4}; \frac{15\pi}{8}\right\}$
33. a) $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ b) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$
34. e

5. LISTA DE QUESTÕES RESOLVIDAS E COMENTADAS

3. (EEAR/2019)

Se $0° \leq x \leq 90°$ e se sen $4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, um dos possíveis valores de x é

a) $30°$

b) $45°$

c) $75°$

d) $85°$

Comentários

$$\text{sen}\, 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}(-60°) \Leftrightarrow 4x = -60° + 360° \cdot k \vee 4x = 180° - (-60°) + 360° \cdot k,$$

$\Leftrightarrow x = -15° + 90° \cdot k$ ou $x = 60° + 90° \cdot k, k \in \mathbb{Z}$. Conjunto solução, com $0° \leq x \leq 90°$:

$$S = \{60°, 75°\}$$

Gabarito: "c".

---

4. (EEAR/2017)

No intervalo $[0, \pi]$, a soma das raízes da equação $3\cos^2 x - 7\,\text{sen}^2 x + 2 = 0$ é igual a

a) 4π

b) 3π

c) 2π

d) π

Comentários

Usando que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos:

$$3\cos^2 x - 7\,\text{sen}^2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3\cos^2 x - 7(1 - \cos^2 x) + 2 = 0 \Leftrightarrow 10\cos^2 x = 5$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para o intervalo $[0, \pi]$, temos:

$$S = \left\{\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}, \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right\} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}.$$

Soma:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$$

Gabarito: "d".

---

5. (EEAR/2016)

No círculo trigonométrico os valores de x, tais que $\cos x \leq \frac{1}{2}$, são:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$

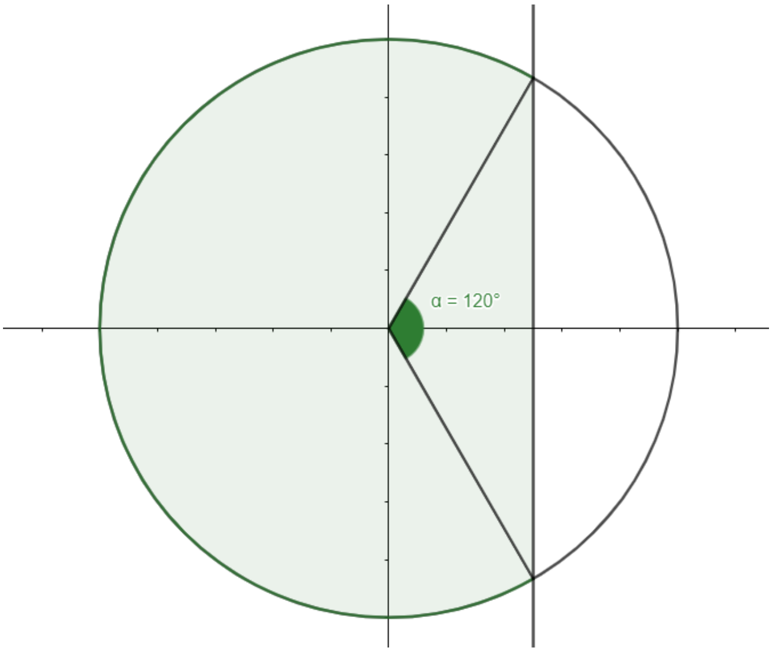
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \; ou \, \frac{7\pi}{6} \leq x \leq 2\pi\right\}$

Comentários

Considerando o intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, temos, visualmente:



Logo, $\cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\arccos\frac{1}{2}, 2\pi - \arccos\frac{1}{2}\right] = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$, isto é,

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$$

Gabarito: “b”.

---

6. (EEAR/2014)

Se $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $0 \leq x < 2\pi$, então a soma dos valores possíveis para x é

a) $\frac{\pi}{2}$

b) π

c) $\frac{3\pi}{2}$

d) 2π

Comentários

$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Para $0 \leq x < 2\pi$, temos o seguinte conjunto-solução:

$$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$$

$$\text{Soma} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi$$

Gabarito: "b".

---

7. (EEAR/2014)

Se x é um arco do terceiro quadrante tal que $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$, o valor de $\operatorname{sen} x$ é

a) $\frac{\sqrt{13}}{13}$

b) $-\frac{\sqrt{13}}{13}$

c) $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$

d) $-\frac{3\sqrt{13}}{13}$

Comentários

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \Leftrightarrow \frac{4}{9} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \Leftrightarrow 4 = 13 \operatorname{sen}^2 x$$

Como $x \in 3°$ quadrante, $\operatorname{sen} x < 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

Gabarito: "c".

