

# **Refração da Luz, lentes esféricas e óptica da visão**

*Dioptra plano e esférico, prismas e  
lâminas de faces paralelas.*

João Maldonado

*Aula 21*

*IME 2020*

## SUMÁRIO

<b>Introdução .....</b>	<b>4</b>
<b>1. Refração .....</b>	<b>5</b>
1.1. Índice de refração .....	5
1.2. Leis da refração .....	7
1.3. Dioptro plano e posição aparente.....	15
1.4. Dioptro esférico .....	18
1.5. Lâmina de faces paralelas .....	21
1.6. Reflexão total e ângulo limite .....	24
1.7. Fenômenos ópticos na natureza .....	28
1.8. Prisma óptico .....	31
<b>2. Lentes Delgadas.....</b>	<b>38</b>
2.1. Nomenclatura e principais elementos geométricos das lentes delgadas.....	38
2.2. Comportamento óptico das lentes delgadas .....	39
2.3. Centro óptico .....	41
2.4. Distância focal e plano focal das lentes delgadas .....	41
2.5. Formação de imagens em lentes delgadas .....	43
2.6. Equação da lente delgada .....	46
2.7. Aumento transversal .....	50
2.8. Vergência .....	52
2.9. Equação dos fabricantes de lentes.....	54
2.11. Método de Pierre Lucie.....	56
2.12. Associação de lentes delgadas.....	58
<b>3. Instrumentos ópticos .....</b>	<b>61</b>
3.1. ângulo visual e distância do ponto próximo .....	61
3.2. Classificação de instrumentos ópticos .....	62
3.3. Aumento angular .....	62
3.4. Lupa e Microscópio simples .....	62
3.5. Microscópio composto .....	64
3.6. Luneta astronômica.....	67
3.7. Luneta terrestre .....	69
3.8. Telescópio de Galileu.....	70



<b>4. Óptica da visão .....</b>	<b>71</b>
4.1. O Globo Ocular .....	71
4.2. Acomodação visual.....	71
4.3. Defeitos visuais e suas correções .....	73
<b>5. Lista de Questões .....</b>	<b>77</b>
<b>6. Gabarito sem comentários.....</b>	<b>100</b>
<b>7. Lista de questões comentadas .....</b>	<b>101</b>
<b>9. Considerações finais .....</b>	<b>150</b>
<b>10. Referências bibliográficas .....</b>	<b>151</b>
<b>11. Versão de aula.....</b>	<b>152</b>



## Introdução

Nesta aula continuaremos o estudo de Óptica geométrica. Começaremos com refração e suas leis, bem como o estudo de dioptra plano e esférico, além de prisma. Estes assuntos são importantíssimos para ITA e IME.


Além disso, estudaremos lentes delgadas, instrumentos ópticos e óptica da visão. Lentes delgadas é comum aparecer, assim como instrumentos ópticos. Óptica da visão não é muito comum, mas pode aparecer. Por isso, não vale a pena estender muito neste tema.

Fique atento a equação do dioptra plano e do esférico, pois podem aparecer na sua prova e saber bem como aplica garante agilidade na sua prova. A equação dos fabricantes também é muito importante, principalmente para o IME.

Anote as equações deduzidas e como usá-las, pois, você não terá tempo para deduzir na sua prova.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



 @proftoniburgatto



# 1. Refração

Seja a velocidade da luz no vácuo  $c$ , quando esta se propagar em outro meio que não o vácuo, terá velocidade menor  $v$ . O fenômeno que causa esta mudança na velocidade da onda se chama refração. É usual pensar na refração como sendo a variação do ângulo da trajetória da luz, mas isto não abrangeria, por exemplo, o caso em que a incidência é perpendicular como veremos adiante. Portanto, de forma visual, o fenômeno da refração está representado abaixo,

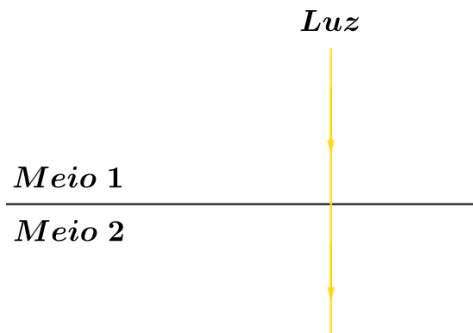


Figura 1: Incidência perpendicular da luz sobre interface entre dois meios.

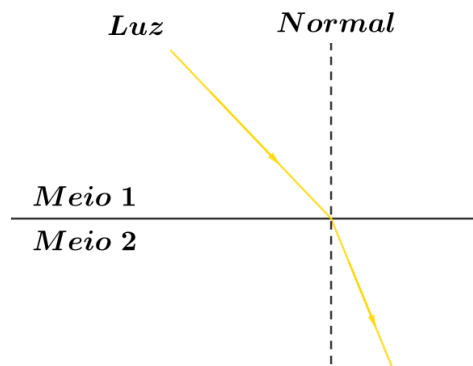


Figura 2: Incidência oblíqua da luz sobre interface entre dois meios.

Para representar a relação entre a velocidade da luz em um meio e a velocidade da luz no vácuo, definiu-se uma grandeza chamada **índice de refração** ( $n$ ).

## 1.1. Índice de refração

Existem dois tipos de índices de refração. O primeiro, o **índice de refração absoluto**, definido como a razão entre a velocidade de propagação da luz no vácuo ( $c$ ) e a velocidade de propagação da luz no meio ( $v$ ). Assim:

$$n = \frac{c}{v}$$

Observações:

- O  $n$  é adimensional por ser a relação entre velocidades.
- Como  $c$  será sempre maior ou igual a  $v$ ,  $n$  é sempre maior ou igual a 1.

O segundo tipo de índice de refração é o **índice de refração relativo**, definido como a relação entre dois índices de refração absolutos. Por exemplo, o índice de refração relativo do meio 1 em relação ao meio 2 é:



$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

É importante ressaltar que a luz não tem sua frequência alterada sendo transmitida em diferentes meios. Portanto, pode-se utilizar o índice de refração para encontrar a relação entre os comprimentos de ondas em cada meio.

$$v = \lambda \cdot f$$
$$n_{12} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2 \cdot f}{\lambda_1 \cdot f} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

É importante lembrar que qualquer luz monocromática no vácuo possui velocidade  $c$ . No entanto, em outros meios, diferentes luzes monocromáticas possuem diferentes velocidades e, com isso, diferentes índices de refração. As velocidades decrescem no sentido da luz vermelha para a luz violeta. Portanto, o índice de refração depende da luz monocromática analisada. Como:

$$v_{verm} > v_{violeta} \Rightarrow \frac{1}{v_{verm}} < \frac{1}{v_{violeta}} \Rightarrow \frac{c}{v_{verm}} < \frac{c}{v_{violeta}}$$
$$n_{verm} < n_{violeta}$$

Finalmente, é importante ressaltar a importância que as condições do meio possuem sobre o índice de refração. Experimentalmente, nota-se que a variação da densidade do meio afeta o índice de refração. Relacionado à variação de densidade, têm-se a temperatura (no caso de líquidos e gases) e a pressão (para gases). A influência da pressão nos líquidos é desprezada pois estes são considerados incompressíveis (a densidade só varia com variações muito grandes de pressão), e a influência de ambas as condições é desprezada para os sólidos, sendo mais determinante o processo de produção do material que pode gerar um mesmo material com densidades diferentes.

ATENÇÃO  
DECORE!



1)

Sabendo-se que a velocidade de propagação da luz no vácuo é  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , calcule a velocidade de propagação da luz na água, sabendo-se que  $n_{\text{água}} = 1,33$ .

**Comentários:**

$$v_{\text{água}} = \frac{c}{n_{\text{água}}} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,33} \Rightarrow v_{\text{água}} = 2,26 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

2)

Dado que o índice de refração do vidro é de 1,5 e o índice de refração da água é de 1,33, calcule os índices de refração relativos entre os dois meios.

**Comentários:**

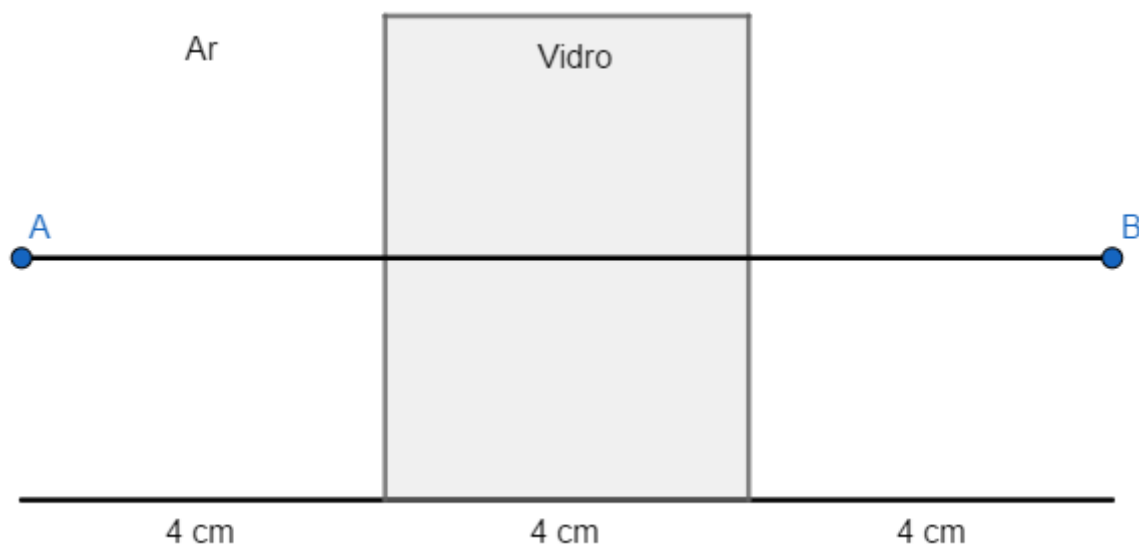


$$n_{\text{água, vidro}} = \frac{n_{\text{água}}}{n_{\text{vidro}}} = \frac{1,33}{1,5} \cong \frac{\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{9}$$

$$n_{\text{vidro, água}} = \frac{1}{n_{\text{água, vidro}}} = \frac{9}{8}$$

3)

Sabendo-se que o comprimento de onda da luz violeta é de  $4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ , quantos comprimentos de onda completo a onda realizou ao partir de A, no vácuo, atravessar a placa de vidro ( $n = 1,5$ ) e atingir o ponto B?



**Comentários:**

Tem-se 8 cm sendo percorrido pela luz no ar ( $n \cong 1$ ) e 4 cm sendo percorridos no vidro. Calculando-se o comprimento da onda da luz violeta no vidro:

$$n_{\text{vidro}} = \frac{\lambda_{\text{violeta, vácuo}}}{\lambda_{\text{violeta, vidro}}} \Rightarrow 1,5 = \frac{4 \cdot 10^{-7}}{\lambda_{\text{violeta, vidro}}} \Rightarrow \lambda_{\text{violeta, vidro}} = \frac{8}{3} \cdot 10^{-7}$$

Portanto, o número de comprimentos de onda é:

$$\frac{l_{\text{vácuo}}}{\lambda_{\text{vácuo}}} + \frac{l_{\text{vidro}}}{\lambda_{\text{vidro}}} = \frac{8 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-7}} + \frac{4 \cdot 10^{-2}}{\frac{8}{3} \cdot 10^{-7}} = (2 + 1,5) \cdot 10^5 = \boxed{3,5 \cdot 10^5 \text{ comprimentos de onda}}$$



## 1.2. Leis da refração

O fenômeno da refração é fundamentado em duas leis.



**1ª Lei da Refração:** O raio incidente, o raio refratado e a reta normal traçadas pelo ponto de incidência estão todos contidos no mesmo plano, conforme figura 1 e 2.

**2ª Lei da Refração:** Também conhecido como “Lei de Snell”, define a relação entre o seno do ângulo incidente e do ângulo refratado para um dioptro. A Lei de Snell é expressa por:

$$\frac{n_{\hat{i}}}{n_{\hat{r}}} = \frac{\text{sen } \theta_{\hat{r}}}{\text{sen } \theta_{\hat{i}}} \Rightarrow n_{\hat{i}} \cdot \text{sen } \theta_{\hat{i}} = n_{\hat{r}} \cdot \text{sen } \theta_{\hat{r}} \text{ (eq. 1.2.1)}$$

Onde os índices  $\hat{i}$  e  $\hat{r}$  referem-se, respectivamente, ao raio incidente e refratado e os meios onde cada um se localiza. Visualmente:

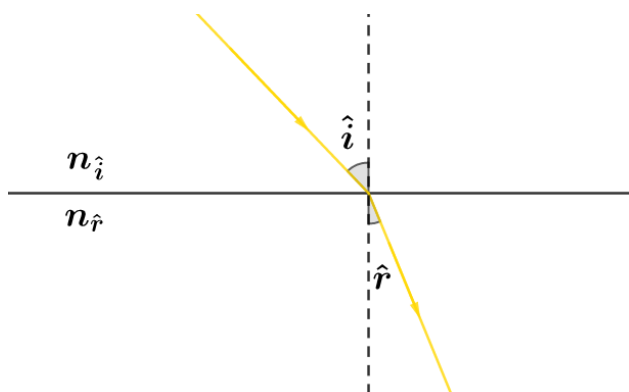


Figura 3: Raio refratado na passagem pela interface de dois meios.

CURIOSIDADE



### 1.2.1. Demonstração matemática da Lei de Snell

A demonstração matemática da Lei de Snell é baseado no princípio de Fermat em que a trajetória percorrida pela luz é aquela que busca minimizar o tempo. Vejamos abaixo:

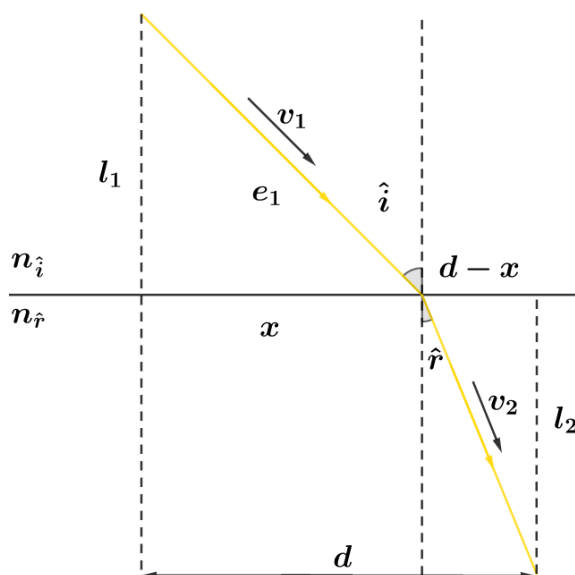


Figura 4: Refração de um raio de luz.

O tempo necessário para que a luz faça o percurso retratado na imagem é de:





$$t = t_{n_i} + t_{n_{\hat{r}}} = \frac{e_1}{v_1} + \frac{e_2}{v_2} \quad (\text{eq. 1.2.2})$$

Como:

$$\begin{cases} e_1 = \sqrt{x^2 + l_1^2} \\ e_2 = \sqrt{(d-x)^2 + l_2^2} \\ v_1 = \frac{c}{n_i} \\ v_2 = \frac{c}{n_{\hat{r}}} \end{cases}$$

Substituindo na equação 1.2.2, tem-se que:

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + l_1^2}}{c} \cdot n_i + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + l_2^2}}{c} \cdot n_{\hat{r}} \quad (\text{eq. 1.2.3})$$

O tempo de percurso é mínimo quando:

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

Substituindo a equação 1.2.3:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \cdot \left( \frac{x \cdot n_i}{\sqrt{l_1^2 + x^2}} - \frac{(d-x) \cdot n_{\hat{r}}}{\sqrt{(d-x)^2 + l_2^2}} \right) = 0$$

Logo:

$$n_i \cdot \frac{x}{\sqrt{l_1^2 + x^2}} = n_{\hat{r}} \cdot \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + l_2^2}} \quad (\text{eq. 1.2.4})$$

Mas:

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{l_1^2 + x^2}} = \text{sen } \hat{i} \\ \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + l_2^2}} = \text{sen } \hat{r} \end{cases}$$

Substituindo na equação 1.2.4, chega-se à:

$$\boxed{n_i \cdot \text{sen } \hat{i} = n_{\hat{r}} \cdot \text{sen } \hat{r}}$$

ATENÇÃO  
DECORE!



4)



Analise as afirmações como verdadeiras ou falsas a respeito da passagem da luz de um meio (1) para outro meio (2).

- a) Se a velocidade da luz aumenta, então a índice de refração do meio 2 é maior.
- b) Se a velocidade da luz no meio 1 for menor que no meio 2, então, no meio 2, o raio aproxima-se da normal.
- c) Se a velocidade da luz no meio 1 for maior que no meio 2, então, no meio 2, o raio afasta-se da normal.

**Comentários:**

a) Falso.

$$v_2 > v_1 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} < 1$$

Mas:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

Logo:

$$\frac{n_2}{n_1} < 1 \Rightarrow n_2 < n_1$$

b) Se  $v_1 < v_2$ , utiliza-se da conclusão da afirmativa a).

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i} = n_2 \cdot \text{sen } \hat{r}$$

Mas, como  $n_2 < n_1$ , tem-se que:

$$\text{sen } \hat{i} < \text{sen } \hat{r}$$

E, como:

$$0 \leq \hat{i}, \hat{r} \leq \frac{\pi}{2}$$

Conclui-se que:

$$\hat{i} < \hat{r}$$

c) Verdadeiro.

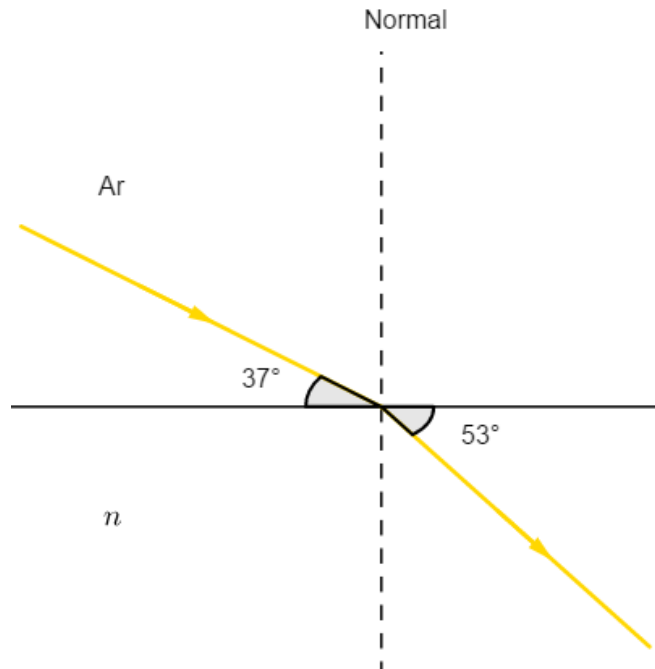
Se  $v_1 > v_2$ , então a conclusão é oposta ao do item a), isto é,  $n_1 < n_2$ .

Com isso, chega-se a uma conclusão oposta ao item b), ou seja,  $\hat{i} > \hat{r}$ .

5)

Sabendo que a luz se comporta como descrito na figura a seguir, calcule a velocidade de propagação da luz no segundo meio.





**Comentários:**

Deve-se notar que os ângulos fornecidos não são os ângulos adjacentes à normal. Portanto, ao utilizar-se a Lei de Snell, devem ser utilizados os ângulos complementares aos mostrados.

$$n_{ar} \cdot \text{sen } 53^\circ = n \cdot \text{sen } 37^\circ$$

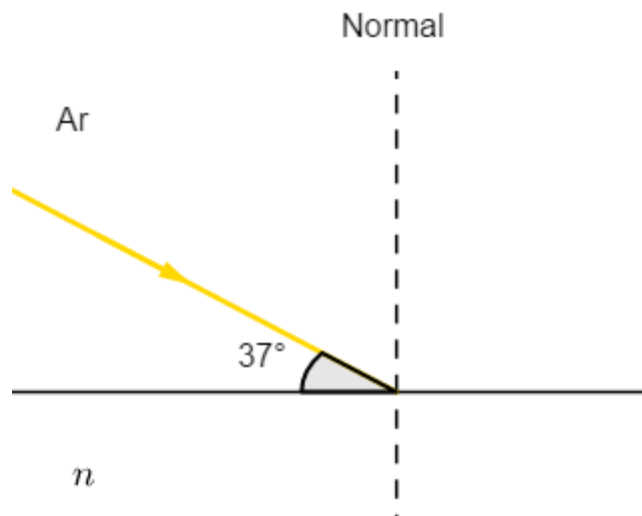
Com  $n_{ar} \cong 1$ :

$$n = \frac{\text{sen } 53^\circ}{\text{sen } 37^\circ} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

E, a velocidade no meio é dada por:

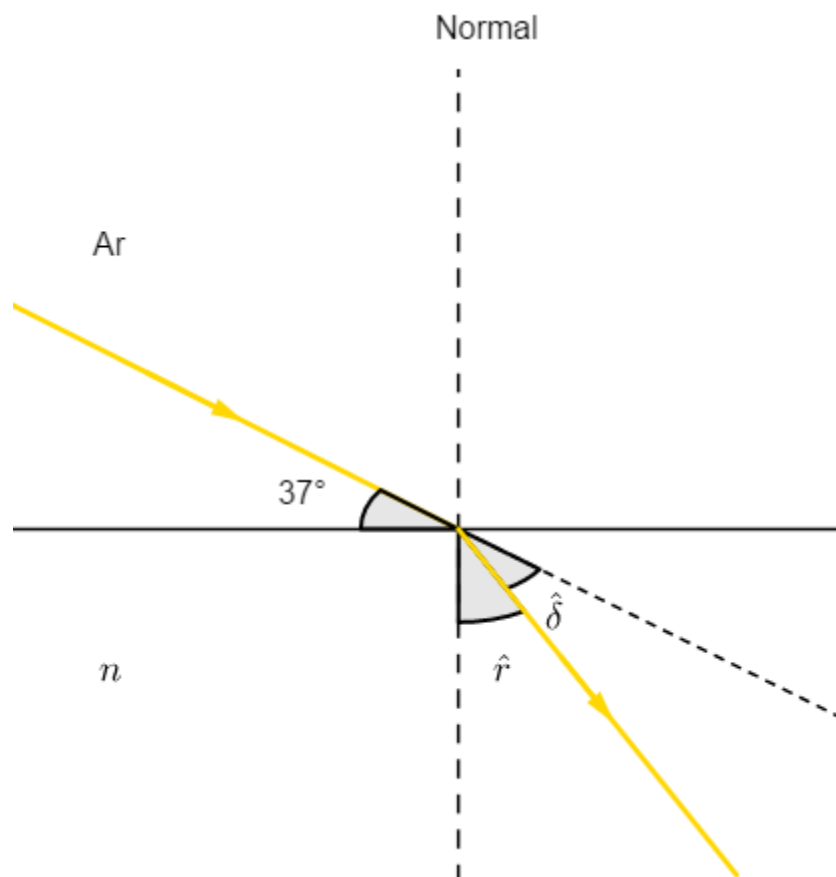
$$v = \frac{c}{n} \Rightarrow v = \frac{3}{4} \cdot c$$

6) Sabendo-se que a luz é refratada ao passar para outro meio conforme a figura abaixo, qual o desvio sofrido pelo raio de luz? Adote  $n = \frac{8}{5}$ .



### Comentários:

A situação está representada na figura a seguir, onde  $\hat{r}$  é o ângulo do raio refratado e  $\hat{\delta}$  é o desvio da trajetória.



Portanto, por Lei de Snell:

$$n_{ar} \cdot \text{sen } 53^\circ = n \cdot \text{sen } \hat{r}$$

$$\text{sen } \hat{r} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{r} = 30^\circ$$

E, sabe-se que, como  $53^\circ$  e  $(\hat{r} + \hat{\delta})$  são opostos pelo vértice, devem ter igual medida. Portanto:

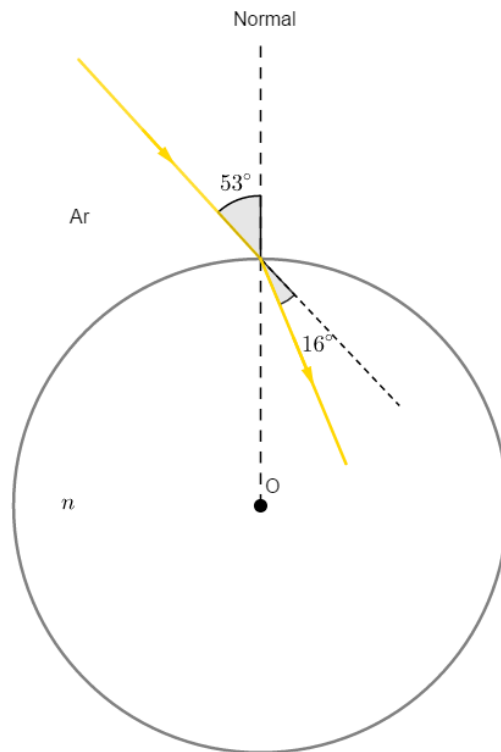
$$53^\circ = \hat{r} + \hat{\delta} = 30^\circ + \hat{\delta}$$

$$\hat{\delta} = 23^\circ$$

7)

Um raio de luz incide sobre a superfície de uma esfera transparente como retratado na figura a seguir. Determine o índice de refração da esfera.





**Comentários:**

Foi fornecido o ângulo de incidência e o desvio sofrido pelo raio de luz. A relação que se estabelece entre estes e o ângulo de refração é:

$$53^\circ = 16^\circ + \hat{r}$$

$$\hat{r} = 37^\circ$$

Pela Lei de Snell:

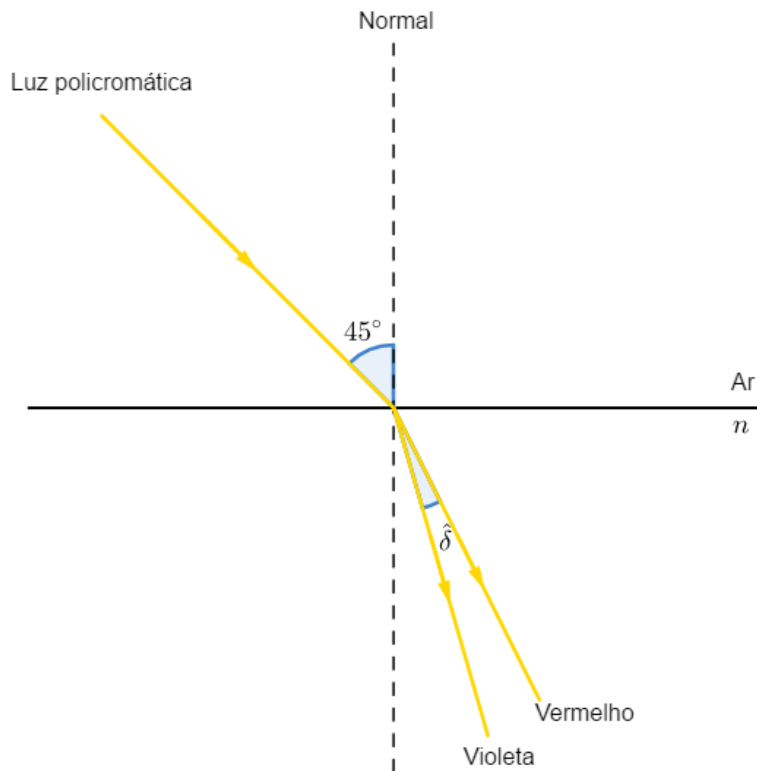
$$n_{ar} \cdot \text{sen } 53^\circ = n \cdot \text{sen } 37^\circ$$

$$n = \frac{\text{sen } 53^\circ}{\text{sen } 37^\circ} = \frac{4}{3}$$

**8)**

Considere que um raio de luz que se propaga no ar passa a se propagar em  $CS_2(l)$ , conforme a figura a seguir. Calcule a diferença de desvio entre a luz vermelha e a luz violeta. Adote:  $n_{verm} = 1,618$  e  $n_{violeta} = 1,675$ .





**Comentários:**

Primeiro, calcula-se os ângulos de refração para cada frequência de luz.

$$\begin{cases} n_{ar} \cdot \text{sen } 45^\circ = n_{verm} \cdot \text{sen } \hat{r}_{verm} \\ n_{ar} \cdot \text{sen } 45^\circ = n_{violeta} \cdot \text{sen } \hat{r}_{violeta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{r}_{verm} = \arcsen \left( \frac{n_{ar}}{n_{verm}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ \hat{r}_{violeta} = \arcsen \left( \frac{n_{ar}}{n_{violeta}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{r}_{verm} \cong 25,914^\circ \\ \hat{r}_{violeta} \cong 24,971^\circ \end{cases}$$

Tendo em mãos os ângulos de refração da luz vermelha e da luz violeta, respectivamente,  $\hat{r}_{verm}$  e  $\hat{r}_{viol}$ , tem-se que:

$$\hat{\delta} = \hat{r}_{verm} - \hat{r}_{violeta}$$

$$\hat{\delta} \cong 0,94^\circ$$



### 1.3. Dioptro plano e posição aparente

Um dioptro plano é um sistema formado por dois meios homogêneos e transparentes separados por uma superfície plana. O efeito de mudança de trajetória da luz ao atravessar um dioptro plano causa uma aparente mudança de posição para um observador que se encontra em um meio diferente do objeto. Observe a figura abaixo:

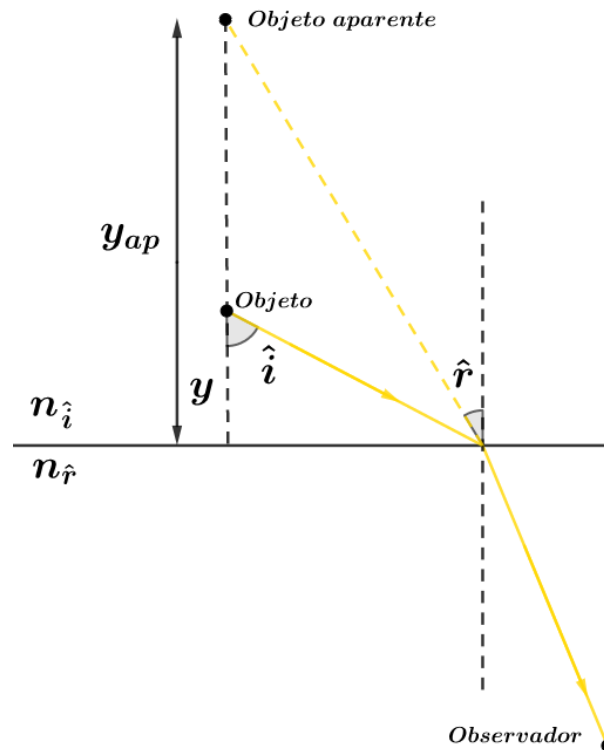


Figura 5: Representação de posição aparente por transmissão da luz em um dioptro plano.

Nota-se que o raio de luz produzido pelo objeto e que chega ao observador indica uma posição diferente da verdadeira do objeto. Pela Lei de Snell, podemos escrever que:

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i} = n_2 \cdot \text{sen } \hat{r}$$

Para a completa resolução do problema, é necessário que sejam fornecidos dados suficientes que possibilitam calcular o ângulo de refração. Com este valor em mãos e tendo como informação a distância horizontal do objeto até a normal, é possível calcular a posição aparente vertical do objeto. Dessa forma:

$$\text{sen } \hat{r} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \text{sen } \hat{i} \text{ (eq. 1.3.1)}$$

E como  $\hat{r}$  pertence ao primeiro quadrante:

$$\cos \hat{r} = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \hat{r}}$$

Chamando de  $x$  a distância do objeto à normal, encontra-se a distância vertical do objeto aparente ( $y_{ap}$ ):

$$\frac{x}{y_{ap}} = \frac{\text{sen } \hat{r}}{\cos \hat{r}} \text{ (eq. 1.3.2)}$$



$$y_{ap} = x \cdot \frac{\cos \hat{r}}{\sin \hat{r}} \Rightarrow y_{ap} = x \cdot \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \hat{r}}}{\sin \hat{r}}$$

Entretanto, nem sempre se têm todos estes dados, portanto é usual, para pequenos ângulos, a utilização da seguinte aproximação:

$$\sin \theta \cong \operatorname{tg} \theta \Leftrightarrow \theta \text{ pequeno}$$

Dessa forma, a equação 1.3.1 ficaria:

$$\operatorname{tg} \hat{r} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \operatorname{tg} \hat{i} \text{ (eq. 1.3.3)}$$

E a equação 1.3.2 ficaria:

$$\frac{x}{y_{ap}} = \operatorname{tg} \hat{r} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \operatorname{tg} \hat{i}$$
$$\frac{x}{\operatorname{tg} \hat{i}} \cdot \frac{n_2}{n_1} = y_{ap}$$

Mas:

$$\frac{x}{\operatorname{tg} \hat{i}} = y$$

Portanto:

$$y_{ap} = y \cdot \frac{n_2}{n_1} \text{ (eq. 1.3.4)}$$

Onde:

- $n_1$  é o índice de refração do meio no qual se encontra o objeto.
- $n_2$  é o índice de refração do meio no qual se encontra o observador.

Assim, reescrevendo:

$$y_{ap} = y \cdot \frac{n_{\text{observador}}}{n_{\text{objeto}}} \text{ (eq. 1.3.5)}$$

### Observações:

- A equação 1.3.4 pode ser usada independente de qual o sentido de propagação da luz, seja do mais refringente para o menos ou o contrário.
- É usual que as questões adotem uma resolução pela equação 1.3.4 mesmo que os ângulos não sejam pequenos.

ATENÇÃO  
DECORE!



9)





Uma moeda se encontra no fundo de um recipiente 4 m abaixo da superfície da água. Se um observador diretamente sobre a moeda observá-la, determine a que profundidade este observador percebe a moeda. Adotar  $n_{\text{água}} = \frac{4}{3}$ .

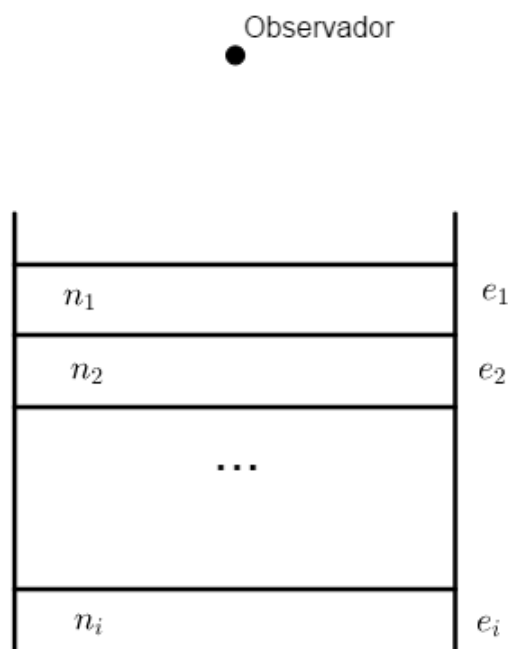
**Comentários:**

Como o observador está diretamente sobre a moeda, está se tratando de ângulos muito pequenos, portanto utiliza-se a equação 1.3.5.

$$y_{ap} = 4 \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}} = 3 \text{ m}$$

**10)**

Considere um recipiente, conforme a figura a seguir, no qual se tem várias camadas de diferentes índices de refração ( $n_1, n_2, \dots, n_i$ ) e espessuras ( $e_1, e_2, \dots, e_i$ ).



Prove que a profundidade aparente do recipiente para um observador olhando verticalmente para baixo, de um meio de índice de refração  $n_0$  é dado por:

$$d_{ap} = e_1 \cdot \frac{n_0}{n_1} + e_2 \cdot \frac{n_0}{n_2} + \dots + e_i \cdot \frac{n_0}{n_i}$$

**Comentários:**

Aqui ocorre a associação de vários dioptrios planos. No primeiro dioptro, ao invés de uma profundidade  $e_1$  até a superfície entre 1 e 2, ocorre uma profundidade aparente dada por:

$$e_{1ap} = e_1 \cdot \frac{n_0}{n_1}$$

O mesmo ocorre para cada camada seguinte. Dessa forma, a profundidade final do recipiente é dada por:

$$d_{ap} = \sum_{i=1} e_i \cdot \frac{n_0}{n_i}$$





## 1.4. Dioptro esférico

Um dioptro esférico é um sistema formado por dois meios homogêneos e transparentes separados por uma superfície esférica.

### 1.4.1. Posição da imagem

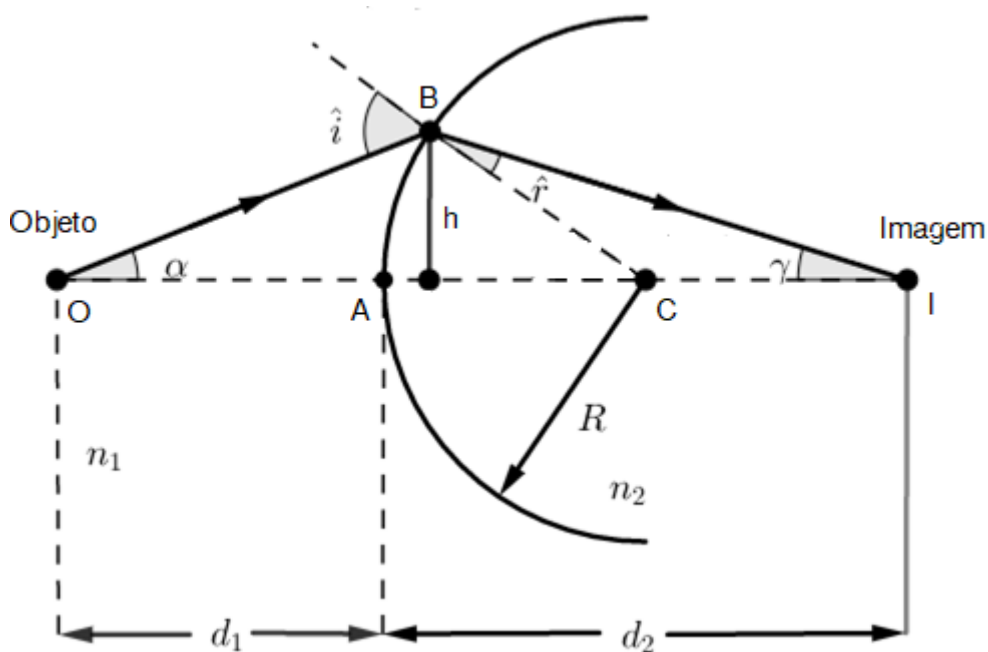


Figura 6: Trajetória da luz em um dioptro esférico.

Para encontrar a relação entre  $d_1$  e  $d_2$ , primeiro utiliza-se a Lei de Snell.

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i} = n_2 \cdot \text{sen } \hat{r}$$

Aplicando-se Lei dos Senos nos triângulos OBC e BCI:

$$\frac{R}{\text{sen } \alpha} = \frac{d_1 + R}{\text{sen } \hat{i}}$$

$$\frac{R}{\text{sen } \gamma} = \frac{d_2 - R}{\text{sen } \hat{r}}$$

Substituindo na Lei de Snell:

$$n_1 \cdot \frac{d_1 + R}{R} \cdot \text{sen } \alpha = n_2 \cdot \frac{d_2 - R}{R} \cdot \text{sen } \gamma$$

Reorganizando:

$$\frac{n_1 \cdot \text{sen } \alpha}{n_2 \cdot \text{sen } \gamma} = \frac{d_2 - R}{d_1 + R} \quad (\text{eq. 1.4.1})$$



Utilizando-se a aproximação para-axial (ângulos suficientemente pequenos tal que  $\theta \cong \text{sen } \theta \cong \text{tg } \theta$ ):

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \gamma} \cong \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \gamma} = \frac{\frac{h}{d_1}}{\frac{h}{d_2}} = \frac{d_2}{d_1}$$

Substituindo na equação 1.4.1:

$$\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{d_2}{d_1} = \frac{d_2 - R}{d_1 + R}$$

Rearranjando:

$$\frac{n_1}{d_1} + \frac{n_2}{d_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

É comum que esta fórmula apareça como:

$$\frac{n_{vem}}{p} + \frac{n_{vai}}{p'} = \frac{n_{vem} - n_{vai}}{R}$$

Em que “vem” e “vai” se referem à trajetória da luz. “Vem” estará sempre do lado da luz incidente e “vai” sempre do lado da luz refratada.

#### Observações:

- $p > 0$  sempre. O objeto define qual o lado que se adota a “luz incidente”;
- $p' > 0$  se a imagem se encontra do lado oposto do objeto, ou seja, do lado da “luz refratada”, caso contrário será negativa (imagem virtual);
- $R > 0$  para uma superfície côncava e  $R < 0$  para superfície convexa. A definição de superfície côncava ou convexa é feita a partir do referencial a trajetória percorrida pela luz.

#### 1.4.2. Ampliação da imagem

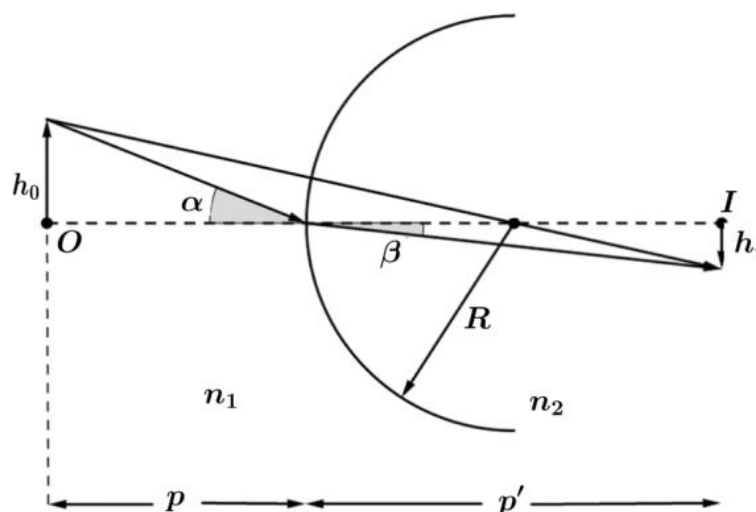


Figura 7: Formação da imagem para um corpo extenso em dióptro esférico.

Com a aproximação para-axial:



$$\text{sen } \alpha \cong \frac{h_o}{p} \text{ e } \text{sen } \beta \cong \frac{h_i}{p'}$$

Utilizando Lei de Snell:

$$n_1 \cdot \frac{h_o}{p} = n_2 \cdot \frac{h_i}{p'} \Rightarrow \frac{h_i}{h_o} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p'}{p}$$

Como:

$$A = -\frac{h_i}{h}$$

Tem-se:

$$A = -\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p'}{p}$$

Usualmente, encontra-se esta fórmula como:

$$A = -\frac{n_{vem}}{n_{vai}} \cdot \frac{p'}{p}$$

ATENÇÃO  
DECORE!



11)

Um peixe, no centro de um aquário esférico de raio  $30 \text{ cm}$  e a  $20 \text{ cm}$  da parede do aquário, é observado por um gato que se encontra à  $40 \text{ cm}$  da parede do aquário. A que distância o gato, visualiza o peixe? Qual a ampliação da imagem do peixe? Adote  $n_{ar} = 1$  e  $n_{\text{água}} = \frac{4}{3}$ .

**Comentários:**

Para o gato visualizando o peixe:

$$p = 20 \text{ cm}$$

$$n_{vem} = \frac{4}{3}$$

$$n_{vai} = 1$$

$$R = 30 \text{ cm}$$

Repare que  $n_{vem}$  foi adotado baseado no objeto, neste caso o peixe e  $R$  é positivo, pois, para o peixe como objeto, a superfície é côncava.

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{90}$$

$$p' = -\frac{90}{5} \cong -18 \text{ cm}$$



Como o gato está à 40 cm do aquário, ele enxerga o peixe à 58 cm.

$$A = -\frac{n_{vem}}{n_{vai}} \cdot \frac{p'}{p} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{-18}{20} = 1,2$$



## 1.5. Lâmina de faces paralelas

Uma lâmina de faces paralelas é a associação de dois dioptros planos com superfícies paralelas. A luz ao passar por uma lâmina de face paralelas sofre dois desvios, como mostra a figura abaixo.

