MATEMÁTICA

1

a) Quantos múltiplos de 9 há entre 100 e 1000?
b) Quantos múltiplos de 9 ou 15 há entre 100 e 1000?

Resolução

*a) Os múltiplos inteiros de 9 compreendidos entre 100 e 1000 formam uma progressão aritmética de primeiro termo 108, último termo 999 e razão 9. Sendo **n** a quantidade de termos desta progressão, tem-se:*
$999 = 108 + (n - 1) \cdot 9 \Leftrightarrow n = 100$

b) Entre 100 e 1000, existem:
1) 100 múltiplos de 9, conforme item anterior
2) 60 múltiplos de 15, pois a progressão aritmética (105; 120; 135; …; 990) possui 60 termos.
3) 20 múltiplos simultaneamente de 9 e 15, pois mmc (9; 15) = 45 e a progressão aritmética (135; 180; 225; …; 990) possui 20 termos.
Assim sendo, entre 100 e 1000, existem $100 + 60 - 20 = 140$ múltiplos inteiros de 9 ou 15.

***Respostas**: a) 100 múltiplos*
b) 140 múltiplos

2

Um caminhão transporta maçãs, pêras e laranjas, num total de 10.000 frutas. As frutas estão condicionadas em caixas (cada caixa só contém um tipo de fruta), sendo que cada caixa de maçãs, pêras e laranjas, tem, respectivamente 50 maçãs, 60 pêras e 100 laranjas e custam, respectivamente, 20, 40 e 10 reais. Se a carga do caminhão tem 140 caixas e custa 3300 reais, calcule quantas maçãs, pêras e laranjas estão sendo transportadas.

Resolução

*Sendo **m**, **p** e ℓ, respectivamente, os números de maçãs, pêras e laranjas transportadas, tem-se:*

$$\begin{cases} m + p + \ell = 10\,000 \text{ (quantidade de frutas)} \\ \dfrac{m}{50} + \dfrac{p}{60} + \dfrac{\ell}{100} = 140 \text{ (quantidade de caixas)} \\ 20 \cdot \dfrac{m}{50} + 40 \cdot \dfrac{p}{60} + 10 \cdot \dfrac{\ell}{100} = 3300 \text{ (custo total)} \end{cases}$$

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} m + p + \ell = 10\,000 \\ 6m + 5p + 3\ell = 42\,000 \\ 12m + 20p + 3\ell = 99\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + p + \ell = 10\,000 \\ 3m + 2p = 12\,000 \\ 9m + 17p = 69\,000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + p + \ell = 10\,000 \\ 3m + 2p = 12\,000 \\ 11p = 33\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell = 5\,000 \\ m = 2\,000 \\ p = 3\,000 \end{cases}$$

***Resposta**: Estão sendo transportadas 2000 maçãs, 3000 pêras e 5000 laranjas.*

3

a) A reta r passa pela origem do plano cartesiano e tem coeficiente angular m > 0. A circunferência C passa pelos pontos (1,0) e (3,0) e tem centro no eixo x. Para qual valor de m a reta r é tangente a C?

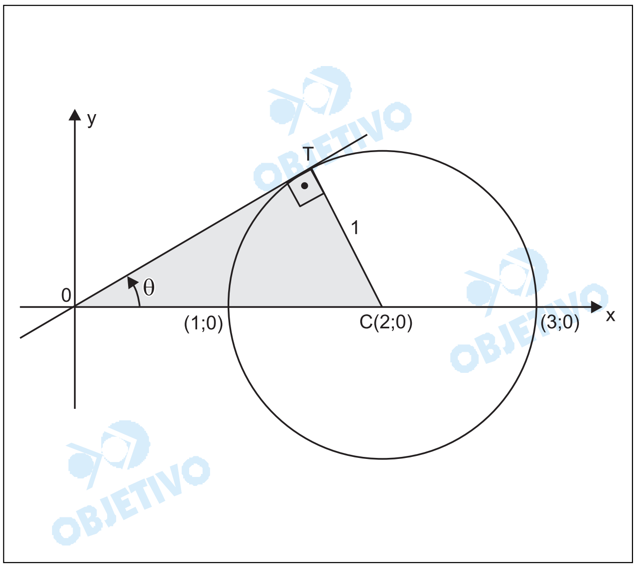
b) Suponha agora que o valor de m seja menor que aquele determinado no item anterior. Calcule a área do triângulo determinado pelo centro de C e pelos pontos de intersecção de r com C.

Resolução

a) A circunferência tem centro no ponto C (2;0) e raio $r = 1$.