---

8. (EEAR/2013)

Se α é um ângulo do $1°$ quadrante, tal que $\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, a única alternativa que apresenta um possível valor para α é

a) $15°$

b) $30°$

c) $50°$

d) $65°$

Comentários

No primeiro quadrante, a função seno é crescente. Sendo assim, para $0 \leq x \leq 90°$,

$$\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen} 60° \Leftrightarrow x > 60°$$

Gabarito: "d".

---

9. (EEAR/2013)

Se x é um arco do $3°$ quadrante tal que $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{3}$. Então o valor de $\cos x$ é

a) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

c) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

Comentários

$$x \in 3° \text{ quadrante } \Rightarrow \cos x < 0 \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Gabarito: "a".

---

10. (EEAR/2011)

Se a e b são arcos do $2°$ quadrante tais que $\operatorname{sen} a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos b = -\frac{1}{2}$, então $\operatorname{sen}(a + b)$ é

a) $\frac{\sqrt{2}(-\sqrt{3}+\sqrt{2})}{4}$

b) $\frac{-\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$

c) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)}{4}$

d) $\frac{3(3-\sqrt{2})}{4}$

Comentários

$$\operatorname{sen} a = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } a \in 2° \text{ quadrante}$$

$$\Rightarrow a = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \cos a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos b = -\frac{1}{2} \text{ e } b \in 2° \text{ quadrante}$$

$$\Rightarrow b = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \operatorname{sen} b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo,

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

Gabarito: "b".

---

11. (EEAR/2008) [Adaptada]

Sendo $0 \leq x < 2\pi$, o conjunto solução da equação $\operatorname{sen} 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é

a) $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right\}$.

b) $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

c) $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right\}$.

d) $\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Comentários

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, temos: $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi$ ou $a = \pi - b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos:

$$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

ou

$$3x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$$

ou

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

O conjunto solução é, portanto, no intervalo considerado, $S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right\}$, ou ainda,

$$S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\right\}$$

Gabarito: "c".

---

12. (EEAR/2007)

Se $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então a maior raiz positiva da equação $(\operatorname{tg} x - 1)(4\operatorname{sen}^2 x - 3) = 0$ é

a) $\frac{4\pi}{3}$

b) $\frac{5\pi}{4}$

c) $\frac{7\pi}{6}$

d) $\frac{7\pi}{4}$

Comentários

Para $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$:

$(\operatorname{tg} x - 1)(4\operatorname{sen}^2 x - 3) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1$ ou $4\operatorname{sen}^2 x = 3$

$$\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4}$$

$$4\operatorname{sen}^2 x = 3 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto, a maior raiz positiva é $\frac{4\pi}{3}$, visto que $\frac{4\pi}{3} > \frac{5\pi}{4}$

Gabarito: “a”.

---

13. (EEAR/2007)

Os valores de x, sendo $0 \leq x \leq \pi$, para os quais obtêm-se $2\cos x - 1 > 0$, são tais que

a) $0 < x < \frac{5\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{3} < x \leq \pi$

c) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$

d) $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$

Comentários

Em $0 \leq x \leq \pi$:

$$2\cos x - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

Gabarito: “d”.

---

14. (EEAR/2006)

A solução real da inequação $\frac{1}{2} < \operatorname{sen} x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, é:

a) $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[$

b) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]$

c) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[$

d) $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[$

Comentários

No intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} < \operatorname{sen} x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{4} \vee \pi - \frac{\pi}{4} \leq x < \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{3\pi}{4} \leq x < \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[$$

Gabarito: "d".

---

15. (EEAR/2003)

Uma das raízes da equação $x^2 - (2\operatorname{tg}\alpha)x - 1 = 0$ é, sendo $\alpha \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

a) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cossec}\alpha$

b) $\operatorname{tg}\alpha - \cos\alpha$

c) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{sen}\alpha$

d) $\operatorname{tg}\alpha - \sec\alpha$

Comentários

Resolvendo a equação do segundo grau pela fórmula de Bháskara:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\operatorname{tg}\alpha)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = 4\sec^2\alpha$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \operatorname{tg}\alpha - \sec\alpha, x_2 = \operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha$$

Gabarito: "d".