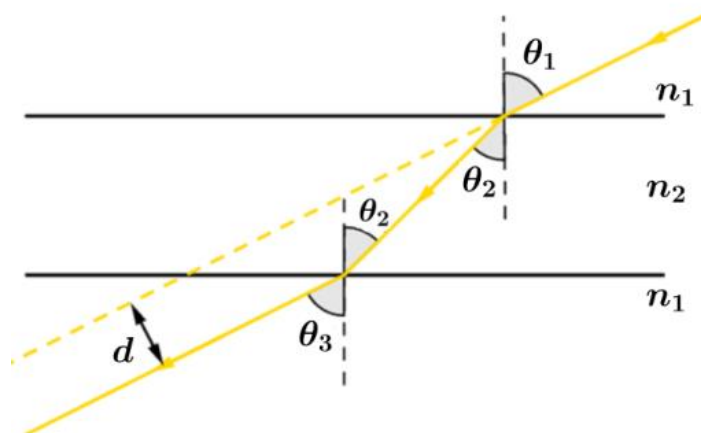


Figura 8: Trajetória da luz ao atravessar uma lâmina de faces paralelas.

Aplicando Lei de Snell duas vezes:

$$n_1 \cdot \text{sen } \theta_1 = n_2 \cdot \text{sen } \theta_2$$

$$n_2 \cdot \text{sen } \theta_2 = n_1 \cdot \text{sen } \theta_3$$

Logo:

$$\theta_1 = \theta_3$$

Na representação feita, adotou-se que a lâmina possui meios de mesmo índice de refração de cada lado. Nessa situação, o raio emergente e o raio incidente são paralelos. Embora seja possível que os índices de refração dos meios adjacentes à placa sejam diferentes, não é usual.

Para calcular o deslocamento, vamos utilizar a figura a seguir.



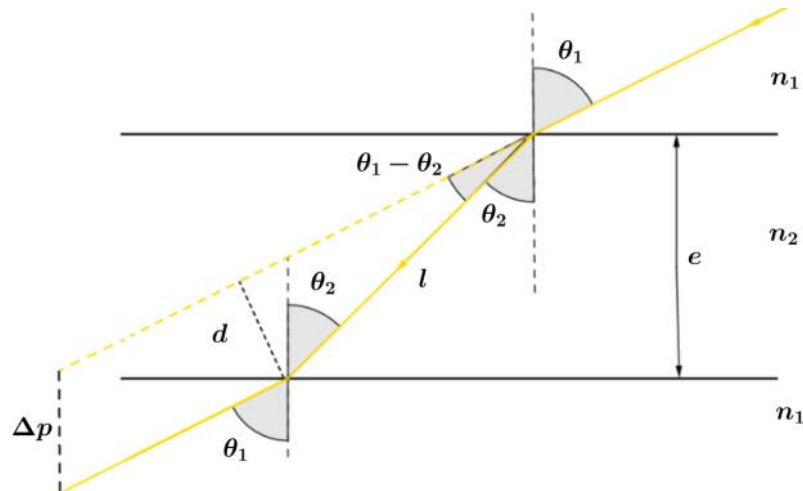


Figura 9: Ampliação da figura 8.

Da figura:

$$d = l \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{e}{l} \Rightarrow l = \frac{e}{\cos \theta_2}$$

Substituindo o segundo resultado na primeira relação:

$$d = e \cdot \frac{\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_2} \quad (\text{eq. 1.4.1})$$

Por relações trigonométricas:

$$\Delta p = \frac{d}{\text{sen} \theta_1} \quad (\text{eq. 1.4.2})$$

Para o caso de ângulos pequenos estes resultados podem ser aproximados para:

$$d = e \cdot (\theta_1 - \theta_2) = e \cdot \theta_1 \cdot \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

$$\Delta p = e \cdot \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

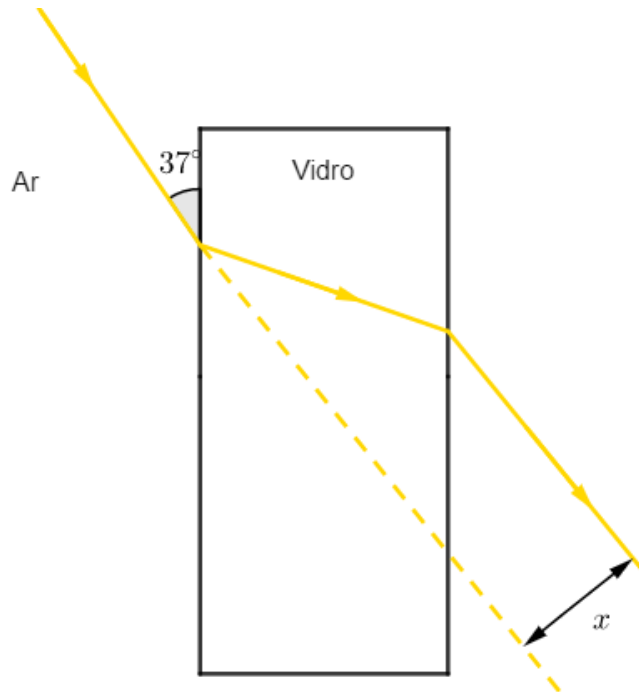
ATENÇÃO  
DECORE!



**12)**

Determine o desvio  $x$  se o raio de luz monocromático atravessa uma lâmina de faces paralelas de 20 cm de espessura. Adote  $n_{\text{vidro}} = 1,6$ .





**Comentários:**

Para a resolução da questão é necessário encontrar  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Da figura, tem-se que  $\theta_1 = 53^\circ$ . Aplicando a Lei de Snell:

$$n_{ar} \cdot \text{sen } \theta_1 = n_{vidro} \cdot \text{sen } \theta_2$$

$$1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5} \cdot \text{sen } \theta_2$$

$$\text{sen } \theta_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_2 = 30^\circ$$

Agora, calculando  $\text{sen } (\theta_1 - \theta_2)$ :

$$\text{sen } (53^\circ - 30^\circ) = \text{sen } 53^\circ \cdot \cos 30^\circ - \text{sen } 30^\circ \cdot \cos 53^\circ = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cong 0,393$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,866$$

Assim:

$$x = 0,2 \cdot \frac{0,393}{0,866} = 0,091 \Rightarrow \boxed{x \cong 9,1 \text{ cm}}$$

PRESTE MAIS  
ATENÇÃO!



## 1.6. Reflexão total e ângulo limite

Como visto, a luz ao passar de um meio mais refringente para um meio menos refringente afasta-se da normal. Existe um **ângulo limite** de incidência para o qual a luz refratada irá se afastar suficientemente da normal de modo que não possa mais ser detectada. Isto ocorre quando o ângulo refratado tiver um ângulo em relação à normal que se aproxima de  $90^\circ$ . Observe a figura abaixo:

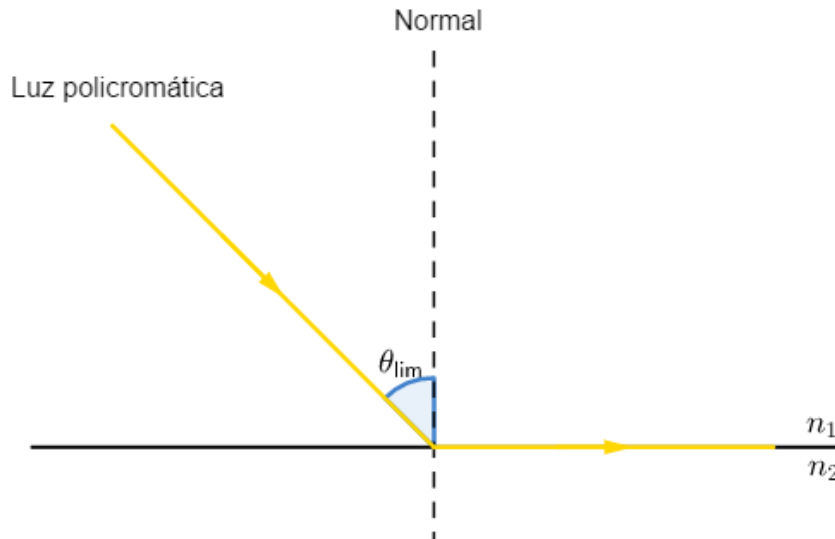


Figura 10: Situação de ângulo incidente igual ao ângulo limite.

O ângulo limite pode ser calculado por Lei de Snell como:

$$n_1 \cdot \text{sen } \theta_{lim} = n_2 \cdot \text{sen } 90^\circ$$
$$\theta_{lim} = \text{arcsen} \left( \frac{n_2}{n_1} \right) \Leftrightarrow n_1 > n_2$$

O fenômeno caracterizado por um ângulo de incidência maior ou igual ao ângulo limite direcionado da superfície mais refringente para a menos refringente é conhecido como **reflexão total**.

**Observações:**

- **A reflexão total ocorre somente na passagem de luz do meio mais refringente para o meio menos refringente.** Isso observa-se tanto fisicamente, pelo fato de que o raio se afasta da normal ao realizar a trajetória nesse sentido, quanto matematicamente, visto que a fórmula encontrada para o ângulo limite não permite que  $\frac{n_2}{n_1}$  seja maior do que 1.

- Diz-se que o ângulo limite é o ângulo para o qual o raio refratado tende a se propagar rente à superfície, pois é impossível que ele realmente o faça. O feixe de luz apresenta uma espessura que, mesmo que muito pequena, é diferente de zero. Caso a mudança do meio de propagação forçasse a luz a se propagar rente à superfície, sua espessura iria reduzir-se a zero e haveria uma degeneração do feixe.





ATENÇÃO  
DECORE!



**13)**

Considere dois meios homogêneos (1) e (2), homogêneos, separados por uma superfície plana. A velocidade de propagação da luz monocromática amarela nos meios é  $v_1 = 1,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  e  $v_2 = 2,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Determine o ângulo limite desse par de meios para a luz dada.

**Comentários:**

Como  $v_1 < v_2$ , sabe-se que o meio 1 é mais refringente. Portanto, o ângulo limite ocorre do meio 1 para o meio 2 e é dado por:

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta_{\text{lim}} &= \frac{n_2}{n_1} = \frac{\frac{c}{v_2}}{\frac{c}{v_1}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6 \\ \theta_{\text{lim}} &= 37^\circ \end{aligned}$$

**14) (Mackenzie-SP)**

Um raio de luz que se propaga num meio A atinge a superfície que separa esse meio de um meio B e sofre reflexão total. Podemos afirmar que:

- a) A é mais refringente do que B e o ângulo de incidência é menor que o ângulo limite.
- b) A é mais refringente do que B e o ângulo de incidência é maior que o ângulo limite.
- c) A é menos refringente do que B e o ângulo de incidência é maior que o ângulo limite.
- d) A é menos refringente do que B e o ângulo de incidência é menor que o ângulo limite.
- e) A é menos refringente do que B e o ângulo de incidência é igual ao ângulo limite.

**Comentários:**

Havendo reflexão total, sabe-se que o raio se propagava do meio mais refringente para o menos refringente. Dessa forma, A é mais refringente que B. Se houve reflexão total, conclui-se também que o ângulo de incidência necessariamente era maior ou igual ao ângulo limite. Portanto, a alternativa correta é letra B.

**15) (ITA-1995)**

Uma gaivota pousada na superfície da água, cujo índice de refração em relação ao ar é  $n = 1,3$ , observa um peixe que está exatamente abaixo dela, a uma profundidade de  $1 \text{ m}$ . Que distância, em linha reta, deverá nadar o peixinho para sair do campo visual da gaivota?

- a)  $0,84 \text{ m}$
- b)  $1,2 \text{ m}$
- c)  $1,6 \text{ m}$



d) 1,4 m

e) o peixinho não conseguirá fugir do campo visual da gaivota.

**Comentários:**

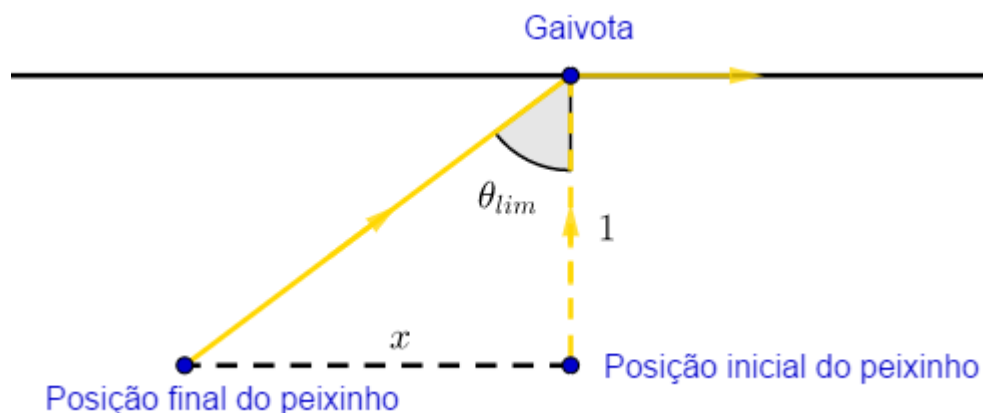
Primeiramente deve-se analisar se será possível que o peixe fuja do campo visual. Para que isso ocorra, não deve chegar luz do objeto (o peixinho) até o observador (gaivota), ou seja, é necessário que ocorra reflexão total da luz que sai da água e passa para o ar. Isso é possível pois se propagará do meio mais refringente para o meio menos refringente.

O ângulo limite nessa propagação é dado por:

$$\text{sen } \theta_{lim} = \frac{1}{1,3}$$

$$\text{cos } \theta_{lim} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1,3}\right)^2} = \sqrt{\frac{0,69}{1,69}}$$

Portanto,  $\text{tg } \theta_{lim} = \frac{1}{\sqrt{0,69}}$ . A situação está representada na figura a seguir.



Portanto:

$$\frac{x}{1} = \text{tg } \theta_{lim} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{0,69}} \cong 1,2 \text{ m}$$

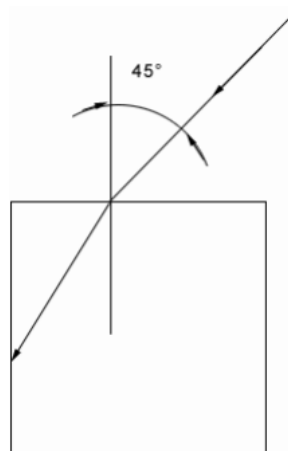
16)

(ITA-1980) Um raio luminoso incide sobre um cubo de vidro, como indica a figura. Qual deve ser o valor do índice de refração do vidro, para que ocorra a reflexão total na face vertical?

a)  $n > \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $n < \frac{\sqrt{3}}{2}$

c)  $n > \frac{\sqrt{3}}{2}$

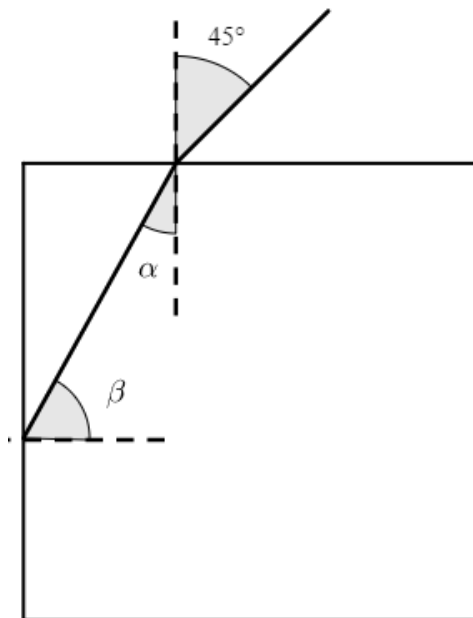


d)  $n < \frac{\sqrt{2}}{2}$

e)  $n > \frac{\sqrt{2}}{2}$

**Comentários:**

Para que ocorra reflexão total, o ângulo incidente sobre a face esquerda deve ser maior ou igual ao ângulo limite. Este ângulo é complementar do ângulo do raio refratado com a normal na face superior.



Portanto:

$$\text{sen } \beta > \text{sen } \theta_{lim} = \frac{1}{n}$$

Mas:

$$\text{sen } \beta = \cos \alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}$$

E:

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{n} \cdot \text{sen } 45^\circ$$

Unindo tudo:

$$\sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot n^2}} > \frac{1}{n} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2 \cdot n^2} > \frac{1}{n^2} \Rightarrow 1 > \frac{3}{2 \cdot n^2} \Rightarrow n^2 > \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{n > \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Portanto, letra A.





## 1.7. Fenômenos ópticos na natureza

Existem fenômenos na natureza que são explicados com base no que foi visto até agora nesta aula. São exemplos disso as miragens, efeito de Fata Morgana, arco-íris e a posição aparente de astros.

### 1.7.1. Posição aparente de astros

A atmosfera terrestre apresenta um gradiente de temperatura e pressão que gera uma variação de densidade do ar ao longo de sua extensão. Essa variação de densidade impede que a atmosfera seja considerada um meio homogêneo, pois, haverá uma variação do índice de refração entre posições de diferentes altitudes na atmosfera.

Como regra geral, a densidade aumenta quanto mais próximo da superfície, assim, a refração também. Como ocorre um aumento de refração, por Lei de Snell, verifica-se que o raio irá se aproximar gradualmente da normal. Visualmente, a situação está representada a seguir.

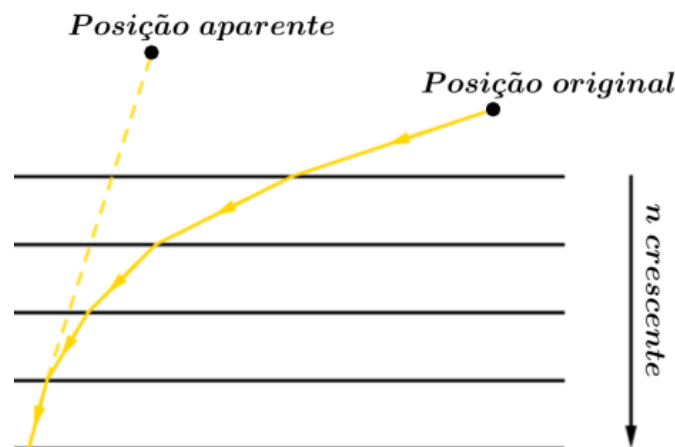


Figura 11: Estratificação feita da atmosfera e trajetória de um raio de luz.

Como pode-se observar pela imagem, no sentido crescente de refração, ocorre uma aproximação do raio de luz à reta normal. Esta variação é gradual e bem lenta ao longo da extensão da atmosfera, mas faz com que não se observe a posição real dos astros.

Esta estratificação em conjunto com a diferença de índices de refração para cada comprimento de onda é utilizada para a explicação do nascer e do pôr do Sol serem avermelhados. O índice de refração para o vermelho é menor, seu ângulo refratado é maior. Portanto, o vermelho chega a distâncias que o azul e o violeta não são capazes, no momento do nascer e do pôr do Sol, de chegar até o observador. Visualmente:

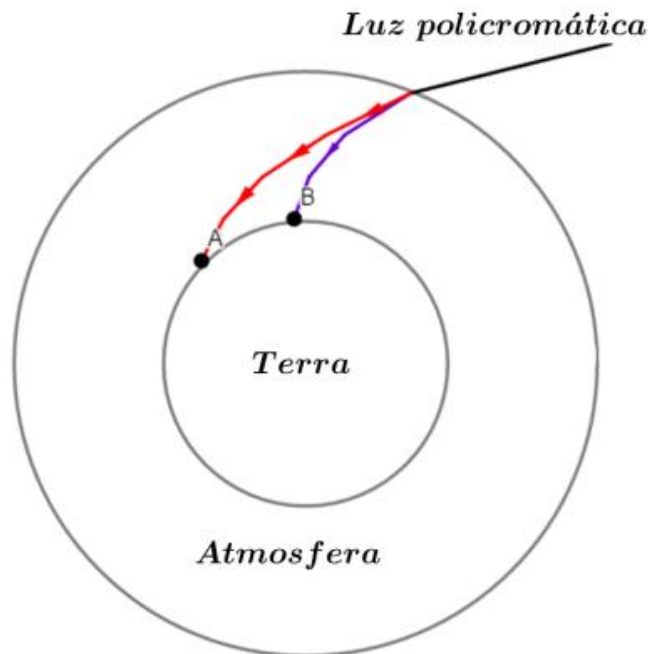


Figura 12: Exemplificando efeito da atmosfera sobre diferentes frequências de luz emitidas pelo Sol.

No ponto A, estaria ocorrendo o pôr do Sol, enquanto em B ainda seria de dia.

### 1.7.2. Miragens e efeito de Fata Morgana

As miragens e o efeito de Fata Morgana são fenômenos causados também pela não homogeneidade da atmosfera terrestre. Entretanto, ao invés do objeto se encontrar fora da atmosfera e o observador dentro, como é o caso do subtópico anterior, neste caso o objeto e observador encontram-se dentro da atmosfera.

A miragem ocorre sobretudo em locais em que, próximo do solo, a temperatura eleva-se drasticamente. Esse aumento da temperatura faz com que as camadas de ar mais próximas do solo tenham menor densidade, e, por conseguinte, menor índice de refração. A luz ao propagar-se do meio mais refringente para o menos refringente afasta-se da linha normal até o caso limite em que ocorre reflexão total. Este é o fenômeno da miragem, a luz emitida para baixo pelo objeto é sucessivamente refratada, sofre uma eventual reflexão total e após mais refrações chega ao observador, de modo que o observador pode ver até mesmo duas imagens.

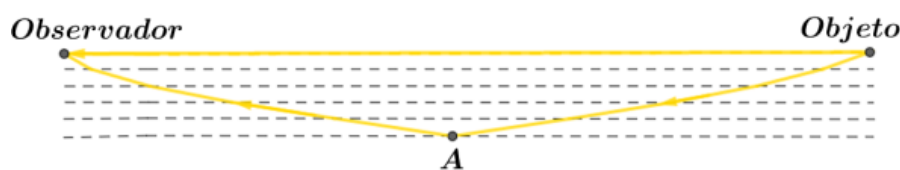


Figura 13: Representação gráfica do fenômeno da miragem. Reflexão total ocorre em A.

O efeito de Fata Morgana é semelhante, mas ocorre em regiões com temperaturas muito frias próximo à superfície da Terra, onde a refringência aumenta conforme aproxima-se do solo. As duas imagens formadas são a obtida por um raio de luz que vai diretamente ao observador e outro que irá por cima, sofrendo refrações e uma reflexão total, chegando até o observador. Portanto, o raio de luz representado na figura 13 estaria percorrendo um caminho por cima no caso do Fata Morgana.



### 1.7.3. Arco-íris

O fenômeno do arco-íris acontece em ambientes de alta umidade, pois, é produzido a partir da refração e posterior reflexão total dióptro esférico formado por uma gotícula de água no ar, como representado na figura abaixo.

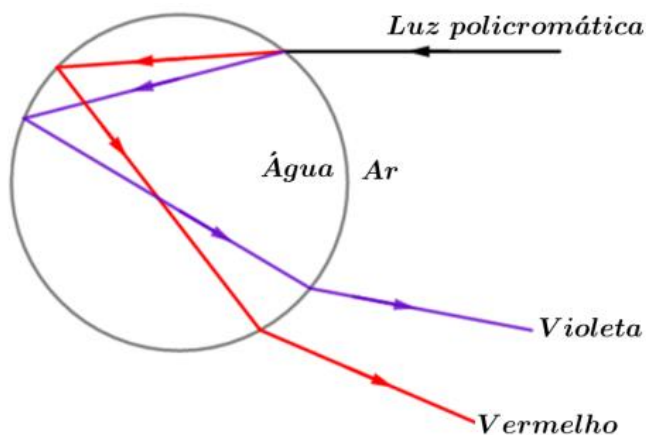


Figura 14: Refração e reflexão total da luz no interior de uma gota de água produzindo um arco-íris.

Na figura 14, representou-se somente os raios de luz vermelha e violeta, mas entre esses há a ocorrência de todas as cores do espectro do visível, produzindo o arco-íris na ordem conhecida.



#### 17) (ITA-1996)

Com respeito ao fenômeno do arco íris, pode-se afirmar que:

- I. Se uma pessoa observa um arco íris a sua frente, então o Sol está necessariamente à oeste.
  - II. O Sol sempre está à direita ou à esquerda do observador.
  - III. O arco-íris se forma devido ao fenômeno de dispersão da luz nas gotas de água.
- a) Todas são corretas.
  - b) Somente I é falsa.
  - c) Somente III é falsa.
  - d) Somente II e III são falsas.
  - e) Somente I e II são falsas.

#### Comentários:

O arco-íris ocorre devido à dispersão da luz e reflexão total no interior das gotas de água. Portanto, é necessário que o indivíduo esteja entre o sol e as gotas para que após os raios sofrerem reflexão total cheguem até ele.



- I. Falsa.
- II. Falsa.
- III. Verdadeiro.

Alternativa E.



## 1.8. Prisma óptico

Um prisma óptico é composto por dois dioptros planos não paralelos, como mostrado na figura 15.

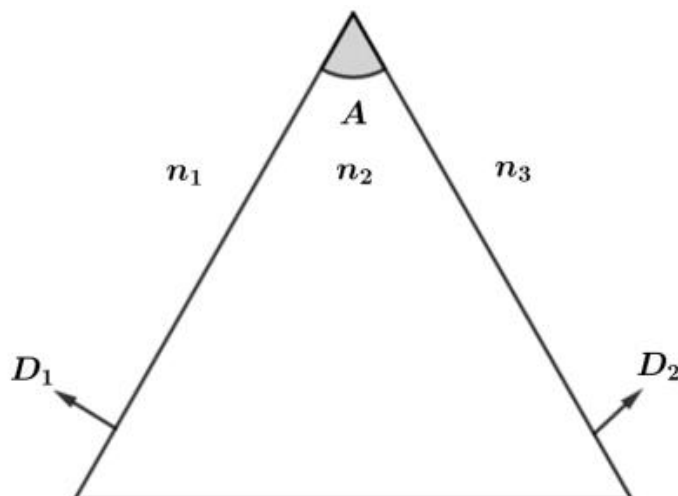


Figura 15: Seção principal de um prisma óptico.

A visão bidimensional de um prisma é chamada de seção principal. O ângulo  $A$  é chamado de **ângulo de abertura**. Os dioptros 1 e 2 são chamados de faces do prisma e o cruzamento entre eles é chamado de aresta do prisma. Na figura 16, uma representação tridimensional de um prisma óptico.



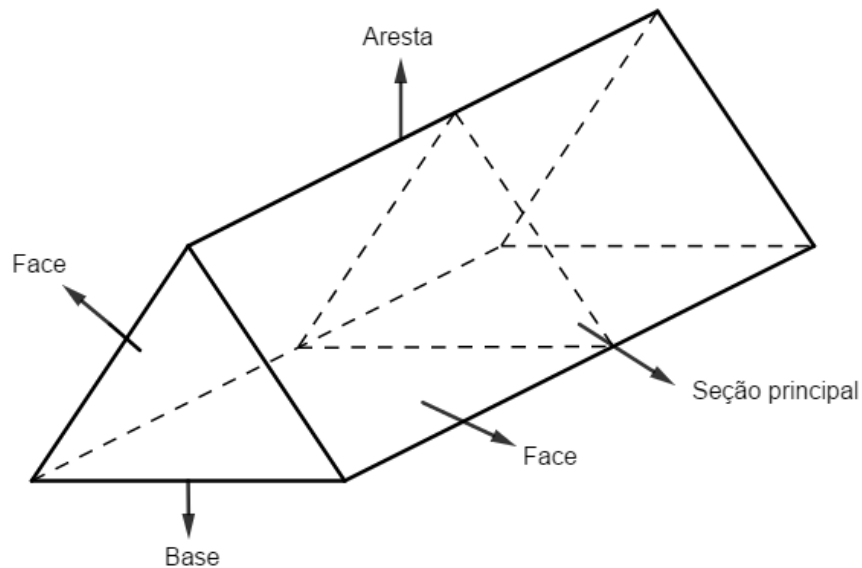


Figura 16: Visão em perspectiva de um prisma.

### 1.8.1. Equações do prisma

Para analisar o efeito do prisma sobre a luz, vamos utilizar como base a figura 15 abaixo.

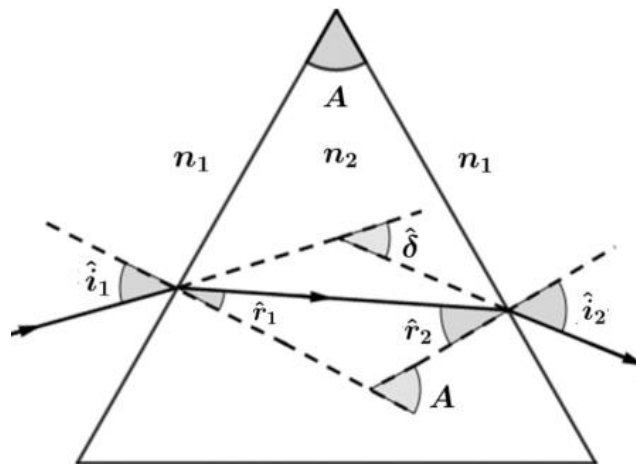


Figura 17: Trajetória da luz atravessando um prisma óptico

Primeiramente deve-se notar que, por construção, surge o ângulo  $A$  no cruzamento entre as retas normais. A continuação da trajetória do raio incidente e do raio emergente é chamado de **desvio** ( $\delta$ ). Adota-se a nomenclatura  $\hat{r}$  para ambos os ângulos internos ao prisma e  $\hat{i}$  para os ângulos externos devido ao fato de que se o sentido da luz for invertido, a trajetória será a mesma!

Da figura, juntamente a Lei de Snell, tiram-se as quatro relações:

$$\begin{cases} A = \hat{r}_1 + \hat{r}_2 \\ \delta = (\hat{i}_1 - \hat{r}_1) + (\hat{i}_2 - \hat{r}_2) \\ n_1 \cdot \text{sen } \hat{i}_1 = n_2 \cdot \text{sen } \hat{r}_1 \\ n_1 \cdot \text{sen } \hat{i}_2 = n_2 \cdot \text{sen } \hat{r}_2 \end{cases}$$

Entretanto, quando trabalhamos com ângulos pequenos ( $< 10^\circ$ ), é possível aproximar as duas últimas relações para:

$$\begin{cases} n_1 \cdot \hat{i}_1 = n_2 \cdot \hat{r}_1 \\ n_1 \cdot \hat{i}_2 = n_2 \cdot \hat{r}_2 \end{cases}$$





Finalmente, com as duas primeiras equações, tira-se:

$$\hat{\delta} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 - \hat{A} \text{ (eq. 1.8.1)}$$

**Observações:**

- Como comentado anteriormente, a reversibilidade dos raios de luz condiz com a relação obtida, visto que ao se trocar  $\hat{i}_1$  e  $\hat{i}_2$  de posição, o desvio permanece o mesmo.

- Nem sempre existirá desvio, pois pode não haver raio emergente caso ocorra reflexão total na saída do raio.

**1.8.2. Prismas de reflexão total**

Como o próprio nome diz, trata-se de prismas onde ocorre reflexão total. A principal utilização deste tipo de prisma é a substituição de espelhos planos, quando possível, pois, diferentemente do espelho plano, não possui um *espelho de prata* que se danifica facilmente. Abaixo, mostram-se os dois principais tipos de prismas de reflexão total.

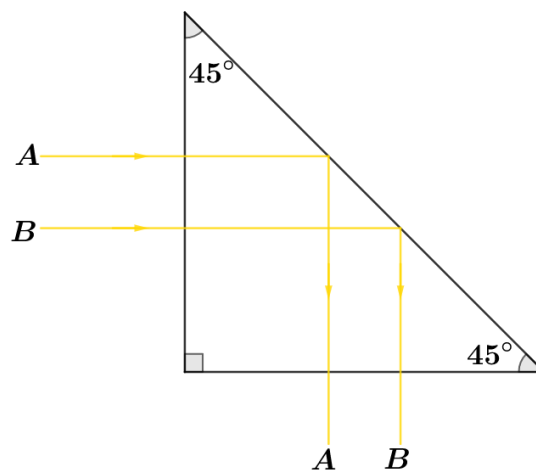


Figura 18: Prisma de reflexão total com desvio de 90°

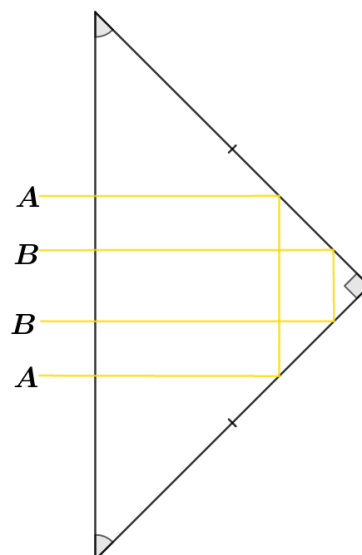


Figura 19: Prisma de reflexão total com desvio de 180°

Deve-se notar a ordem entre os raios que entram e os raios que saem do prisma. Se realizar-se uma combinação de dois prismas da figura 18, ou somente um prisma da figura 19, ocorre uma inversão da imagem. Quanto ao índice de refração mínimo para que tais prismas, inseridos no ar,



funcionem de acordo com as imagens, calcula-se através da aplicação da Lei de Snell considerando a incidência de  $45^\circ$ , obtido por construção, como sendo o ângulo limite. Dessa forma:

$$\operatorname{sen} \theta_{\text{lim}} = \frac{n_{\text{ar}}}{n_{\text{prisma}}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$n_{\text{prisma}} \geq \sqrt{2}$$

Este resultado é válido para ambos os prismas, mas está restrito ao caso em que estes se encontram imersos no ar.

### 1.8.3. Desvio mínimo

Como visto no final do item **Equações do prisma**, o desvio depende dos ângulos incidente, emergente e de abertura. Entretanto, o ângulo emergente é função do ângulo incidente e do índice de refração relativo. Portanto, os três fatores que influenciam o desvio são: o ângulo incidente, o ângulo de abertura e o índice de refração.

Portanto, trabalhando-se a equação 1.8.1, tem-se:

$$\hat{\delta} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 - \hat{A}$$

O desvio mínimo ocorre quando  $\hat{i}_1 = \hat{i}_2$ . Isto é demonstrado a partir da equação 1.8.1.

$$\hat{\delta} = \left( \sqrt{\hat{i}_1^2} - \sqrt{\hat{i}_2^2} \right) + 2\sqrt{\hat{i}_1 \cdot \hat{i}_2} - \hat{A}$$

Este valor é mínimo quando  $\left( \sqrt{\hat{i}_1^2} - \sqrt{\hat{i}_2^2} \right) = 0$ , ou seja,  $\hat{i}_1 = \hat{i}_2$ . Substituindo na equação 1.8.1:

$$\hat{i} = \frac{\hat{\delta}_{\text{mín}} + \hat{A}}{2}$$

Com isto, tem-se também que  $\hat{r}_1 = \hat{r}_2$ . Mas,  $\hat{A} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ , logo:

$$\hat{r}_1 = \hat{r}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$$

Portanto, substituindo-se isto na Lei de Snell (sem aproximações para-axiais) e adotando  $\hat{i}_1 = \hat{i}_2 = \hat{i}$ :

$$n_1 \cdot \operatorname{sen} \hat{i} = n_2 \cdot \operatorname{sen} \hat{r}$$

$$\boxed{\frac{n_2}{n_1} = \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{\hat{\delta}_{\text{mín}} + \hat{A}}{2} \right)}{\operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}}} \quad (\text{eq. 1.8.2})$$

A equação 1.8.2 é conhecida como fórmula de Newton e permite obter experimentalmente o índice de refração do prisma. Entretanto, para o escopo do vestibular, considerando a aproximação para-axial, utilizamos a expressão simplificada:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\hat{\delta}_{\text{mín}}}{\hat{A}} + 1 \Rightarrow \boxed{\hat{\delta}_{\text{mín}} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \cdot \hat{A}}$$

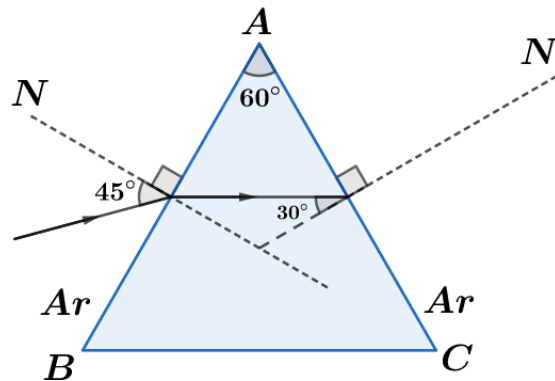


ATENÇÃO  
DECORE!



**18) (PUC-SP)**

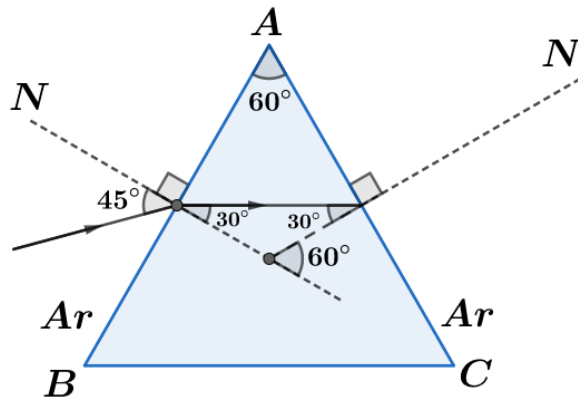
Um prisma de vidro, cujo ângulo de refração é  $60^\circ$ , está imerso no ar. Um raio de luz monocromática incide em uma das faces do prisma sob ângulo de  $45^\circ$  e, em seguida, na segunda face sob ângulo de  $30^\circ$ , como está representado no esquema.



Calcule o índice de refração do vidro em relação ao ar, para essa luz monocromática.

**Comentários:**

Sabendo-se que o ângulo de refração é de  $60^\circ$ , pode-se acrescentar alguns dados à figura.



Assim, aplicando a Lei de Snell para a primeira refração:

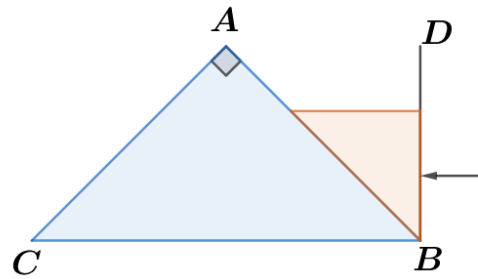
$$n_{ar} \cdot \text{sen } 45^\circ = n_{vidro} \cdot \text{sen } 30^\circ$$

$$\boxed{\frac{n_{vidro}}{n_{ar}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = \sqrt{2}}$$

**19) (ITA-SP)**

Um prisma de vidro, de índice de refração  $n = \sqrt{2}$ , tem por secção normal um triângulo retângulo isósceles ABC no plano vertical. O volume de secção transversal ABD é mantido cheio de um líquido de índice de refração  $n' = \sqrt{3}$ . Um raio incide normalmente à face transparente da parede vertical BD e atravessa o líquido. Determine o ângulo de refração do raio que emerge pela face AC.





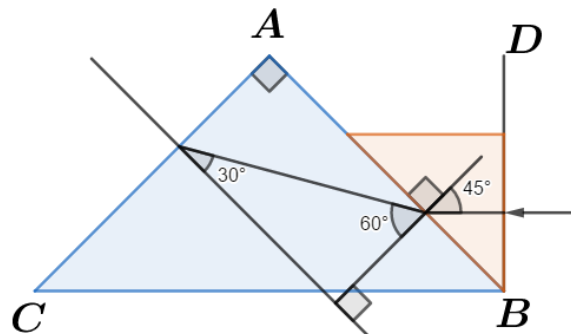
**Comentários:**

Primeiramente, o ângulo de incidência sobre a face AB é de  $45^\circ$ . Aplicando a Lei de Snell:

$$n_{liq} \cdot \text{sen } 45^\circ = n_{vidro} \cdot \text{sen } \hat{r}$$

$$\text{sen } \hat{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{r} = 60^\circ$$

Assim, tem-se:



Assim, para encontrar o ângulo do raio emergente:

$$n_{vidro} \cdot \text{sen } 30^\circ = n_{ar} \cdot \text{sen } \hat{r}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \text{sen } \hat{r} \Rightarrow \boxed{\hat{r} = 45^\circ}$$

Ou seja, o raio sai paralelo à BC.

**1.8.4. Condição necessária para refração**

É condição necessária, mas não suficiente, que  $\hat{A} \geq 2 \cdot \hat{L}$ , onde  $\hat{L}$  é o ângulo limite. A demonstração está abaixo:

$$\hat{r}_2 \leq \hat{L}$$

Mas, como  $\hat{A} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$ :

$$\hat{A} - \hat{r}_1 \leq \hat{L}$$

$$\hat{r}_1 \geq \hat{A} - \hat{L} \Rightarrow \text{sen } \hat{r}_1 \geq \text{sen } (\hat{A} - \hat{L})$$

E, como  $\text{sen } \hat{r}_1 \leq 1$ :

$$\frac{n_1}{n_2} \geq \frac{n_1}{n_2} \cdot \text{sen } \hat{r}_1 \geq \text{sen } (\hat{A} - \hat{L})$$



Só que  $\frac{n_1}{n_2} = \text{sen } \hat{L}$ , portanto:

$$\text{sen } \hat{L} \geq \text{sen } (\hat{A} - \hat{L})$$

$$\hat{L} \geq \hat{A} - \hat{L}$$

$$\hat{A} \leq 2 \cdot \hat{L}$$





## 2. Lentes Delgadas

Uma lente é um dos instrumentos ópticos mais comuns no dia-a-dia. As lentes estão presentes desde óculos até instrumentos de observação sofisticados. A última etapa do curso de lentes delgadas consiste no estudo de instrumentos ópticos formados pela associação de lentes.

Uma lente consiste na associação de dois dioptrios, sendo pelo menos um deles esférico. O tipo de lente mais comum são as chamadas **lentes delgadas**, que consistem na associação de dois dioptrios com distância muito pequena entre eles, de modo que a espessura da lente pode ser desprezada.

### 2.1. Nomenclatura e principais elementos geométricos das lentes delgadas

As lentes são divididas em dois tipos de acordo com os tipos de dioptrios presentes. São elas:

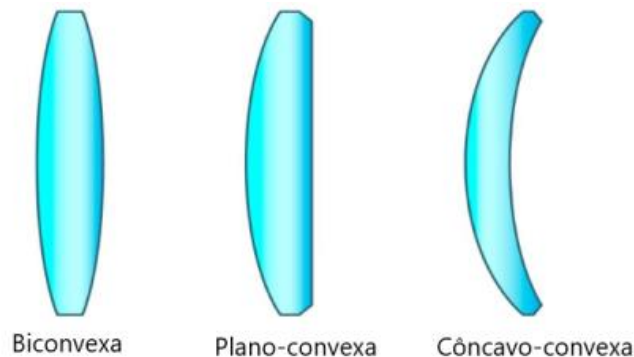


Figura 20: Lentes de bordas finas

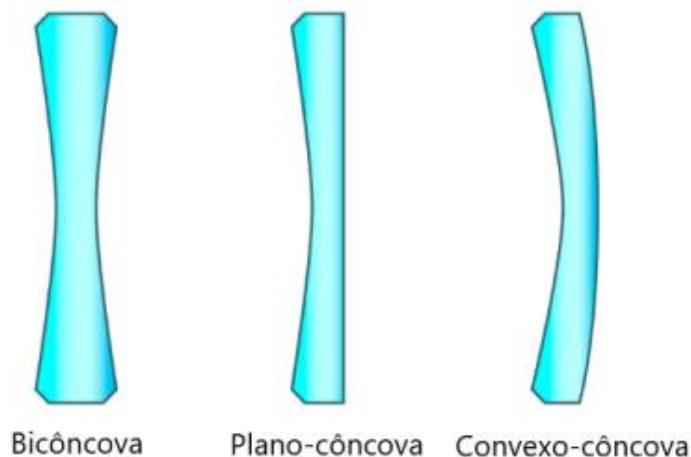


Figura 21: Lentes de bordas grossas

A separação em lentes de bordas finas e grossas é intuitiva. Quanto à nomenclatura, é uma combinação do tipo de cada dioptro, sendo o primeiro nome aquele do dioptro cujo raio é maior,



considera-se que o dioptro plano tem raio tendendo à infinito. O tipo do dioptro é sempre definido com base em um observador externo ao sistema. Na figura abaixo, estão representados os principais elementos geométricos de uma lente delgada:

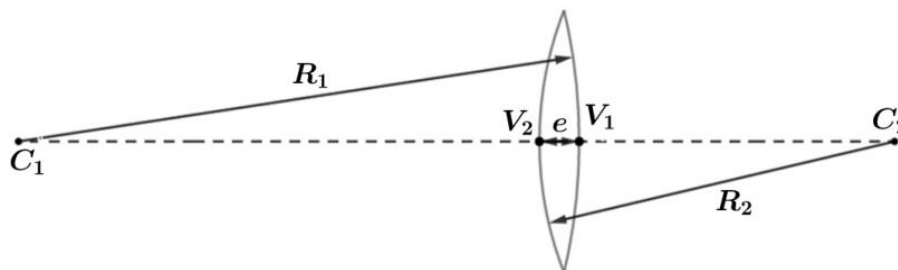


Figura 22: Principais elementos geométricos de uma lente delgada

$V_1$  e  $V_2$  são os vértices de cada lente,  $R_1$  e  $R_2$  os raios,  $C_1$  e  $C_2$  os centros ópticos e  $e$  a espessura da lente.