---

16. (EEAR/2003)

A solução geral da equação $\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = 0$, sendo $U = \mathbb{R}$, é

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$

c) $\left\{-\frac{\pi}{4}\right\}$

d) $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

Comentários

$$0 = \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = (\operatorname{sen} x - \cos x)^2$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

A penúltima equivalência é válida porque não existe solução tal que $\cos x = 0$, pois aí teríamos $\operatorname{sen} x = 0$ e $1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 0^2 + 0^2 = 0$, absurdo.

Gabarito: "b".

---

17. (EEAR/2003)

No círculo trigonométrico, a igualdade $\operatorname{sen}(\pi x) = 0$ é verdadeira se e somente se x é um número

a) real qualquer.

b) inteiro.

c) imaginário.

d) irracional.

Comentários

$$\operatorname{sen}(\pi x) = 0 \Leftrightarrow \pi x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}.$$

Gabarito: "b".

---

18. (EEAR/2002)

A inequação $\operatorname{sen} \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}$, onde $0 \leq x \leq 2\pi$, é verdadeira se, e somente se,

a) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$

b) $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

Comentários

No intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$,

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{5\pi}{6} = \pi - \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$$

Gabarito: "b".

---

19. (EEAR/2002)

Resolvendo a equação $\mathbf{sen}\,x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, onde $0 \leq x \leq 2\pi$, obtemos como conjunto solução:

a) $\{x \in \mathbb{R}\ |x = 60° + k \cdot 360° \text{ ou } x = 120° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}\ |x = 30° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R}\ |x = 60° + k \cdot 360° \text{ ou } x = 240° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}\}$

d) $\{x = 30° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}\}$

Comentários

$\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60°$ pois $\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Assim, a equação se torna:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 60° \Leftrightarrow x = 60° + k \cdot 360°$$

ou

$$x = 180° - 60° + k \cdot 360° \Leftrightarrow x = 60° + k \cdot 360°$$

ou

$$x = 120° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}.$$

Gabarito: "a".

---

20. (EEAR/2002) [Adaptada]

A solução da inequação $\frac{1}{2} < \cos x < 1$, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, é dada por x real, tal que:

a) $\left\{0 < x < \frac{\pi}{3}\ ou \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

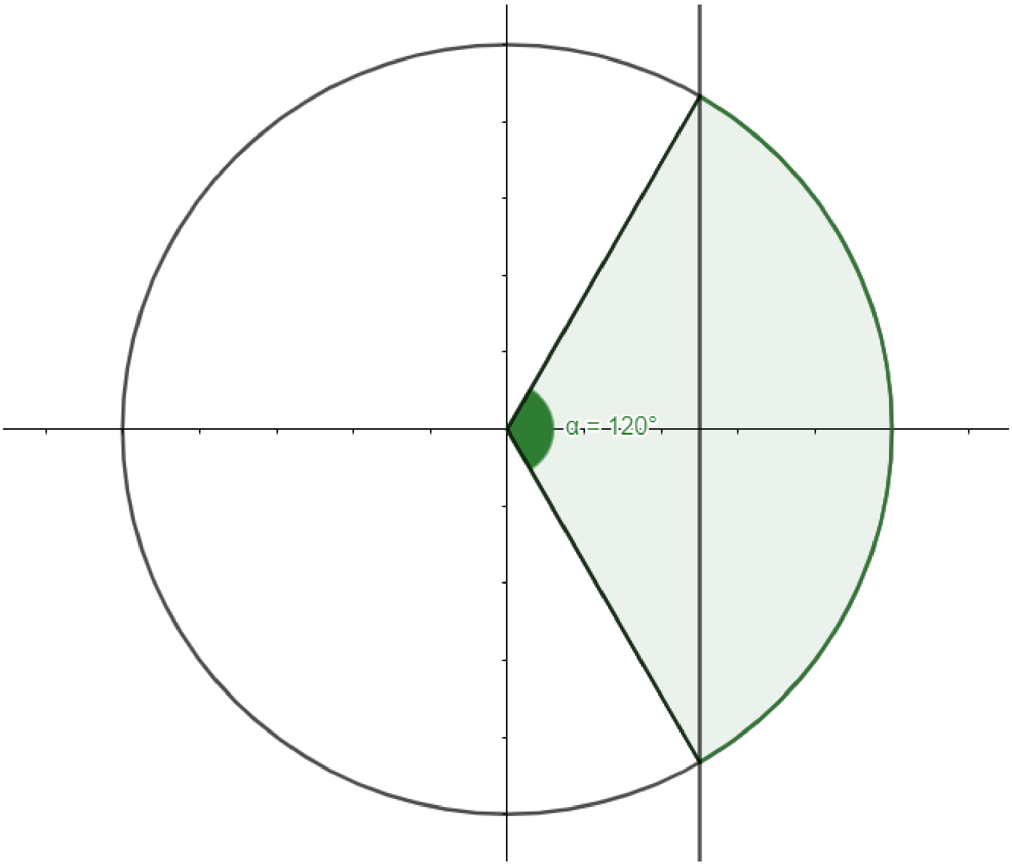
b) $\left\{\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$