## 2.2. Comportamento óptico das lentes delgadas

As lentes delgadas são classificadas também com base no seu comportamento óptico, podendo ser: *lentes convergentes* ou *lentes divergentes*. Para diferenciá-las basta observar o efeito delas sobre um feixe de raios paralelos. As lentes convergentes fazem os raios refratados convergirem em um só ponto. As lentes divergentes fazem os raios refratados divergirem, como se partissem de um só ponto. Esses dois pontos são conhecidos como **focos principais** das lentes. Ambos os comportamentos e seus focos principais são expostos na figura 23, abaixo.

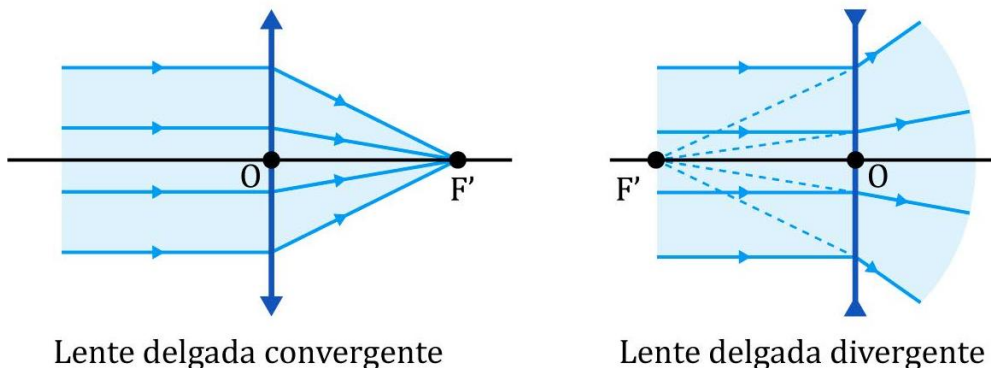


Figura 23: Trajetória do feixe de luz passando por uma lente.

É usual a representação de lentes como um segmento de reta com duas setas baseadas no comportamento da lente. O efeito óptico que a lente produz depende não só de características da lente, mas também do meio no qual essa está inserida.

	$n_{lente} > n_{meio}$	$n_{lente} < n_{meio}$
Bordas finas	Convergente	Divergente
Bordas grossas	Divergente	Convergente

Mais adiante, ao estudar a **equação dos fabricantes de lentes** esta tabela será retomada com mais detalhes.

ATENÇÃO  
DECORE!



### 20) (FCC-SP)

Uma lente, feita de material cujo índice de refração absoluto é 1,5, é convergente no ar. Quando mergulhada num líquido transparente, cujo índice de refração absoluto é 1,7, ela:

- a) será convergente
- b) será divergente
- c) será convergente somente para a luz monocromática
- d) se comportará como uma lâmina de faces paralelas
- e) não produzirá nenhum efeito sobre os raios luminosos

#### Comentários:

Como a lente é convergente em um meio com índice de refração menor que o seu, ela deve ser uma lente de bordas finas. Portanto, ao ser inserida em um meio com índice de refração maior que o seu, ela se comportará como uma lente divergente.

### 21) (UFJF)

Com relação a lentes, têm-se as seguintes afirmativas:

- I - Uma lente biconvexa é sempre convergente.
- II - Uma lente bicôncava é sempre divergente.
- III - Uma lente bicôncava é naturalmente divergente, mas, se colocada num meio cujo índice de refração é maior que o do material de que é feita a lente, ela se torna convergente
- IV - Uma lente biconvexa é naturalmente convergente, mas, se colocada num meio cujo índice de refração é maior que o do material de que é feita, torna-se divergente.

As afirmativas corretas são:

- a) Apenas a afirmativa III.
- b) Apenas a afirmativa IV.
- c) Apenas a afirmativa I.
- d) As afirmativas I, II e IV.
- e) As afirmativas III e IV.

#### Comentários:

As afirmativas I e II estão erradas pois o efeito óptico da lente depende do meio no qual está inserida. Quanto às afirmativas, ao utilizar “naturalmente”, refere-se ao caso em que  $n_{lente} > n_{meio}$ . Portanto ambas estão corretas.





Letra E.

### 2.3. Centro óptico

O centro óptico é o ponto pertencente ao eixo principal pelo qual um raio de luz passa sem sofrer desvio angular. O método para encontrar este ponto foge ao escopo do curso, pois aqui trabalha-se somente com lentes delgadas.

Para as lentes delgadas, adotou-se espessura desprezível, ou seja, os vértices das lentes são tomados como coincidentes, logo, a interseção da lente com o eixo principal será um único ponto. Neste ponto coincidem os dois vértices e o centro óptico, visto que o centro óptico deve pertencer ao “interior” da lente e do eixo principal.

Na figura abaixo, mostra-se o que ocorre com um raio de luz que atravessa o centro óptico.

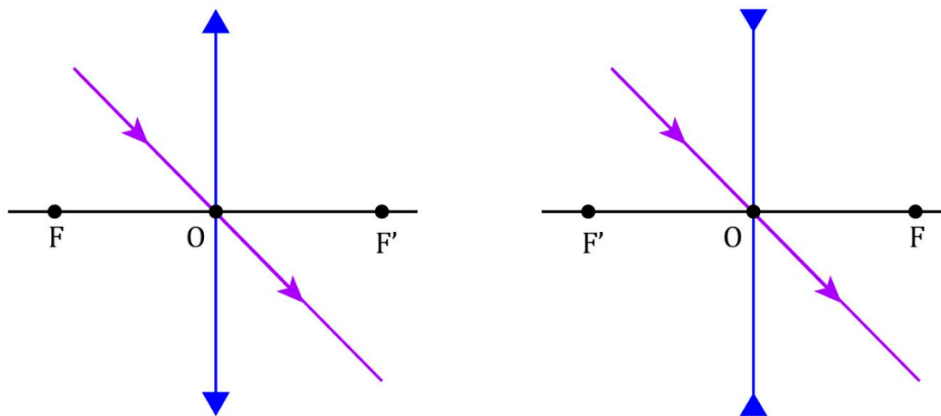


Figura 24: Trajetória de raio de luz passando pelo centro óptico.

É importante perceber que independe da lente ser divergente ou convergente.

### 2.4. Distância focal e plano focal das lentes delgadas

O conceito de ponto focal já foi introduzido, resta apenas definir a *distância focal*, esta é a distância dos focos até o centro óptico da lente. Mas, nem sempre os raios serão paralelos ao eixo óptico da lente.

Considerando um feixe de raios paralelos entre si, mas oblíquos ao eixo principal. Estes raios ao passarem por uma lente ainda convergem para um ponto, se ela for convergente, ou divergem de um ponto, se ela for divergente. Este novo ponto é chamado de **foco secundário**. Todos os focos secundários pertencem a um plano que contém o foco principal e é perpendicular ao eixo principal. Visualmente:

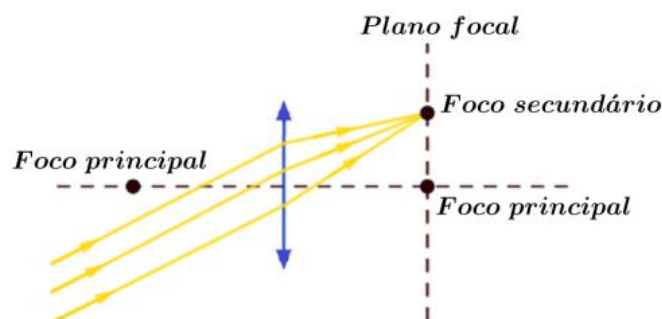


Figura 25: Plano focal e um foco secundário de lente convergente



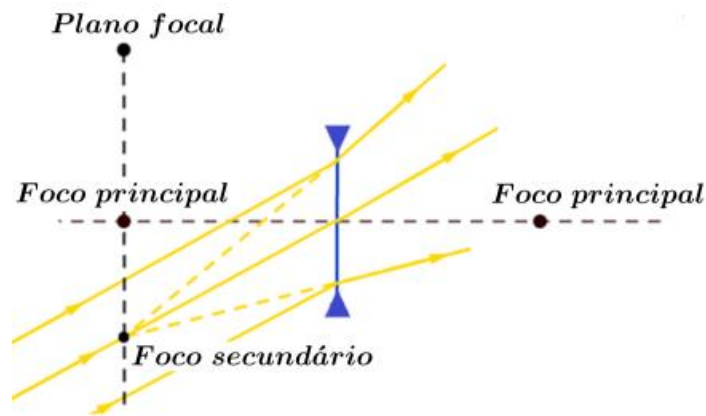
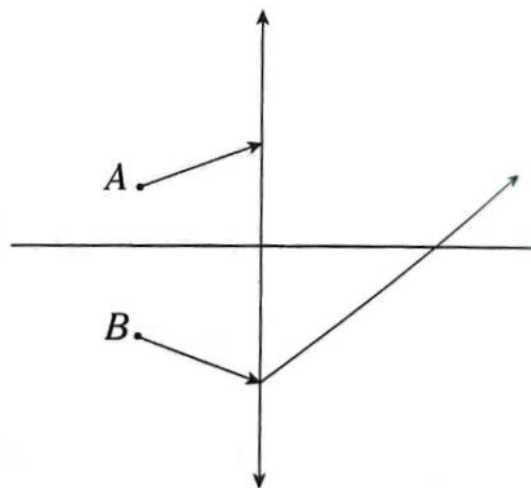


Figura 26: Plano focal e um foco secundário para uma lente divergente.



22)

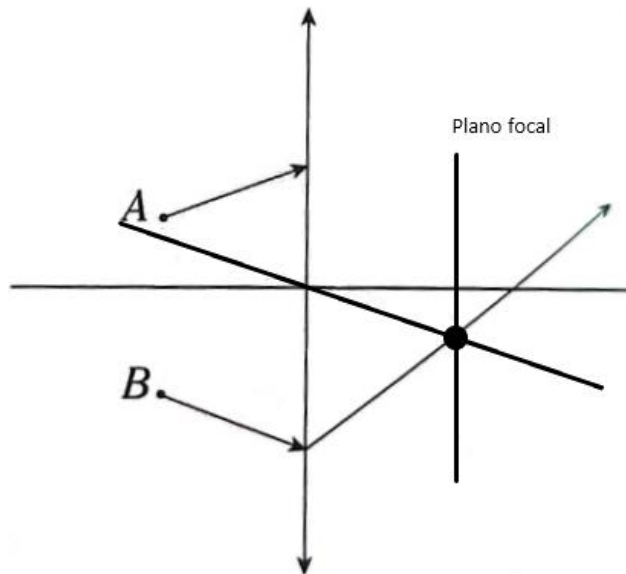
Na figura abaixo, está representado um esquema simplificado de uma lente convergente. Além disso, está indicada a trajetória seguida por dois raios de luz incidentes sobre a lente. Esboce a trajetória que segue o raio A, ao ser refratado pela lente, se é conhecida a trajetória do raio refratado B.



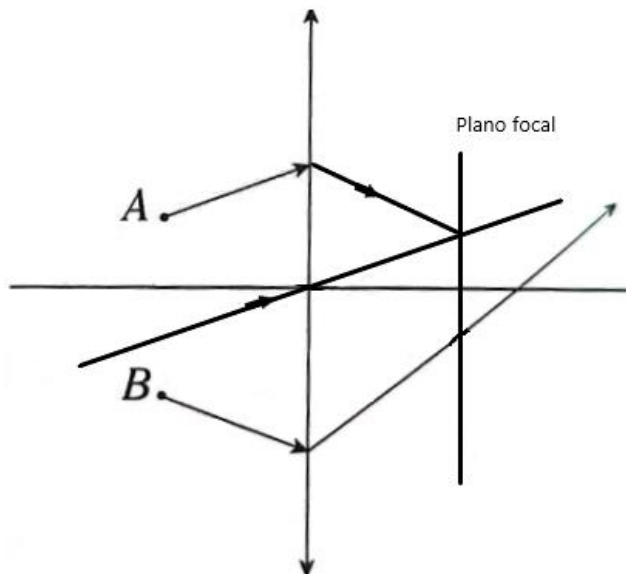
**Comentários:**

A trajetória do raio de luz A só pode ser determinado se for conhecido o plano focal. Para encontrar o plano focal é necessário começar pela análise do raio B. Sabe-se que ele convergirá com algum raio paralelo a ele exatamente sobre um foco secundário, ou seja, sobre o plano focal. Assim, traça-se um raio paralelo a ele e que cruza o centro óptico, pois, dessa forma, sabe-se a trajetória do raio refratado, visto que o centro óptico não causa desvio angular. Assim:





Agora, tem-se o plano focal. Sabe-se que um raio paralelo a A e A irão convergir sobre o plano focal. Portanto, traça-se novamente um raio que passa pelo centro óptico e, dessa vez, paralelo a A. Assim, o esboço final fica:



## 2.5. Formação de imagens em lentes delgadas

A formação de imagens para uma lente delgada será demonstrada a seguir. A base de tudo são os raios que passam pelos pontos mais importantes da lente, e as posições em que o objeto pode se localizar.

Os raios que serão utilizados são aqueles paralelos ao eixo principal, ou seja, que passam pelo foco e os que passam pelo centro óptico, ou seja, não sofre desvio angular. Quanto às posições, ele



pode localizar-se atrás do *ponto antiprincipal* (2 distâncias focais da lente), entre o ponto antiprincipal e o foco, entre o foco e o centro óptico.

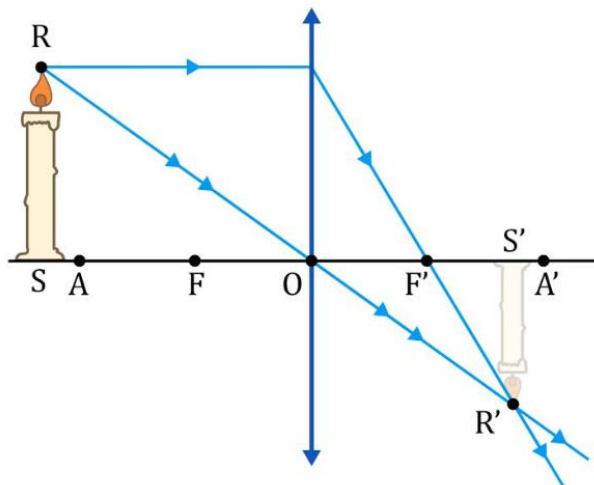


Figura 27: Formação de imagem para lente convergente.

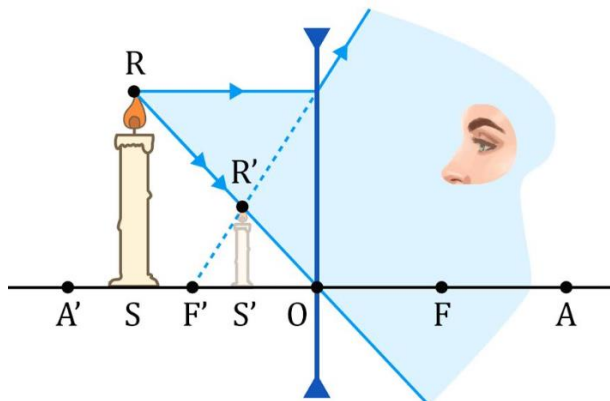


Figura 28: Formação de imagem para uma lente divergente.

A partir de agora, A e A' referem-se respectivamente ao ponto antiprincipal objeto e imagem, F e F' ao foco objeto e foco imagem O ao centro óptico. Pode-se resumir os resultados na seguinte tabela:

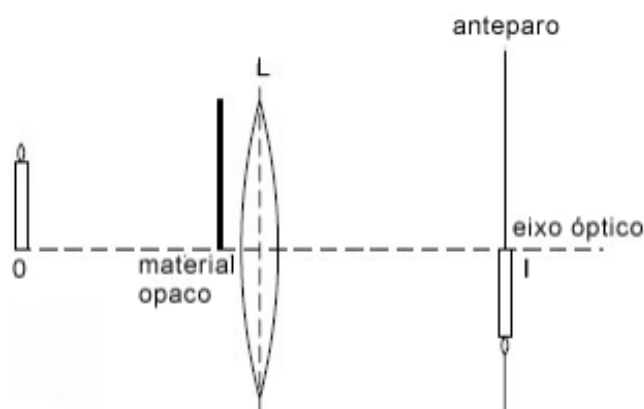
Característica óptica da lente	Posição do objeto	Imagem real ou virtual	Imagem direita ou invertida	Imagem maior, menor ou igual ao objeto?
Convergente	Além de A	Real	Invertida	Menor
Convergente	Sobre A	Real	Invertida	Igual
Convergente	Entre A e F	Real	Invertida	Maior
Convergente	Sobre F	-	-	-
Convergente	Entre F e O	Virtual	Direita	Maior
Divergente	Qualquer uma	Virtual	Direita	Menor

É importante observar que, desta tabela, conclui-se que sempre que uma imagem for maior, necessariamente a lente é convergente.



### 23) (ITA-1985)

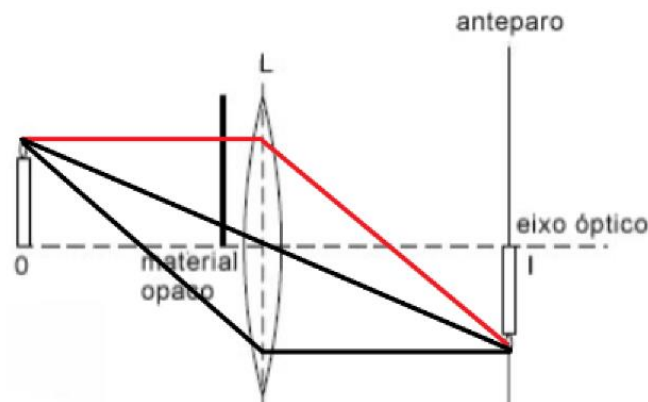
A figura abaixo representa uma lente delgada  $L$  a qual forma sobre um anteparo, uma imagem real  $I$  de um objeto real  $O$ . A lente é circular esférica e o eixo óptico tem a posição indicada. Suponhamos agora que com um material opaco disposto entre o objeto e a lente bloqueamos toda a parte que corresponde ao semicírculo superior da lente. Nessas condições:



- a) a imagem desaparece do anteparo
- b) a imagem fica fora de foco
- c) a imagem não desaparece, mas fica mais tênue
- d) a imagem se torna virtual
- e) nada se pode afirmar se não conhecermos a posição, exata do material opaco.

#### Comentários:

Esboçando a situação, com os raios de luz que chegavam ao anteparo e não chegam mais em vermelho e com os que ainda chegam ao anteparo em preto, tem-se:



Ainda se tem raios de luz chegando à mesma posição, portanto, não se perdeu nitidez, entretanto, a quantidade de luz que chega diminuiu, portanto, perdeu-se intensidade luminosa da imagem. Portanto, a alternativa correta é **letra C**.

#### 24) (UFRGS)

Uma câmera fotográfica, para fotografar objetos distantes, possui uma lente teleobjetiva convergente, com distância focal de 200 mm. Um objeto real está a 300 m da objetiva; a imagem que se forma, então, sobre o filme fotográfico no fundo da câmera é:

- a) real, não-invertida e menor do que o objeto.
- b) virtual, invertida e menor do que o objeto.
- c) real, invertida e maior do que o objeto.
- d) virtual, não-invertida e maior do que o objeto.
- e) real, invertida e menor do que o objeto.

#### Comentários:

O objeto está à uma distância maior que  $2f$  (posição além de A) e a lente é convergente. Portanto: **letra E**.



## 2.6. Equação da lente delgada

Três das principais grandezas associadas a uma lente delgada, são: a distância do objeto à lente ( $p$ ), a distância da imagem à lente ( $p'$ ) e a distância focal da lente ( $f$ ). Para relacionar estas medidas, adotar-se-á o chamado **Referencial Gaussiano**. Neste referencial, divide-se o espaço com o plano da lente, o lado da luz incidente e o lado da luz refratada. Com base no lado que se encontram o objeto e a imagem,  $p$  e  $p'$  assumem sinais diferentes.

	Lado da luz incidente	Lado da luz refratada
$p$	Positivo (objeto real)	Negativo (objeto virtual)
$p'$	Negativo (imagem virtual)	Positivo (imagem real)

No referencial de Gauss, também se adotam convenções de sinais para  $h$  e  $h'$ , as alturas das imagens. Para uma imagem direita, o objeto e a imagem têm ordenada de mesmo sinal, enquanto para uma imagem invertida, o objeto e a imagem têm ordenadas de sinais opostos.

E, por último, o referencial gaussiano define que:



Lente divergente	Lente convergente
Distância focal negativa	Distância focal positiva

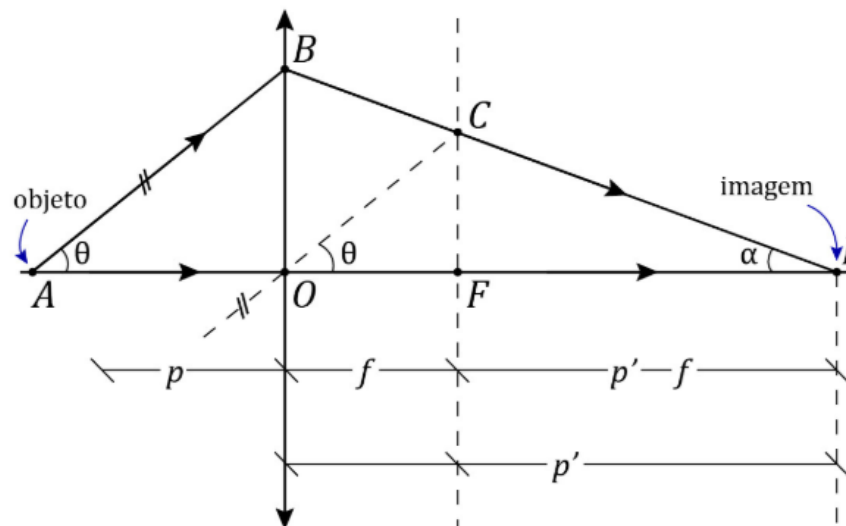


Figura 29: Formação de imagem em lente delgada.

Da figura, tem-se que  $\Delta ABO \sim \Delta OCF$ :

$$\frac{BO}{p} = \frac{CF}{f} \Rightarrow \frac{BO}{CF} = \frac{p}{f}$$

E,  $\Delta EIO \sim \Delta PFI$ :

$$\frac{BO}{CF} = \frac{p'}{p' - f}$$

Destas expressões, obtém-se que:

$$\begin{aligned} \frac{p}{f} &= \frac{p'}{p' - f} \\ p \cdot p' - p \cdot f &= p' \cdot f \\ f \cdot (p + p') &= p \cdot p' \end{aligned}$$

Dividindo toda a expressão por  $f \cdot p \cdot p'$ :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

### 2.6.1. Condição de distância mínima entre imagem e objeto

Considere que se tem um objeto à uma distância  $d$  de um anteparo. Ao colocar-se uma lente entre o objeto e o anteparo projeta-se uma imagem real sobre o anteparo. Portanto:

$$p + p' = d$$

Pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{d-p}$$
$$\frac{1}{f} = \frac{d}{p \cdot (d-p)}$$
$$d \cdot f = d \cdot p - p^2$$

Para que exista um  $p$  que gere projeção:

$$\Delta = d^2 - 4 \cdot d \cdot f \geq 0$$

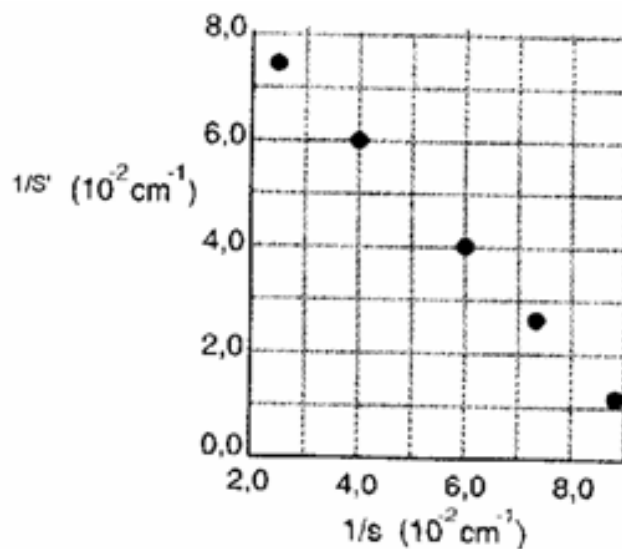
$$d \geq 4 \cdot f$$

ATENÇÃO  
DECORE!



### 25) (ITA - 1990)

Numa certa experiência mediu-se a distância entre um objeto e uma lente e a distância entre a lente e a sua imagem real, em vários pontos. O resultado dessas medições é apresentado na figura abaixo. Examinando-se cuidadosamente o gráfico conclui-se que:



- a) A distância focal da lente é de 10 cm.
- b) A distância focal da lente é de 100 cm.
- c) A distância focal da lente é de 8 cm.
- d) A distância focal da lente é de 2 cm.
- e) A distância focal da lente é de 0,01 cm.

Comentários:



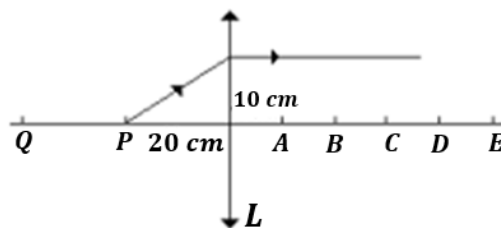


O enunciado afirma tratar-se de uma imagem real, portanto  $p' > 0$ . Escolhendo-se qualquer ponto do gráfico:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$$
$$\frac{1}{f} = 10^{-1} \text{ cm}^{-1} \Rightarrow \boxed{f = 10 \text{ cm}}$$

Letra A.

## 26) (CESGRANRIO)



A partir de uma lente biconvexa L e sobre seu eixo principal, marcam-se cinco pontos A, B, C, D e E a cada 10cm, conforme ilustra a figura. Observa-se que um raio luminoso, emitido de um ponto P, distante 20cm dessa lente, após atravessá-la, emerge paralelamente ao seu eixo principal. Portanto, se esse raio for emitido de um ponto Q, situado a 40cm dessa lente, após atravessá-la, ele irá convergir para o ponto:

- a) A
- b) B
- c) C
- d) D
- e) E

### Comentários:

Pela figura fornecida, como os raios emergem paralelos para uma fonte em P, isso indica que P está sobre o foco da lente. Dessa forma, a distância focal  $f$  é de 20 cm. Como trata-se de uma lente biconvexa, a lente é convergente ( $f > 0$ ). Assim, para a fonte em Q:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$
$$\frac{1}{20} = \frac{1}{40} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = 40 \text{ cm}$$

Portanto, o raio converge na posição D.

Letra D.





## 2.7. Aumento transversal

Analisando a figura abaixo da formação de uma imagem por uma lente:

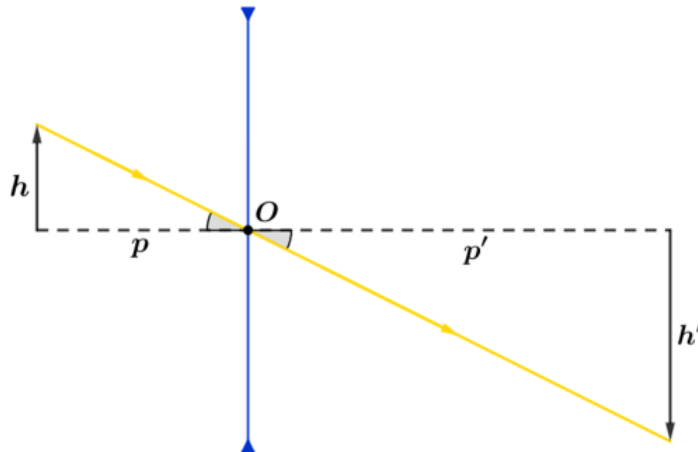


Figura 30: Lente qualquer para obtenção do aumento linear.

Por semelhança de triângulos:

$$\left| \frac{h'}{h} \right| = \left| \frac{p'}{p} \right|$$

Mas, pelo referencial gaussiano  $h' < 0$ ,  $h > 0$ ,  $p > 0$  e  $p' > 0$ . Portanto:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{p'}{p}$$

Logo:

$$A = \frac{h'}{h} = -\frac{p'}{p}$$

### Observações:

Com respeito ao significado físico de  $A$ :

- Se  $A$  é positivo, a imagem é direita, se for negativo, a imagem é invertida.
- Se  $|A| > 1$ , a imagem é maior, caso contrário, ela será menor.



### 27) (Fatec-SP)



Uma lente é utilizada para projetar em uma parede a imagem de um slide, ampliada 4 vezes em relação ao tamanho original do slide. A distância entre a lente e a parede é de 2,0 m. O tipo de lente utilizado e sua distância focal são, respectivamente:

- a) divergente; 2 m
- b) convergente; 40 cm
- c) divergente; 40 cm
- d) divergente; 25 cm
- e) convergente; 25 cm

**Comentários:**

A ampliação é de 4x. É importante lembrar que se a imagem é maior que o objeto, a lente é convergente. Não foi fornecido no enunciado, pois é esperado que o aluno note que neste caso a imagem é invertida, portanto:

$$A = -4$$

Outra maneira de perceber que a ampliação deve ser negativa é o fato de que  $p$  e  $p'$  não podem ter mesmo sinal já que a imagem está sendo projetada. Assim, feita esta primeira análise:

$$A = -\frac{p'}{p}$$
$$4 = \frac{p'}{p} \Rightarrow p' = 4 \cdot p$$

E, do enunciado:

$$p' = 2 \text{ m}$$

Logo:

$$p = 50 \text{ cm}$$

Pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{50} + \frac{1}{200} = \frac{1}{40} \Rightarrow \boxed{f = 40 \text{ cm}}$$

**Letra B.**

**28)**

Um objeto tem altura  $h_0 = 20 \text{ cm}$  e está localizado a uma distância  $d_0 = 30 \text{ cm}$  de uma lente. Esse objeto produz uma imagem virtual de altura  $h_i = 4,0 \text{ cm}$ . A distância da imagem à lente, a distância focal e o tipo da lente são, respectivamente:

- a) 6,0 cm; 7,5 cm; convergente;
- b) 1,7 cm; 30 cm; divergente;
- c) 6,0 cm; -7,5 cm; divergente;



- d) 6,0 cm; 5,0 cm; divergente;  
e) 1,7 cm; -5,0 cm; convergente.

**Comentários:**

Sendo a imagem virtual, a lente deve ser divergente e ela produzirá uma imagem menor ou a lente deve ser convergente, com o objeto entre o F e O, e a lente produzirá uma imagem maior. Como foi afirmado que a lente produz uma imagem menor, conclui-se que a lente é divergente. Neste caso, a imagem é direita e:

$$A = \frac{h'}{h} = 0,2$$
$$-\frac{p'}{p} = 0,2 \Rightarrow -p' = 30 \cdot 0,2 \Rightarrow \boxed{p' = -6 \text{ cm}}$$

Pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{30} - \frac{1}{6} = -\frac{4}{30}$$
$$\boxed{f = -7,5 \text{ cm}}$$

Portanto, a alternativa correta é **letra C**.

## 2.8. Vergência

Para comparar diferentes lentes em termos de “mais forte” e “mais fraca”, em relação à sua capacidade de alterar a trajetória da luz, utiliza-se a grandeza física **Vergência (V)**. A vergência é definida como:

$$V = \frac{1}{f}$$

A unidade utilizada para a vergência no SI é:

$$\text{Unidade (V)} = m^{-1} = \text{dioptria (di)}$$

Baseado nos sinais adotados anteriormente para  $f$ , tem-se que:

$$\begin{cases} V > 0 \Leftrightarrow f > 0 \Leftrightarrow \text{lente convergente} \\ V < 0 \Leftrightarrow f < 0 \Leftrightarrow \text{lente divergente} \end{cases}$$

Quanto maior a vergência, menor a distância focal e maior sua capacidade de alterar a trajetória da luz. Observe a figura abaixo:



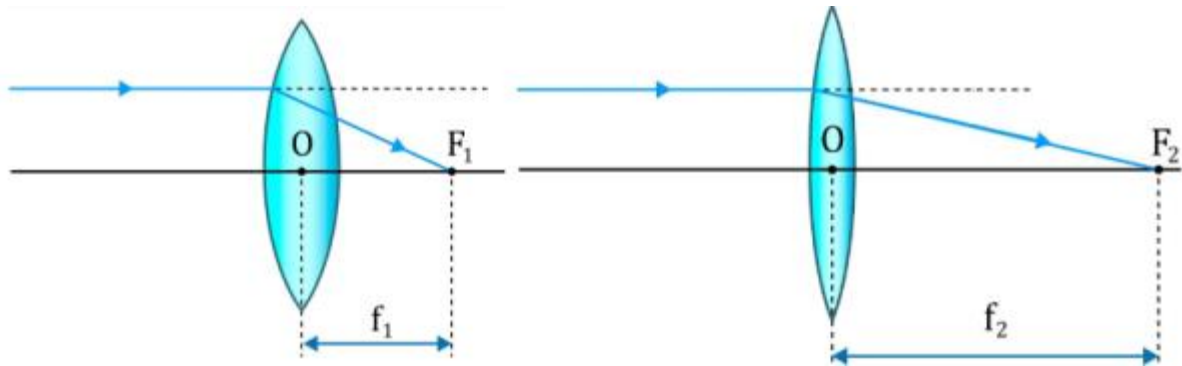


Figura 31: Comparação da trajetória da luz entre lentes de diferentes vergências.

Como pode-se notar, a trajetória na lente de distância focal  $f_1$  foi mais alterada. Portanto, quanto menor o foco, maior a vergência e maior a capacidade de alterar a trajetória da luz incidente.

ATENÇÃO  
DECORE!



29)

Uma lente convergente de 4 dioptrias fornece uma imagem virtual, direita e 5 vezes maior de um objeto real. Nessas condições, o objeto encontra-se entre:

- a) o foco-objeto e a lente a 20 cm desta.
- b) o foco-objeto e a lente a 60 cm desta.
- c) o foco-imagem e a lente a 60 cm desta.
- d) o foco-imagem e a lente a 20 cm desta.
- e) a uma distância maior do que 60 cm da lente.

**Comentários:**

Pelo enunciado:

$$A = -\frac{p'}{p} = 5 \Rightarrow p' = -5 \cdot p \Rightarrow \frac{1}{f} = 4$$

Logo, pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow 4 = \frac{1}{p} - \frac{1}{5 \cdot p} \Rightarrow 4 = \frac{4}{5 \cdot p}$$

$$\boxed{p = 20 \text{ cm}}$$

Como  $p > 0$ , o objeto é real e encontra-se entre o foco objeto  $f = 25 \text{ cm}$  e a lente.

**Letra a.**





## 2.9. Equação dos fabricantes de lentes

A equação dos fabricantes de lente como é conhecida relaciona as propriedades geométricas da lente ( $R_1$  e  $R_2$ ), as propriedades do material da lente e do meio ( $n_{lente}$  e  $n_{meio}$ ) e as propriedades ópticas da lente ( $f$ ). A dedução da equação foge do escopo do curso, sendo prioridade a compreensão da contribuição de cada parcela na equação.

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot \left( \frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1 \right) \quad (eq. 2.8.1)$$

Onde:

$$R \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{face convexa} \\ < 0 \rightarrow \text{face côncava} \\ \infty \rightarrow \text{face plana} \end{cases}$$

Agora, vamos analisar o comportamento óptico das lentes em meios com índice de refração menor que a lente. Assim:

$$\frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1 > 0$$

Portanto, se:

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} > 0 \rightarrow \text{convergente} \\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} < 0 \rightarrow \text{divergente} \end{cases}$$

É importante lembrar que o nome que vem primeiro (por exemplo côncava na lente côncavo-convexa) significa que o raio da face côncava é maior em módulo que o seguinte.

Lente	$R_1$	$R_2$	$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$	Comportamento óptico
Biconvexa	+	+	+	Convergente
Plano-convexa	$\infty$	+	+	Convergente
Côncavo-convexa	-	+	+	Convergente
Bicôncava	-	-	-	Divergente
Plano-côncava	$\infty$	-	-	Divergente



Convexa-côncava	+	-	-	Divergente
-----------------	---	---	---	------------

30) (ITA-2004)

Uma lente convergente tem distância focal de 20 cm quando está mergulhada em ar. A lente é feita de vidro, cujo índice de refração é  $n_v = 1,6$ . Se a lente é mergulhada em um meio, menos refringente do que o material da lente, cujo índice de refração é  $n$ , considere as seguintes afirmações:

- I. A distância focal não varia se o índice de refração do meio for igual ao do material da lente.
- II. A distância focal torna-se maior se o índice de refração  $n$  for maior que o do ar.
- III. Neste exemplo, uma maior diferença entre os índices de refração do material da lente e do meio implica numa menor distância focal.

Então, pode-se afirmar que:

- a) Apenas a II é correta.
- b) Apenas a III é correta.
- c) Apenas II e III são corretas.
- d) Todas são corretas.
- e) Todas são incorretas.

Comentários:

Analisemos a equação dos fabricantes de lente:

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

I. Falso. Quando  $n_{lente} = n_{meio}$ , a lente não causa nenhum distúrbio na trajetória da luz, portanto seria como se ela existisse.

II. Verdadeiro. Ao aumentar-se o  $n_{meio}$  diminui-se o termo  $\left( \frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1 \right)$ , portanto diminui-se  $\frac{1}{f}$ . Mas se  $\frac{1}{f}$  diminui, isso implica que  $f$  aumenta.

III. Verdadeiro. Análogo ao II.

Letra C.

31) (ITA)

As duas faces de uma lente delgada biconvexa têm um raio de curvatura igual a 1,00 m. O índice de refração da lente para a luz vermelha é de 1,60 e, para a luz violeta, 1,64. Sabendo-se que a lente está imersa no ar, cujo índice de refração é 1,00, calcule a distância entre os focos de luz vermelha e de luz violeta, em centímetros.

Comentários:



Aplicando-se a equação dos fabricantes de lentes para a luz vermelha:

$$\frac{1}{f_{\text{verm}}} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \cdot (1,6 - 1) = 1,2 \Rightarrow f_{\text{verm}} = \frac{5}{6} \text{ m}$$

Para a luz violeta:

$$\frac{1}{f_{\text{viol}}} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \cdot (1,64 - 1) = 1,28 \Rightarrow f_{\text{viol}} = \frac{100}{128} = \frac{25}{32} \text{ m}$$

Portanto:

$$f_{\text{verm}} - f_{\text{viol}} = \frac{5}{6} - \frac{25}{32} \cong 5,2 \text{ cm}$$



## 2.11. Método de Pierre Lucie

Também conhecido como método gráfico das coordenadas. É um método alternativo à equação das lentes delgadas para resolução de problemas. O método consiste em 3 passos. São eles:

1) Montar o plano  $p'p$  (abscissa  $p'$  e ordenada  $p$ ).

2) Localizar o ponto  $F = (f, f)$ . É importante ressaltar que o sinal de  $f$  será positivo para lentes convergentes e negativo para lentes divergentes.

3) Apoia-se uma reta suporte sobre o ponto  $F$ . A intersecção desta reta com o eixo das abscissas é numericamente igual a  $p'$ , enquanto a intersecção da reta com o eixo das ordenadas é numericamente igual a  $p$ .

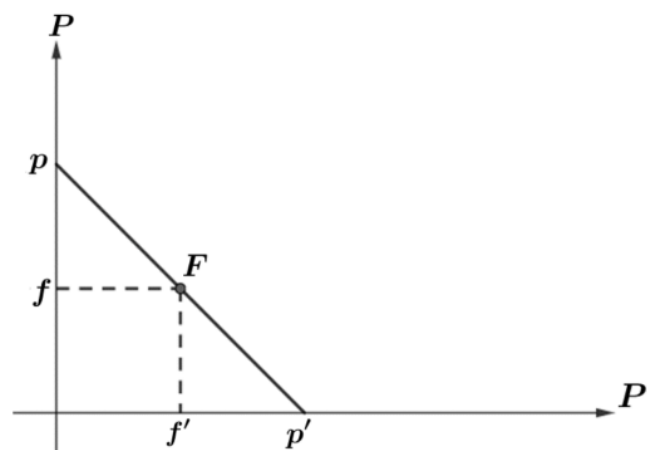


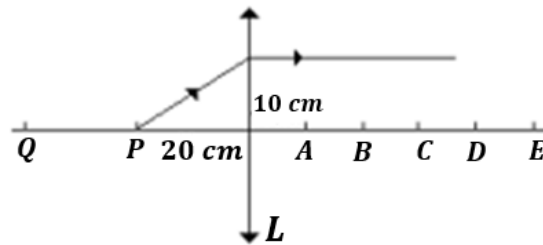
Figura 32: Método de Pierre Lucie para lente convergente.

ATENÇÃO  
DECORE!





32) (CESGRANRIO)

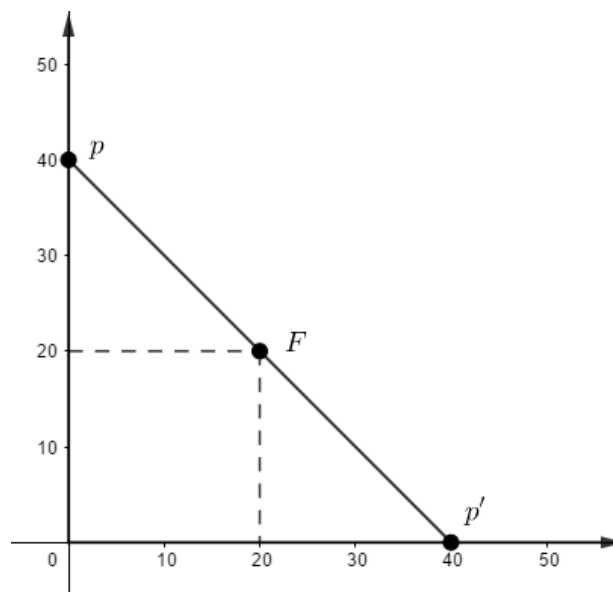


A partir de uma lente biconvexa  $L$  e sobre seu eixo principal, marcam-se cinco pontos A, B, C, D e E a cada 10 cm, conforme ilustra a figura. Observa-se que um raio luminoso, emitido de um ponto P, distante 20 cm dessa lente, após atravessá-la, emerge paralelamente ao seu eixo principal. Portanto, se esse raio for emitido de um ponto Q, situado a 40 cm dessa lente, após atravessá-la, ele irá convergir para o ponto:

- a) A
- b) B
- c) C
- d) D
- e) E

Comentários:

Sabe-se que o  $f = +20$  e  $p = 40$ . Logo:



Pela figura,  $p' = 40$  cm. Portanto, a alternativa correta é a **letra D**.



## 2.12. Associação de lentes delgadas

Serão estudados aqui somente as associações de lentes coaxiais, isto é, com eixos ópticos principais coincidentes. Divide-se a associação de lentes em dois tipos: a associação justaposta e a não justaposta. A associação justaposta é quando as lentes estão suficientemente próximas de tal forma que se desconsidera a distância entre os centros ópticos, enquanto a não justaposta irá ter que considerar esta distância.

### 2.12.1. Associação não justaposta

Na associação não justaposta, o que ocorre são dois ou mais desvios da trajetória da luz em que a luz vinda do objeto passará pela primeira lente e formará a primeira imagem. A seguir, essa imagem servirá de objeto para a segunda lente, e, quando a luz passar por esta, formará uma segunda imagem. Portanto, a associação de lentes forma uma única imagem através de dois ou mais desvios da luz, a depender da quantidade de lentes associadas.

Visualmente:

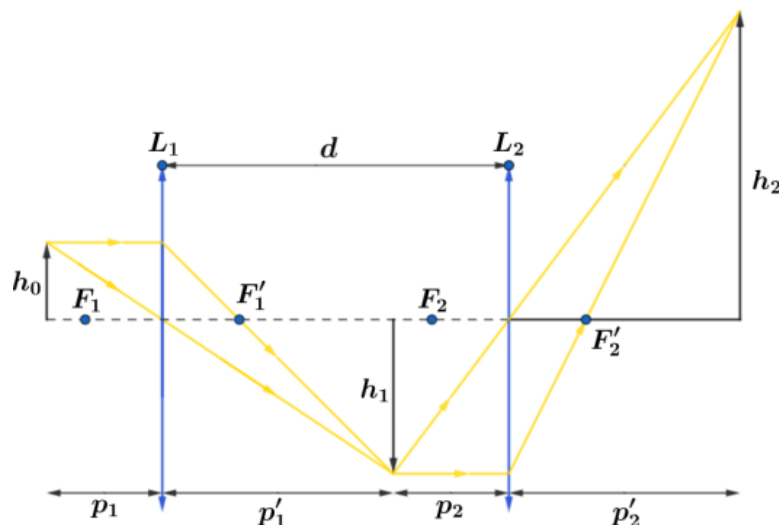


Figura 33: Exemplo de possível associação de lentes.

A resolução deste tipo de problema é um processo de duas etapas em que cada etapa consiste no que foi feito até agora. Deve-se atentar somente a:

$$p_2 = d - p'_1$$

$$A = A_1 \cdot A_2 = \frac{h_1}{h_0} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_2}{h_0}$$

### 2.12.2. Associação justaposta

Para a associação justaposta,  $d = 0$ . Ou seja:

$$p_2 = -p'_1$$

Baseando-se na figura 33, adotando a condição exposta acima, tem-se:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} \Rightarrow \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1}$$

Mas:



$$\frac{1}{p_2} = -\frac{1}{p'_1}$$

Logo, para a lente 2:

$$\begin{aligned}\frac{1}{f_2} &= \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'_2} = -\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{p'_2} = -\frac{1}{f_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_2} \\ \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} &= \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_2}\end{aligned}$$

Repare que  $p_1$  é a posição do objeto até as lentes (considera-se que as lentes estão na mesma posição) e  $p'_2$  é a posição da imagem final até as lentes. Portanto, esta expressão prova que duas lentes delgadas justapostas equivalem à uma lente única de vergência:

$$V = V_1 + V_2$$

A posição é onde estão as duas lentes originais.

ATENÇÃO  
DECORE!



### 33) (UFU-MG)

Duas lentes delgadas e convergentes, de distâncias focais  $f_1 = 10 \text{ cm}$  e  $f_2 = 40 \text{ cm}$ , foram justapostas para se obter uma maior vergência. A convergência obtida com essa associação é, em dioptrias:

- a) 2
- b) 0,125
- c) 8
- d) 12,5
- e) 50

#### Comentários:

Aqui houve uma associação justaposta. Portanto:

$$V_{eq} = V_1 + V_2$$

$$V_1 = 10$$

$$V_2 = 2,5$$

$$V_{eq} = 12,5$$

Assim, a alternativa correta é **letra D**.

### 34) (ITA-1983)



Uma lente A, convergente ( $f_A = 10\text{cm}$ ), é justaposta a outra lente convergente B ( $f_B = 5\text{cm}$ ). A lente equivalente é:

- a) divergente e  $f = 3,33\text{ cm}$
- b) divergente e  $f = 5,2\text{ cm}$
- c) convergente e  $f = 5,2\text{ cm}$
- d) convergente e  $f = 15\text{ cm}$
- e) convergente e  $f = 3,33\text{ cm}$

**Comentários:**

Sendo uma justaposição de lentes:

$$V_{eq} = V_1 + V_2$$
$$V_{eq} = \frac{1}{0,1} + \frac{1}{0,05} = 30 \Rightarrow \frac{1}{f} = 30$$
$$f = \frac{1}{30}\text{ m} \cong 3,33\text{ cm}$$

Assim, a alternativa correta é **letra E**.





### 3. Instrumentos ópticos

Neste tópico serão abordados os instrumentos ópticos, isto é, ferramentas que auxiliam a visualização de um objeto. Serão apresentados os principais instrumentos presentes no cotidiano, seus princípios de funcionamento e alguns equacionamentos que quantifiquem os efeitos do instrumento.

#### 3.1. ângulo visual e distância do ponto próximo

A visualização de objetos pelo ser humano para um olho perfeito depende não só do tamanho do objeto, mas, também, da distância do objeto ao observador. A relação entre essas duas grandezas é dada pelo **ângulo visual**. Observe a figura abaixo:

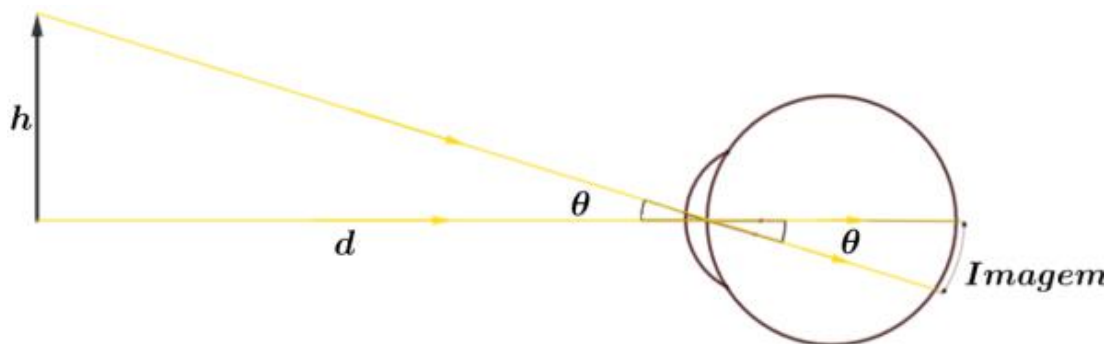


Figura 34: Representação de formação de imagem no olho e ângulo visual

O ângulo visual, representado por  $\theta$  na figura 34, está, conforme explicado anteriormente, relacionado à dimensão do objeto e à distância do observador ao objeto. Para que um objeto seja visível é necessário que seu ângulo visual seja suficientemente grande, de modo que a imagem, produzida na retina seja compreensível.

Essa condição do ângulo visual é necessária, mas não suficiente. O olho humano funciona como uma lente com capacidade de alterar sua distância focal, como será visto mais adiante, entretanto, há um limite para esta variação, portanto, para formação de uma imagem nítida o objeto não pode estar em qualquer posição. Uma das restrições da posição do objeto é a chamada **distância do ponto próximo** ( $d_p$ ), comumente adotada como 25 cm.

Portanto, para determinados objetos observados, o ângulo visual é muito pequeno. A fim de solucionar este problema, utilizam-se os instrumentos ópticos que têm a capacidade de aumentar o ângulo visual do observador.



## 3.2. Classificação de instrumentos ópticos

Os instrumentos ópticos são classificados de acordo com o tipo imagem formada. Caso a imagem seja real, tem-se um **instrumento de projeção**. Como exemplo dessa classe, tem-se as câmeras fotográficas e filmadoras, que projetam a imagem sobre um anteparo fotossensível.

Caso a imagem seja virtual, tem-se um **instrumento de observação**, cujo objetivo é o aumento do ângulo visual ou o reposicionamento do objeto para respeitar a distância do ponto próximo. Exemplos de instrumentos deste tipo são os telescópios, as lupas e os binóculos.

Neste tópico, serão estudados mais a fundo somente os instrumentos de observação, visto que os instrumentos de projeção podem ser equacionados baseado no que foi visto no capítulo de lentes.

## 3.3. Aumento angular

Também chamado de **aumento visual**, refere-se ao aumento do ângulo visual produzido pelos instrumentos de observação. É definido como:

$$A_{\theta} = \frac{\hat{\text{Ângulo visual com o instrumento}}}{\hat{\text{Ângulo visual sem instrumentos}}} = \frac{\alpha_0}{\alpha}$$

É comum, para ângulos pequenos a utilização da aproximação paraxial ( $\text{tg } \alpha \cong \alpha$ ), calculando-se, assim, o aumento angular com as tangentes. Logo:

$$A_{\theta} \cong \frac{\text{tg } \alpha_0}{\text{tg } \alpha}$$

O ângulo visual sem instrumentos para lupas e microscópios simples é medido quando o objeto se encontra no ponto próximo, enquanto para lunetas e telescópios

## 3.4. Lupa e Microscópio simples

Na lupa ou microscópio simples, deseja-se observar um objeto móvel, isto é, fica a critério do observador a posição do objeto. Entretanto, devido às condições de nitidez, a máxima proximidade do objeto é de 25 cm. Sendo assim, ao ampliar a imagem, a distância do objeto ao observador pode ser menor que a  $d_p$ , contanto que a imagem esteja mais distante. Visualmente:

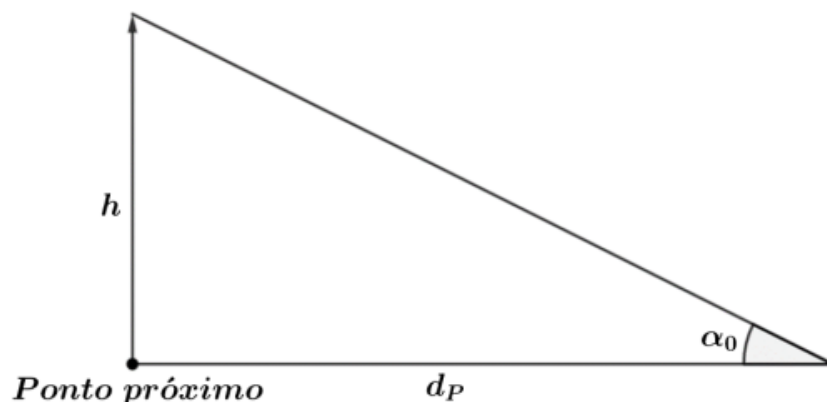


Figura 35: Ângulo visual sem instrumento



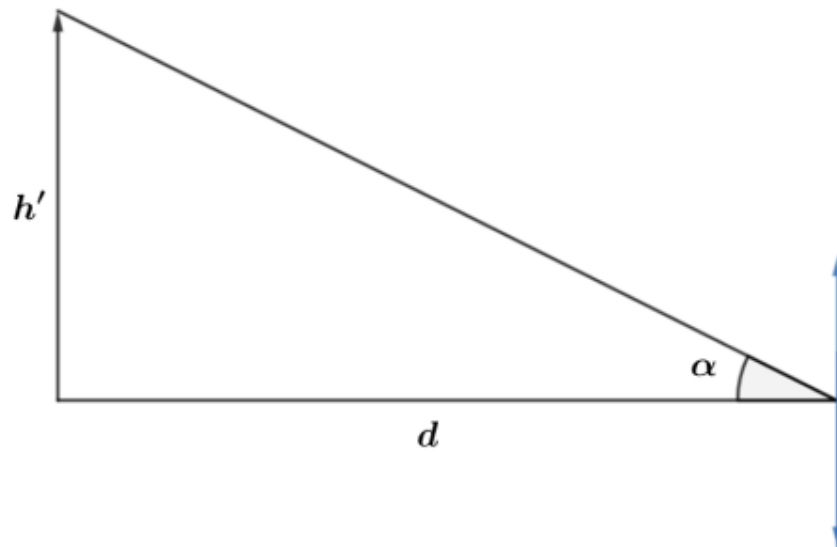


Figura 36: Ângulo visual com instrumento

É importante notar que se faz a consideração para cálculo de que a distância entre o observador e a lente é nula, como exposto na figura 35. Equacionando:

$$A_{\theta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_0} = \frac{h'}{d} \cdot \frac{d_p}{h} = A \cdot \frac{d_p}{d} \quad (\text{eq. 3.4.1})$$

Mas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p'} = \frac{p' - f}{f \cdot p'}$$

E:

$$A = -\frac{p'}{p} = \frac{f - p'}{f} \quad (\text{eq. 3.4.2})$$

Para a imagem formada na figura 36:

$$p' = -d$$

Logo, a equação 3.4.2 fica:

$$A = \frac{f + d}{f}$$

Substituindo na equação 3.4.1:

$$A_{\theta} = \frac{f + d}{f} \cdot \frac{d_p}{d} = \frac{d_p}{f} \cdot \left( \frac{f}{d} + 1 \right)$$

**Observações:**

- A ampliação angular depende da distância que se decide projetar a imagem. Quanto menor for  $d$ , maior a ampliação. O valor mínimo para  $d$  é  $d_p$ . Entretanto, a visualização de uma imagem no ponto próximo causa desconforto para quem visualiza, portanto, usualmente se adota  $d \rightarrow \infty$ , pois apesar de menor ampliação, não há desconforto para o usuário.



- Quando  $d \rightarrow \infty$ , o valor da ampliação é chamado de **ampliação nominal** ou **ampliação comercial**.  $A_{\theta,comercial} = \frac{d_P}{f}$
- A imagem formada é virtual ( $p' < 0$ ) e direita.



35)

Deseja-se observar, com uso de uma lupa, um objeto de altura  $10\text{ cm}$ . Sabe-se que a ampliação comercial da lente é de 10. Sabendo que a imagem é formada sobre o ponto próximo, qual a altura da imagem?

**Comentários:**

$$A_{\theta} = 10 = \frac{d_P}{f}$$

$$f = \frac{25}{10} = 2,5\text{ cm}$$

Pelo enunciado,  $p' = -25\text{ cm}$ . Assim, pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{2,5} = \frac{1}{p} - \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{11}{25} \Rightarrow p = \frac{25}{11}\text{ cm}$$

A altura final da imagem é:

$$A = -\frac{p'}{p} = \frac{25}{\frac{25}{11}} = 11 \Rightarrow A = \frac{h'}{h} \Rightarrow \boxed{h' = 11 \cdot 10 = 110\text{ cm}}$$

### 3.5. Microscópio composto

O microscópio composto é uma associação de lentes convergentes não justapostas. Dá-se o nome a elas de *lente objetiva* e *lente ocular*, respectivamente, a mais próxima do objeto e a mais próxima do observador. A lente objetiva possui abertura menor e distância focal menores que a ocular. A distância entre as duas lentes é o comprimento do microscópio ( $L$ ).

O objeto é colocado a uma distância maior que a distância focal da lente objetiva, produzindo-se uma imagem real e invertida. Projeta-se o microscópio para que esta imagem seja posicionada entre o foco da lente ocular e a lente ocular em si. Assim, a lente ocular atuará como uma lupa, produzindo uma imagem virtual e direita da imagem da lente objetiva. Portanto, o resultado é a produção de uma imagem invertida e virtual.

Observe a figura 37 abaixo:





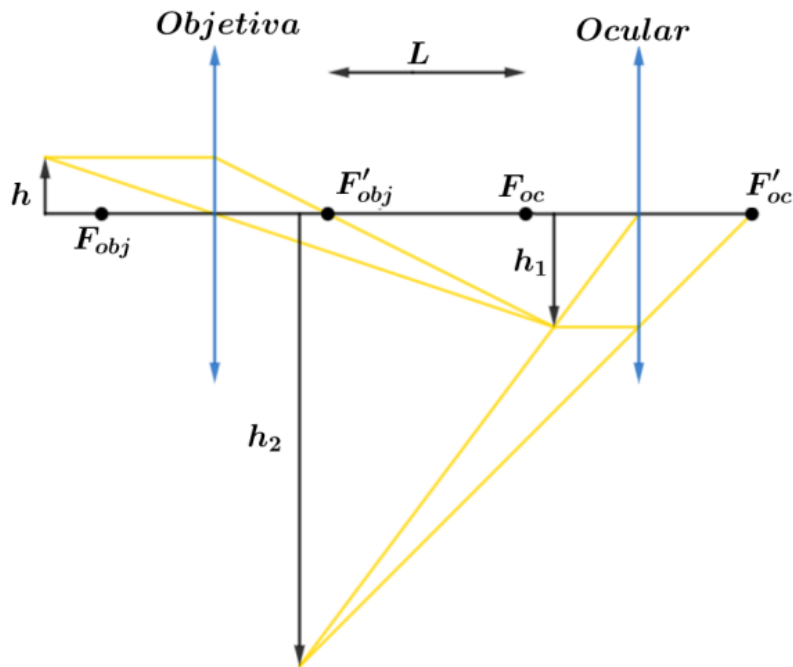


Figura 37: Formação de imagem em microscópio composto.

Para o aumento transversal da lente objetiva:

$$A_{obj} = \frac{h'}{h} = \frac{f - p'}{f}$$

Aproxima-se  $p'$  para  $f_{obj} + L$ , ou seja, despreza-se a distância entre a primeira imagem formada e o foco da ocular:

$$A_{obj} = \frac{f_{obj} - (f_{obj} + L)}{f_{obj}} = -\frac{L}{f_{obj}}$$

A ampliação do ângulo visual da lente ocular é dada por:

$$A_{\theta_{oc}} = \frac{d_p}{f_{oc}} \cdot \left( \frac{f_{oc}}{d} + 1 \right)$$

Assim, a ampliação do microscópio composto:

$$A_{\theta} = \frac{-L \cdot d_p}{f_{oc} \cdot f_{obj}} \cdot \left( \frac{f_{oc}}{d} + 1 \right)$$

Portanto, a ampliação nominal fica:

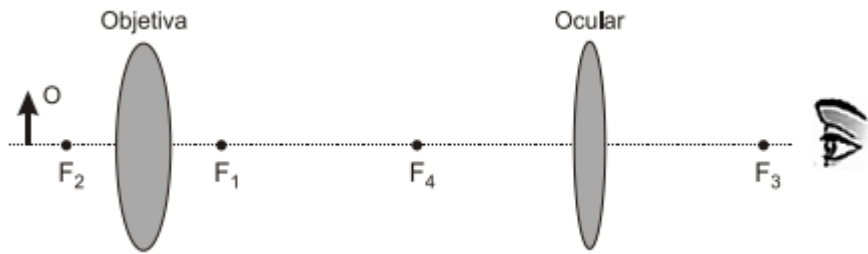
$$A_{\theta_{nominal}} = \frac{-L \cdot d_p}{f_{oc} \cdot f_{obj}}$$

### 36) (UFPR-2014)

Um microscópio composto é constituído, em sua forma mais simples, por duas lentes convergentes colocadas em sequência, conforme esquematizado na figura abaixo. A lente mais próxima ao objeto é chamada objetiva e a lente mais próxima ao olho humano é chamada ocular. A imagem formada pela objetiva é real, maior e invertida, e serve como objeto para a ocular, que forma uma imagem virtual, direita e maior com relação à imagem formada pela objetiva. Suponha que a distância focal



da lente objetiva seja 1 cm, a distância focal da lente ocular seja 4 cm e a distância entre as lentes seja de 6 cm.



Com base nas informações acima e nos conceitos de Óptica, identifique como verdadeiras (V) ou falsas (F) as seguintes afirmativas:

- ( ) Para que a imagem formada pela objetiva tenha as características especificadas no enunciado, o objeto deve estar a uma distância maior que 2 cm dessa lente.
- ( ) Supondo que o objeto esteja a uma distância de 1,5 cm da objetiva, a imagem formada por esta lente estará a 3 cm dela.
- ( ) A imagem final formada por este microscópio é virtual, invertida e maior em relação ao objeto.
- ( ) A imagem formada pela objetiva deve estar a uma distância maior que 4 cm da ocular. Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta, de cima para baixo.

- a) V – F – F – V.
- b) F – V – V – F.
- c) V – V – F – F.
- d) F – F – V – V.
- e) F – V – V – V.

**Comentários:**

**I. Falsa.** Para que a imagem da ocular seja virtual direita e maior, o objeto dessa lente deve estar entre a lente e seu foco. Portanto, a imagem produzida pela objetiva deve estar entre  $F_4$  e a ocular. Então:

$$p' > 2 \text{ cm e } f = 1 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{p} < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{p < 2}$$

**II. Verdadeira.** Pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

$$p' = \frac{p \cdot f}{p - f} = \frac{1,5 \cdot 1}{1,5 - 1} = 3 \text{ cm}$$

**III. Verdadeira.** A primeira imagem é direita invertida e serve de objeto para a segunda lente que produz uma imagem real e direita. Portanto, ao fim, produziu-se uma imagem direita de uma

imagem invertida, ou seja, uma imagem invertida em relação ao objeto. O fato de a imagem ser maior também está correto, visto que foram feitas duas ampliações sucessivas pelas lentes.

**IV. Falsa.** É necessário que a imagem formada pela objetiva esteja entre o foco e a lente. Portanto a distância entre a imagem da objetiva e a lente ocular seja menor que a distância focal, ou seja, menor do que 4 cm.

**F-V-V-F** Logo, alternativa correta é **letra B**.



### 3.6. Luneta astronômica

Na luneta astronômica, utilizam-se novamente duas lentes convergentes, a objetiva, mais próxima do astro e a ocular, mais próxima do observador. A principal diferença da luneta astronômica é o fato de o astro localizar-se à uma distância adotada como  $p \rightarrow \infty$ . A formação da primeira imagem, dá-se, portanto, no plano focal da lente objetiva. A lente ocular novamente atua como uma lupa. Visualmente:

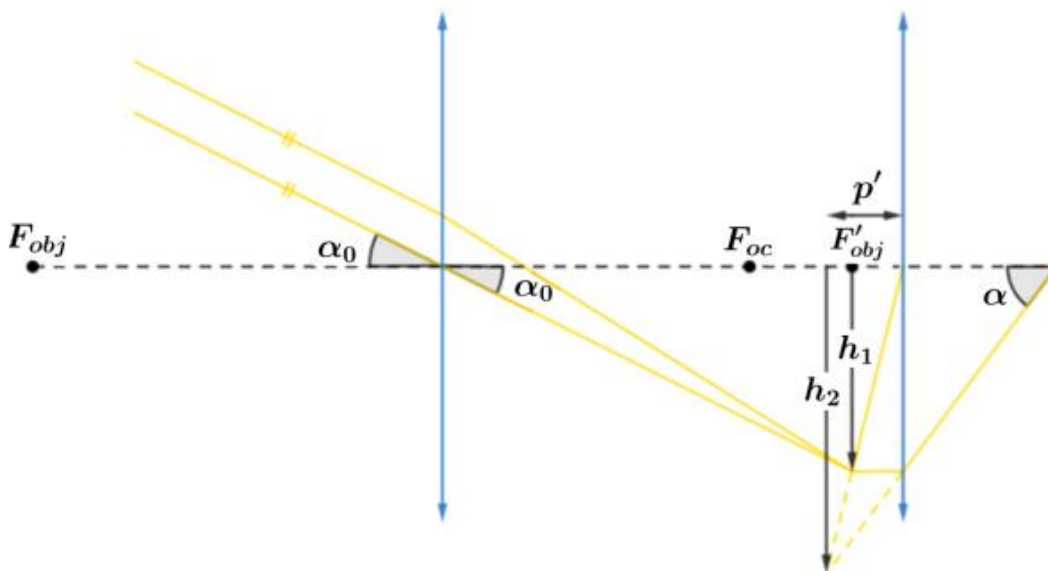


Figura 38: Formação de imagem em luneta astronômica.

A ampliação visual fica:

$$A_{\theta} = \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \alpha_0} = \frac{h_2}{p'} \cdot \frac{f_{obj}}{h_1}$$
$$A_{\theta} = \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{f_{obj}}{p'} \quad (\text{eq. 3.6.1})$$

Pela equação das lentes, para a ocular:

$$\frac{1}{f_{oc}} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{f_{oc} - L}$$



$$\frac{1}{p'} = \frac{f_{oc} - L - f_{oc}}{f_{oc} \cdot (f_{oc} - L)}$$
$$p' = \frac{f_{oc} \cdot (f_{oc} - L)}{-L}$$

E, para o aumento transversal da ocular:

$$A = \frac{h_2}{h_1} = \frac{f_{oc} - p'}{f_{oc}}$$
$$A = 1 - \frac{p'}{f_{oc}} = 1 + \frac{f_{oc} - L}{L} = \frac{f_{oc}}{L}$$

Portanto, substituindo  $A$  e  $p'$  na equação 3.6.1:

$$A_\theta = \frac{f_{oc}}{L} \cdot \frac{f_{obj} \cdot (-L)}{f_{oc} \cdot (f_{oc} - L)} = -\frac{f_{obj}}{f_{oc} - L}$$

### Observações:

- O sinal negativo deve-se à inversão da imagem final.
- É comum adotar-se  $L = 0$ , isto é, os focos das lentes coincidentes. Portanto:

$$A_\theta = -\frac{f_{obj}}{f_{oc}}$$

ATENÇÃO  
DECORE!



### 37) (UEM-2012)

Um estudante de Física tenta construir instrumentos ópticos por meio da associação de lentes delgadas. Para tanto, ele adquire duas lupas, de distâncias focais 10 cm e 40 cm, respectivamente. De posse dessas informações, assinale o que for correto.

- 01) Lupas podem ser consideradas microscópios simples, formados por lentes convergentes.
- 02) Quando justapostas, essas lupas funcionam como uma única lente convergente de distância focal 8 cm e convergência de 12,5 di.
- 04) Essas lupas podem ser usadas como objetiva e ocular de um microscópio composto, cujo aumento fica dado por  $A_m = \frac{d_0 \cdot L}{400}$  sendo  $d_0$  a distância mínima de visão distinta do microscópio e  $L$  o comprimento do tubo desse microscópio, ambos dados em centímetros.
- 08) Essas lupas podem ser usadas para construir um telescópio refrator, cujas imagens dos objetos distantes (no infinito), que são reais e direitas, são formadas no foco da objetiva.
- 16) Essas lupas podem ser utilizadas para construir um telescópio refrator com aumento de 400x, desde que tenham focos coincidentes



### Comentários:

**01) Correta.** A lupa fornece uma imagem virtual, direita e aumentada por uso de uma lente convergente, assim como um microscópio simples.

**02) Correta.**

$$V_{eq} = V_1 + V_2 = \frac{1}{0,1} + \frac{1}{0,4} = 12,5$$

$$V_{eq} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{1}{V} = 8 \text{ cm}$$

**04) Incorreta/Correta. (Gabarito oficial deu correta).**

A fórmula fornecida foi aplicação direta de:

$$|A_\theta| = \frac{L \cdot d_p}{f_{obj} \cdot f_{oc}}$$

Mas, é importante lembrar que esta fórmula foi obtida fazendo-se a consideração de que a distância entre a imagem da objetiva e o foco da ocular ( $L$  na nossa demonstração) é nulo. Enfim, utilizando  $A_m = 10$ , por exemplo, junto às informações do enunciado e adotando  $d_p = 25 \text{ cm}$ , tem-se:

$$10 = L \cdot \frac{25}{400}$$

$$L = 1,6 \text{ m}$$

É absurdo um microscópio de  $1,6 \text{ m}$  como no caso de nossa suposição. Desconsiderando-se este absurdo a equação estaria correta (para valores menores).

**08) Incorreta.** As imagens são virtuais e invertidas.

**16) Incorreta.** A equação para a luneta astronômica  $A = -\frac{f_{obj}}{f_{oc}}$  requer focos coincidentes e  $f_{obj} \gg f_{oc}$ .

## 3.7. Luneta terrestre

Pelo fato de a luneta astronômica produzir uma imagem invertida, ela torna-se complexa para uso terrestre. Para facilitar isso, coloca-se uma lente convergente de distância focal  $f$ , à uma distância  $2f$  do foco da lente objetiva. Desta forma, a lente intermediária não irá gerar nenhuma ampliação da imagem, apenas serve para invertê-la. A fórmula, portanto, fica igual ao caso da luneta astronômica, apenas com uma inversão de sinal. Isto é:

$$A_\theta = \frac{f_{obj}}{f_{oc}}$$



### 3.8. Telescópio de Galileu

Diferentemente das lunetas vistas até agora, o telescópio projetado por Galileu utilizava uma lente divergente como ocular ao invés de uma lente convergente. A posição da lente divergente para fornecer ampliação, no entanto, deve ficar entre a imagem formada pela objetiva e a lente objetiva. Visualmente:

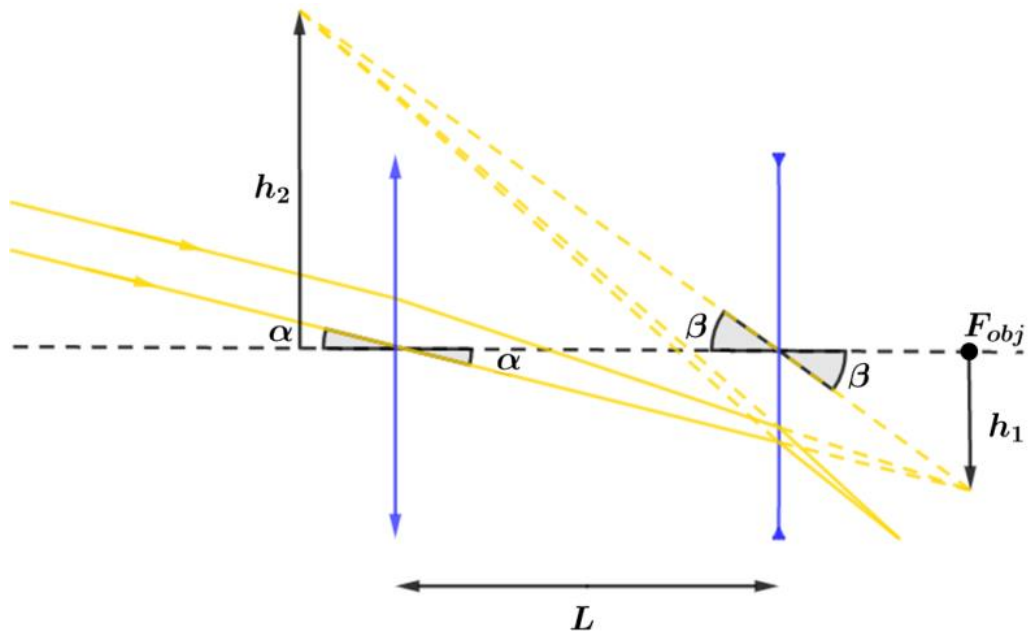


Figura 39: Trajetória da luz no telescópio de Galileu.

A ampliação é dada por:

$$A_{\theta} = \frac{tg \beta}{tg \alpha} = \frac{h_1}{f_{obj} - L} \cdot \frac{f_{obj}}{h_1} = \frac{f_{obj}}{f_{obj} - L}$$

Considera-se que o astro inicialmente está a uma distância infinita e sua imagem, portanto, será sobre o plano focal. Adota-se uma aproximação tal que  $f_{oc} \cong -(f_{obj} - L)$ . Essa aproximação serve para maior conforto visual do observador. Dessa forma:

$$A_{\theta} = -\frac{f_{obj}}{f_{oc}}$$



## 4. Óptica da visão

Aqui serão apresentados de forma superficial as partes que compõe o olho e suas funções, condições para nitidez da imagem observada e defeitos que podem ocorrer na visão.

### 4.1. O Globo Ocular

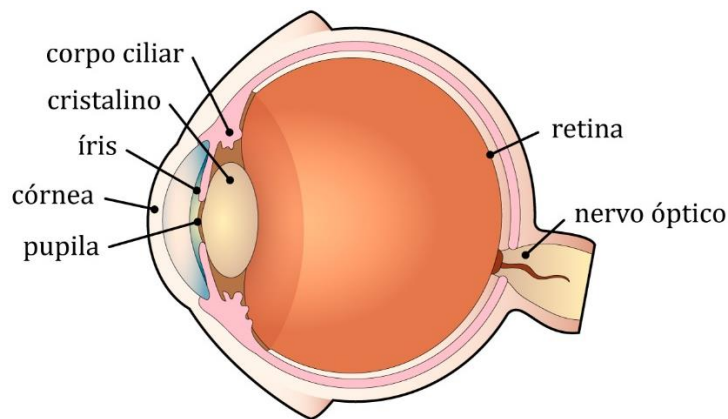


Figura 40: Globo ocular humano e suas principais partes.

Na figura 40, observam-se as principais partes do globo ocular. Abaixo, serão apresentadas as funções daquelas que interessam ao curso de óptica da visão:

- **Córnea:** juntamente ao cristalino tem a função de focar a luz através da pupila.
- **Cristalino:** atua como uma lente convergente que forma uma imagem real e invertida sobre a retina.
- **Retina:** Camada mais interna do revestimento que recobre o olho. Possui as células sensoriais que se comunicam com o cérebro pelo nervo óptico.
- **Íris:** Conjunto de músculos responsáveis pela deformação da pupila.
- **Pupila:** regula a entrada de luz no olho (**adaptação visual**).
- **Corpo ciliar ou músculos ciliares:** responsável pela deformação do cristalino.

### 4.2. Acomodação visual

A acomodação visual é o ato do cristalino se deformar para a formação de uma imagem nítida. Pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

A distância  $p'$  é fixada visto que a retina não se desloca. Portanto, conforme varia-se a distância do objeto ao observador,  $p$ , é necessário variar a distância focal  $f$  de acordo. Na figura abaixo observam-se situações diferentes do cristalino.



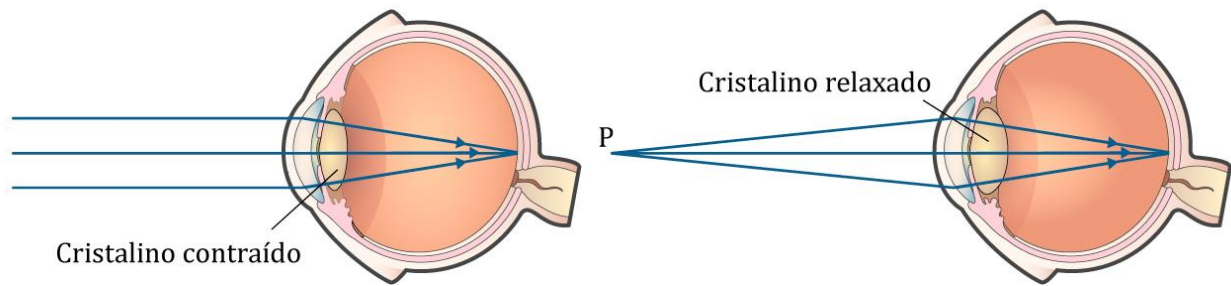


Figura 41: Comparação entre cristalino contraído e relaxado.

Pode-se notar na figura 41 que no cristalino contraído os raios de curvaturas do cristalino (considerada biconvexa) aumentam. Pela análise da equação do fabricante de lentes:

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1 \right) \cdot \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Se  $R_1$  e  $R_2$  aumentam, a distância focal deve aumentar.

#### 4.2.1. Amplitude de acomodação

A acomodação visual apresenta limites. São os pontos chamados: **ponto próximo ( $d_P$ )**, já apresentado no capítulo anterior; e **ponto remoto ( $d_R$ )**, ao contrário do ponto próximo, o ponto mais distante no qual um objeto pode-se situar e ainda produzir uma imagem nítida. Portanto, a **amplitude de acomodação ( $a$ )** é a variação da vergência do cristalino entre estes pontos extremos. Assim:

$$a = \frac{1}{d_P} - \frac{1}{d_R}$$

Para um olho sem defeitos, a distância do ponto próximo é de 25 cm e a do ponto remoto tende a  $\infty$ . Assim:

$$a = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ di}$$

Portanto, um globo ocular sem defeitos pode variar sua vergência em até quatro dioptrias no ato de acomodação visual.

#### Observações:

- Este valor é na realidade uma convenção adotada. Usualmente as pessoas apresentam amplitude de acomodação maiores que 4.
- A amplitude de acomodação tende a diminuir com a idade. Ao ficar abaixo de 4 caracteriza-se um defeito chamado *presbiopia* que será apresentado mais à frente.

ATENÇÃO  
DECORE!



38)





Ao ser atendido por um oftalmologista, constatou-se que uma paciente idosa enxergava perfeitamente objetos à distância infinita, entretanto só enxergava, com nitidez, objetos a partir de 75 cm de distância. Qual a amplitude de acomodação visual da paciente?

### Comentários:

Pelo enunciado, para esta paciente tem-se que:

$$d_p = 75 \text{ cm}$$
$$d_R \rightarrow \infty$$
$$a = \frac{1}{0,75} = \frac{4}{3} \text{ di}$$

CURIOSIDADE



## 4.3. Defeitos visuais e suas correções

Os defeitos visuais que causam variação do intervalo de acomodação visual, isto é, a distância entre o ponto próximo e o ponto remoto são chamadas de ametropias. As principais ametropias que serão abordadas neste curso são a hipermetropia, miopia, presbiopia e astigmatismo.

### 4.3.1. Miopia

A miopia é uma ametropia causada por um defeito na formação do globo ocular. O globo ocular é alongado na direção do eixo óptico do olho. Dessa forma, mesmo com os músculos ciliares relaxados, um objeto no infinito não consegue produzir uma imagem sobre a retina, ficando, portanto, sem nitidez para o observador.

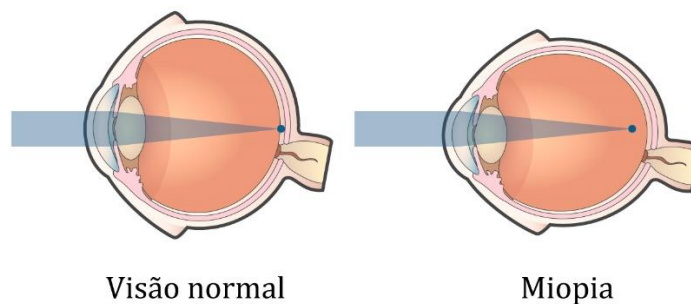


Figura 42: Comparação de globo ocular normal e míope.

Para resolver este problema é necessário aumentar a distância focal do sistema óptico. Entretanto, estando os músculos ciliares relaxados, os raios de curvatura, e, por conseguinte, a distância focal, já são máximos. Assim, é impossível que o afetado seja capaz de obter nitidez na visão sem auxílio de lentes corretoras.



A correção da miopia se dá, portanto, por um acoplamento que reduz a vergência (aumentando a distância focal). Portanto, a correção é por utilização de lente divergente (vergência negativa). Pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Deseja-se que a pessoa enxergue com nitidez mesmo com  $p \rightarrow \infty$ . Como a pessoa enxerga com nitidez somente até  $d_R$ , a imagem virtual de um objeto no infinito deve localizar-se à distância do ponto remoto do míope:

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{d_R} \Rightarrow |V| = \frac{1}{d_R}$$

### 4.3.2. Hipermetropia

Semelhante à miopia, consiste em um defeito na formação do globo ocular no sentido do eixo óptico. Diferentemente da miopia, o que houve foi um encurtamento na direção do eixo óptico. Neste caso, ao observar um objeto no infinito, a imagem não se forma com nitidez estando os músculos ciliares relaxados, ela se formaria além da retina como mostrado na figura abaixo.

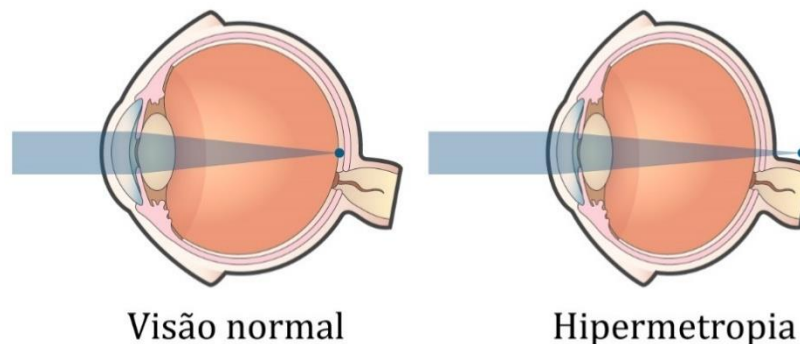


Figura 43: Comparação de olho normal e hipermetrope.

Entretanto, para esta situação, como é necessário reduzir-se a distância focal, o indivíduo ao contrair os músculos ciliares será capaz de obter nitidez. O problema para o hipermetrope portanto, não é o ponto remoto. Pela análise da equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

A imagem formada na retina é real ( $p' > 0$ ), no entanto, para o hipermetrope, a distância da imagem ( $p'$ ) diminui. Portanto, considerando-se que o indivíduo consiga produzir no seu cristalino mesma distância focal que uma pessoa saudável, o ponto remoto estará mais distante, pois:

$$\frac{1}{p_{\text{saudável}}} + \frac{1}{p'_{\text{saudável}}} = \frac{1}{p_{\text{hiper}}} + \frac{1}{p'_{\text{hiper}}}$$

$$\frac{p'_{\text{hiper}} - p'_{\text{saudável}}}{p'_{\text{hiper}} \cdot p'_{\text{saudável}}} = \frac{p_{\text{saudável}} - p_{\text{hiper}}}{p_{\text{saudável}} \cdot p_{\text{hiper}}}$$

O lado esquerdo da equação é negativo, portanto, o lado direito também deve ser. Assim:

$$p_{\text{hiper}} > p_{\text{saudável}}$$



Logo, a correção deve ser feita aumentando-se a vergência (diminuição da distância focal), ou seja, utilizam-se lentes convergentes.

Para o hipermetrope, deseja-se produzir uma imagem virtual de um objeto sobre o ponto próximo “verdadeiro” ( $p = 25 \text{ cm}$ ) para o ponto próximo do hipermetrope. Portanto:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_{p_{\text{saudável}}}} - \frac{1}{d_{p_{\text{hiper}}}}$$

### 4.3.3. Presbiopia

Também conhecido como “vista cansada”, a presbiopia, conforme descrito anteriormente, é um problema na amplitude de acomodação visual. Ocorre geralmente em pessoas de idade mais avançada devido à perda de elasticidade do cristalino. Essa perda de amplitude dificulta a visualização tanto para objetos próximos quanto para objetos distantes. Utiliza-se, portanto, uma lente bifocal, isto é, que corrige o ponto próximo e o ponto distante. A lente bifocal é dividida em duas regiões, uma voltada para a correção de cada ponto.

### 4.3.4. Astigmatismo

Consiste em um defeito visual em que por conta de assimetrias do globo ocular em torno do seu eixo óptico o que faz com que o olho ao se acomodar para um objeto em uma posição, pode não estar acomodado para outro objeto à mesma distância, mas em posição diferente.

A correção é feita pelo uso de lentes cilíndricas que compensam a assimetria do sistema óptico.

### 4.3.5. Estrabismo

Caracteriza-se por um problema, geralmente na musculatura que controla o movimento do globo ocular, que impede o afetado de dirigir simultaneamente os eixos ópticos para o ponto visado. A correção é feita por lentes prismáticas, exercícios ou atividades para fortalecimento da musculatura responsável pelo movimento.



### 39) (Unimontes-MG)

Um indivíduo que possui o olho sadio é capaz de enxergar, com nitidez, objetos que estão a uma distância mínima de 25 cm do olho. A essa distância, é dado o nome de ponto próximo. A presbiopia, ou vista cansada, é um defeito da visão que, em geral, aparece em pessoas com mais de 40 anos, devido a uma falha na acomodação da visão para perto. Dessa forma, o olho passa a ter um ponto próximo mais distante que o normal. Uma das maneiras de correção é o uso de óculos com lentes convergentes apropriadas. Uma pessoa, cujo único defeito na sua visão é a vista cansada, possui o ponto próximo distante de 50 cm. Determine a dioptria (graus) da lente adequada para corrigir esse defeito na visão.



**Comentários:** Conforme demonstrado:

$$V = \frac{1}{d_{P_{\text{saudável}}}} - \frac{1}{d_{P_{\text{Hiper}}}} = \frac{1}{0,25} - \frac{1}{0,5} = 2 \text{ di}$$

**40) (UNIFOR-2013)**

Um oftalmologista explica que pais e professores devem estar atentos aos comportamentos das crianças. Uma dificuldade de aprendizado pode ser explicada por defeitos na visão. Alguns defeitos na visão como a miopia (distância do ponto próximo muito grande) e a hipermetropia (ponto distante de 250,00 mm) são causados pela falta de esfericidade do olho. Para corrigir essas deficiências, usamos as lentes esféricas. Uma pessoa que é míope, para corrigir essa dificuldade que ela tem de enxergar de longe, precisa usar uma lente esférica divergente. Já uma pessoa que é hipermetrope deve usar para correção uma lente esférica convergente. Com base no texto acima, a vergência de uma lente corretiva para um olho hipermetrope, cujo ponto próximo está a 80,00 cm, e um olho míope, cujo ponto distante está a 80,00 cm é, respectivamente:

- a) 2,75 di e - 1,25 di
- b) 5,25 di e - 1,25 di
- c) 4,25 di e - 8,75 di
- d) 1,25 di e - 2,75 di
- e) 1,75 di e - 2,25 di

**Comentários:**

Para a correção do míope:

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{d_{R_{\text{Míope}}}}$$
$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{0,8} = -1,25 \text{ di}$$

Para a correção do hipermetrope:

$$V = \frac{1}{d_{P_{\text{saudável}}}} - \frac{1}{d_{P_{\text{Hiper}}}} = \frac{1}{0,25} - \frac{1}{0,8} = 4 - 1,25 = 2,75$$

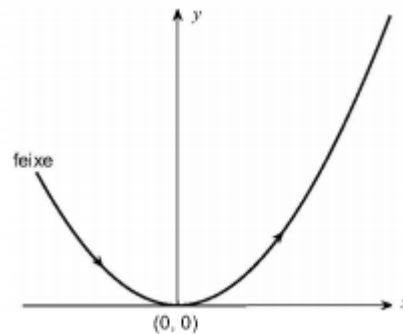
Portanto, a resposta correta é **letra A**.