c) $\left\{0 < x < \frac{2\pi}{3}\ ou \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$

d) $\left\{\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}\right\}$

Comentários

Visualmente, o conjunto solução é $S = \left\{0 < x < \frac{\pi}{3}\ ou \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi\right\}$.



Gabarito: "a".

---

21. (EEAR/2001)

O menor valor real positivo de x tal que $4^{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2}$ é:

a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{7\pi}{6}$

d) $\frac{11\pi}{6}$

Comentários

Colocando na mesma base:

$$4^{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^{2\operatorname{sen} x} = 2^{-1}$$

Como a função 2^y é crescente, temos:

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$$

O menor valor real de x cujo seno é $-\frac{1}{2}$ é $\pi + \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.

Gabarito: "c".

---

22. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

O conjunto solução em x para a inequação:

$$\frac{1}{4} < \text{sen}^2 x < \frac{3}{4}$$

Para $0 \leq x < 2\pi$, é:

a) $\left]-\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$

b) $\left]-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$

c) $\left]-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right[$

d) $\left]-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right[$

Comentários

Resolvendo a inequação da esquerda:

$$sen^2x > \frac{1}{4} \Rightarrow sen^2x - \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \left(sen\,x - \frac{1}{2}\right)\left(sen\,x + \frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow sen\,x < -\frac{1}{2}\ ou\ sen\,x > \frac{1}{2}$$

Pois os termos do produto acima precisam ser ambos de mesmos sinais. Daí:

$$\Rightarrow -1 \leq sen\,x < -\frac{1}{2}\ ou\ \frac{1}{2} < sen\,x < 1$$

Resolvendo a inequação da direita:

$$sen^2x < \frac{3}{4} \Rightarrow sen^2x - \frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \left(sen\,x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(sen\,x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < sen\,x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pois o produto dos termos entre parênteses tem que ser negativo e, por isso, eles precisam ter sinais diferentes.

Como as desigualdades da direita e da esquerda precisam ser satisfeitas ao mesmo tempo:

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < sen\,x < -\frac{1}{2}\ ou\ \frac{1}{2} < sen\,x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Escrevendo em notação de união de intervalos:

$$\left]-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$$

Gabarito: "d".

---

23. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Se x é um ângulo do $1°$ quadrante e $\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, então um possível valor para x é

a) $3\pi/4$

b) $\pi/3$

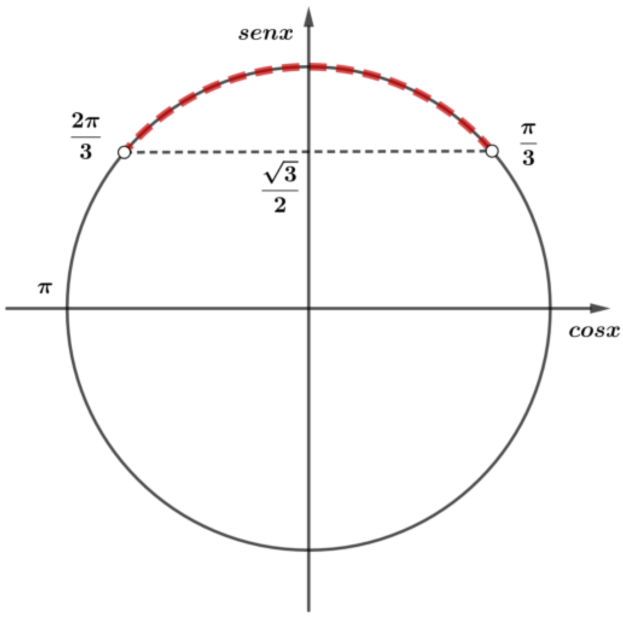
c) $5\pi/6$

d) $5\pi/12$

Comentários

No ciclo trigonométrico, temos que

$$\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$$



Analisando as alternativas, a única que pertence ao intervalo é:

$$x = \frac{5\pi}{12} > \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

Gabarito: "d".

---

24. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

O número de soluções reais em $x \in]0, 2\pi[$ da equação: $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$, é igual a:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Comentários

Podemos pensar em resolver essa questão manipulando a expressão dada, pensando na identidade trigonométrica principal, válida para qualquer $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Como a expressão dada no enunciado lida com termos do quarto grau do lado esquerdo da igualdade e número 1 do lado direito, convém elevarmos essa expressão acima ao quadrado:

$$(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 = 1^2$$

Desenvolvendo o produto notável $(a + b)^2$:

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^4 x + 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x = 1 \ (*)$$

Bom, essa expressão acima é válida para todo x. Porém, os x que queremos encontrar obedecem à equação do enunciado. Isto é:

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 \ (**)$$

Portanto, subtraindo $(**) \ de \ (*)$:

$$2 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = 0 \Rightarrow 4 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = 0 \Rightarrow (2 \operatorname{sen} x \cos x)^2 = 0$$

Mas $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$. Portanto:

$$(\operatorname{sen} 2x)^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

Porém, lembrando que:

$$0 < x < 2\pi \Rightarrow 0 < \frac{k\pi}{2} < 2\pi \Rightarrow 0 < k < 4$$

Portanto, k pode assumir apenas os valores 1, 2 e 3, totalizando 3 soluções no intervalo desejado.

Gabarito: "c"

---

25. (Espcex/2019)

O número de raízes da equação $2\cos^2 x + 3cosx + 1 = 0$ no intervalo $]0, 2\pi[$ é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentários

Vamos encontrar as raízes da equação:

$$cosx = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = -1 \; ou - \frac{1}{2}$$

Para $cosx = -1$ e $x \in]0, 2\pi[$:

$$cosx = -1 \Rightarrow x = \pi$$

Para $cosx = -1/2$:

$$cosx = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \; ou \; x = \frac{4\pi}{3}$$

Portanto, temos 3 raízes distintas.

Gabarito: "d".

---

26. (Espcex/2018)

O conjunto solução da inequação $2sen^2 x - cosx - 1 \geq 0$, no intervalo $]0, 2\pi]$ é

a) $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$

b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$

c) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

d) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

e) $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}\right]$

Comentários

Reescrevendo a inequação, obtemos:

$$2(1 - \cos^2 x) - cosx - 1 \geq 0$$

$$-2\cos^2 x - cosx + 1 \geq 0$$

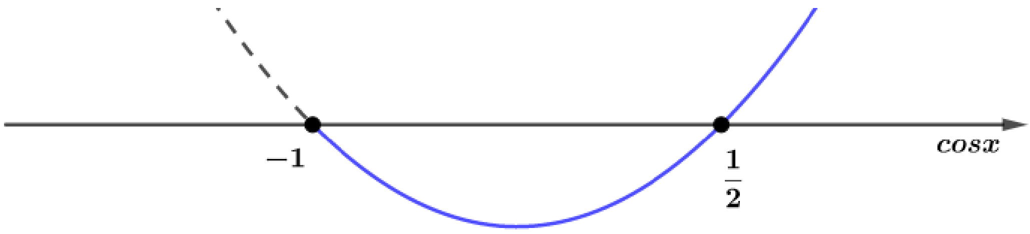
$$2\cos^2 x + cosx - 1 \leq 0$$

Encontrando as raízes:

$$cosx = \frac{\left(-1 \pm \sqrt{9}\right)}{4} = -1 \; ou \frac{1}{2}$$

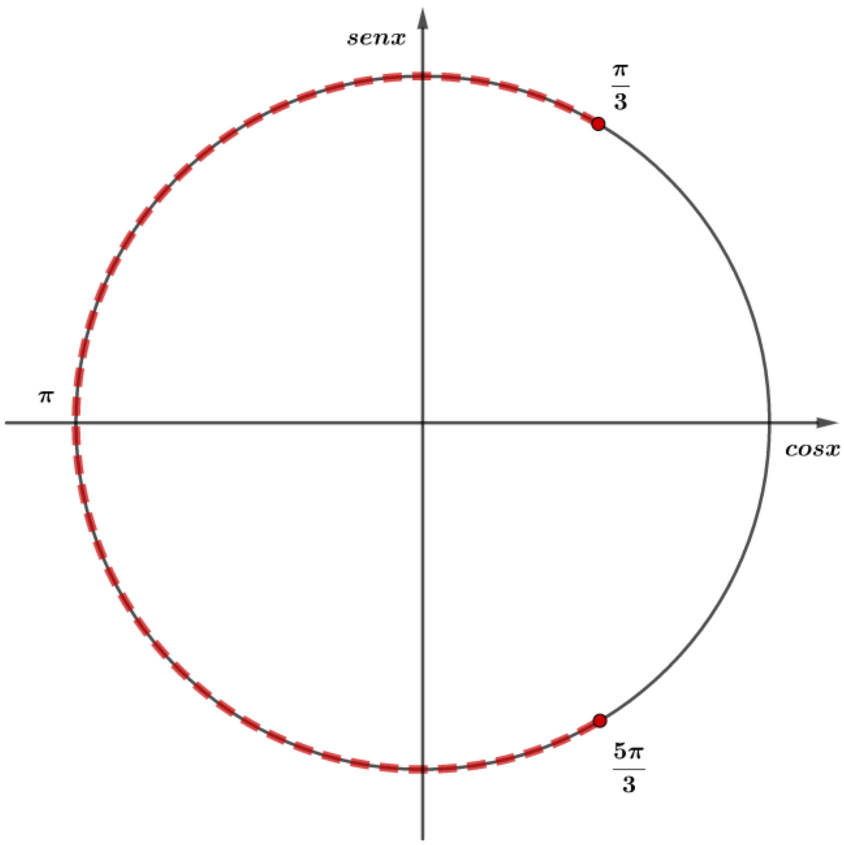
$$2(cosx + 1)\left(cosx - \frac{1}{2}\right) \leq 0$$

Estudando o sinal dessa função, temos:



$$-1 \leq cosx \leq \frac{1}{2}$$

Usando o ciclo trigonométrico:



Assim, podemos ver que:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Queremos as soluções no intervalo $]0,2\pi]$, assim, temos:

$$x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$$

Gabarito: “c”.

---

27. (Espcex/2017)

A soma das soluções da equação $\cos(2x) - \cos(x) = 0$, com $x \in [0, 2\pi)$, é igual a

a) $\frac{5\pi}{3}$

b) 2π

c) $\frac{7\pi}{3}$

d) π

e) $\frac{8\pi}{3}$

Comentários

Desenvolvendo a equação, obtemos:

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Encontrando as raízes dessa equação:

$$cosx = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = 1 \; ou - \frac{1}{2}$$

Para $x \in [0, 2\pi)$:

$$cosx = 1 \Rightarrow x = 0$$

$$cosx = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \; ou \; x = \frac{4\pi}{3}$$

Somando as raízes:

$$S = 0 + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi$$

Gabarito: “b”.

---

28. (Espcex/2015)

A soma de todas as soluções da equação $2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0$, que estão contidas no intervalo $[0, 2\pi]$, é igual a

a) 2π

b) 3π

c) 4π

d) 5π

e) 6π

Comentários

Vamos fatorar a expressão:

$$2\cos(x)\,(\cos^2(x) - 1) - (\cos^2(x) - 1) = 0$$

$$(2\cos x - 1)(\cos^2 x - 1) = 0$$

As raízes são dadas por:

$$cosx = \frac{1}{2}\ ou \cos x = \pm 1$$

Para $x \in [0, 2\pi]$:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}\ ou\ x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 0\ ou\ x = 2\pi$$

$$cosx = -1 \Rightarrow x = \pi$$

Somando as raízes, temos:

$$S = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} + 2\pi + \pi = 5\pi$$

Gabarito: "d".

---

29. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Determine o conjunto dos números reais x tais que $sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Comentários

Sabemos que $sen(k\pi) = 0, k \in \mathbb{Z}$. Então:

$$2x - \frac{\pi}{3} = k\pi$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

---

30. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Resolver em ℝ:

a) $\boldsymbol{sen^2 x = 1}$

b) $\boldsymbol{sen\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0}$

c) $\boldsymbol{\frac{1}{sen^2 x} = 1 - \frac{cosx}{senx}}$

d) $\boldsymbol{sen(4x) - \cos x = 0}$

e) $\boldsymbol{\sqrt{3}cosx + senx = 1}$

Comentários

a) $sen^2 x = 1$

$$senx = \pm 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) $sen\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$3x - \frac{\pi}{2} = k\pi \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

c) $\frac{1}{sen^2 x} = 1 - \frac{cosx}{senx}$

$$cossec^2 x = 1 - cotgx$$

Usando a relação fundamental:

$$1 + cotg^2x = 1 - cotgx$$

$$cotg^2 + cotgx = 0$$

$$cotgx(cotgx + 1) = 0$$

Raízes:

$$cotgx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$cotgx = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d) $sen(4x) - cosx = 0$

$$sen(4x) = cosx$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = cosx$$

$$\frac{\pi}{2} - 4x = \pm x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$4x \pm x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$$

$$5x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

e) $\sqrt{3}cosx + senx = 1$

Vamos dividir a equação por 2:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}cosx + \frac{1}{2}senx = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)cosx + sen\left(\frac{\pi}{6}\right)senx = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

b) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$

c) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

d) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{10} - \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}\ ou\ x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$

e) $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$ **ou** $\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