## 5. Lista de Questões

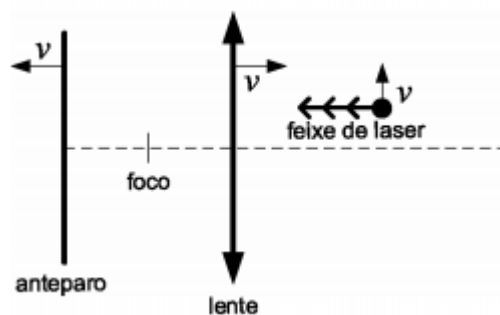
### 1. (IME-2020 – 1ª Fase)



Um feixe de luz hipotético, mostrado na figura acima, propaga-se ao longo do plano  $xy$  em um meio não homogêneo, cujo índice de refração é função da coordenada  $y$ . Considerando que o feixe tangencia o eixo  $x$  no ponto  $(0, 0)$ , onde  $n(0) = n_0$ . Sabendo que a velocidade da luz no vácuo é  $c$ , o valor máximo absoluto possível da componente  $y$  para a velocidade do feixe passível de ser atingida é:

- a)  $\frac{c}{2n_0^2}$
- b)  $\frac{c}{2n_0}$
- c)  $\frac{c}{4n_0^2}$
- d)  $\frac{c}{n_0}$
- e)  $\frac{c}{4n_0}$

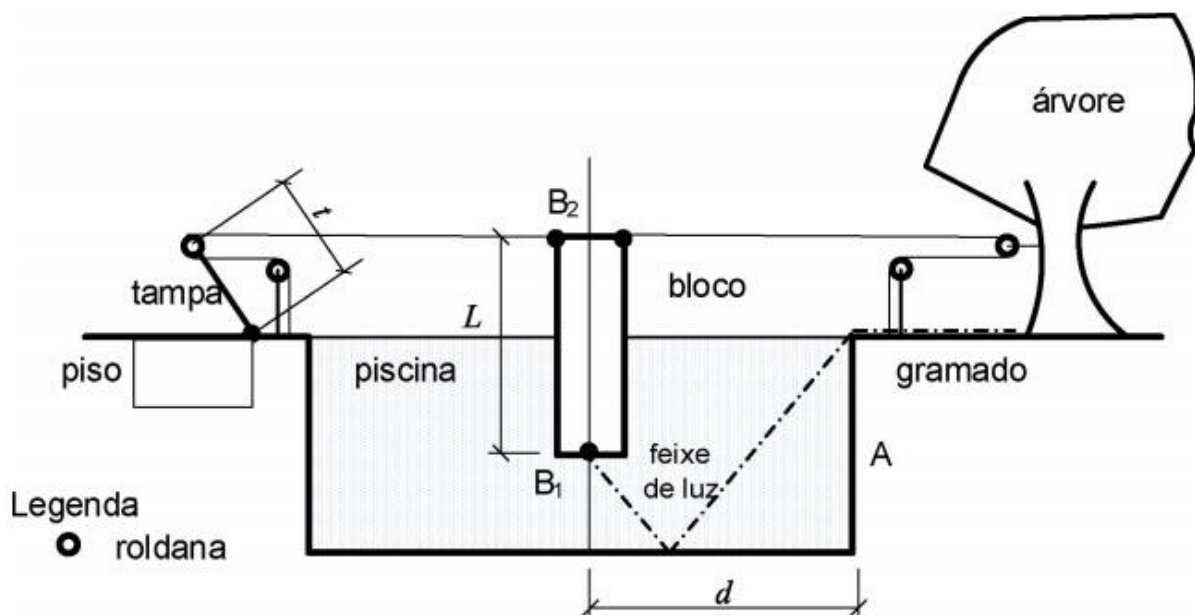
### 2. (IME-2020 – 1ª Fase)



Uma partícula emite um feixe laser horizontal de encontro a uma lente convergente de distância focal  $f$ . Após ser desviado, o feixe atinge um anteparo localizado depois do foco da lente. Sabendo que a partícula, a lente e o anteparo estão em movimento em velocidade escalar  $v$  nos respectivos sentidos indicados na figura, a aceleração do ponto de impacto do feixe, no referencial do anteparo, é:

- $v^2/4f$
- $v^2/3f$
- $v^2/2f$
- $2v^2/f$
- $4v^2/f$

### 3. (IME-2020 – 2ª Fase)



Um profissional de iluminação deseja projetar um sistema de feixe de luz capaz de iluminar o fundo reflexível de uma piscina e o gramado posicionado logo após o lado A. Sua ideia é submergir parcialmente um bloco maciço em formato de paralelepípedo reto, com uma fonte luminosa presa em sua base submersa  $B_1$ , que emite um feixe de luz que percorre a trajetória mostrada na figura. O bloco é fixado por dois cabos horizontais presos a sua base não submersa  $B_2$  e ortogonais ao lado A da piscina, sendo um deles amarrado, por meio de roldanas, na tampa articulada do compartimento onde é guardado o material de limpeza da piscina e o outro, na árvore. Considere que a piscina esteja completamente cheia com água e que a tração aplicada nos cabos seja metade do seu valor máximo para ruptura, especificado pelo fabricante. Calcule:

- a altura  $L$  do bloco;
- a distância  $d$  em que o bloco deve ser posicionado, em relação ao lado A da piscina.

Dados:

- profundidade da piscina: 3 m;

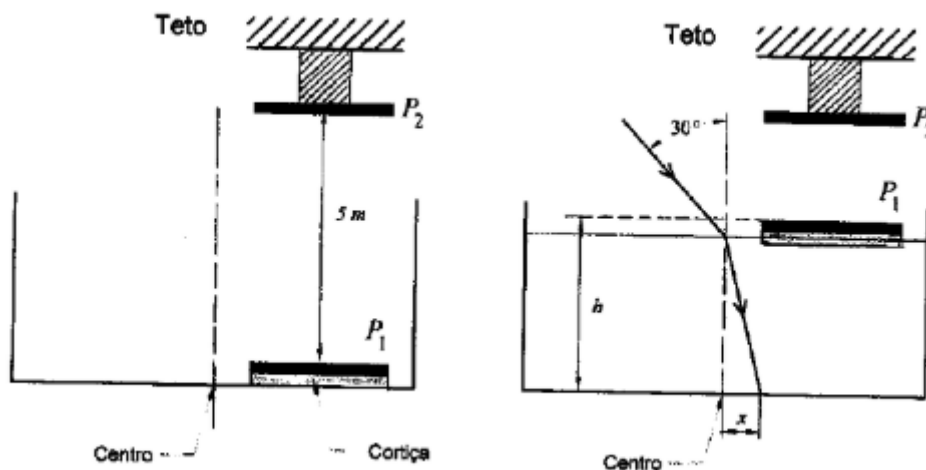


- índice de refração do ar: 1;
- índice de refração da água da piscina:  $5/3$ ;
- massa específica da água:  $1 \text{ g/cm}^3$ ;
- massa específica do material do bloco:  $0,5 \text{ g/cm}^3$ ;
- comprimento  $t$  da tampa: 1 m;
- massa da tampa: 8 kg;
- tração máxima até a ruptura nos cabos: 30 N;
- aceleração da gravidade:  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

#### Observações:

- despreze o atrito e as dimensões das quatro roldanas;
- considere a árvore uma estrutura rígida;
- as roldanas estão fixas.

#### 4. (IME-2010)



Uma fina placa metálica  $P_1$ , apoiada em um tablete de cortiça no fundo de um frasco cilíndrico, dista 5 metros de uma placa idêntica  $P_2$ , fixa no teto, conforme a figura acima. As duas placas formam um capacitor carregado com  $Q$  coulombs.

Enche-se o referido frasco com um líquido de índice de refração  $n = 2,5$ , até que a superfície de  $P_1$  atinja a altura de  $h$  metros. Em seguida, lança-se sobre o centro da superfície um raio de luz monocromática, sob um ângulo de  $30^\circ$  com a vertical.

Sabendo que a energia armazenada no capacitor fica reduzida a 0,6 do valor inicial, que o raio refratado atinge um ponto situado  $x$  metros do centro do fundo do frasco e desprezando o efeito de borda do capacitor, podemos dizer que o valor aproximado de  $x$  é:

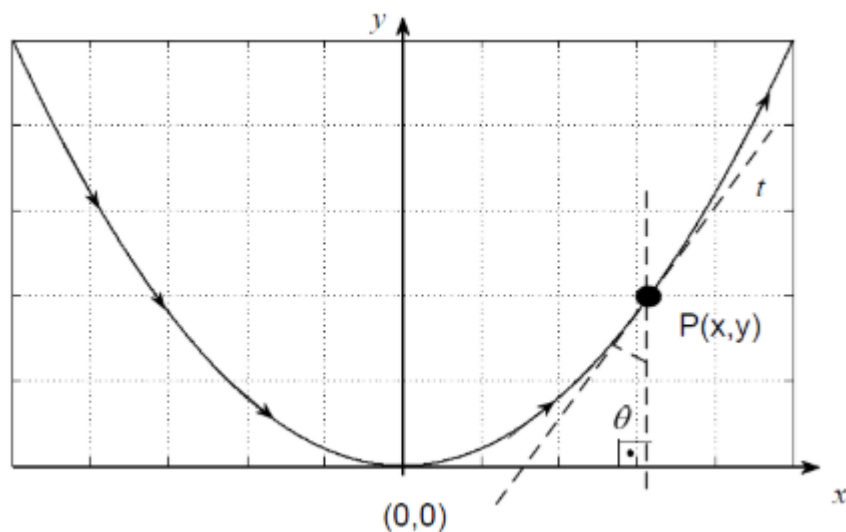
#### Observação:

- As espessuras da cortiça e da placa são desprezíveis em relação à altura  $h$ .



- a) 0,1
- b) 0,2
- c) 0,3
- d) 0,4
- e) 0,5

5. (IME-2012)



A figura acima mostra a trajetória parabólica de um raio luminoso em um meio não homogêneo. Determine o índice de refração  $n$  desse meio, que é uma função de  $y$ , sabendo que a trajetória do raio é descrita pela equação  $y = a \cdot x^2$ , onde  $a > 0$ .

Dados:

- $\cotg \theta = 2 \cdot a \cdot x$
- $n(0) = n_0$

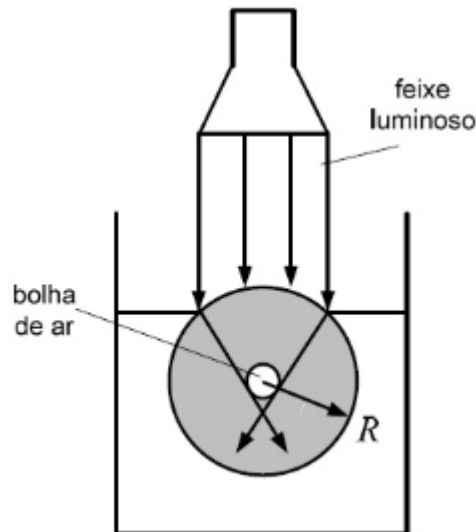
Observação:

- $P(x, y)$  é o ponto de tangência entre a reta  $t$  e a parábola.

6. (IME-2013)







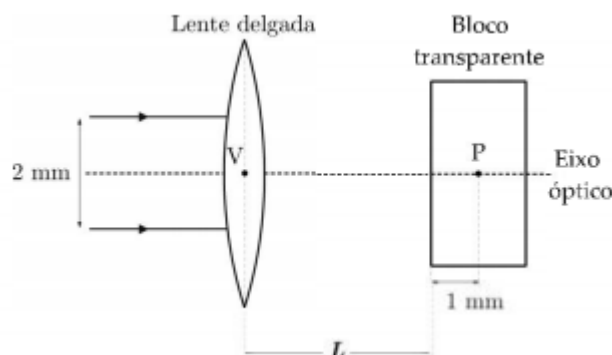
Uma esfera de gelo de raio  $R$  flutua parcialmente imersa em um copo com água, como mostra a figura acima. Com a finalidade de iluminar uma bolha de ar, também esférica, localizada no centro da esfera de gelo, utilizou-se um feixe luminoso de seção reta circular de área  $\frac{\pi \cdot R^2}{100} \text{ m}^2$  que incide verticalmente na esfera. Considerando que os raios mais externos do feixe refratado tangenciam a bolha, conforme a figura, determine a massa específica do gelo.

Dados:

- índice de refração do ar: 1,0
- índice de refração da água: 1,3
- Massa específica do ar: 1,0 kg/m<sup>3</sup>
- Massa específica da água: 103 kg/m<sup>3</sup>
- Volume da calota esférica:  $v = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot R^3$

**7. (ITA-2020 – 1ª Fase)**

Dois raios luminosos paralelos e simétricos em relação ao eixo óptico, interdistantes de 2 mm, devem ser focados em um ponto P no interior de um bloco transparente, a 1 mm de sua superfície, conforme mostra a figura. Para tal, utiliza-se uma lente delgada convergente com distância focal de 1 mm. Considerando que o bloco tem índice de refração  $n = \sqrt{2}$ , a distância L entre o vértice V da lente e a superfície do bloco deve ser ajustada para



- a) 1 mm.
- b)  $\sqrt{2}/2$  mm.
- c)  $1 - \sqrt{2}/2$  mm.
- d)  $\sqrt{3}/3$  mm.
- e)  $1 - \sqrt{3}/3$  mm.

### 8. (ITA-2020 – 2ª Fase)

Um sinal luminoso propaga-se no interior de uma fibra óptica retilínea de comprimento  $L = 3,00 \text{ km}$ , feita de um material com índice de refração igual a 1,50. Considere que a luz no interior da fibra é guiada por meio de sucessivas reflexões internas totais. Sendo a velocidade da luz no vácuo igual a  $3,00 \times 10^5 \text{ km/s}$ , calcule o tempo de propagação do sinal de ponta a ponta

1. se a fibra estiver envolta de ar;
2. se o núcleo da fibra estiver envolvido por um revestimento feito de material com índice de refração de 1,45.

### 9. (ITA-1969)

Uma fonte luminosa puntiforme está a uma profundidade  $h$  abaixo da superfície de um lago suficientemente grande em extensão e profundidade. Seja  $n$  o índice de refração da água. Da energia total emitida,  $f$  é a fração que escapa diretamente da superfície líquida, desprezando a absorção da luz na água e a reflexão que não for total. Nessas condições podemos afirmar que:

- a)  $f$  aumenta se  $h$  aumentar
- b)  $f$  diminui se  $h$  aumentar
- c)  $f = \frac{1}{n}$
- d)  $f = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot n \cdot \sqrt{n^2 - 1}}$
- e) nenhuma das afirmações acima.

### 10. (ITA-1969)

Um rapaz construiu uma máquina fotográfica tipo fole, usando uma lente divergente com objetiva. Ao tirar fotografias com esta máquina verificara que no filme:

- a) a imagem será menor que o objeto.
- b) a imagem será sempre maior que o objeto.
- c) a imagem será maior que o objeto somente se a distância do objeto à lente for maior que  $2f$ .



- d) a imagem será menor que o objeto somente se a distância do objeto à lente for maior que  $2f$ .
- e) não aparecerá imagem alguma, por mais que se ajuste o fole.

### 11. (ITA-1970)

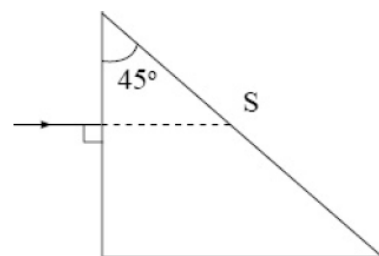
Um fotógrafo, com uma câmara cuja lente tem uma distância focal de  $5,0\text{ cm}$  e uma abertura eficaz de  $2,0\text{ cm}$  de diâmetro, fotografa um objeto que está a  $50\text{ m}$  de distância. Um segundo fotógrafo, que é obrigado a ficar a  $1,0\text{ km}$  do mesmo objeto, quer obter um negativo onde a imagem do referido objeto tem o mesmo tamanho que o obtido pelo primeiro fotógrafo. Para conseguir isto ele deverá:

- a) usar uma câmara com maior abertura eficaz
- b) usar uma câmara cuja distância focal seja de  $1,0\text{ m}$
- c) usar uma câmara com a mesma distância focal, mas, aumentar de 100 vezes à distância entre filme e objetiva
- d) aumentar 100 vezes o tempo de exposições
- e) usar uma câmara cuja distância focal seja 100 vezes menor a do primeiro fotógrafo.

### 12. (ITA-1971)

No desenho qual deve ser o índice de refração do prisma para que o raio mostrado sofra reflexão total na face S? (Considere o índice de refração do ar igual a  $1,00$ ).

- a)  $n > \sqrt{2}$
- b)  $n < 1,5$
- c)  $n > 1,16$
- d)  $n < \sqrt{2}$
- e) nenhuma das respostas é correta.



### 13. (ITA-1973)

A vista de uma pessoa normal é capaz de focalizar um objeto que esteja no mínimo a uma distância de  $24\text{ cm}$ . Coloca-se junto do olho de uma pessoa normal uma lente delgada convergente de distância focal igual a  $5,0\text{ cm}$ . Neste caso, para que um objeto seja visto claramente pela pessoa, é suficiente que ele esteja a uma distância  $d$  do olho tal que:

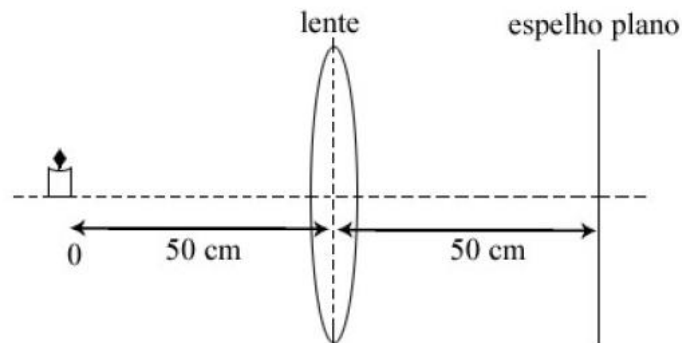
- a)  $3\text{ cm} < d < 10\text{ cm}$
- b)  $d < 4\text{ cm}$
- c)  $4\text{ cm} < d < 5\text{ cm}$
- d)  $2\text{ cm} < d < 24\text{ cm}$



e)  $d > 4,5 \text{ cm}$

**14. (ITA-1975)**

Consideremos o seguinte arranjo, em que a lente convergente tem distância focal de 30 cm. A imagem do objeto O:

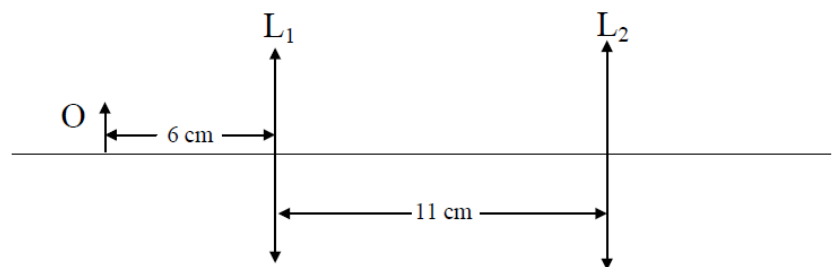


- a) será real e formar-se-á a 50 cm da lente.
- b) Será virtual a 25 cm atrás do espelho e real 25 cm na frente do mesmo.
- c) Será real e formar-se-á a 25 cm na frente do espelho.
- d) Será real e formar-se-á no foco da lente.
- e) N.d.a

**15. (ITA-1976)**

No sistema óptico esquematizado, O representa um objeto real e as lentes delgadas convergentes, L1 e L2, tem distância focais iguais a 2 cm e 4 cm, respectivamente. A imagem I deve estar a:

- a) 8 cm à direita de L2 e  $\frac{I}{O} = \frac{1}{2}$
- b) 8 cm à esquerda de L2 e  $\frac{I}{O} = \frac{1}{2}$
- c) 8 cm à direita de L2 e  $\frac{I}{O} = 2$
- d) 8 cm à esquerda de L2 e  $\frac{I}{O} = \frac{1}{2}$
- e) 12 cm à direita de L2 e  $\frac{I}{O} = 2$



**16. (ITA-1978)**

Uma lente duplamente convexa tem raios de curvatura de 25 cm e índice de refração 1,50. Calcular a posição da imagem (I) de um objeto colocado sobre o eixo, a 60 cm da lente, 1ª) quando a lente se acha no ar e 2ª) quando imersa na água. São dados os índices de refração:  $n_{ar} = 1,00$ ;  $n_{água} = 1,33$ .

- |    | Ar                      | Água                     |
|----|-------------------------|--------------------------|
| a) | $q = 25,00 \text{ cm}$  | $q = 73,52 \text{ cm}$   |
| b) | $q = -42,86 \text{ cm}$ | $q = -155,25 \text{ cm}$ |
| c) | $q = 42,86 \text{ cm}$  | $q = -155,25 \text{ cm}$ |
| d) | $q = 12,25 \text{ cm}$  | $q = 0,01 \text{ cm}$    |
- e) nenhuma das afirmações está correta.

### 17. (ITA-1979)

Um feixe de luz monocromática incide paralelamente ao eixo principal de uma lente convergente de distância focal  $A$ , num meio de índice de refração absoluto igual a 1 (um). O feixe é cilíndrico e tem diâmetro  $2A$ . Dispõe-se de uma

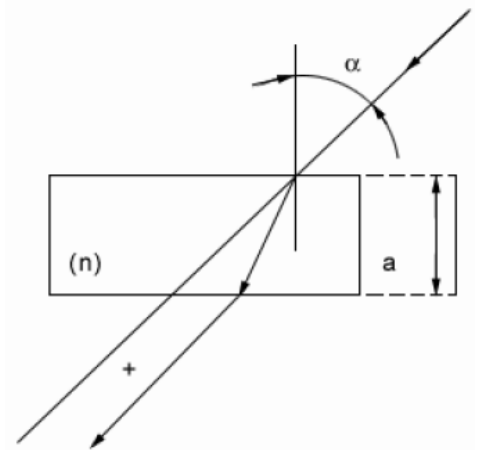
lâmina de faces paralelas, espessura  $E = \frac{A}{4}$  e índice de refração absoluto igual a 1,4 (um inteiro e quatro décimos). Nestas condições, pode-se afirmar que:

- a) se a lâmina for intercalada entre a fonte de luz e a lente ter-se-á que a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será:  $f = A - \frac{E \cdot \sin 15^\circ}{0,5}$
- b) se a lâmina for intercalada entre a lente e seu foco, então, a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será:  $f = A + \frac{E \cdot \sin 15^\circ}{0,5}$
- c) se a lâmina for intercalada entre o foco e a lente, então, a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será:  $f = 1,2 A$
- d) se a lâmina for intercalada entre o foco e a lente, então a nova distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será:  $f = 4 A$
- e) qualquer que seja a posição da lâmina intercalada entre a fonte de luz e a lente, ela não alterará a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente.

### 18. (ITA-1980)



Um raio luminoso incide sobre uma lâmina transparente de faces paralelas, de espessura  $a$  e índice de refração  $n$ . Calcular o desvio sofrido pelo raio luminoso, ao atravessar a lâmina, supondo que o ângulo de incidência,  $\alpha$ , seja pequeno. (Utilizar as aproximações:  $\text{sen } \alpha = \alpha$  e  $\text{cos } \alpha = 1$ ).



- a)  $x \cong a \cdot \alpha \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
- b)  $x \cong a \cdot \alpha \cdot (1 - n)$
- c)  $x \cong a \cdot \alpha \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$
- d)  $x \cong a \cdot \alpha \cdot (1 + n)$
- e)  $x \cong a \cdot \alpha \cdot (n - 1)$

### 19. (ITA-1981)

Um sistema óptico é composto por duas lentes esféricas, convergentes  $L_1$  e  $L_2$ , dispostas coaxialmente. As distâncias focais são, respectivamente,  $f_1$  e  $f_2$  e a distância entre elas é  $d$ . Um feixe de luz cilíndrico de 40 mm de diâmetro incide sobre  $L_1$ , segundo o seu eixo, e emerge de  $L_2$  como um feixe também cilíndrico de 30 mm de diâmetro. Se  $f_1 = 60 \text{ mm}$ , pode-se afirmar que a distância  $d$  será:

- a) 45 mm
- b) 8 mm
- c) 15 mm
- d) 105 mm
- e) qualquer valor, pois o fenômeno citado independe da distância em consideração.

### 20. (ITA-1982)

Considere um sistema composto por duas lentes circulares esféricas delgadas de 6,0 cm de diâmetro dispostas coaxialmente como indica a figura 7.  $L_1$  é uma lente convergente de distância focal  $f_1 = 5,0 \text{ cm}$  e  $L_2$  é uma lente divergente de distância focal  $f_2 = 4,0 \text{ cm}$ . No ponto  $P_1$  à esquerda do sistema é colocado um objeto luminoso puntiforme a 5,0 cm de  $L_1$ . À direita de  $L_2$ , a uma distância  $d = 24 \text{ cm}$  é colocado um anteparo A, perpendicular ao eixo do sistema. Assim, temos que:



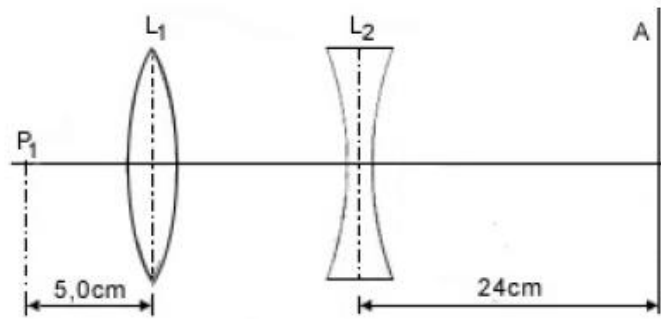
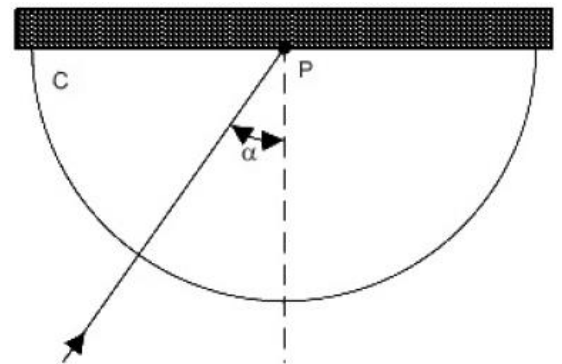


Fig. 7

- sobre o anteparo A forma-se uma imagem real puntiforme de P1;
- sobre o anteparo A aparece uma região iluminada circular de diâmetro igual a 12 cm;
- sobre o anteparo aparece uma região iluminada circular de diâmetro igual a 6,0 cm;
- o anteparo fica iluminado uniformemente em uma região muito grande;
- sobre o anteparo aparece uma região iluminada circular de diâmetro 42 cm.

### 21. (ITA-1983)

Para a determinação do índice de refração ( $n_1$ ) de uma lâmina fina de vidro (L) foi usado o dispositivo da figura, em que C representa a metade de um cilindro de vidro opticamente polido, de índice de refração  $n_2 = 1,80$ . Um feixe fino de luz monocromática é feito incidir no ponto P, sob um ângulo  $\alpha$ , no plano do papel. Observe-se que, para  $\alpha = 45^\circ$ , o feixe é inteiramente refletido na lâmina. Qual é o valor de  $n_1$ ?

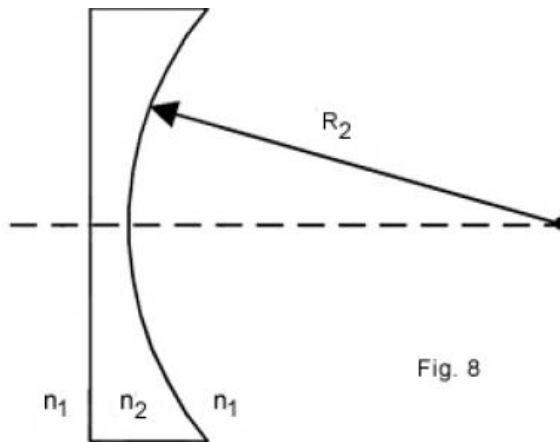


- 1,00
- 1,27
- 2,54
- 1,33
- 1,41

### 22. (ITA-1984)

O índice de refração de uma lente plano-côncava é  $n_2 \cong 1,5$  e o raio de curvatura é  $R_2 \cong 30 \text{ cm}$ . Quando imerso no ar ( $n_1 = 1$ ) a lente comporta-se como uma lente divergente de distância focal  $f = -60 \text{ cm}$ . Ao se colocar esta mesma lente num meio de índice de refração 3 pode-se afirmar que:

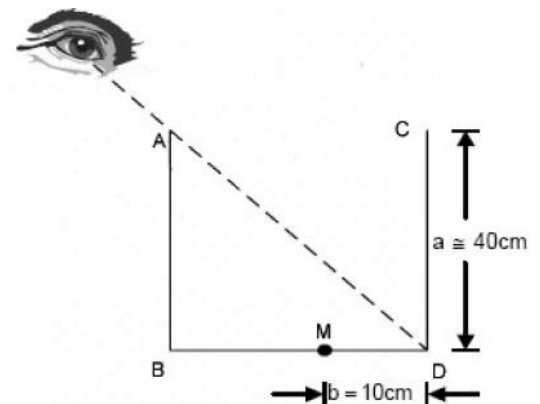




- a) a lente continuará divergente de distância focal 60 cm.
- b) a lente se comportará como lente convergente de distância focal 60 cm.
- c) a lente se comportará como lente divergente de distância focal de valor diferente de 60 cm.
- d) a lente se comportará como lente convergente de distância focal de valor diferente de 60 cm.
- e) a lente se comportará como um espelho côncavo.

**23. (ITA-1986)**

Um reservatório cúbico de paredes opacas e arestas  $a = 40\text{ cm}$ , acha-se disposto de tal maneira que o observador não vê o seu fundo (ver figura). A que nível mínimo devemos preencher este cubo com água, para que o observador possa ver uma mancha negra, pontual M, que se encontra no fundo do recipiente, a uma distância  $b = 10\text{ cm}$  do ponto D? Obs: índice de refração para a água, na região do visível,  $n = 1,33$ .

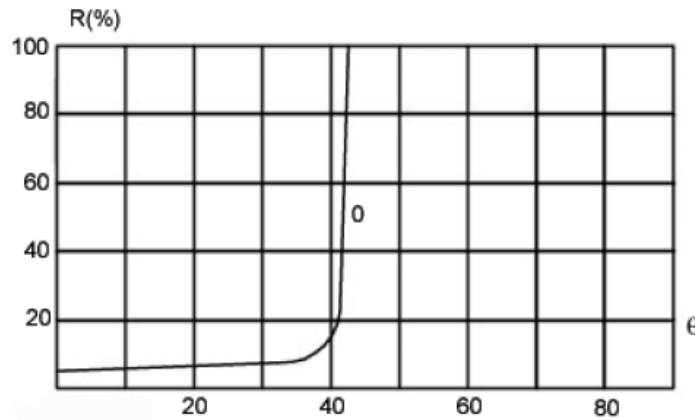


- a) 21 cm
- b) 27 cm
- c) 32 cm
- d) 18 cm
- e) nenhum dos valores acima.

**24. (ITA-1987)**

Numa experiência em que se mediu a razão  $R$  entre a energia luminosa refletida e a energia luminosa incidente na interface entre dois meios de índices de refração  $n_1$  e  $n_2$  em função do ângulo de incidência (vide figura), obteve-se o gráfico abaixo, onde  $R$  é dada em porcentagem.





Das afirmativas:

I –  $n_2 < n_1$

II –  $\frac{n_1}{n_2} > 1,4$

III – A razão entre a energia refletida e a refratada a  $30^\circ$  é maior que 0,2.

IV – Para  $\theta > 42^\circ$  a Luz é completamente refratada.

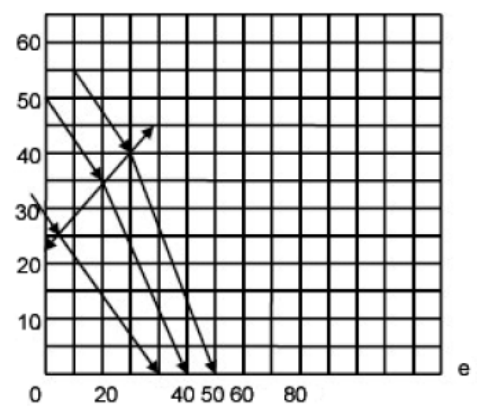
V – O raio refratado está mais afastado da normal do que o raio incidente.

Podemos dizer que:

- a) Apenas I e II estão corretas
- b) I, III e V estão corretas.
- c) Apenas III e V estão corretas.
- d) I, II e V estão corretas.
- e) II, IV e V estão corretas.

### 25. (ITA-1989)

Por uma questão de conveniência experimental, o ponto focal de uma lente delgada convergente teve de ser posicionado fora do eixo da lente por meio de um espelho plano, indicado em corte (e) na abcissa do gráfico anexo. Complete o desenho e determine, aproximadamente, as coordenadas (x, y) do foco e distância focal da lente.



	$x$ (mm)	$y$ (mm)	$f$ (mm)
a)	60	10	65
b)	84	36	100
c)	80	30	95
d)	74	24	83



e) 103 54 125

**26. (ITA-1990)**

Uma pequena lâmpada é colocada a 1,0m de distância de uma parede. Pede-se a distância a partir da parede em que deve ser colocada uma lente de distância focal 22,0 cm para produzir na parede uma imagem nítida e ampliada da lâmpada.

- a) 14 cm.
- b) 26,2 cm.
- c) 67,3 cm.
- d) 32,7 cm.
- e) outro valor.

**27. (ITA-1992)**

Uma vela se encontra a uma distância de 30 cm de uma lente plano convexo que projeta uma imagem nítida de sua chama em uma parede a 1,2 m de distância da lente. Qual é o raio de curvatura da parte convexa da lente se o índice de refração da mesma é 1,5?

- a) 60 cm.
- b) 30 cm.
- c) 24 cm.
- d) 12 cm.
- e) Outro valor diferente dos anteriores.

**28. (ITA-1993)**

O sistema de lentes de uma câmera fotográfica pode ser entendido como uma fina lente convergente de distância focal igual a 25,0 cm. A que distância da lente ( $p_1$ ) deve estar o filme para receber a imagem de uma pessoa sentada a 1,25 m da lente?

- a) 8,4 cm.
- b) 31,3 cm.
- c) 12,5 cm.
- d) 16,8 cm.
- e) 25 cm.

**29. (ITA-1993)**

Um objeto em forma de um segmento de reta de comprimento  $l$  está situado ao longo do eixo óptico de uma lente convergente de distância focal  $f$ . O centro do segmento se encontra a uma



distância  $a$  da lente e, esta, produz uma imagem real convergente de todos os pontos do objeto. Quanto vale o aumento linear  $\beta$  do objeto?

a)  $\beta = \frac{f^2}{a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

b)  $\beta = \frac{f^2}{f^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

c)  $\beta = \frac{f^2}{(a-f)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

d)  $\beta = \frac{f^2}{(a+f)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

e)  $\beta = \frac{f^2}{(a+f)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

### 30. (ITA-1994)

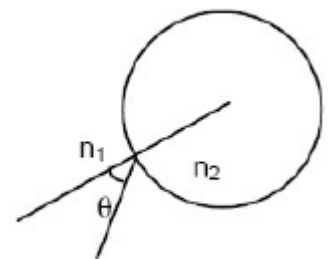
Um dos telescópios utilizados por Galileu era composto de duas lentes: a objetiva de 16 mm de diâmetro e distância focal de 960 mm e a ocular formada por uma lente divergente. O aumento era de 20 vezes. Podemos afirmar que a distância focal e a imagem eram respectivamente:

- a) 192 mm, direita.
- b) 8 mm, direita.
- c) 48 mm, invertida.
- d) 960 mm, direita.
- e) 48 mm, direita.

### 31. (ITA-1994)

A figura mostra a secção transversal de um cilindro feito de um material cujo índice de refração é  $n_2$  imerso num meio de índice  $n_1$ . Os valores dos índices são  $\sqrt{2}$  e 1,0 não necessariamente nessa ordem. Para que um feixe de luz contido no plano seccionador e proveniente do meio de índice 1 penetre no cilindro consiga escapar, devemos satisfazer às seguintes condições:

- a) Impossível com os dados fornecidos.
- b)  $n_1 = \sqrt{2}; n_2 = 1,0; 45^\circ < \theta < 90^\circ$
- c)  $n_1 = 1,0; n_2 = \sqrt{2}; 45^\circ < \theta < 90^\circ$
- d) Nunca será possível.
- e)  $n_1 = 1,0; n_2 = \sqrt{2}$



### 32. (ITA-1996)



Dois estudantes se propõem a construir cada um deles uma câmera fotográfica simples, usando uma lente convergente como objetiva e colocando-a numa caixa fechada de modo que o filme esteja no plano focal da lente. O estudante A utilizou uma lente de distância focal igual a 4,0 cm e o estudante B uma lente de distância focal igual a 10,0 cm. Ambos foram testar suas câmaras fotografando um objeto situado a 1,0 m de distância das respectivas objetivas. Desprezando-se todos os outros efeitos (tais como aberrações das lentes), o resultado da experiência foi:

- I- Que a foto do estudante A estava mais "em foco" que a do estudante B;
- II- Que ambas estavam igualmente "em foco";
- III - que as imagens sempre estavam entre o filme e a lente;

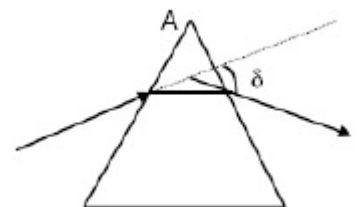
Neste caso você concorda que:

- a) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
- b) Somente I e III são verdadeiras.
- c) Somente III é verdadeira.
- d) Somente a afirmativa I é verdadeira.
- e) Não é possível obter uma fotografia em tais condições.

### 33. (ITA-1996)

O Método do Desvio Mínimo, para a medida do índice refração,  $n$ , de um material transparente, em relação ao ar, consiste em se medir o desvio mínimo de um feixe estreito de luz que atravessa um prisma feito desse material. Para que esse método possa ser aplicado (isto é, para que se tenha um feixe emergente), o ângulo  $A$  do prisma deve ser menor que:

- a)  $\arcsen(n)$
- b)  $2 \arcsen(1/n)$
- c)  $0,5 \arcsen(1/n)$
- d)  $\arcsen(1/n)$
- e) Outra expressão.

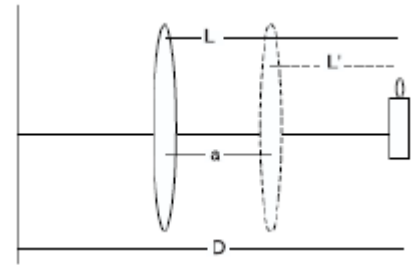


### 34. (ITA-1998)

Uma vela está a uma distância  $D$  de um anteparo sobre o qual se projeta uma imagem com lente convergente. Observa-se que as duas distâncias  $L$  e  $L'$  entre a lente e a vela para as quais se obtém uma imagem nítida da vela no anteparo, distam uma da outra de uma distância  $a$ . O comprimento focal da lente é então:



- a)  $\frac{D-a}{2}$
- b)  $\frac{D^2-a^2}{4 \cdot D}$
- c)  $\frac{D+a}{2}$
- d)  $\frac{D^2+a^2}{4 \cdot D}$
- e)  $2 \cdot a$



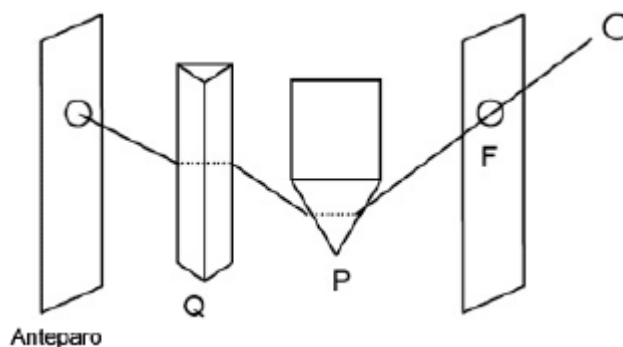
**35. (ITA-1999)**

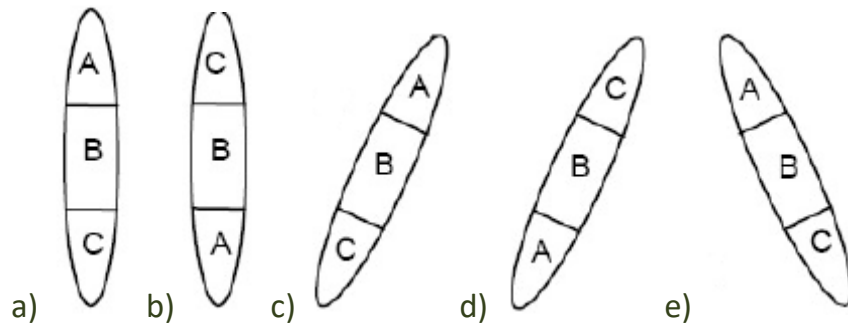
No final de uma tarde de céu límpido, quando o sol está no horizonte sua cor parece avermelhada. A melhor explicação para esse belo fenômeno da natureza é que:

- a) o Sol está mais distante da Terra.
- b) a temperatura do Sol é menor no final da tarde.
- c) a atmosfera da Terra espalha comprimentos de ondas mais curtos, como por exemplo o da luz azul.
- d) a atmosfera da Terra absorve os comprimentos de onda azul e verde.
- e) a atmosfera da Terra difrata a luz emitida pelo sol.

**36. (ITA-1999)**

Isaac Newton, no início de 1666, realizou a seguinte experiência: Seja S o Sol e F um orifício feito na janela de um quarto escuro. Considere P e Q dois prismas de vidro colocados em posição cruzada um em relação ao outro, ou seja, com suas arestas perpendiculares entre si, conforme mostra a figura abaixo. Represente por A a cor violeta, por B a amarela e C a vermelha. Após a passagem dos raios luminosos pelo orifício e pelos dois prismas, a forma da imagem e a disposição das cores formadas no anteparo são melhor representadas por:





### 37. (ITA-2000)

Duas fontes de luz S1 e S2, tem suas imagens formadas sobre um anteparo por uma lente convergente, como mostra a figura. Considere as seguintes proposições:

I - Se a lente for parcialmente revestida até da sua altura com uma película opaca (conforme a figura), as imagens (I1 de S1, I2 de S2) sobre o anteparo permanecem, mas tornam-se menos luminosas.

II - Se a lente for parcialmente revestida até da sua altura e as fontes forem distanciadas da lente, a imagem I1 desaparece.

III - Se as fontes S1 e S2 forem distanciadas da lente, então, para que as imagens não se alterem, o anteparo deve ser deslocado em direção à lente.

### 38. (ITA-2002)

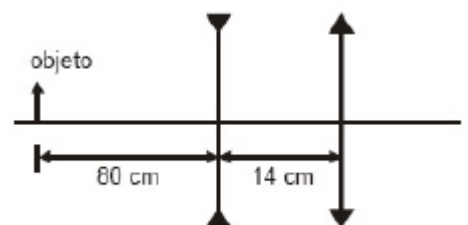
Uma pequena pedra repousa no fundo de um tanque de  $x$  m de profundidade. Determine o menor raio de uma cobertura circular, plana, paralela à superfície da água que flutuando sobre a superfície da água diretamente acima da pedra, impeça completamente a visão desta por um observador ao lado do tanque, cuja vista se encontra no nível da água. Justifique.

Dado: índice de refração da água  $n = \frac{4}{3}$

### 39. (ITA-2003)

A figura mostra um sistema óptico constituído de uma lente divergente, com distância focal  $f_1 = -20\text{cm}$ , distante 14 cm de uma lente convergente com distância focal  $f_2 = 20\text{cm}$ . Se um objeto linear é posicionado a 80cm à esquerda da lente divergente, pode-se afirmar que a imagem definitiva formada pelo sistema:

- é real e o fator de ampliação linear do sistema é  $-0,4$ .
- é virtual, menor e direita em relação ao objeto.
- é real, maior e invertida em relação ao objeto.
- é real e o fator de ampliação linear do sistema é  $-0,2$ .
- é virtual, maior e invertida em relação ao objeto.



#### 40. (ITA-2003)

Num oftalmologista, constata-se que um certo paciente tem uma distância máxima e uma distância mínima de visão distinta de 5,0m e 8,0cm, respectivamente. Sua visão deve ser corrigida pelo uso de uma lente que lhe permita ver com clareza objetos no “infinito”. Qual das afirmações é verdadeira?

- a) O paciente é míope e deve usar lentes divergentes cuja vergência é 0,2 dioptrias.
- b) O paciente é míope e deve usar lentes convergentes cuja vergência é 0,2 dioptrias.
- c) O paciente é hipermetrope e deve usar lentes convergentes cuja vergência é 0,2 dioptrias.
- d) O paciente é hipermetrope e deve usar lentes divergentes cuja vergência é  $-0,2$  dioptrias.
- e) A lente corretora de defeito visual desloca a distância mínima de visão distinta para 8,1cm.

#### 41. (ITA-2005)

Situa-se um objeto a uma distância  $p'$  diante de uma lente convergente de distância focal  $f$ , de modo a obter uma imagem real a uma distância  $p$  da lente. Considerando a condição de mínima distância entre imagem e objeto, então é correto afirmar que:

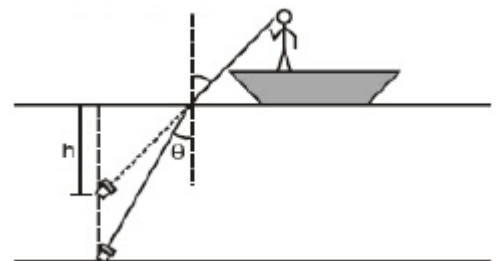
- a)  $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 5 \cdot f^3$
- b)  $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 10 \cdot f^3$
- c)  $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 20 \cdot f^3$
- d)  $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 25 \cdot f^3$
- e)  $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 30 \cdot f^3$

#### 42. (ITA-2005)

Um pescador deixa cair uma lanterna acesa em um lago a 10,0m de profundidade. No fundo do lago, a lanterna emite um feixe luminoso formando um pequeno ângulo com a vertical (veja figura).

Considere:  $\operatorname{tg} \theta \cong \operatorname{sen} \theta$  e o índice de refração da água  $n = 1,33$ . Então, a profundidade aparente  $h$  vista pelo pescador é igual a:

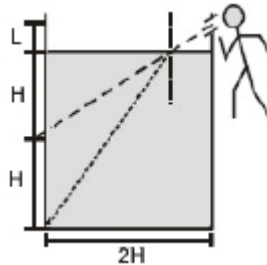
- a) 2,5 m
- b) 5,0 m
- c) 7,5 m
- d) 8,0 m
- e) 9,0 m



#### 43. (ITA-2005)



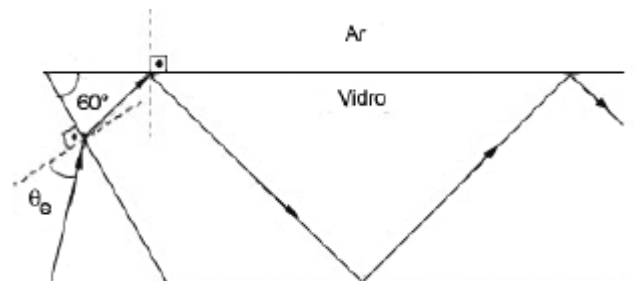
Através de um tubo fino, um observador enxerga o topo de uma barra vertical de altura  $H$  apoiada no fundo de um cilindro vazio de diâmetro  $2H$ . O tubo encontra-se a uma altura  $2H + L$  e, para efeito de cálculo, é de comprimento desprezível. Quando o cilindro é preenchido com um líquido até uma altura  $2H$  (veja figura), mantido o tubo na mesma posição, o observador passa a ver a extremidade inferior da barra. Determine literalmente o índice de refração desse líquido.



#### 44. (ITA-2006)

A figura mostra uma placa de vidro com índice de refração  $n_v = \sqrt{2}$  mergulhada no ar, cujo índice de refração é igual a 1,0. Para que um feixe de luz monocromática se propague pelo interior do vidro através de sucessivas reflexões totais, o seno do ângulo de entrada,  $\text{sen } \theta_e$ , deverá ser menor ou igual a:

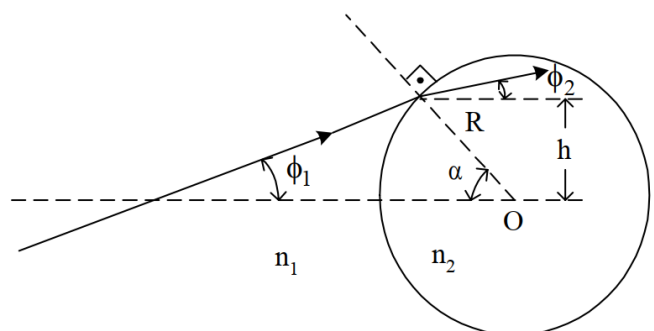
- a) 0,18
- b) 0,37
- c) 0,50
- d) 0,71
- e) 0,87



#### 45. (ITA-2007)

A figura mostra um raio de luz propagando-se num meio de índice de refração  $n_1$  e transmitido para uma esfera transparente de raio  $R$  e índice de refração  $n_2$ . Considere os valores dos ângulos  $\alpha$ ,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  muito pequenos, tal que cada ângulo seja respectivamente igual à sua tangente e ao seu seno. O valor aproximado de  $\phi_2$  é de:

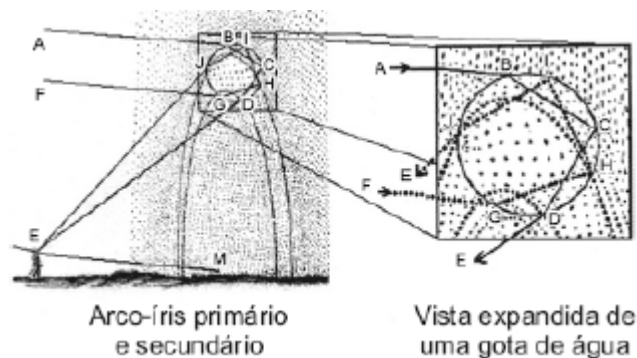
- a)  $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot (\phi_1 - \alpha)$
- b)  $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot (\phi_1 + \alpha)$
- c)  $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \phi_1 + \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \cdot \alpha$
- d)  $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \phi_1$
- e)  $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \phi_1 + \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) \cdot \alpha$





#### 46. (ITA-2008)

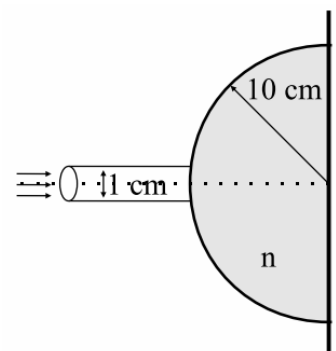
Foi René Descartes em 1637 o primeiro a discutir claramente a formação do arco-íris. Ele escreveu: “Considerando que esse arco-íris aparece não apenas no céu, mas também no ar perto de nós, sempre que haja gotas de água iluminadas pelo sol, como podemos ver em certas fontes, eu imediatamente entendi que isso acontece devido apenas ao caminho que os raios de luz traçam nessas gotas e atingem nossos olhos. Ainda mais, sabendo que as gotas são redondas, como fora anteriormente provado e, mesmo que sejam grandes ou pequenas, a aparência do arco-íris não muda de forma nenhuma, tive a idéia de considerar uma bem grande, para que pudesse examinar melhor...” Ele então apresentou a figura onde estão representadas as trajetórias para os arco-íris primário e secundário. Determinar o ângulo entre o raio incidente na gota, AB, e o incidente no olho do observador, DE, no caso do arco-íris primário, em termos do ângulo de incidência, e do índice de refração da água na. Considere o índice de refração do ar  $n = 1$ .



#### 47. (ITA-2011)

Um hemisfério de vidro maciço de raio de 10 cm e índice de refração  $n = \frac{3}{2}$  tem sua face plana apoiada sobre uma parede, como ilustra a figura. Um feixe colimado de luz de 1 cm de diâmetro incide sobre a face esférica, centrado na direção do eixo de simetria do hemisfério. Valendo-se das aproximações de ângulos pequeno,  $\sin \theta \cong \theta$  e  $\text{tg } \theta \cong \theta$ , o diâmetro do círculo de luz que se forma sobre a superfície da parede é de:

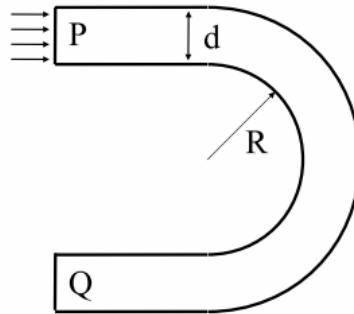
- a) 1 cm.
- b)  $\frac{2}{3}$  cm
- c)  $\frac{1}{2}$  cm
- d)  $\frac{1}{3}$  cm
- e)  $\frac{1}{10}$  cm



#### 48. (ITA-2011)

Um tarugo de vidro de índice de refração  $n = \frac{3}{2}$  e seção transversal retangular é moldado na forma de uma ferradura, como ilustra a figura. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre a superfície plana P. Determine o valor mínimo da razão  $\frac{R}{d}$  para o qual toda a luz que penetra pela superfície P emerge do vidro pela superfície Q.

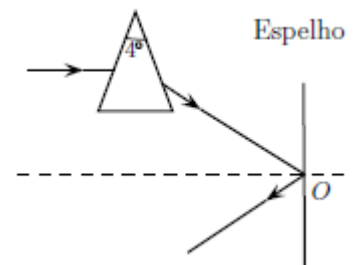




**49. (ITA-2013)**

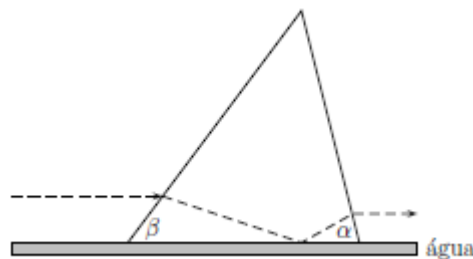
Um raio horizontal de luz monocromática atinge um espelho plano vertical após incidir num prisma com abertura de  $4^\circ$  e índice de refração  $n = 1,5$ . Considere o sistema imerso no ar e que tanto o raio emergente do prisma como o refletido pelo espelho estejam no plano do papel, perpendicular ao plano do espelho, como mostrado na figura. Assinale a alternativa que indica respectivamente o ângulo e o sentido em que deve ser girado o espelho em torno do eixo perpendicular ao plano do papel que passa pelo ponto O, de modo que o raio refletido retorne paralelamente ao raio incidente no prisma.

- a)  $4^\circ$ , sentido horário
- b)  $2^\circ$ , sentido horário
- c)  $2^\circ$ , sentido anti-horário
- d)  $1^\circ$ , sentido horário
- e)  $1^\circ$ , sentido anti-horário



**50. (ITA-2015)**

A base horizontal de um prisma de vidro encontra-se em contato com a superfície da água de um recipiente. A figura mostra a seção reta triangular deste prisma, com dois de seus ângulos,  $\alpha$  e  $\beta$ . Um raio de luz propaga-se no ar paralelamente à superfície da água e perpendicular ao eixo do prisma, nele incidindo do lado do ângulo  $\beta$ , cujo valor é tal que o raio sofre reflexão total na interface da superfície vidro-água. Determine o ângulo  $\alpha$  tal que o raio emerja horizontalmente do prisma. O índice de refração da água é  $4/3$  e, o do vidro,  $\sqrt{19}/3$ .



**51. (ITA-2016)**



Um tubo de fibra óptica é basicamente um cilindro longo e transparente, de diâmetro  $d$  e índice de refração  $n$ . Se o tubo é curvado, parte dos raios de luz pode escapar e não se refletir na superfície interna do tubo. Para que haja reflexão total de um feixe de luz inicialmente paralelo ao eixo do tubo, o menor raio de curvatura interno  $R$  (ver figura) deve ser igual a:

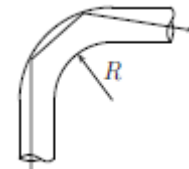
a)  $n \cdot d$

b)  $\frac{d}{n}$

c)  $\frac{d}{n-1}$

d)  $\frac{n \cdot d}{n-1}$

e)  $\frac{\sqrt{n} \cdot d}{\sqrt{n}-1}$



GABARITO



## 6. Gabarito sem comentários

1. B

2. E

3. A. 1,6m      B. 3,9 m

4. D

5.  $n(y) = n_0 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot a \cdot y}$

6.  $d_{\text{gelo}} = 985 \text{ kg/m}^3$

7. E

8. A. 13,3us      B. 152,7us

9. E

10. E

11. B

12. A

13. C

14. E

15. A

16. E

17. E

18. C

19. D

20. E

21. B

22. B

23. B

24. D

25. D

26. C

27. D

28. B

29. C

30. E

31. D

32. D

33. B

34. B

35. C

36. C

37. C

38.  $R = \frac{3\sqrt{7} \cdot x}{7}$

39. A

40. E

41. C

42. C

43.  $n = \frac{2 \cdot \sqrt{(H+L)^2 + H^2}}{\sqrt{(H+L)^2 + 4 \cdot H^2}}$

44. B

45. E

46.  $\delta = 4 \cdot \arcsen \left( \frac{\text{sen } \hat{i}}{n_a} \right) - 2 \cdot \hat{i}$

47. B

48.  $\frac{R}{d} = 2$

49. D

50.  $\alpha = 30^\circ$

51. C

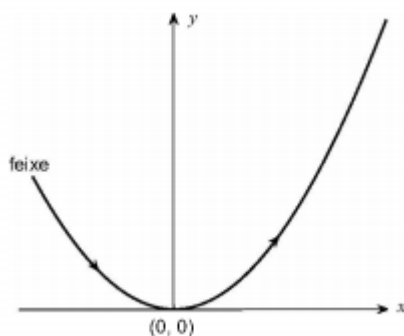


ESCLARECENDO!



## 7. Lista de questões comentadas

### 1. (IME-2020 – 1ª Fase)

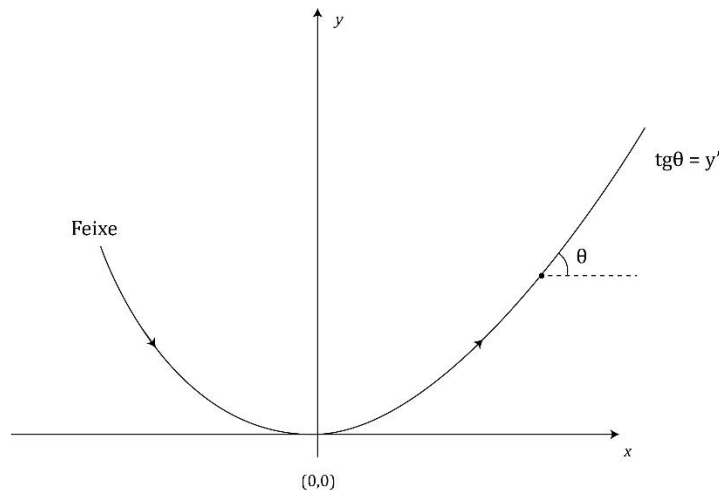


Um feixe de luz hipotético, mostrado na figura acima, propaga-se ao longo do plano  $xy$  em um meio não homogêneo, cujo índice de refração é função da coordenada  $y$ . Considerando que o feixe tangencia o eixo  $x$  no ponto  $(0, 0)$ , onde  $n(0) = n_0$ . Sabendo que a velocidade da luz no vácuo é  $c$ , o valor máximo absoluto possível da componente  $y$  para a velocidade do feixe passível de ser atingida é:

- a)  $\frac{c}{2n_0^2}$
- b)  $\frac{c}{2n_0}$
- c)  $\frac{c}{4n_0^2}$
- d)  $\frac{c}{n_0}$
- e)  $\frac{c}{4n_0}$

**Comentários:**





Pela lei de Snell:

$$n(y) \cdot \cos \arctan y' = n_0$$

A componente  $y$  para a velocidade do feixe é

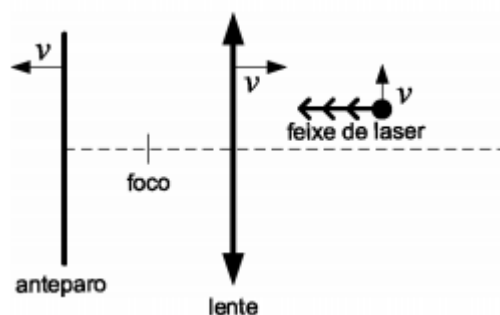
$$\frac{c}{n(y)} \sin \arctan y' = \frac{c}{2n_0} \sin(2 \arctan y')$$

Cujo valor máximo é

$$\frac{c}{2n_0}$$

**Gabarito: B**

## 2. (IME-2020 – 1ª Fase)



Uma partícula emite um feixe laser horizontal de encontro a uma lente convergente de distância focal  $f$ . Após ser desviado, o feixe atinge um anteparo localizado depois do foco da lente. Sabendo que a partícula, a lente e o anteparo estão em movimento em velocidade escalar  $v$  nos respectivos sentidos indicados na figura, a aceleração do ponto de impacto do feixe, no referencial do anteparo, é:

- a)  $v^2/4f$
- b)  $v^2/3f$
- c)  $v^2/2f$
- d)  $2v^2/f$



e)  $4v^2/f$

**Comentários:**

No referencial do anteparo a lente se distancia com velocidade  $2v$  e o objeto sobe diagonalmente com  $V_x = V_y = v$ . A abscissa da lente é:

$$x_F = x_L - f = x_{0L} + 2vt - f$$

$$x_L = x_{0L} + 2vt$$

$$x_O = x_{0O} + vt$$

$$y_O = y_{0O} + vt$$

A reta que une o ponto onde o raio de laser atinge a lente e o foco (que sabemos que ele passa) é:

$$y = y_F + \frac{y_O - y_F}{x_L - x_F}(x - x_F) = \frac{y_O}{x_L - x_F}(x - x_F)$$

Para  $x=0$ :

$$y = -\frac{y_O x_F}{x_L - x_F} = -\frac{(y_{0O} + vt)(x_{0L} + 2vt - f)}{f}$$

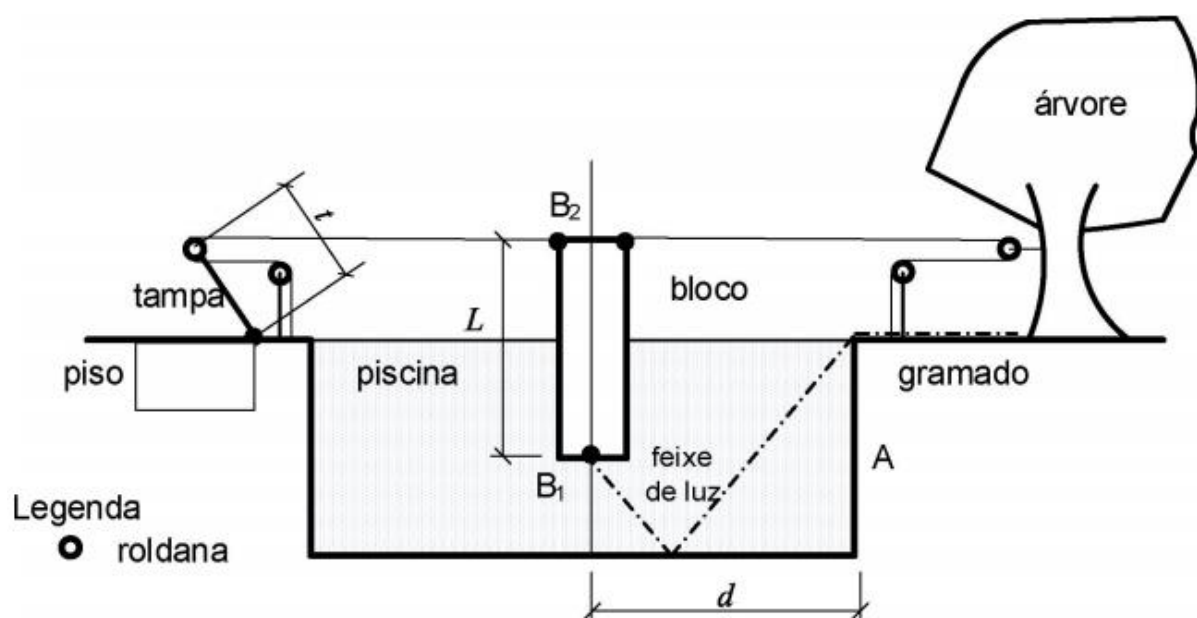
Cuja componente  $t^2$  é:

$$-\frac{2v^2 t^2}{f} = \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$a_y = \frac{4v^2}{f}$$

**Gabarito: E**

**3. (IME-2020 – 2ª Fase)**



Um profissional de iluminação deseja projetar um sistema de feixe de luz capaz de iluminar o fundo reflexível de uma piscina e o gramado posicionado logo após o lado A. Sua ideia é submergir parcialmente um bloco maciço em formato de paralelepípedo reto, com uma fonte luminosa presa em sua base submersa  $B_1$ , que emite um feixe de luz que percorre a trajetória mostrada na figura. O bloco é fixado por dois cabos horizontais presos a sua base não submersa  $B_2$  e ortogonais ao lado A da piscina, sendo um deles amarrado, por meio de roldanas, na tampa articulada do compartimento onde é guardado o material de limpeza da piscina e o outro, na árvore. Considere que a piscina esteja completamente cheia com água e que a tração aplicada nos cabos seja metade do seu valor máximo para ruptura, especificado pelo fabricante. Calcule:

- a altura  $L$  do bloco;
- a distância  $d$  em que o bloco deve ser posicionado, em relação ao lado A da piscina.

Dados:

- profundidade da piscina: 3 m;
- índice de refração do ar: 1;
- índice de refração da água da piscina:  $5/3$ ;
- massa específica da água:  $1 \text{ g/cm}^3$ ;
- massa específica do material do bloco:  $0,5 \text{ g/cm}^3$ ;
- comprimento  $t$  da tampa: 1 m;
- massa da tampa: 8 kg;
- tração máxima até a ruptura nos cabos: 30 N;
- aceleração da gravidade:  $10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

Observações:

- despreze o atrito e as dimensões das quatro roldanas;
- considere a árvore uma estrutura rígida;
- as roldanas estão fixas.

**Comentários:**

A.

Sendo  $T$  a tração na corda da esquerda,  $h$  a altura da ponta superior da tampa, por equilíbrio de torque na tampa:

$$2Th = \frac{Pt \cos \theta}{2}$$

Além disso:

$$h = t \sin \theta$$





Logo:

$$\tan \theta = \frac{P}{4T} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3} \rightarrow \sin \theta = \frac{4}{5}$$

Por equilíbrio de força no bloco:

$$P = F_e$$

$$LA\mu_{\text{bloco}}g = (L - h)A\mu_{\text{água}}g$$

$$\frac{1}{2}L = L - h \rightarrow L = 2h = \frac{8}{5} \text{ m}$$

B.

Além disso, sendo  $\theta$  o ângulo vertical do raio de luz:

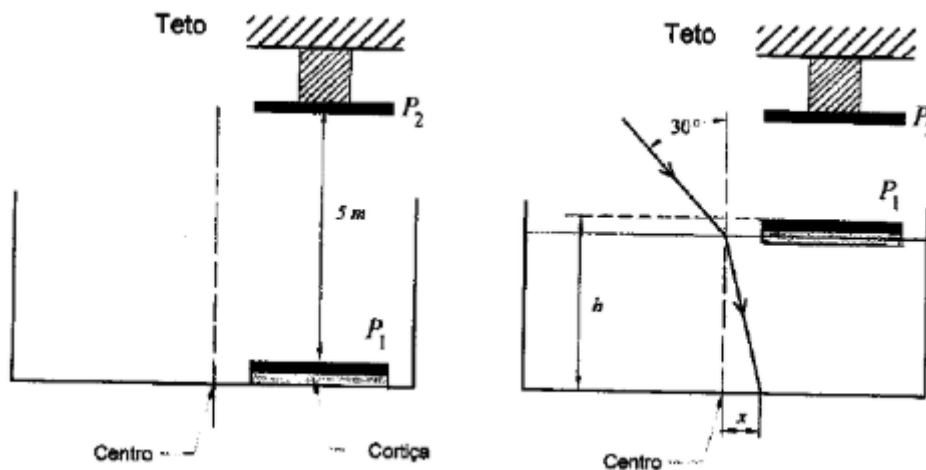
$$\frac{d}{p - (L - h) + p} = \tan \theta$$

$$\sin \theta = \frac{1}{n} = \frac{3}{5} \rightarrow \tan \theta = \frac{3}{4}$$

$$d = \frac{3}{4}(2p - L + h) = 3,9 \text{ m}$$

Gabarito: A. 1,6m B. 3,9 m

#### 4. (IME-2010)



Uma fina placa metálica  $P_1$ , apoiada em um tablete de cortiça no fundo de um frasco cilíndrico, dista 5 metros de uma placa idêntica  $P_2$ , fixa no teto, conforme a figura acima. As duas placas formam um capacitor carregado com  $Q$  coulombs.

Enche-se o referido frasco com um líquido de índice de refração  $n = 2,5$ , até que a superfície de  $P_1$  atinja a altura de  $h$  metros. Em seguida, lança-se sobre o centro da superfície um raio de luz monocromática, sob um ângulo de  $30^\circ$  com a vertical.



Sabendo que a energia armazenada no capacitor fica reduzida a 0,6 do valor inicial, que o raio refratado atinge um ponto situado  $x$  metros do centro do fundo do frasco e desprezando o efeito de borda do capacitor, podemos dizer que o valor aproximado de  $x$  é:

Observação:

- As espessuras da cortiça e da placa são desprezíveis em relação à altura  $h$ .

- a) 0,1
- b) 0,2
- c) 0,3
- d) 0,4
- e) 0,5

**Comentários:**

A energia armazenada em um capacitor com carga fixada é:

$$E = \frac{Q^2}{2 \cdot C}$$

E:

$$C = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d}$$

Logo:

$$E = \frac{Q^2 \cdot d}{2 \cdot \epsilon_0 \cdot A}$$

E, pelo enunciado:

$$\frac{E_2}{E_1} = 0,6 \text{ e } \frac{d_2}{d_1} = 0,6$$

Mas:

$$d_2 = 5 - h \text{ e } d_1 = 5$$
$$\frac{5 - h}{5} = 0,6 \Rightarrow h = 2 \text{ m}$$

Agora, aplicando-se lei de Snell:

$$\text{sen } 30^\circ = 2,5 \cdot \text{sen } \hat{r} \Rightarrow \text{sen } \hat{r} = \frac{1}{5}$$

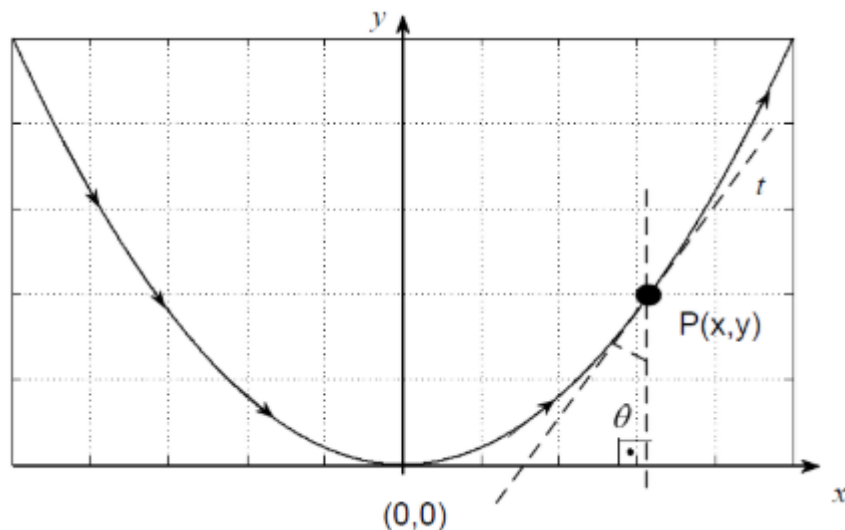
Aproximando-se  $\text{sen } \hat{r} = \text{tg } \hat{r}$ :

$$\frac{x}{h} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = 0,4 \text{ m}$$

**Gabarito: D**



5. (IME-2012)



A figura acima mostra a trajetória parabólica de um raio luminoso em um meio não homogêneo. Determine o índice de refração  $n$  desse meio, que é uma função de  $y$ , sabendo que a trajetória do raio é descrita pela equação  $y = a \cdot x^2$ , onde  $a > 0$ .

Dados:

- $\cotg \theta = 2 \cdot a \cdot x$
- $n(0) = n_0$

Observação:

$P(x, y)$  é o ponto de tangência entre a reta  $t$  e a parábola.

**Comentários:**

O problema apresentado é uma estratificação. Portanto, pode-se assumir que:

$$n_0 \cdot \sen \theta_0 = n_1 \cdot \sen \theta_1 = \dots = n_i \cdot \sen \theta_i$$

Portanto, entre o ponto  $(0,0)$  e o ponto  $P(x, y)$ , tem-se:

$$n_0 \cdot \sen 90^\circ = n(y) \cdot \sen \theta$$

Mas:

$$1 + \ctg^2 \theta = \csc^2 \theta$$

$$\frac{1}{\sen^2 \theta} = 1 + \ctg^2 \theta$$

$$\sen \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \ctg^2 \theta}}$$

Portanto:

$$\frac{n_0}{\sen \theta} = n(y)$$

$$n(y) = n_0 \cdot \sqrt{1 + \ctg^2 \theta}$$

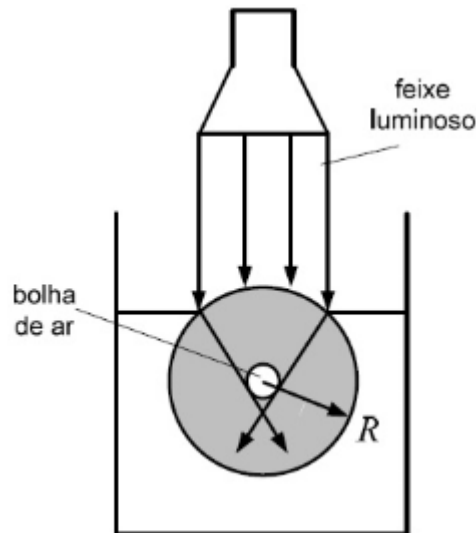


$$n(y) = n_0 \cdot \sqrt{(1 + 4 \cdot a^2 \cdot x^2)}$$

$$n(y) = n_0 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot a \cdot y}$$

**Gabarito:**  $n(y) = n_0 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot a \cdot y}$

**6. (IME-2013)**



Uma esfera de gelo de raio  $R$  flutua parcialmente imersa em um copo com água, como mostra a figura acima. Com a finalidade de iluminar uma bolha de ar, também esférica, localizada no centro da esfera de gelo, utilizou-se um feixe luminoso de seção reta circular de área  $\frac{\pi \cdot R^2}{100} \text{ m}^2$  que incide verticalmente na esfera. Considerando que os raios mais externos do feixe refratado tangenciam a bolha, conforme a figura, determine a massa específica do gelo.

Dados:

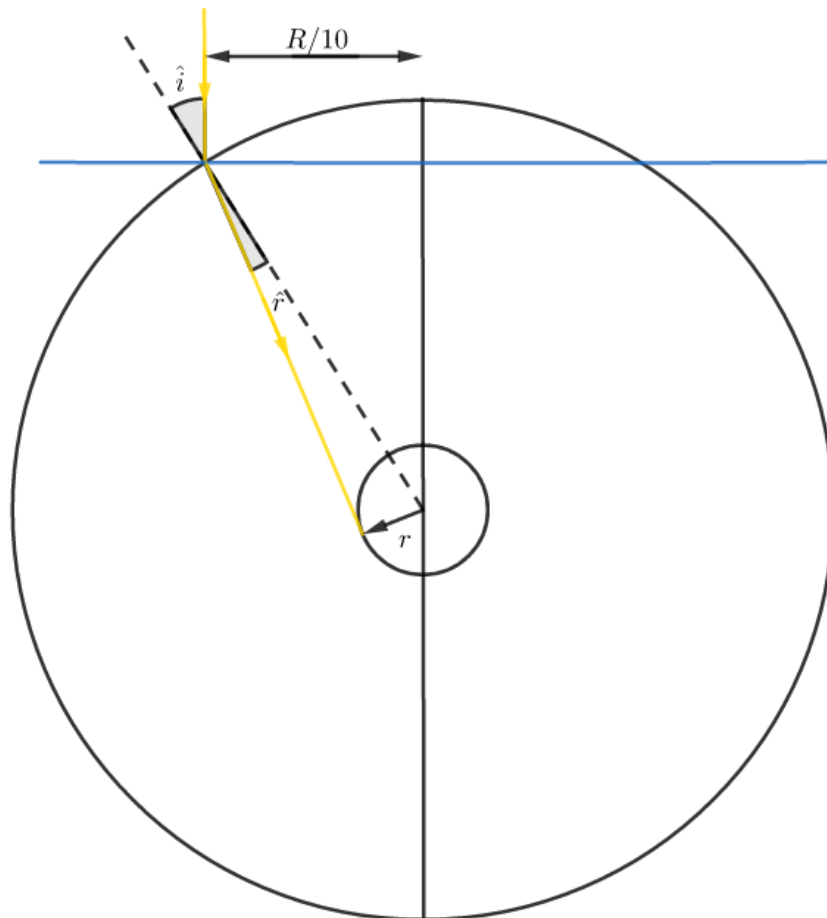
- índice de refração do ar: 1,0
- índice de refração da água: 1,3
- Massa específica do ar: 1,0 kg/m<sup>3</sup>
- Massa específica da água: 103 kg/m<sup>3</sup>
- Volume da calota esférica:  $v = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot R^3$

**Comentários:**

Sabendo-se a seção transversal do feixe, sabe-se qual o raio dele.

$$\pi \cdot r_{\text{feixe}}^2 = \pi \cdot \frac{R^2}{100} \Rightarrow r_{\text{feixe}} = \frac{R}{10}$$





Assim:

$$n_{ar} \cdot \text{sen } \hat{i} = n_{gelo} \cdot \text{sen } \hat{r} \Rightarrow \frac{1}{10} = 1,3 \cdot \text{sen } \hat{r} \Rightarrow \text{sen } \hat{r} = \frac{1}{13}$$

Mas:

$$\text{sen } \hat{r} = \frac{r}{R} \Rightarrow r = \frac{R}{13}$$

Pelo equilíbrio:

$$E = P$$

(Desconsidera-se a contribuição do ar para o peso).

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot d_{gelo} \cdot g = \left( \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 - 2 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot R^3 \right) \cdot d_{\acute{a}gua} \cdot g$$

$$d_{gelo} = \left( 1 - \frac{2 \cdot 10^{-2}}{4} \cdot 3 \right) \cdot d_{\acute{a}gua}$$

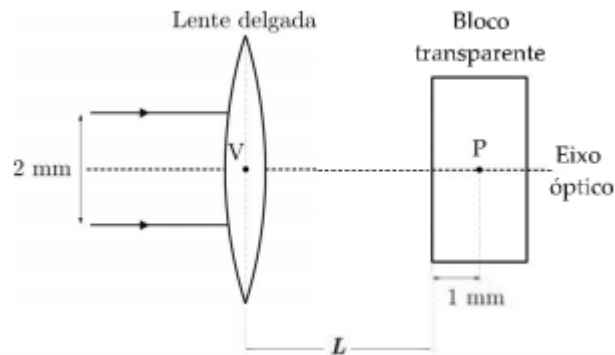
$$d_{gelo} = 985 \text{ kg/m}^3$$

**Gabarito:**  $d_{gelo} = 985 \text{ kg/m}^3$

## 7. (ITA-2020 – 1ª Fase)



Dois raios luminosos paralelos e simétricos em relação ao eixo óptico, interdistantes de 2 mm, devem ser focados em um ponto P no interior de um bloco transparente, a 1 mm de sua superfície, conforme mostra a figura. Para tal, utiliza-se uma lente delgada convergente com distância focal de 1 mm. Considerando que o bloco tem índice de refração  $n = \sqrt{2}$ , a distância L entre o vértice V da lente e a superfície do bloco deve ser ajustada para



- a) 1 mm.
- b)  $\sqrt{2}/2$  mm.
- c)  $1 - \sqrt{2}/2$  mm.
- d)  $\sqrt{3}/3$  mm.
- e)  $1 - \sqrt{3}/3$  mm.

**Comentários:**

[IMAGEM]

$$\frac{h}{f} = \frac{d}{f - L} = \tan \theta = \frac{1}{1} = \frac{d}{1 - L} \rightarrow L = 1 - d$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$\sin \theta = n \sin \theta' \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \sin \theta' \rightarrow \theta' = 30^\circ$$

$$\tan \theta' = \frac{d}{x} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{d}{1} \rightarrow d = \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 - L \rightarrow L = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ mm}$$

**Gabarito: E**

### 8. (ITA-2020 – 2ª Fase)

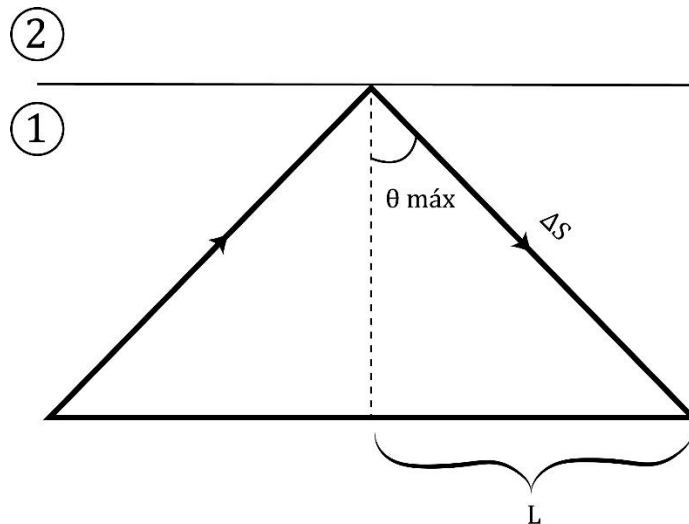
Um sinal luminoso propaga-se no interior de uma fibra óptica retilínea de comprimento  $L = 3,00 \text{ km}$ , feita de um material com índice de refração igual a 1,50. Considere que a luz no interior da fibra é guiada por meio de sucessivas reflexões internas totais. Sendo a velocidade



da luz no vácuo igual a  $3,00 \times 10^5 \text{ km/s}$ , calcule o tempo de propagação do sinal de ponta a ponta

1. se a fibra estiver envolta de ar;
2. se o núcleo da fibra estiver envolvido por um revestimento feito de material com índice de refração de 1,45.

Comentários:



1.

$$\sin \theta_{\text{máx}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3} \rightarrow \cos \theta_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\Delta S = \frac{L}{\cos \theta_{\text{máx}}} = 4,0 \text{ km}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{c} = 13,3 \mu\text{s}$$

2.

$$\sin \theta_{\text{máx}} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1,45}{1,5} = \frac{29}{30} \rightarrow \cos \theta_{\text{máx}} =$$

$$\Delta S = \frac{L}{\cos \theta_{\text{máx}}} = 45,8 \text{ km}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta S}{c} = 152,7 \mu\text{s}$$

**Gabarito: A. 13,3us B. 152,7us**

9. (ITA-1969)

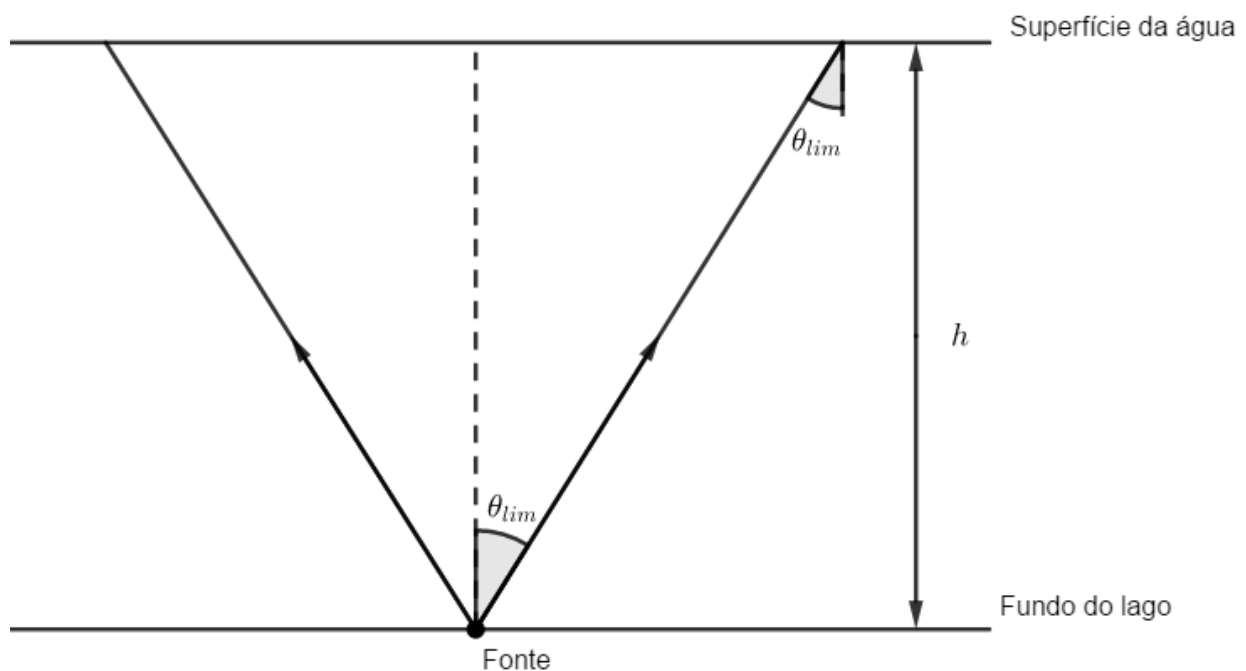


Uma fonte luminosa puntiforme está a uma profundidade  $h$  abaixo da superfície de um lago suficientemente grande em extensão e profundidade. Seja  $n$  o índice de refração da água. Da energia total emitida,  $f$  é a fração que escapa diretamente da superfície líquida, desprezando a absorção da luz na água e a reflexão que não for total. Nessas condições podemos afirmar que:

- a)  $f$  aumenta se  $h$  aumentar
- b)  $f$  diminui se  $h$  aumentar
- c)  $f = \frac{1}{n}$
- d)  $f = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot n \cdot \sqrt{n^2 - 1}}$
- e) nenhuma das afirmações acima.

### Comentários:

Pelas instruções do enunciado, considera-se energia que escapa da água como sendo a quantidade de luz refratada. Portanto, analisando a figura abaixo:



Considere que os raios representados são os raios no ângulo limite, ou seja, para ângulos maiores que esse a luz emitida não irá refratar e emergir da água. No entanto, a fonte é pontual, ou seja, a propagação da luz é uma esfera. Utilizar-se-á o conceito de ângulo sólido, onde:

$$\Omega = 2 \cdot \pi \cdot (1 - \cos \theta) \Rightarrow \Omega_{emerge} = 2 \cdot \pi \cdot (1 - \cos \theta_{lim})$$

$$\text{sen } \theta_{lim} = \frac{n_{ar}}{n_{\acute{a}gua}} = \frac{1}{n}$$

Logo:





$$\cos \theta_{lim} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}$$

Portanto, o ângulo sólido que corresponde à luz que escapa é:

$$\Omega_{emerge} = 2 \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}\right)$$

Assim, a fração de luz que escapa é:

$$f = \frac{\Omega_{emerge}}{\Omega_{total}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{(n - \sqrt{n^2 - 1})}{n}}{4 \cdot \pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}$$

**Gabarito: E**

---

### 10. (ITA-1969)

Um rapaz construiu uma máquina fotográfica tipo fole, usando uma lente divergente como objetiva. Ao tirar fotografias com esta máquina verificara que no filme:

- a) a imagem será menor que o objeto.
- b) a imagem será sempre maior que o objeto.
- c) a imagem será maior que o objeto somente se a distância do objeto à lente for maior que  $2f$ .
- d) a imagem será menor que o objeto somente se a distância do objeto à lente for maior que  $2f$ .
- e) não aparecerá imagem alguma, por mais que se ajuste o fole.

**Comentários:**

Ao utilizar-se uma lente divergente, a formação da imagem será sempre virtual, direita e menor. No caso, uma imagem virtual não irá ser projetada sobre o filme e, portanto, não se formará imagem.

**Gabarito: E**

---

### 11. (ITA-1970)

Um fotógrafo, com uma câmara cuja lente tem uma distância focal de 5,0 cm e uma abertura eficaz de 2,0 cm de diâmetro, fotografa um objeto que está a 50 m de distância. Um segundo fotógrafo, que é obrigado a ficar a 1,0 km do mesmo objeto, quer obter um negativo onde a imagem do referido objeto tem o mesmo tamanho que o obtido pelo primeiro fotógrafo. Para conseguir isto ele deverá:

- a) usar uma câmara com maior abertura eficaz



- b) usar uma câmara cuja distância focal seja de 1,0 m
- c) usar uma câmara com a mesma distância focal, mas, aumentar de 100 vezes à distância entre filme e objetiva
- d) aumentar 100 vezes o tempo de exposições
- e) usar uma câmara cuja distância focal seja 100 vezes menor a do primeiro fotógrafo.