---

31. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Para que valores de $\boldsymbol{m, m \in \mathbb{R}}$**, a equação** $\boldsymbol{m \cdot senx + cosx = m}$ **tem solução?**

Comentários

Vamos isolar m:

$$m(1 - senx) = cosx$$

$$m = \frac{cosx}{1 - senx}$$

Usando as seguintes identidades:

$$\boxed{senA = \frac{2tg\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$\boxed{\cos(A) = \frac{1 - tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{A}{2}\right)}}$$

$$m = \frac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)}$$

$$m=\frac{\left(1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)-2tg\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$m=\frac{1-tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(1-tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$$

$$m=\frac{\left(1-tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(1+tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(1-tg\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}$$

$$m=\frac{1+tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1-tg\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Isolando a tangente:

$$m-mtg\left(\frac{x}{2}\right)=1+tg\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$tg\left(\frac{x}{2}\right)(1+m)=m-1$$

$$tg\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{m-1}{1+m}$$

Como a função tangente possui imagem no conjunto dos reais, temos que a única restrição é $1+m\neq 0$:

$$1+m\neq 0\Rightarrow m\neq -1$$

Para $m=-1$, temos:

$$-senx+cosx=-1$$

Esse caso possui solução para:

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Portanto, $\forall m\in\mathbb{R}$, a equação possui solução.

Gabarito: $\forall m\in\mathbb{R}$

---

32. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Resolver em $[0,2\pi[$:

$$\boldsymbol{sen^3x \cdot cosx - senxcos^3x = \frac{1}{4}}$$

Comentários

Vamos fatorar a expressão:

$$\underbrace{senx \cdot cosx}_{\frac{sen(2x)}{2}}\left(\underbrace{sen^2x - \cos^2 x}_{-\cos(2x)}\right) = \frac{1}{4}$$

$$-\frac{sen(2x)\cos(2x)}{2} = \frac{1}{4}$$

$$2sen(2x)\cos(2x) = -1$$

$$sen(4x) = -1$$

As raízes são dadas por:

$$4x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Para o intervalo determinado:

$$x = \frac{3\pi}{8}\ ou\ x = \frac{7\pi}{8}\ ou\ x = \frac{11\pi}{8}\ ou\ x = \frac{15\pi}{8}$$

$$\therefore S = \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{11\pi}{4}; \frac{15\pi}{8}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{11\pi}{4}; \frac{15\pi}{8}\right\}}$

---

33. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Resolva as seguintes inequações:

a) $\boldsymbol{|tgx| > \sqrt{3}}$

b) $\boldsymbol{\frac{cosx}{1+cos2x} < 0}$

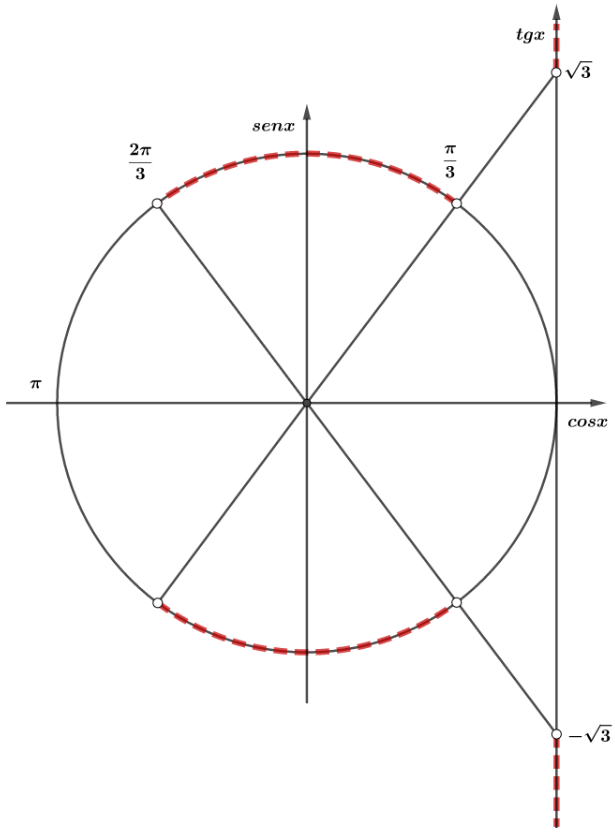
Comentários

a) Sempre que resolver uma inequação trigonométrica, recomendo usar o ciclo trigonométrico para visualizar as raízes do problema:

$$|tgx| > \sqrt{3}$$

$$tgx > \sqrt{3}\ ou\ tgx < -\sqrt{3}$$

Ciclo trigonométrico:



Assim, as raízes são dadas por:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Vamos escrever $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$:

$$\frac{cosx}{1 + 2\cos^2 x - 1} < 0$$

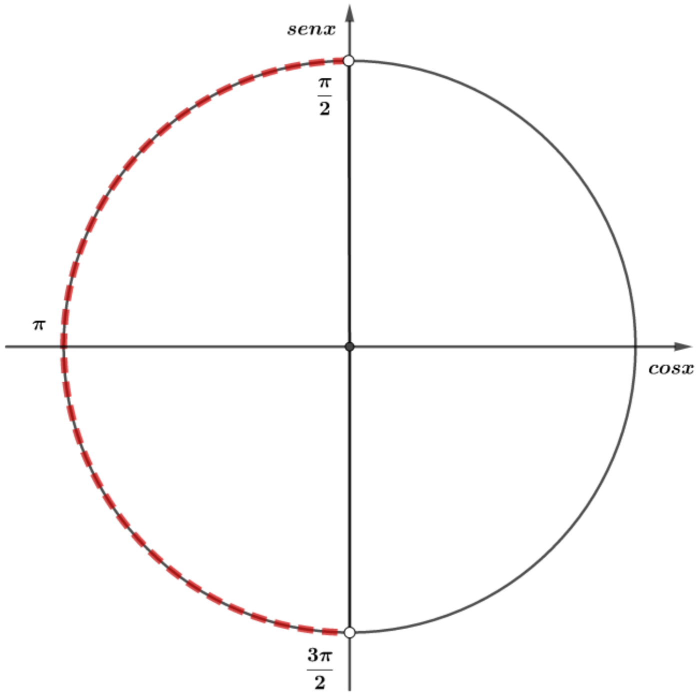
$$\frac{cosx}{2\cos^2 x} < 0$$

Para $cosx \neq 0$:

$$\frac{1}{2cosx} < 0$$

$$cosx < 0$$

Os valores que pertencem ao terceiro e quarto quadrante satisfazem essa inequação:



$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Gabarito:

a) $\boldsymbol{\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$

b) $\boldsymbol{\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi}$

---

34. (Estratégia Militares 2020 – Prof. Victor So)

Se $senx + \cos x = \frac{8}{13}$ e se $tgx = -\frac{3}{4}$, então, no ciclo trigonométrico, x pertence ao ______ quadrante:

a) 1º

b) 2º

c) 3º

d) 4º

e) Não há solução real.

Comentários

É dado que:

$$senx + \cos x = \frac{8}{13}$$

Dividindo ambos os lados por $\cos x$:

$$\frac{senx}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{8}{13\cos x} \Rightarrow tg\ x + 1 = \frac{8}{13\cos x}$$

Substituindo o valor de $tgx = -\frac{3}{4}$:

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} + 1 = \frac{8}{13\cos x} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{8}{13\cos x} \Rightarrow \cos x = \frac{32}{13} > 1$$

É impossível que haja $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x > 1$. Portanto, não há solução real para x.

Gabarito: “e”.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Vimos tudo que precisamos saber para resolver as questões de trigonometria das provas.

Continue se esforçando! Tente resolver todos os exercícios dessa aula. Caso você encontre alguma dificuldade ou fique com alguma dúvida não hesite em me procurar!

A próxima aula será uma introdução à geometria plana, outro assunto que cai bastante nessas provas. Então, prepare-se!

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Iezzi, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 3: trigonometria. 9. ed. Atual, 2013. 311p.

[2] Morgado, Augusto Cezar de Oliveira. Wagner, Eduardo. Perdigão do Carmo, Manfredo. Trigonometria Números Complexos. 3 ed. SBM, 2005. 164p.

8. VERSÕES DAS AULAS

Caro aluno! Para garantir que o curso esteja atualizado, sempre que alguma mudança no conteúdo for necessária, uma nova versão da aula será disponibilizada.