**Comentários:**

Em ambos os casos, considera-se que o objeto é praticamente impróprio, devido à grande diferença entre a distância focal e a distância até o objeto. Apesar de não ser informado a distância focal para a segunda lente, sabe-se que com certeza ela é menor que 10% da distância ao objeto. Portanto, adota-se que em ambos os casos:

$$p \rightarrow \infty$$
$$p' \rightarrow f$$

Assim, o aumento transversal em cada caso fica:

$$A = -\frac{p'}{p} = -\frac{f}{p}$$

Como deseja-se obter imagens de mesmo tamanho, é necessário que ambas as câmeras tenham mesmo aumento transversal:

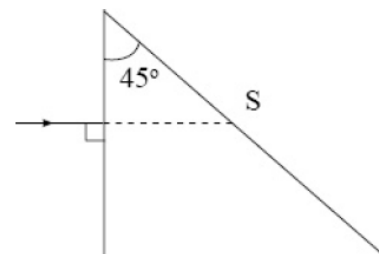
$$A_1 = A_2$$
$$-\frac{f_1}{p_1} = -\frac{f_2}{p_2} \Rightarrow \frac{0,05}{50} = \frac{f_2}{1000} \Rightarrow f_2 = 1 \text{ m}$$

**Gabarito: B**

**12. (ITA-1971)**

No desenho qual deve ser o índice de refração do prisma para que o raio mostrado sofra reflexão total na face S? (Considere o índice de refração do ar igual a 1,00).

- a)  $n > \sqrt{2}$
- b)  $n < 1,5$
- c)  $n > 1,16$
- d)  $n < \sqrt{2}$
- e) nenhuma das respostas é correta.



**Comentários:**

O ângulo de incidência deve ser maior ou igual ao ângulo limite para que ocorra reflexão total. Como o ângulo de incidência é menor ou igual a 90°, pode-se concluir que:



$$\text{sen } \theta_{lim} < \text{sen } \hat{i}$$

Mas:

$$\hat{i} = 45^\circ$$

E:

$$\text{sen } \theta_{lim} = \frac{1}{n}$$

Logo:

$$\frac{1}{n} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow n > \sqrt{2}$$

**Gabarito: A**

---

### 13. (ITA-1973)

A vista de uma pessoa normal é capaz de focalizar um objeto que esteja no mínimo a uma distância de 24 cm. Coloca-se junto do olho de uma pessoa normal uma lente delgada convergente de distância focal igual a 5,0 cm. Neste caso, para que um objeto seja visto claramente pela pessoa, é suficiente que ele esteja a uma distância  $d$  do olho tal que:

- a)  $3 \text{ cm} < d < 10 \text{ cm}$
- b)  $d < 4 \text{ cm}$
- c)  $4 \text{ cm} < d < 5 \text{ cm}$
- d)  $2 \text{ cm} < d < 24 \text{ cm}$
- e)  $d > 4,5 \text{ cm}$

**Comentários:**

Ao colocar-se a lente junto ao olho, o que é observado pela pessoa passa a ser a imagem do objeto original. Para que esta imagem seja vista claramente, ela deve estar a uma distância mínima de 24 cm. Portanto, pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{0,05} = \frac{1}{d} + \frac{1}{-0,24} \Rightarrow \frac{1}{d} = \frac{0,29}{0,012} \Rightarrow d \cong 0,041 \text{ m} \Rightarrow 4 \text{ cm} < d < 5 \text{ cm}$$

**Gabarito: C**

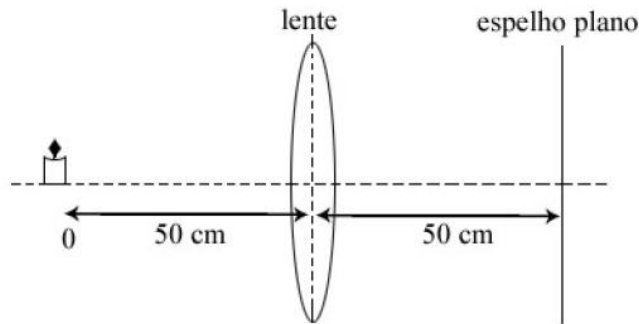
---

### 14. (ITA-1975)

Consideremos o seguinte arranjo, em que a lente convergente tem distância focal de 30 cm.

A imagem do objeto O:





- a) será real e formar-se-á a 50 cm da lente.
- b) Será virtual a 25 cm atrás do espelho e real 25 cm na frente do mesmo.
- c) Será real e formar-se-á a 25 cm na frente do espelho.
- d) Será real e formar-se-á no foco da lente.
- e) N.d.a

**Comentários:**

A primeira imagem formada na associação é por conta da lente. Pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} \Rightarrow \frac{1}{0,3} = \frac{1}{0,5} + \frac{1}{p'_1} \Rightarrow p'_1 = \frac{3}{4}$$

Portanto a imagem formada é real e está 75 cm à direita da lente. Logo, esta imagem servirá de objeto para o espelho. Ela encontra-se:

$$p_2 = 0,75 - 0,5 = 0,25 \text{ m}$$

Esta distância é a distância que a primeira imagem, que servirá de objeto para o espelho, encontra-se à direita do espelho. Por ser um espelho plano, ele forma uma segunda imagem a 0,25 m à esquerda. Esta imagem servirá de objeto novamente para a lente. Portanto:

$$\frac{1}{0,3} = \frac{1}{0,25} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = -\frac{3}{2}$$

A imagem final fica, assim, à 150 cm à direita (ou para trás) da lente.

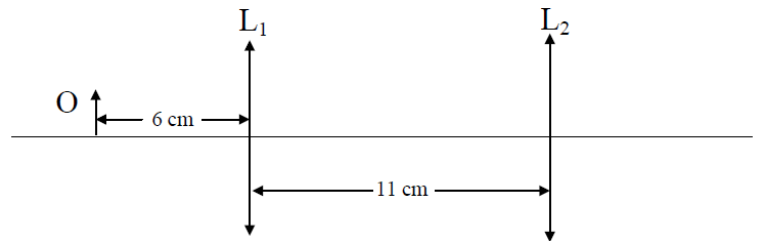
**Gabarito: E**

**15. (ITA-1976)**

No sistema óptico esquematizado, O representa um objeto real e as lentes delgadas convergentes,  $L_1$  e  $L_2$ , tem distância focais iguais a 2 cm e 4 cm, respectivamente. A imagem I deve estar a:



- a) 8 cm à direita de L2 e  $\frac{I}{O} = \frac{1}{2}$
- b) 8 cm à esquerda de L2 e  $\frac{I}{O} = \frac{1}{2}$
- c) 8 cm à direita de L2 e  $\frac{I}{O} = 2$
- d) 8 cm à esquerda de L2 e  $\frac{I}{O} = \frac{1}{2}$
- e) 12 cm à direita de L2 e  $\frac{I}{O} = 2$



**Comentários:**

Pela equação das lentes delgadas para a lente 1:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = 3 \text{ cm}$$

E o aumento causado pela lente 1:

$$A_1 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Esta imagem serve de objeto para a segunda lente. Aplicando-se a equação das lentes delgadas para a segunda lente:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = 8 \text{ cm}$$

O aumento causado pela lente 2 é:

$$A_2 = -\frac{8}{8} = -1$$

Logo a posição final é 8 cm à direita da lente 2 e o aumento final é  $A = A_1 \cdot A_2 = \frac{1}{2}$ .

**Gabarito: A**

**16. (ITA-1978)**

Uma lente duplamente convexa tem raios de curvatura de 25 cm e índice de refração 1,50. Calcular a posição da imagem (*l*) de um objeto colocado sobre o eixo, a 60 cm da lente, 1º) quando a lente se acha no ar e 2º) quando imersa na água. São dados os índices de refração:  $n_{ar} = 1,00$ ;  $n_{água} = 1,33$ .

- |    | Ar                      | Água                     |
|----|-------------------------|--------------------------|
| a) | $q = 25,00 \text{ cm}$  | $q = 73,52 \text{ cm}$   |
| b) | $q = -42,86 \text{ cm}$ | $q = -155,25 \text{ cm}$ |

- c)  $q = 42,86 \text{ cm}$        $q = -155,25 \text{ cm}$   
d)  $q = 12,25 \text{ cm}$        $q = 0,01 \text{ cm}$   
e) nenhuma das afirmações está correta.

**Comentários:**

Pela equação dos fabricantes de lente para a lente no ar:

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot \left( \frac{n_{\text{lente}}}{n_{\text{meio}}} - 1 \right) = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow f = 0,25 \text{ m}$$

Para a lente na água:

$$\frac{1}{f} = 8 \cdot \left( \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} - 1 \right) = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1 \Rightarrow f = 1 \text{ m}$$

Agora basta aplicar a equação das lentes delgadas para cada caso.

$$p' = \frac{p \cdot f}{p - f}$$

$$p'_1 = \frac{0,6 \cdot 0,25}{0,35} = \frac{0,15}{0,35} = 0,4286 \text{ m} \Rightarrow p'_2 = \frac{0,6}{-0,4} = -\frac{3}{2} = -1,5 \text{ m}$$

Portanto, nenhuma das afirmativas está correta.

**Gabarito: E**

**17. (ITA-1979)**

Um feixe de luz monocromática incide paralelamente ao eixo principal de uma lente convergente de distância focal  $A$ , num meio de índice de refração absoluto igual a 1 (um). O feixe é cilíndrico e tem diâmetro  $2A$ . Dispõe-se de uma lâmina de faces paralelas, espessura  $E = \frac{A}{4}$  e índice de refração absoluto igual a 1,4 (um inteiro e quatro décimos). Nestas condições, pode-se afirmar que:

- a) se a lâmina for intercalada entre a fonte de luz e a lente ter-se-á que a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será:  $f = A - \frac{E \cdot \sin 15^\circ}{0,5}$   
b) se a lâmina for intercalada entre a lente e seu foco, então, a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será:  $f = A + \frac{E \cdot \sin 15^\circ}{0,5}$   
c) se a lâmina for intercalada entre o foco e a lente, então, a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será:  $f = 1,2 A$



d) se a lâmina for intercalada entre o foco e a lente, então a nova distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será:  $f = 4A$

e) qualquer que seja a posição da lâmina intercalada entre a fonte de luz e a lente, ela não alterará a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente.

### Comentários:

Uma lâmina de faces paralelas é capaz de desviar a luz no caso de incidência oblíqua à sua superfície e capaz de gerar uma posição aparente independente do ângulo de incidência. De qualquer forma, a lâmina de faces paralelas não é capaz de deformar a imagem em relação ao objeto, visto que:

$$\Delta p = e \cdot \frac{\text{sen}(\hat{i} - \hat{r})}{\text{sen} \hat{i} \cdot \cos \hat{r}}$$

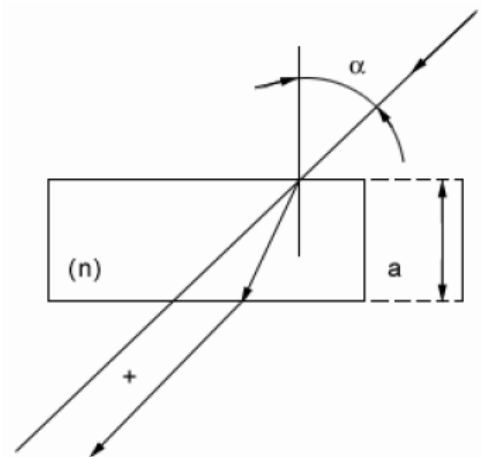
A posição aparente e o deslocamento serão o mesmo para todo o feixe contanto que a espessura e o ângulo de incidência sejam constantes em toda a extensão da trajetória do feixe, ou seja, incide um cilindro de diâmetro  $2A$ , emerge um cilindro de diâmetro  $2A$  com mesma direção.

### Gabarito: E

#### 18. (ITA-1980)

Um raio luminoso incide sobre uma lâmina transparente de faces paralelas, de espessura  $a$  e índice de refração  $n$ . Calcular o desvio sofrido pelo raio luminoso, ao atravessar a lâmina, supondo que o ângulo de incidência,  $\alpha$ , seja pequeno. (Utilizar as aproximações:  $\text{sen} \alpha = \alpha$  e  $\cos \alpha = 1$ ).

- a)  $x \cong a \cdot \alpha \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
- b)  $x \cong a \cdot \alpha \cdot (1 - n)$
- c)  $x \cong a \cdot \alpha \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$
- d)  $x \cong a \cdot \alpha \cdot (1 + n)$
- e)  $x \cong a \cdot \alpha \cdot (n - 1)$



### Comentários:

Utilizando a já conhecida fórmula de desvio para lâmina de faces paralelas:

$$d = a \cdot \alpha \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

### Gabarito: C

#### 19. (ITA-1981)



Um sistema óptico é composto por duas lentes esféricas, convergentes L1 e L2, dispostas coaxialmente. As distâncias focais são, respectivamente,  $f_1$  e  $f_2$  e a distância entre elas é  $d$ . Um feixe de luz cilíndrico de 40 mm de diâmetro incide sobre L1, segundo o seu eixo, e emerge de L2 como um feixe também cilíndrico de 30 mm de diâmetro. Se  $f_1 = 60 \text{ mm}$ , pode-se afirmar que a distância  $d$  será:

- a) 45 mm
- b) 8 mm
- c) 15 mm
- d) 105 mm
- e) qualquer valor, pois o fenômeno citado independe da distância em consideração.

**Comentários:**

Inicialmente, aplica-se a equação das lentes delgadas para a primeira lente, sabendo-se que o objeto é impróprio.

$$\frac{1}{60} = \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = 60 \text{ mm}$$

Ou seja, a luz toda coincide no foco imagem. Após o foco imagem ela torna a se espalhar. Portanto, para a lente 2, é como se sobre o foco imagem da lente 1 houvesse uma fonte de luz pontual. Para que a luz emitida por uma fonte pontual passe por uma lente e saia paralelo, é necessário que esta fonte esteja sobre o foco da lente.

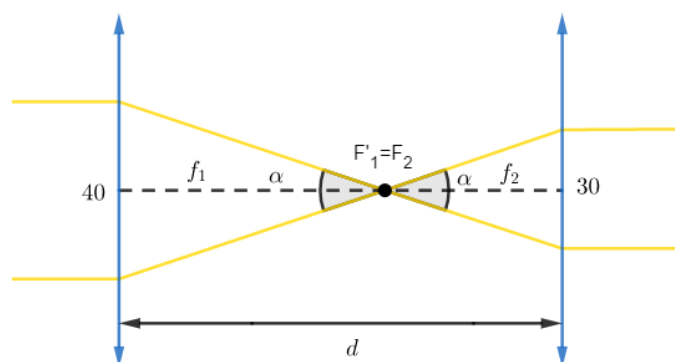
Assim, deduz-se que o foco imagem da lente 1 coincide com o foco objeto da lente 2. E, como o ângulo em relação ao eixo óptico da luz é o mesmo antes e depois de passar pelos focos, a relação entre os diâmetros será dado pelas distâncias.

$$\frac{30}{40} = \frac{x}{60} \Rightarrow x = 45 \text{ mm}$$

E:

$$d = x + 60 = 105 \text{ mm}$$

Visualmente:



**Gabarito: D**





## 20. (ITA-1982)

Considere um sistema composto por duas lentes circulares esféricas delgadas de 6,0 cm de diâmetro dispostas coaxialmente como indica a figura 7.  $L_1$  é uma lente convergente de distância focal  $f_1 = 5,0 \text{ cm}$  e  $L_2$  é uma lente divergente de distância focal  $f_2 = 4,0 \text{ cm}$ . No ponto  $P_1$  à esquerda do sistema é colocado um objeto luminoso puntiforme a 5,0 cm de  $L_1$ . À direita de  $L_2$ , a uma distância  $d = 24 \text{ cm}$  é colocado um anteparo A, perpendicular ao eixo do sistema. Assim, temos que:

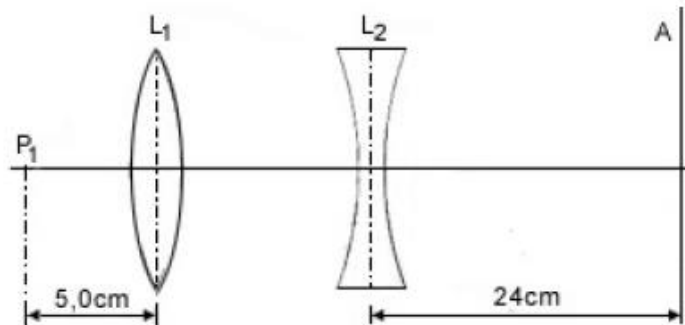


Fig. 7

- sobre o anteparo A forma-se uma imagem real puntiforme de  $P_1$ ;
- sobre o anteparo A aparece uma região iluminada circular de diâmetro igual a 12 cm;
- sobre o anteparo aparece uma região iluminada circular de diâmetro igual a 6,0 cm;
- o anteparo fica iluminado uniformemente em uma região muito grande;
- sobre o anteparo aparece uma região iluminada circular de diâmetro 42 cm.

### Comentários:

Deve-se notar que a fonte de luz puntiforme está sobre o foco da lente 1. Dessa forma, todos os raios que dali saem e refratam na lente passam a se propagar como raios paralelos ao eixo óptico. Quando estes raios paralelos atingem a lente divergente, eles irão divergir como se houvesse uma carga puntiforme sobre o foco objeto. Dessa forma obtém-se a seguinte semelhança de triângulos:

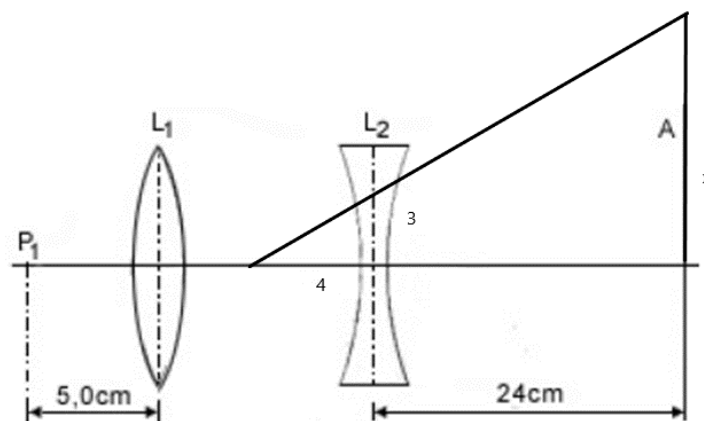


Fig. 7

Logo:



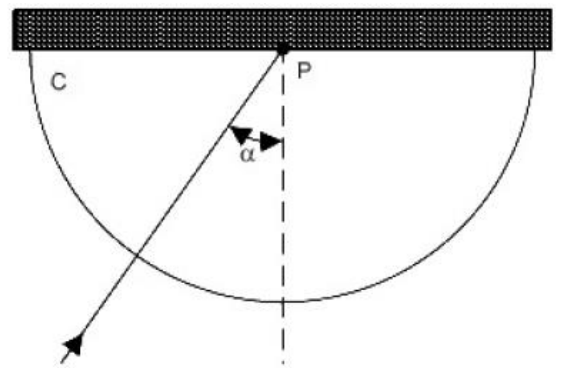
$$\frac{4}{3} = \frac{28}{x} \Rightarrow x = 21$$

O diâmetro da luz incidente sobre o anteparo é  $2x$ , logo,  $42 \text{ cm}$ .

**Gabarito: E**

**21. (ITA-1983)**

Para a determinação do índice de refração ( $n_1$ ) de uma lâmina fina de vidro (L) foi usado o dispositivo da figura, em que C representa a metade de um cilindro de vidro opticamente polido, de índice de refração  $n_2 = 1,80$ . Um feixe fino de luz monocromática é feito incidir no ponto P, sob um ângulo  $\alpha$ , no plano do papel. Observa-se que, para  $\alpha = 45^\circ$ , o feixe é inteiramente refletido na lâmina. Qual é o valor de  $n_1$ ?



- a) 1,00
- b) 1,27
- c) 2,54
- d) 1,33
- e) 1,41

**Comentários:**

É informado que o ângulo limite para essa interface é de  $45^\circ$ . Portanto:

$$\text{sen } \theta_{lim} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow n_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1,8 \cong 1,27$$

**Gabarito: B**

**22. (ITA-1984)**

O índice de refração de uma lente plano-côncava é  $n_2 \cong 1,5$  e o raio de curvatura é  $R_2 \cong 30 \text{ cm}$ . Quando imerso no ar ( $n_1 = 1$ ) a lente comporta-se como uma lente divergente de distância focal  $f = -60 \text{ cm}$ . Ao se colocar esta mesma lente num meio de índice de refração 3 pode-se afirmar que:



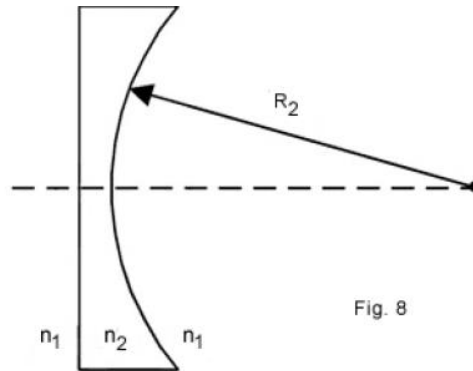


Fig. 8

- a) a lente continuará divergente de distância focal 60 cm.
- b) a lente se comportará como lente convergente de distância focal 60 cm.
- c) a lente se comportará como lente divergente de distância focal de valor diferente de 60 cm.
- d) a lente se comportará como lente convergente de distância focal de valor diferente de 60 cm.
- e) a lente se comportará como um espelho côncavo.

**Comentários:**

Pela equação dos fabricantes de lente para a situação final:

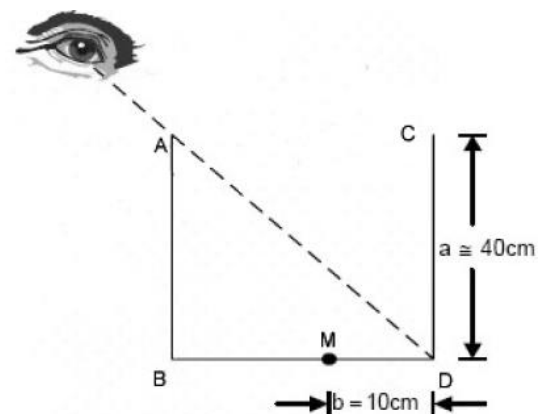
$$\frac{1}{f} = \left(-\frac{1}{30}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{60}$$

Como a distância focal é positiva, a lente é convergente.

**Gabarito: B**

**23. (ITA-1986)**

Um reservatório cúbico de paredes opacas e arestas  $a = 40 \text{ cm}$ , acha-se disposto de tal maneira que o observador não vê o seu fundo (ver figura). A que nível mínimo devemos preencher este cubo com água, para que o observador possa ver uma mancha negra, pontual M, que se encontra no fundo do recipiente, a uma distância  $b = 10 \text{ cm}$  do ponto D? Obs: índice de refração para a água, na região do visível,  $n = 1,33$ .

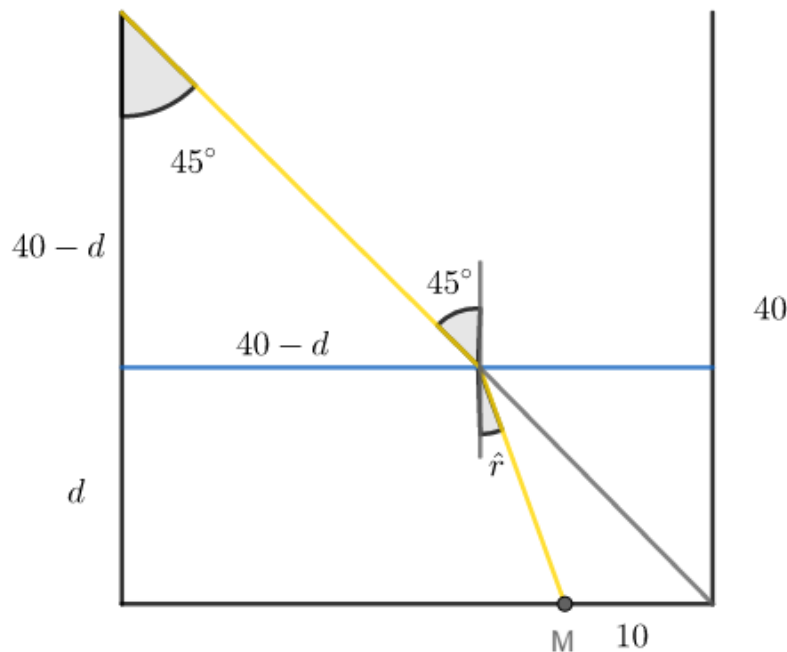


- a) 21 cm
- b) 27 cm
- c) 32 cm
- d) 18 cm
- e) nenhum dos valores acima.



**Comentários:**

A situação quando ele consegue visualizar o ponto  $M$  está representada a seguir:



Por Lei de Snell:

$$n_{ar} \cdot \text{sen } 45^\circ = n_{\text{água}} \cdot \text{sen } \hat{r}$$

$$\text{sen } \hat{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

Pela figura:

$$\text{sen } \hat{r} = \frac{d - 10}{\sqrt{(d - 10)^2 + d^2}}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{d - 10}{\sqrt{2 \cdot d^2 - 20 \cdot d + 100}}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$18 \cdot d^2 - 180 \cdot d + 900 = 32 \cdot d^2 - 640 \cdot d + 3200$$

$$14 \cdot d^2 - 460 \cdot d + 2300 = 0$$

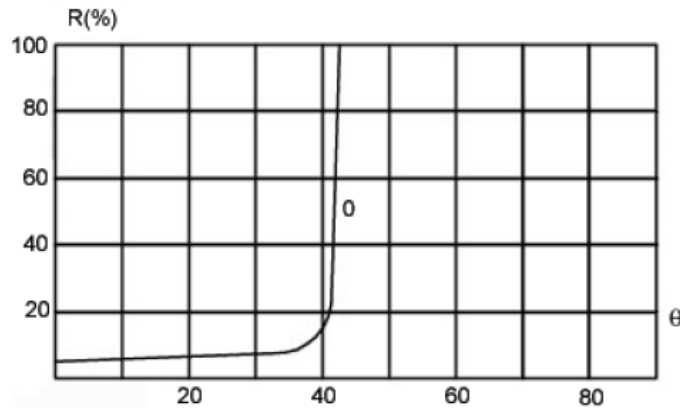
$$d \cong 27 \text{ cm}$$

**Gabarito: B**

**24. (ITA-1987)**

Numa experiência em que se mediu a razão  $R$  entre a energia luminosa refletida e a energia luminosa incidente na interface entre dois meios de índices de refração  $n_1$  e  $n_2$  em função do ângulo de incidência (vide figura), obteve-se o gráfico abaixo, onde  $R$  é dada em porcentagem.





Das afirmativas:

I –  $n_2 < n_1$

II –  $\frac{n_1}{n_2} > 1,4$

III – a razão entre a energia refletida e a refratada a  $30^\circ$  é maior que 0,2.

IV – para  $\theta > 42^\circ$  a Luz é completamente refratada.

V – o raio refratado está mais afastado da normal do que o raio incidente.

Podemos dizer que:

- a) Apenas I e II estão corretas
- b) I, III e V estão corretas.
- c) Apenas III e V estão corretas.
- d) I, II e V estão corretas.
- e) II, IV e V estão corretas.

**Comentários:**

Pela análise do gráfico, nota-se que a partir de  $\theta \cong 42^\circ$ , a energia refletida é igual à incidente, ou seja, ocorre reflexão total. Sabendo que ocorre reflexão total, sabe-se também que o meio 1 deve ser mais refringente que o meio 2.

**I. Verdadeiro.**

**II. Verdadeiro.** Pela Lei de Snell no ângulo limite:

$$n_1 \cdot \text{sen } \theta_{lim} = n_2 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} \cdot \text{sen } \theta_{lim} = 1$$

Sabe-se que  $\theta_{lim} \cong 42^\circ < 45^\circ$ , portanto,  $\text{sen } \theta_{lim} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Assim,  $\frac{n_1}{n_2} > \sqrt{2}$ .

**III. Falso** A razão R representa a razão entre energia refletida e incidente. Portanto, o restante da energia é dos raios refratados. Sendo assim, para  $\theta = 30^\circ$ :

$$R \cong 10\% \rightarrow \begin{cases} 10\% \text{ da energia incidente é refletida} \\ 90\% \text{ da energia incidente é refratada} \end{cases}$$



Logo, a relação entre a energia refletida e refratada é  $\cong \frac{1}{9}$ .

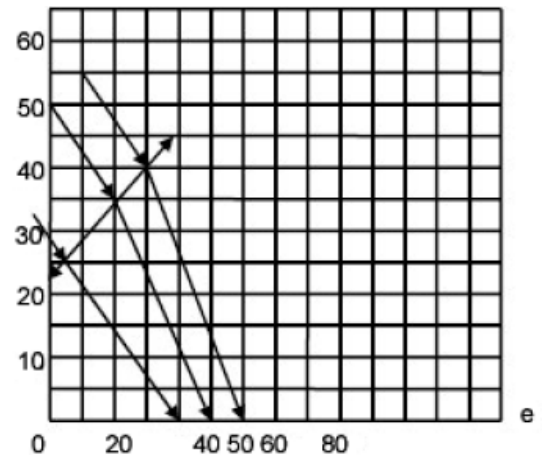
IV. Falso.

V. Verdadeiro. Sabe-se que o meio 2 é menos refringente, portanto, o raio afasta-se da normal.

Gabarito: D

**25. (ITA-1989)**

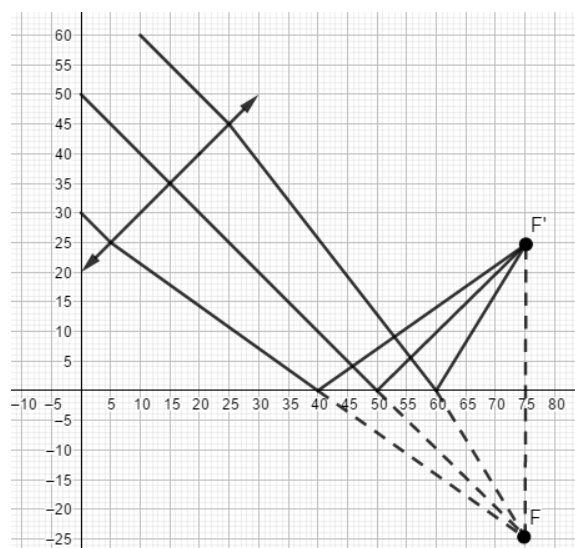
Por uma questão de conveniência experimental, o ponto focal de uma lente delgada convergente teve de ser posicionado fora do eixo da lente por meio de um espelho plano, indicado em corte (e) na abcissa do gráfico anexo. Complete o desenho e determine, aproximadamente, as coordenadas (x, y) do foco e distância focal da lente.



	$x$ (mm)	$y$ (mm)	$f$ (mm)
a)	60	10	65
b)	84	36	100
c)	80	30	95
d)	74	24	83
e)	103	54	125

**Comentários:**

Completando a trajetória dos raios de luz traçados na figura:



**Gabarito: D**

---

**26. (ITA-1990)**

Uma pequena lâmpada é colocada a 1,0m de distância de uma parede. Pede-se a distância a partir da parede em que deve ser colocada uma lente de distância focal 22,0 cm para produzir na parede uma imagem nítida e ampliada da lâmpada.

- a) 14 cm.
- b) 26,2 cm.
- c) 67,3 cm.
- d) 32,7 cm.
- e) outro valor.

**Comentários:**

Pelo enunciado:

$$p + p' = 1 \Rightarrow f = 0,22$$

Sabe-se que a lente deve ser convergente ( $f > 0$ ), pois, somente uma lente convergente pode projetar uma imagem.

Assim:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{0,22} = \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \Rightarrow \frac{1}{0,22} = \frac{1}{p \cdot (1-p)}$$

$$p^2 - p + 0,22 = 0 \Rightarrow p = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{10}$$

Como deseja-se uma imagem ampliada:

$$|A| = \frac{p'}{p} > 1 \Rightarrow p' > p$$

Logo, o valor de  $p$  é:

$$p = \frac{5 - \sqrt{3}}{10}$$

Assim:

$$p' = \frac{5 + \sqrt{3}}{10} \cong 67,3 \text{ cm}$$

**Gabarito: C**

---

**27. (ITA-1992)**



Uma vela se encontra a uma distância de 30 cm de uma lente plano convexo que projeta uma imagem nítida de sua chama em uma parede a 1,2 m de distância da lente. Qual é o raio de curvatura da parte convexa da lente se o índice de refração da mesma é 1,5?

- a) 60 cm.
- b) 30 cm.
- c) 24 cm.
- d) 12 cm.
- e) Outro valor diferente dos anteriores.

**Comentários:**

Pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{0,3} + \frac{1}{1,2} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1,5}{0,36} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot \left( \frac{n_L}{n_m} - 1 \right)$$

Lembrando que:

$$R_2 \rightarrow \infty$$

Logo:

$$\frac{1,5}{0,36} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow R_1 = \frac{6}{50} = 12 \text{ cm}$$

**Gabarito: D**

---

**28. (ITA-1993)**

O sistema de lentes de uma câmera fotográfica pode ser entendido como uma fina lente convergente de distância focal igual a 25,0 cm. A que distância da lente ( $p_1$ ) deve estar o filme para receber a imagem de uma pessoa sentada a 1,25 m da lente?

- a) 8,4 cm.
- b) 31,3 cm.
- c) 12,5 cm.
- d) 16,8 cm.
- e) 25 cm.

**Comentários:**

Aplicando a equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{0,25} = \frac{1}{1,25} + \frac{1}{p_1} \Rightarrow \frac{1}{p_1} = \frac{4}{1,25} \Rightarrow p_1 \cong 31,3 \text{ cm}$$

**Gabarito: B**

---





### 29. (ITA-1993)

Um objeto em forma de um segmento de reta de comprimento  $l$  está situado ao longo do eixo óptico de uma lente convergente de distância focal  $f$ . O centro do segmento se encontra a uma distância  $a$  da lente e, esta, produz uma imagem real convergente de todos os pontos do objeto. Quanto vale o aumento linear  $\beta$  do objeto?

$$a) \beta = \frac{f^2}{a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$b) \beta = \frac{f^2}{f^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$c) \beta = \frac{f^2}{(a-f)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$d) \beta = \frac{f^2}{(a+f)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

$$e) \beta = \frac{f^2}{(a+f)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

#### Comentários:

Aplicar-se-á a equação das lentes delgadas para os pontos extremos do objeto. Se o centro dista  $a$  da lente, os extremos distam, respectivamente,  $a + l/2$  e  $a - l/2$ . Portanto, para cada caso:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = \frac{p \cdot f}{p - f}$$

Assim:

$$p'_1 = \frac{\left(a + \frac{l}{2}\right) \cdot f}{a + \frac{l}{2} - f} \Rightarrow p'_2 = \frac{\left(a - \frac{l}{2}\right) \cdot f}{a - \frac{l}{2} - f}$$

A distância entre as imagens fornece o comprimento da imagem do objeto:

$$|p'_1 - p'_2| = \left| \frac{\left(a + \frac{l}{2}\right) \cdot f \cdot \left[(a-f) - \frac{l}{2}\right] - \left(a - \frac{l}{2}\right) \cdot f \cdot \left[(a-f) + \frac{l}{2}\right]}{\left[(a-f) + \frac{l}{2}\right] \cdot \left[(a-f) - \frac{l}{2}\right]} \right|$$

$$|p'_1 - p'_2| = \left| \frac{f \cdot \left(a^2 - \frac{l^2}{4} - a \cdot f - \frac{l}{2} \cdot f\right) - f \cdot \left(a^2 - \frac{l^2}{4} - a \cdot f + \frac{l}{2} \cdot f\right)}{(a-f)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \right| = \frac{f^2 \cdot l}{(a-f)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

A ampliação é dada pelo comprimento final dividido pelo inicial:

$$A = \frac{|p'_1 - p'_2|}{l} = \frac{f^2}{(a-f)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$



**Gabarito: C**

---

**30. (ITA-1994)**

Um dos telescópios utilizados por Galileu era composto de duas lentes: a objetiva de 16 mm de diâmetro e distância focal de 960 mm e a ocular formada por uma lente divergente. O aumento era de 20 vezes. Podemos afirmar que a distância focal e a imagem eram respectivamente:

- a) 192 mm, direita.
- b) 8 mm, direita.
- c) 48 mm, invertida.
- d) 960 mm, direita.
- e) 48 mm, direita.

**Comentários:**

O aumento é dado por:

$$A_{\theta} = -\frac{f_{obj}}{f_{oc}} = -\frac{960}{f_{oc}} = 20 \Rightarrow f_{oc} = -48 \text{ mm}$$

Portanto é uma lente divergente de distância focal igual a 48 mm. Por ser um telescópio de Galileu, a imagem é direita.

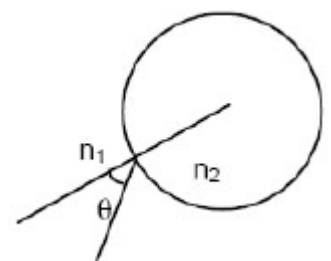
**Gabarito: E**

---

**31. (ITA-1994)**

A figura mostra a secção transversal de um cilindro feito de um material cujo índice de refração é  $n_2$  imerso num meio de índice  $n_1$ . Os valores dos índices são  $\sqrt{2}$  e 1,0 não necessariamente nessa ordem. Para que um feixe de luz contido no plano seccionador e proveniente do meio de índice 1 penetre no cilindro, mas não consiga escapar, devemos satisfazer às seguintes condições:

- a) Impossível com os dados fornecidos.
- b)  $n_1 = \sqrt{2}; n_2 = 1,0; 45^\circ < \theta < 90^\circ$
- c)  $n_1 = 1,0; n_2 = \sqrt{2}; 45^\circ < \theta < 90^\circ$
- d) Nunca será possível.
- e)  $n_1 = 1,0; n_2 = \sqrt{2}$



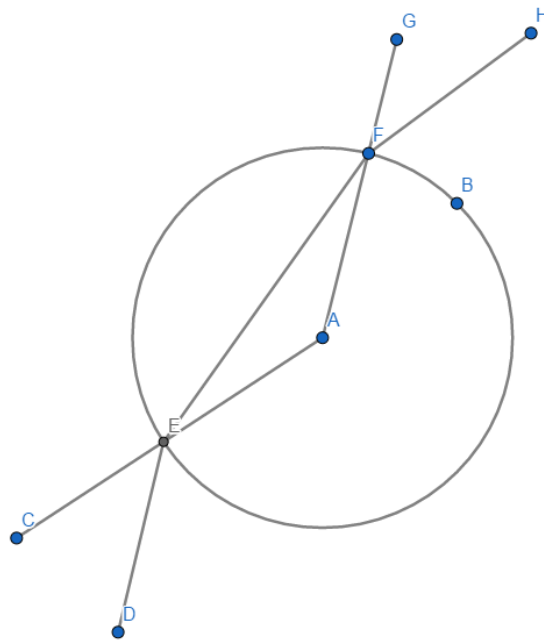
**Comentários:**



Caso o meio 1 seja mais refringente, há o risco de reflexão total ao entrar no meio 2. Se não ocorrer, o raio que entra com certeza irá emergir, pois, a seguinte transição de meios seria do menos refringente para o mais refringente. Para que não ocorra essa reflexão total:

$$\text{Se } n_1 > n_2 \Rightarrow \text{sen } \theta < \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vê-se que esta possibilidade não foi contemplada em nenhuma alternativa. Portanto, adotar-se-á que o meio 1 é o menos refringente. Portanto:



Como a entrada independe de  $\theta$ , o que interessa será na saída do meio 2. Entretanto, nota-se que o triângulo AEF é isósceles. Portanto, o ângulo  $E\hat{A}F$  é igual ao ângulo  $E\hat{F}A$ , como as refrações dos meios são iguais, conclui-se que a saída do raio será sempre possível contanto que ocorra a entrada.

**Gabarito: D**

### 32. (ITA-1996)

Dois estudantes se propõem a construir cada um deles uma câmera fotográfica simples, usando uma lente convergente como objetiva e colocando-a numa caixa fechada de modo que o filme esteja no plano focal da lente. O estudante A utilizou uma lente de distância focal igual a 4,0 cm e o estudante B uma lente de distância focal igual a 10,0 cm. Ambos foram testar suas câmaras fotografando um objeto situado a 1,0 m de distância das respectivas objetivas. Desprezando-se todos os outros efeitos (tais como aberrações das lentes), o resultado da experiência foi:

- I- Que a foto do estudante A estava mais "em foco" que a do estudante B;
- II- Que ambas estavam igualmente "em foco";
- III - que as imagens sempre estavam entre o filme e a lente;



Neste caso você concorda que:

- a) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
- b) Somente I e III são verdadeiras.
- c) Somente III é verdadeira.
- d) Somente a afirmativa I é verdadeira.
- e) Não é possível obter uma fotografia em tais condições.

**Comentários:**

Como a lente do estudante A possui distância focal menor, o mesmo objeto possui um comportamento “mais próximo” de um objeto impróprio. Caso este raciocínio não seja intuitivo, basta aplicar as equações de lentes delgadas em ambos os casos e notar que as distâncias  $p'$  de cada caso serão diferentes da distância focal, mas a diferença na câmera do estudante A será menor.

**I - Verdadeiro.**

**II - Falso.**

**III - Falso.**

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = \frac{p \cdot f}{p - f} \Rightarrow p'_A = \frac{0,04}{0,96} = \frac{1}{24} > f_A \Rightarrow p'_B = \frac{0,1}{0,9} = \frac{1}{9} > f_B$$

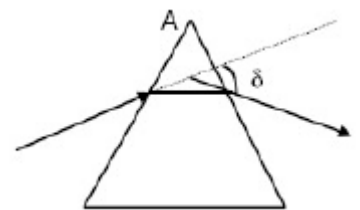
**Gabarito: D**

---

**33. (ITA-1996)**

O Método do Desvio Mínimo, para a medida do índice refração,  $n$ , de um material transparente, em relação ao ar, consiste em se medir o desvio mínimo de um feixe estreito de luz que atravessa um prisma feito desse material. Para que esse método possa ser aplicado (isto é, para que se tenha um feixe emergente), o ângulo A do prisma deve ser menor que:

- a)  $\arcsen(n)$
- b)  $2 \arcsen(1/n)$
- c)  $0,5 \arcsen(1/n)$
- d)  $\arcsen(1/n)$
- e) Outra expressão.



**Comentários:**

Pela condição necessária de refração:

$$A \leq 2 \cdot \hat{L} \Rightarrow A \leq 2 \cdot \arcsen\left(\frac{1}{n}\right)$$

**Gabarito: B**

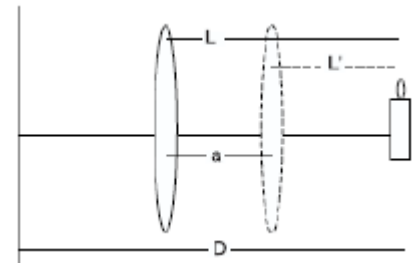
---



### 34. (ITA-1998)

Uma vela está a uma distância  $D$  de um anteparo sobre o qual se projeta uma imagem com lente convergente. Observa-se que as duas distâncias  $L$  e  $L'$  entre a lente e a vela para as quais se obtém uma imagem nítida da vela no anteparo, distam uma da outra de uma distância  $a$ . O comprimento focal da lente é então:

- a)  $\frac{D-a}{2}$
- b)  $\frac{D^2-a^2}{4 \cdot D}$
- c)  $\frac{D+a}{2}$
- d)  $\frac{D^2+a^2}{4 \cdot D}$
- e)  $2 \cdot a$



#### Comentários:

$$p + p' = D \Rightarrow p' = D - p$$

Pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{D-p} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{D}{p \cdot (D-p)}$$

$$D \cdot f = p \cdot D - p^2 \Rightarrow p^2 - p \cdot D + D \cdot f = 0$$

$$p = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4 \cdot D \cdot f}}{2}$$

A diferença entre as posições é:

$$p_1 - p_2 = \sqrt{D^2 - 4 \cdot D \cdot f} = a$$

$$a^2 = D^2 - 4 \cdot D \cdot f$$

$$f = \frac{D^2 - a^2}{4 \cdot D}$$

#### Gabarito: B

### 35. (ITA-1999)

No final de uma tarde de céu límpido, quando o sol está no horizonte sua cor parece avermelhada. A melhor explicação para esse belo fenômeno da natureza é que:

- a) o Sol está mais distante da Terra.
- b) a temperatura do Sol é menor no final da tarde.
- c) a atmosfera da Terra espalha comprimentos de ondas mais curtos, como por exemplo o da luz azul.



- d) a atmosfera da Terra absorve os comprimentos de onda azul e verde.
- e) a atmosfera da Terra difrata a luz emitida pelo sol.

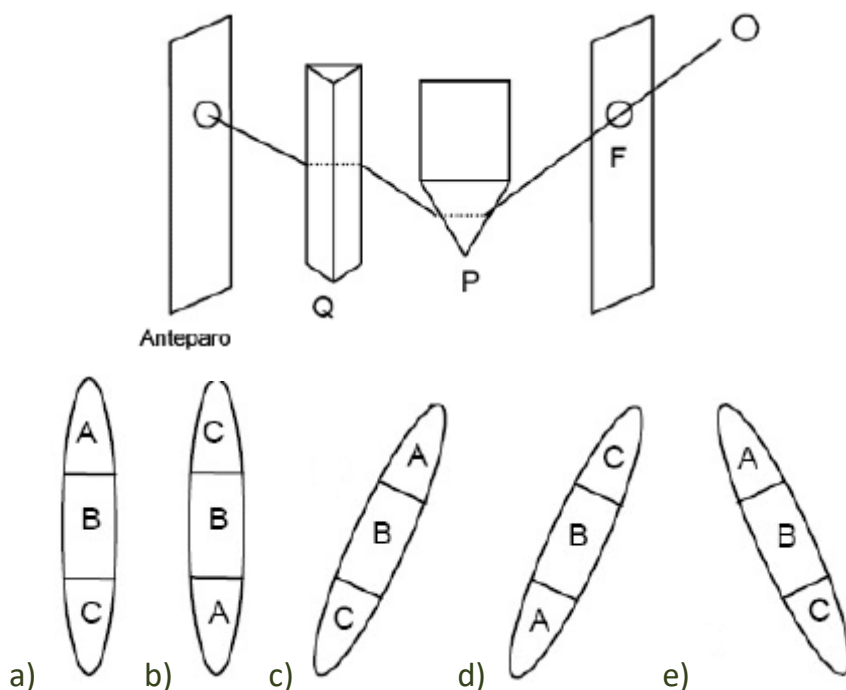
**Comentários:**

A luz azul apresenta comprimento de onda menor que a luz vermelha, portanto, aproxima-se mais rapidamente da normal. Este é o fenômeno comumente referido como “espalhamento” da luz azul. Por conta disso, a luz vermelha consegue chegar a distâncias maiores que a azul.

**Gabarito: C**

**36. (ITA-1999)**

Isaac Newton, no início de 1666, realizou a seguinte experiência: Seja S o Sol e F um orifício feito na janela de um quarto escuro. Considere P e Q dois prismas de vidro colocados em posição cruzada um em relação ao outro, ou seja, com suas arestas perpendiculares entre si, conforme mostra a figura abaixo. Represente por A a cor violeta, por B a amarela e C a vermelha. Após a passagem dos raios luminosos pelo orifício e pelos dois prismas, a forma da imagem e a disposição das cores formadas no anteparo são melhor representadas por:



**Comentários:**

É importante lembrar que o desvio é aproximado por:

$$\delta = \hat{A} \cdot \left( \frac{n_{prisma}}{n_{meio}} - 1 \right)$$

Ao passar pelo primeiro prisma, as diferentes cores irão se espalhar. As que sofrem o maior desvio são aquelas que tem maior índice de refração, no caso  $n_{violeta} > n_{amarela} > n_{vermelha}$ . Ao passar por P, as cores estão organizadas de acordo com a alternativa **a)**. Entretanto, elas irão passar por



mais um prisma. Novamente, ao passar pelo segundo prisma, as cores com maior índice de refração irão sofrer maior desvio. Portanto, o violeta deve deslocar-se mais que o amarelo que, por sua vez, irá deslocar-se mais que o vermelho. Obtém-se assim a imagem representada na alternativa **c**).

## Gabarito: C

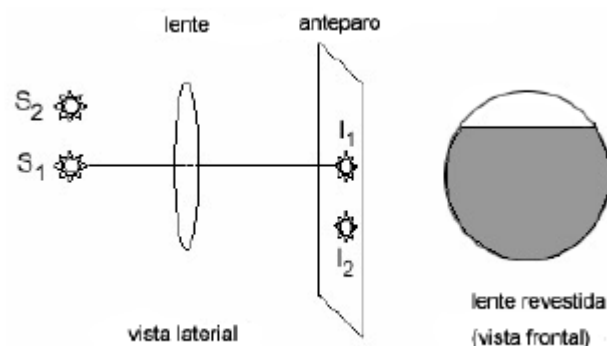
### 37. (ITA-2000)

Duas fontes de luz  $S_1$  e  $S_2$ , tem suas imagens formadas sobre um anteparo por uma lente convergente, como mostra a figura. Considere as seguintes proposições:

I - Se a lente for parcialmente revestida até da sua altura com uma película opaca (conforme a figura), as imagens ( $I_1$  de  $S_1$ ,  $I_2$  de  $S_2$ ) sobre o anteparo permanecem, mas tornam-se menos luminosas.

II - Se a lente for parcialmente revestida até da sua altura e as fontes forem distanciadas da lente, a imagem  $I_1$  desaparece.

III - Se as fontes  $S_1$  e  $S_2$  forem distanciadas da lente, então, para que as imagens não se alterem, o anteparo deve ser deslocado em direção à lente.



Então, pode-se afirmar que:

- a) apenas a III é correta.
- b) somente I e III são corretas.
- c) todas são corretas.
- d) somente II e III são corretas.
- e) somente I e II são corretas.

### Comentários:

**I – Verdadeira.** Ainda se forma imagem pois ainda existem raios luminosos que saem das fontes e chegam ao anteparo, entretanto, a quantidade de raios e, por conseguinte, a intensidade luminosa que chega ao anteparo é menor.

**II – Verdadeira.** Ao afastar-se as fontes da lente, varia-se a distância  $p$ , sem variar-se  $p'$  e  $f$ . Portanto, eventualmente ambas as imagens sumirão, embora a alternativa cite somente a  $I_1$ .



III – Verdadeira. Já discutido na II.

Gabarito: C

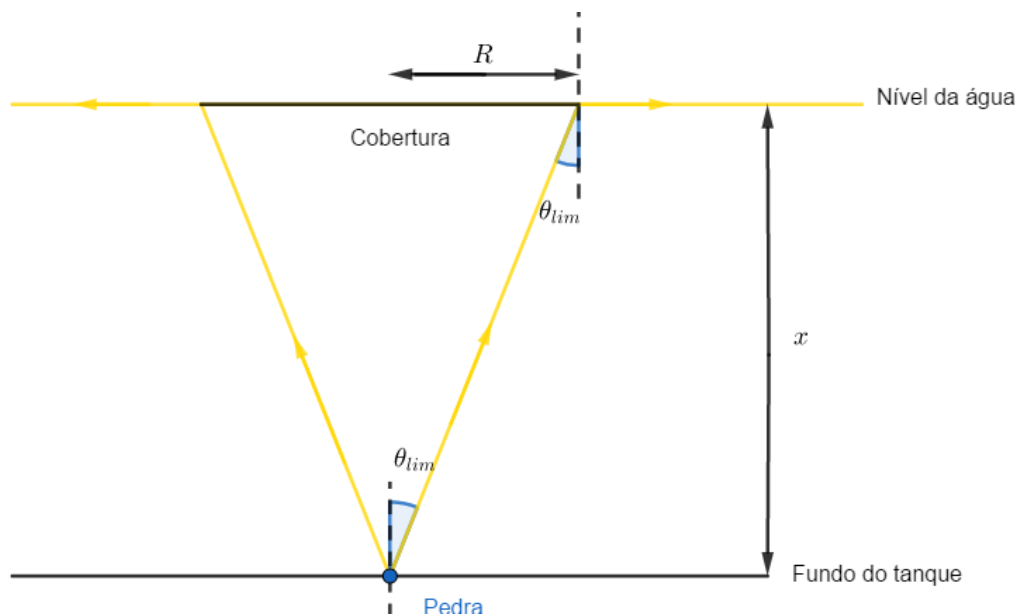
38. (ITA-2002)

Uma pequena pedra repousa no fundo de um tanque de  $x$  m de profundidade. Determine o menor raio de uma cobertura circular, plana, paralela à superfície da água que flutuando sobre a superfície da água diretamente acima da pedra, impeça completamente a visão desta por um observador ao lado do tanque, cuja vista se encontra no nível da água. Justifique.

Dado: índice de refração da água  $n = \frac{4}{3}$

Comentários:

A situação para que a pedra fique completamente “escondida” está representada a seguir.



Portanto:

$$\text{sen } \theta_{lim} = \frac{1}{\frac{4}{3}} \Rightarrow \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow 16 \cdot R^2 = 9 \cdot R^2 + 9 \cdot x^2$$

$$7 \cdot R^2 = 9 \cdot x^2 \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{7} \cdot x}{7}$$

Gabarito:  $R = \frac{3\sqrt{7} \cdot x}{7}$

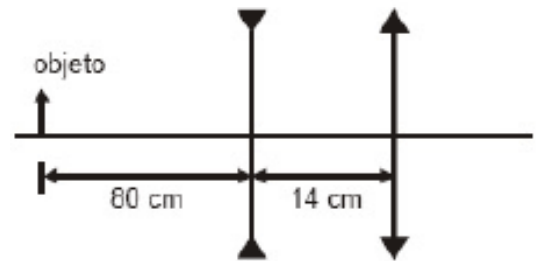
39. (ITA-2003)





A figura mostra um sistema óptico constituído de uma lente divergente, com distância focal  $f_1 = -20\text{cm}$ , distante 14 cm de uma lente convergente com distância focal  $f_2 = 20\text{cm}$ . Se um objeto linear é posicionado a 80cm à esquerda da lente divergente, pode-se afirmar que a imagem definitiva formada pelo sistema:

- a) é real e o fator de ampliação linear do sistema é  $-0,4$ .
- b) é virtual, menor e direita em relação ao objeto.
- c) é real, maior e invertida em relação ao objeto.
- d) é real e o fator de ampliação linear do sistema é  $-0,2$ .
- e) é virtual, maior e invertida em relação ao objeto.



**Comentários:**

$$p' = \frac{p \cdot f}{p - f}$$

Para a lente divergente:

$$p' = \frac{80 \cdot (-20)}{100} = -16 \text{ cm}$$

Ou seja, a primeira imagem forma-se 16 cm a esquerda a lente divergente e é virtual. Ela serve de objeto para a segunda lente.  $p = 30 \text{ cm}$ .

$$p' = \frac{30 \cdot 20}{10} = 60$$

A imagem é real.

A ampliação total do sistema é o produto da ampliação de cada lente. Assim:

$$A = A_1 \cdot A_2 = \left(-\frac{(-16)}{80}\right) \cdot \left(-\frac{60}{30}\right)$$

$$A = \frac{1}{5} \cdot (-2) = -\frac{2}{5} = -0,4$$

A imagem é, portanto, invertida e menor.

**Gabarito: A**

#### 40. (ITA-2003)

Num oftalmologista, constata-se que um certo paciente tem uma distância máxima e uma distância mínima de visão distinta de 5,0m e 8,0cm, respectivamente. Sua visão deve ser corrigida pelo uso de uma lente que lhe permita ver com clareza objetos no “infinito”. Qual das afirmações é verdadeira?



- a) O paciente é míope e deve usar lentes divergentes cuja vergência é 0,2 dioptrias.
- b) O paciente é míope e deve usar lentes convergentes cuja vergência é 0,2 dioptrias.
- c) O paciente é hipermetrope e deve usar lentes convergentes cuja vergência é 0,2 dioptrias.
- d) O paciente é hipermetrope e deve usar lentes divergentes cuja vergência é  $-0,2$  dioptrias.
- e) A lente corretora de defeito visual desloca a distância mínima de visão distinta para 8,1cm.

**Comentários:**

Visto que o problema do paciente é a visualização de objetos à distância, ele é míope. A correção deve ser feita por uso de lentes divergentes de dioptria igual a:

$$V = -\frac{1}{d_{remoto_{míope}}} = -\frac{1}{5} = -0,2$$

Aqui já se percebe que não foi atendido nenhuma das quatro primeiras alternativas e a correta seria a letra E por eliminação. Entretanto, é interessante a verificação. O ponto próximo do paciente será deslocado pela lente de acordo com a equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_{próximo_{novo}}} - \frac{1}{p_{próximo_{antigo}}} \Rightarrow -\frac{1}{5} = \frac{1}{p_{próximo_{novo}}} - \frac{1}{0,08}$$
$$12,5 - 0,2 = \frac{1}{p_{próximo_{novo}}} \Rightarrow p_{próximo_{novo}} = \frac{1}{12,3} = 8,13 \text{ cm}$$

**Gabarito: E**

**41. (ITA-2005)**

Situa-se um objeto a uma distância  $p'$  diante de uma lente convergente de distância focal  $f$ , de modo a obter uma imagem real a uma distância  $p$  da lente. Considerando a condição de mínima distância entre imagem e objeto, então é correto afirmar que:

- a)  $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 5 \cdot f^3$
- b)  $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 10 \cdot f^3$
- c)  $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 20 \cdot f^3$
- d)  $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 25 \cdot f^3$
- e)  $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 30 \cdot f^3$

**Comentários:**

A condição de mínima distância entre imagem e objeto é  $p + p' = 4 \cdot f$  e  $p = p'$ , portanto  $f = \frac{p}{2}$   
Para o lado esquerdo das expressões:



$$p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 2 \cdot p^3 + \frac{p^3}{2} = 5 \cdot \frac{p^3}{2}$$

E:

$$f^3 = \frac{p^3}{8}$$

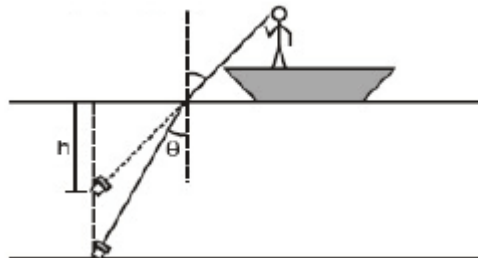
Portanto:

$$p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 20 \cdot f^3$$

**Gabarito: C**

#### 42. (ITA-2005)

Um pescador deixa cair uma lanterna acesa em um lago a 10,0m de profundidade. No fundo do lago, a lanterna emite um feixe luminoso formando um pequeno ângulo com a vertical (veja figura).



Considere:  $\text{tg } \theta \cong \text{sen } \theta$  e o índice de refração da água  $n = 1,33$ . Então, a profundidade aparente  $h$  vista pelo pescador é igual a:

- a) 2,5 m
- b) 5,0 m
- c) 7,5 m
- d) 8,0 m
- e) 9,0 m

**Comentários:**

A posição aparente em um dióptro plano é dado por:

$$y_{ap} = y \cdot \frac{n_{observador}}{n_{objeto}} \Rightarrow y_{ap} = 10 \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}} = 7,5 \text{ m}$$

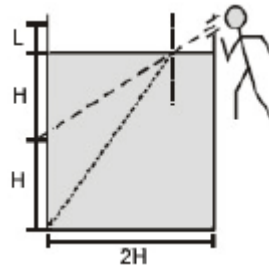
**Gabarito: C**

#### 43. (ITA-2005)

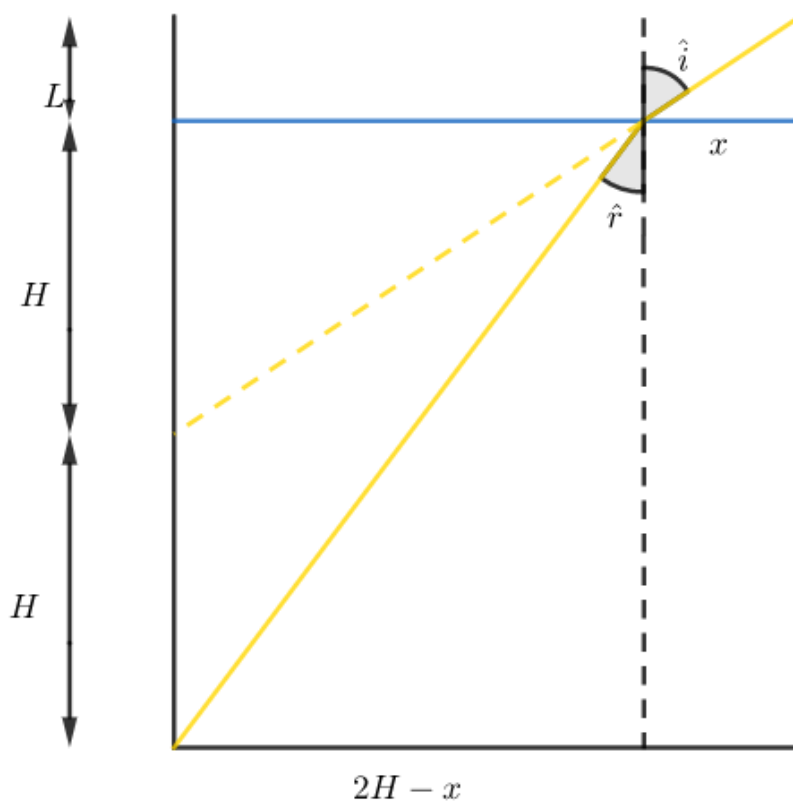
Através de um tubo fino, um observador enxerga o topo de uma barra vertical de altura  $H$  apoiada no fundo de um cilindro vazio de diâmetro  $2H$ . O tubo encontra-se a uma altura  $2H +$



L e, para efeito de cálculo, é de comprimento desprezível. Quando o cilindro é preenchido com um líquido até uma altura  $2H$  (veja figura), mantido o tubo na mesma posição, o observador passa a ver a extremidade inferior da barra. Determine literalmente o índice de refração desse líquido.



Comentários:



Sabe-se que:

$$\frac{L}{x} = \frac{H + L}{2 \cdot H} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot H \cdot L}{H + L}$$

Portanto:

$$\text{sen } \hat{i} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}} = \frac{2 \cdot H \cdot L}{\sqrt{5 \cdot H^2 \cdot L^2 + 2 \cdot H \cdot L^3 + L^4}}$$

E:



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \hat{r} &= \frac{2 \cdot H - x}{\sqrt{(2 \cdot H - x)^2 + 4 \cdot H^2}} = \frac{2 \cdot H^2}{(H + L) \cdot \sqrt{\left(2 \cdot \frac{H^2}{H + L}\right)^2 + 4 \cdot H^2}} \\ \operatorname{sen} \hat{r} &= \frac{2 \cdot H^2}{\sqrt{4 \cdot H^4 + 4 \cdot H^2 \cdot (H^2 + 2 \cdot H \cdot L + L^2)}} = \frac{2 \cdot H^2}{\sqrt{8 \cdot H^4 + 8 \cdot H^3 \cdot L + 4 \cdot H^2 \cdot L^2}} \\ \operatorname{sen} \hat{r} &= \frac{2 \cdot H}{\sqrt{8 \cdot H^2 + 8 \cdot H \cdot L + 4 \cdot L^2}} \end{aligned}$$

Aplicando Lei de Snell:

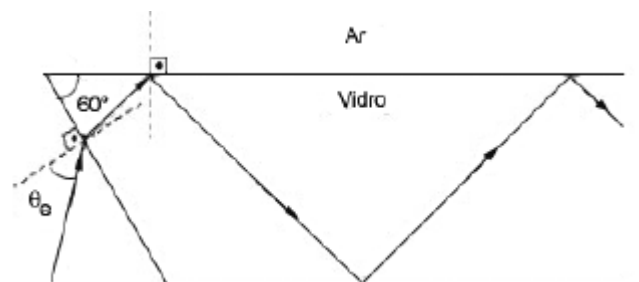
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \hat{i} &= n \cdot \operatorname{sen} \hat{r} \\ \frac{2 \cdot H \cdot L}{\sqrt{5 \cdot H^2 \cdot L^2 + 2 \cdot H \cdot L^3 + L^4}} &= n \cdot \frac{2 \cdot H}{\sqrt{8 \cdot H^2 + 8 \cdot H \cdot L + 4 \cdot L^2}} \\ n &= \frac{L \cdot \sqrt{8 \cdot H^2 + 8 \cdot H \cdot L + 4 \cdot L^2}}{\sqrt{5 \cdot H^2 \cdot L^2 + 2 \cdot H \cdot L^3 + L^4}} = \frac{\sqrt{8 \cdot H^2 + 8 \cdot H \cdot L + 4 \cdot L^2}}{\sqrt{5 \cdot H^2 + 2 \cdot H \cdot L + L^2}} \\ n &= \frac{2 \cdot \sqrt{(H + L)^2 + H^2}}{\sqrt{(H + L)^2 + 4 \cdot H^2}} \end{aligned}$$

**Gabarito:**  $n = \frac{2 \cdot \sqrt{(H+L)^2 + H^2}}{\sqrt{(H+L)^2 + 4 \cdot H^2}}$

#### 44. (ITA-2006)

A figura mostra uma placa de vidro com índice de refração  $n_v = \sqrt{2}$  mergulhada no ar, cujo índice de refração é igual a 1,0. Para que um feixe de luz monocromática se propague pelo interior do vidro através de sucessivas reflexões totais, o seno do ângulo de entrada,  $\operatorname{sen} \theta_e$ , deverá ser menor ou igual a:

- a) 0,18
- b) 0,37
- c) 0,50
- d) 0,71
- e) 0,87



#### Comentários:

Sabendo que houve reflexão total na interface “vidro-ar”, o ângulo de incidência ali ( $\hat{i}$ ) deve ser maior que o ângulo limite. Portanto:

$$\hat{i} \geq 45^\circ$$

Mas, se  $\hat{i} \geq 45^\circ$ , o ângulo refratado na interface ar-vidro ( $\hat{r}$ ) deve ser menor que  $15^\circ$ .

$$\hat{r} \leq 15^\circ$$



Assim:

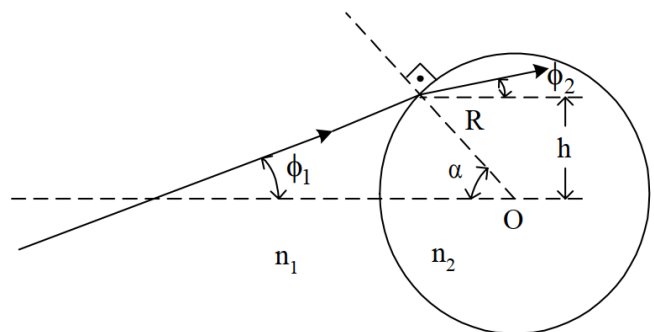
$$1 \cdot \text{sen}(\theta_e) \leq \sqrt{2} \cdot \text{sen}(15^\circ) \cong 0,37$$

**Gabarito: B**

**45. (ITA-2007)**

A figura mostra um raio de luz propagando-se num meio de índice de refração  $n_1$  e transmitido para uma esfera transparente de raio  $R$  e índice de refração  $n_2$ . Considere os valores dos ângulos  $\alpha$ ,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  muito pequenos, tal que cada ângulo seja respectivamente igual à sua tangente e ao seu seno. O valor aproximado de  $\phi_2$  é de:

- a)  $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot (\phi_1 - \alpha)$
- b)  $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot (\phi_1 + \alpha)$
- c)  $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \phi_1 + \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \cdot \alpha$
- d)  $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \phi_1$
- e)  $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \phi_1 + \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) \cdot \alpha$



**Comentários:**

Por Lei de Snell:

$$n_1 \cdot \text{sen}(\phi_1 + \alpha) = n_2 \cdot \text{sen}(\phi_2 + \alpha)$$

Pela aproximação de ângulos pequenos, tem-se:

$$\frac{n_1}{n_2} \cdot (\phi_1 + \alpha) - \alpha = \phi_2 \Rightarrow \boxed{\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \phi_1 + \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) \cdot \alpha}$$

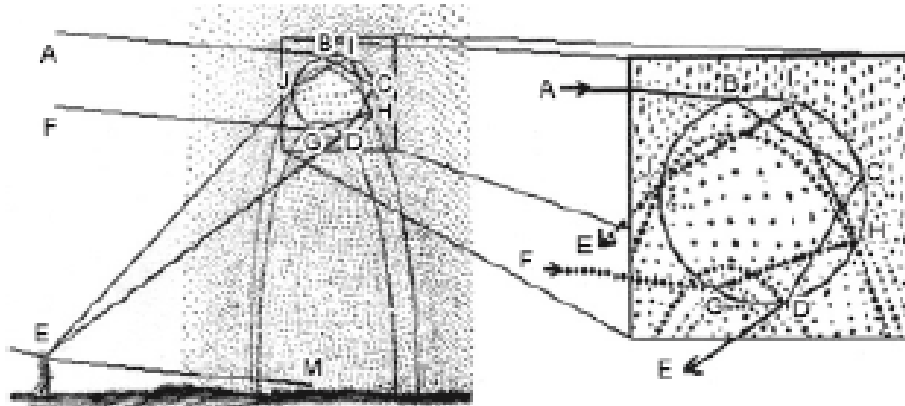
**Gabarito: E**

**46. (ITA-2008)**

Foi René Descartes em 1637 o primeiro a discutir claramente a formação do arco-íris. Ele escreveu: *“Considerando que esse arco-íris aparece não apenas no céu, mas também no ar perto de nós, sempre que haja gotas de água iluminadas pelo sol, como podemos ver em certas fontes, eu imediatamente entendi que isso acontece devido apenas ao caminho que os raios de luz traçam nessas gotas e atingem nossos olhos. Ainda mais, sabendo que as gotas são redondas, como fora anteriormente provado e, mesmo que sejam grandes ou pequenas, a aparência do arco-íris não muda de forma nenhuma, tive a idéia de considerar uma bem grande, para que pudesse examinar melhor...”* Ele então apresentou a figura onde estão representadas as trajetórias para os arco-íris primário e secundário. Determinar o ângulo entre o raio incidente na gota, AB, e o incidente no olho do observador, DE, no caso do arco-íris



primário, em termos do ângulo de incidência, e do índice de refração da água na. Considere o índice de refração do ar  $n = 1$ .

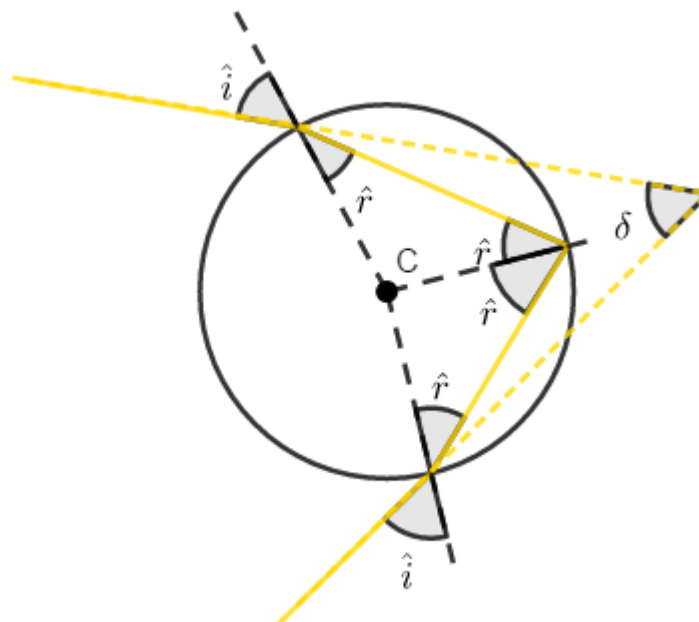


Arco-íris primário e secundário

Vista expandida de uma gota de água

### Comentários:

A situação está representada na figura a seguir.



Onde,  $\hat{i}$  é o ângulo incidente,  $\hat{r}$  é o ângulo refratado e  $\delta$  é o desvio da trajetória. Observa-se que há uma asa-delta na figura (entre as linhas amarelas tracejadas), portanto:

$$2 \cdot \hat{r} = \delta + 2 \cdot (\hat{i} - \hat{r})$$

$$\delta = 4 \cdot \hat{r} - 2 \cdot \hat{i}$$

Mas, pela Lei de Snell:

$$n_{ar} \cdot \sen \hat{i} = n_a \cdot \sen \hat{r} \Rightarrow \hat{r} = \arcsen \left( \frac{\sen \hat{i}}{n_a} \right)$$

Portanto:



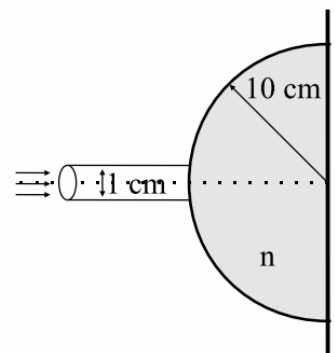
$$\delta = 4 \cdot \arcsen \left( \frac{\text{sen } \hat{i}}{n_a} \right) - 2 \cdot \hat{i}$$

**Gabarito:**  $\delta = 4 \cdot \arcsen \left( \frac{\text{sen } \hat{i}}{n_a} \right) - 2 \cdot \hat{i}$

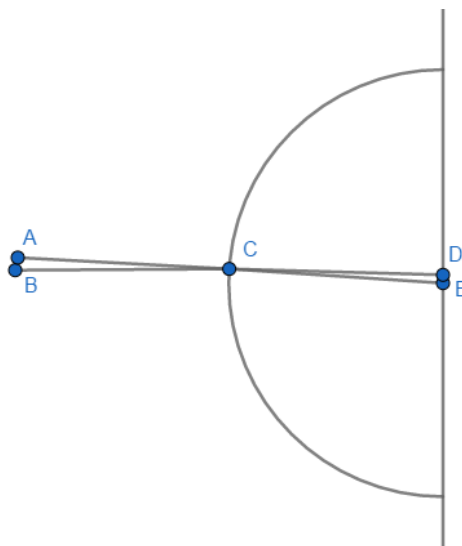
**47. (ITA-2011)**

Um hemisfério de vidro maciço de raio de 10 cm e índice de refração  $n = \frac{3}{2}$  tem sua face plana apoiada sobre uma parede, como ilustra a figura. Um feixe colimado de luz de 1 cm de diâmetro incide sobre a face esférica, centrado na direção do eixo de simetria do hemisfério. Valendo-se das aproximações de ângulos pequeno,  $\text{sen } \theta \cong \theta$  e  $\text{tg } \theta \cong \theta$ , o diâmetro do círculo de luz que se forma sobre a superfície da parede é de:

- a) 1 cm.
- b) 2/3 cm
- c) 1/2 cm
- d) 1/3 cm
- e) 1/10 cm



**Comentários:**



O ângulo  $A\hat{C}B$  é incidente e o ângulo  $D\hat{C}E$  é o refratado. Aproximando  $A\hat{C}B$  a sua tangente:

$$A\hat{C}B \cong \frac{0,5}{10} = 0,05$$

Pela Lei de Snell:

$$1 \cdot 0,05 = 1,5 \cdot D\hat{C}E \Rightarrow D\hat{C}E = \frac{1}{30}$$





O desvio sofrido pelo raio, portanto, foi de:

$$A\hat{C}B - D\hat{C}E = \frac{1}{20} - \frac{1}{30}$$

Multiplicando o desvio pela distância percorrida pelo raio dentro da semiesfera ( $\cong 10 \text{ cm}$ ), tem-se quanto diminuiu o diâmetro. Assim:

$$\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{30}\right) \cdot 10 = \Delta \Rightarrow \Delta = 0,166 \text{ cm}$$

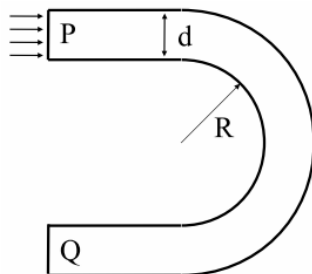
O diâmetro, portanto, é:

$$D = 2 \cdot (0,5 - 0,166) \cong 0,666 \cong \frac{2}{3}$$

**Gabarito: B**

#### 48. (ITA-2011)

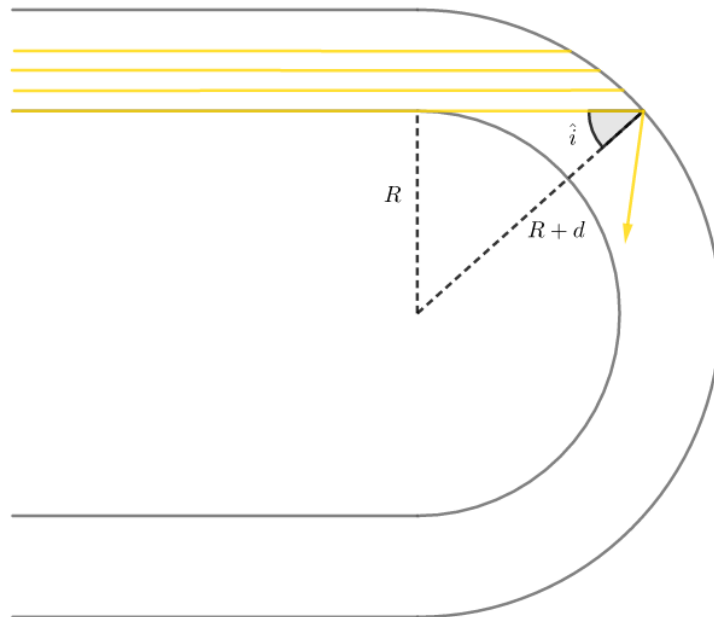
Um tarugo de vidro de índice de refração  $n = \frac{3}{2}$  e seção transversal retangular é moldado na forma de uma ferradura, como ilustra a figura. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre a superfície plana P. Determine o valor mínimo da razão  $\frac{R}{d}$  para o qual toda a luz que penetra pela superfície P emerge do vidro pela superfície Q.



#### Comentários:

Dentre os raios incidentes, o que apresenta maior ângulo de incidência é o mais próximo do centro de curvatura. Observe:





No caso limite,  $\hat{i}$  é o ângulo limite:

$$\text{sen } \hat{i} = \frac{n_{ar}}{n_{vidro}}$$

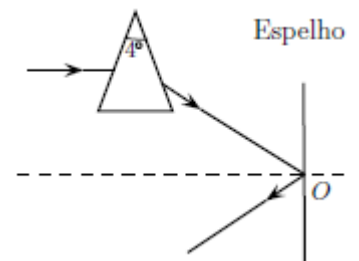
$$\frac{R}{R+d} = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + \frac{d}{R} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{d}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{R}{d} = 2}$$

**Gabarito:**

**49. (ITA-2013)**

Um raio horizontal de luz monocromática atinge um espelho plano vertical após incidir num prisma com abertura de  $4^\circ$  e índice de refração  $n = 1,5$ . Considere o sistema imerso no ar e que tanto o raio emergente do prisma como o refletido pelo espelho estejam no plano do papel, perpendicular ao plano do espelho, como mostrado na figura. Assinale a alternativa que indica respectivamente o ângulo e o sentido em que deve ser girado o espelho em torno do eixo perpendicular ao plano do papel que passa pelo ponto O, de modo que o raio refletido retorne paralelamente ao raio incidente no prisma.

- a)  $4^\circ$ , sentido horário
- b)  $2^\circ$ , sentido horário
- c)  $2^\circ$ , sentido anti-horário
- d)  $1^\circ$ , sentido horário
- e)  $1^\circ$ , sentido anti-horário



**Comentários:**

Considerando-se que se trata somente de ângulos pequenos, pode-se aproximar o desvio causado pelo prisma por:

$$\hat{\delta} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 - \hat{A}$$

Considerando que o sentido horário é positivo, tem-se que:

$$\hat{i}_1 = 2^\circ + x$$

$$\hat{i}_2 = 2^\circ + x$$

Portanto, o desvio causado por deslocar-se em  $x$  o prisma no sentido horário é de  $2x$ . Agora, resta calcular o ângulo formado com a horizontal na posição inicial do prisma. Por Lei de Snell:

$$1 \cdot 2^\circ = 1,5 \cdot \hat{r}_1 \Rightarrow \hat{r}_1 = \frac{4^\circ}{3}$$

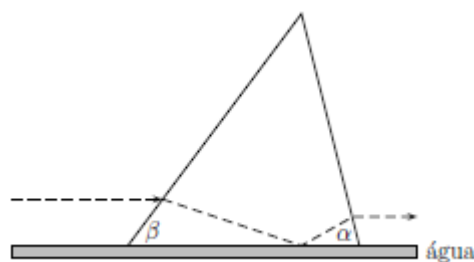
$$\hat{r}_2 = \hat{A} - \hat{r}_1 = \frac{8^\circ}{3} \Rightarrow 1,5 \cdot \frac{8^\circ}{3} = 1 \cdot \hat{i}_2 \Rightarrow \hat{i}_2 = 4^\circ$$

Mas,  $\hat{i}_2$  é medido em relação à normal. A normal encontra-se inclinada em relação à horizontal de  $2^\circ$ . Portanto, a trajetória tem como ângulo de saída do prisma, inicialmente,  $2^\circ$  negativos ( $2^\circ - 4^\circ$ ). Assim, de modo a ter um raio ejetado paralelo à horizontal, deve-se rotacionar em  $x = 1^\circ$  no sentido horário.

**Gabarito: D**

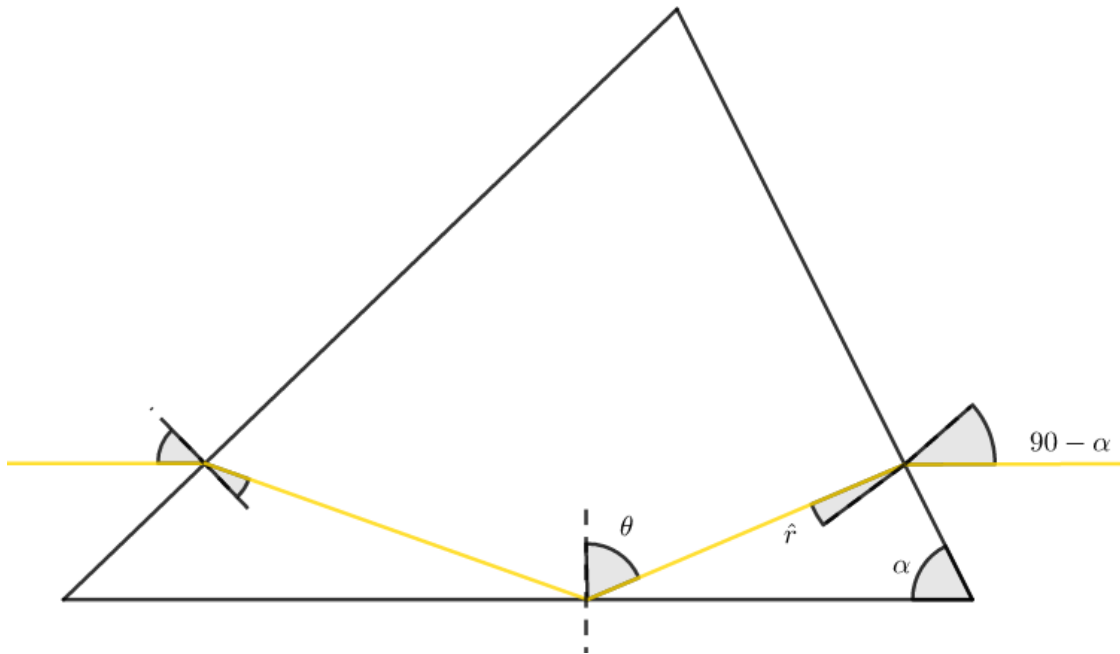
### 50. (ITA-2015)

A base horizontal de um prisma de vidro encontra-se em contato com a superfície da água de um recipiente. A figura mostra a seção reta triangular deste prisma, com dois de seus ângulos,  $\alpha$  e  $\beta$ . Um raio de luz propaga-se no ar paralelamente à superfície da água e perpendicular ao eixo do prisma, nele incidindo do lado do ângulo  $\beta$ , cujo valor é tal que o raio sofre reflexão total na interface da superfície vidro-água. Determine o ângulo  $\alpha$  tal que o raio emergja horizontalmente do prisma. O índice de refração da água é  $4/3$  e, o do vidro,  $\sqrt{19}/3$ .



**Comentários:**





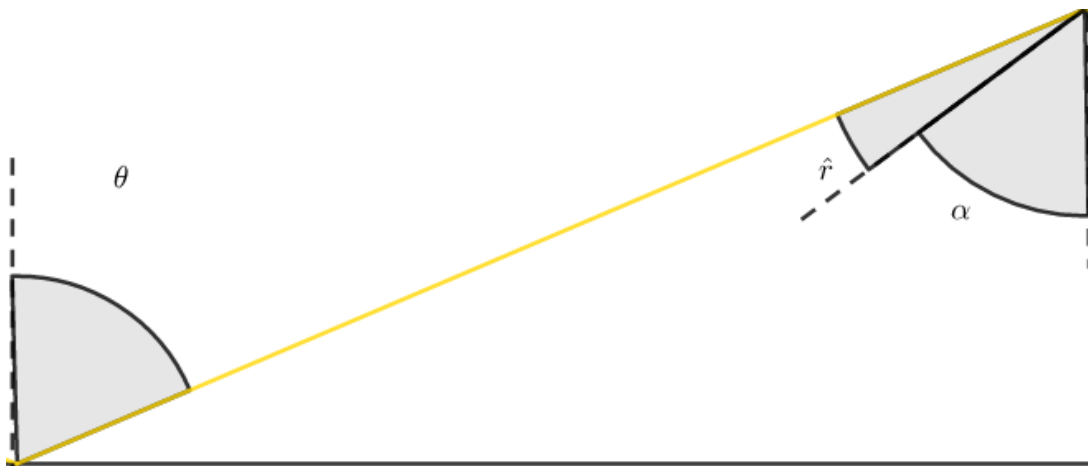
Utilizando Lei de Snell na refração do lado direito:

$$\text{sen } (90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{19}}{3} \cdot \text{sen } \hat{r}$$

Na reflexão total da interface vidro-água:

$$\text{sen } \theta = \frac{4}{\sqrt{19}} \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{19}}$$

E:



$$\hat{r} + \alpha = \theta$$

$$\hat{r} = \theta - \alpha$$

$$\text{sen } \hat{r} = \text{sen } (\theta - \alpha)$$

$$\frac{3}{\sqrt{19}} \cdot \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{19}} \cdot \cos \alpha - \text{sen } \alpha \cdot \sqrt{\frac{3}{19}}$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

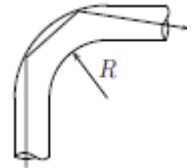
**Gabarito: 30°**

---

**51. (ITA-2016)**

Um tubo de fibra óptica é basicamente um cilindro longo e transparente, de diâmetro  $d$  e índice de refração  $n$ . Se o tubo é curvado, parte dos raios de luz pode escapar e não se refletir na superfície interna do tubo. Para que haja reflexão total de um feixe de luz inicialmente paralelo ao eixo do tubo, o menor raio de curvatura interno  $R$  (ver figura) deve ser igual a:

- a)  $n \cdot d$
- b)  $\frac{d}{n}$
- c)  $\frac{d}{n-1}$
- d)  $\frac{n \cdot d}{n-1}$
- e)  $\frac{\sqrt{n} \cdot d}{\sqrt{n}-1}$



**Comentários:**

O raio com maior ângulo de incidência é o mais próximo do centro do arco de circunferência. Pelo mesmo raciocínio que o exercício 40:

$$\frac{R}{R+d} = \frac{1}{n} \Rightarrow R+d = R \cdot n \Rightarrow R(1-n) = -d \Rightarrow R = \frac{d}{n-1}$$

**Gabarito: C**

---



## 9. Considerações finais

Chegamos ao final da nossa aula. Revise todos os conceitos apresentados nessa aula, faça pequenos resumos sobre cada tópico estudado.

Essa aula é cheia de definições e considerações iniciais no estudo de Óptica Geométrica. Anote essas informações no seu resumo de estudo, principalmente as leis da refração, dioptra plano e esférico, e equação dos fabricantes de lentes.

Com essa aula fechamos a Óptica Geométrica e estamos prontos para fazer qualquer questão do ITA e do IME referentes a este tema. O IME gosta de problemas trabalhosos, relacionados com outros temas. Por isso, fique atento com os dados do exercício e busque sempre o entendimento completa. Não basta apenas decorar fórmulas prontas para a prova.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



 @proftoniburgatto



## 10. Referências bibliográficas

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 4. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 523p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
- [3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 2. 16ª ed. Saraiva, 1993. 512p.
- [4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física volume 2. 9ª ed. Moderna. 532p.
- [5] Resnick, Halliday, Jearl Walker. Fundamentos de Física volume 2. 10ª ed. LTC. 297p.
- [6] V. Zubov, V. Shalnov. Problem in Physics. 2ª ed MIR, 1985. 301p.



## 11. Versão de aula

Versão de Aula	Data da última atualização
1.0	30/09/2019