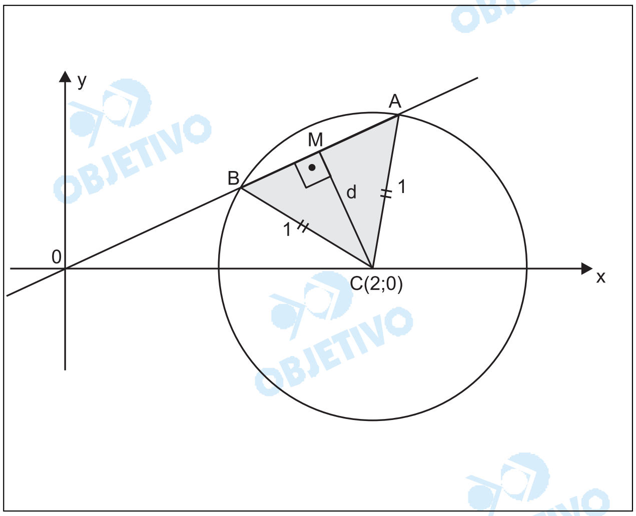
*A reta **r**, que passa pela origem e tem coeficiente angular $m > 0$, tem equação $y = m \cdot x$, com $m = \text{tg}\ \theta$.*

No triângulo retângulo OTC, obtém-se $OT = \sqrt{3}$.



Assim: $m = \text{tg}\ \theta = \dfrac{CT}{OT} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

*b) Se $0 < m < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, a reta **r** é secante à circunferência. Na obtenção da área do triângulo ABC, temos:*



*1º)**d** é a distância do centro C (2;0) à reta mx – y = 0:*

$$d = \frac{|m \,.\, 2 - 0|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{2m}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

2º)No triângulo AMC:

$$AM^2 + \left(\frac{2m}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2 = 1^2 \Leftrightarrow AM = \frac{\sqrt{1 - 3m^2}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$3º)AB = 2 \,.\, AM = 2 \,.\, \frac{\sqrt{1 - 3m^2}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

4º)Área do triângulo ABC:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{AB \,.\, d}{2} = \frac{2 \,.\, \frac{\sqrt{1 - 3m^2}}{\sqrt{m^2 + 1}} \,.\, \frac{2m}{\sqrt{m^2 + 1}}}{2} =$$

$$= \frac{2 \,.\, m \,.\, \sqrt{1 - 3m^2}}{m^2 + 1}$$

***Respostas**: a)* $\frac{\sqrt{3}}{3}$ *b)* $\frac{2 \,.\, m \,.\, \sqrt{1 - 3m^2}}{m^2 + 1}$

4

Em uma equipe de basquete, a distribuição de idades dos seus jogadores é a seguinte:

idade	Nº de jogadores
22	1
25	3
26	4
29	1
31	2
32	1

Será sorteada, aleatoriamente, uma comissão de dois jogadores que representará a equipe junto aos dirigentes.

a) Quantas possibilidades distintas existem para formar esta comissão?

b) Qual a probabilidade da média de idade dos dois jogadores da comissão sorteada ser estritamente menor que a média de idade de todos os jogadores?

Resolução

a) O número de possibilidades distintas de se formar a comissão de dois jogadores escolhidos entre os 12 é $C_{12,2} = \dfrac{12 \,.\, 11}{2 \,.\, 1} = 66.$

b) 1) A idade média dos jogadores é 27, pois

$$\frac{22 \,.\, 1 + 25 \,.\, 3 + 26 \,.\, 4 + 29 \,.\, 1 + 31 \,.\, 2 + 32 \,.\, 1}{1 + 3 + 4 + 1 + 2 + 1} = 27$$

2) Para que a idade média dos dois jogadores da comissão sorteada seja estritamente menor que a média de idade de todos os jogadores (27), devem-se escolher duplas com idades: (22 e 25) ou (22 e 26) ou (22 e 29) ou (22 e 31) ou (25 e 25) ou (25 e 26) ou (26 e 26) anos.

O número de possibilidades dessa escolha é

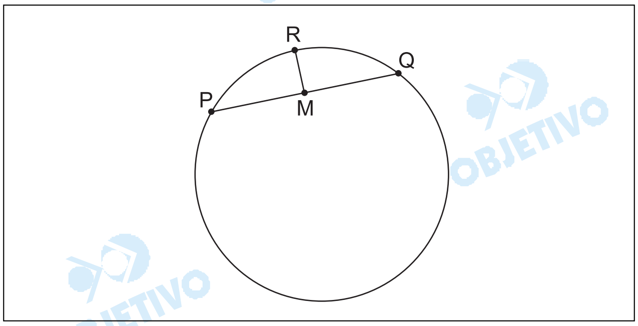
$$1 \,.\, C_{3,1} + 1 \,.\, C_{4,1} + 1 \,.\, 1 + 1 \,.\, C_{2,1} + C_{3,2} + C_{3,1} \,.\, C_{4,1} + C_{4,2} =$$
$$= 3 + 4 + 1 + 2 + 3 + 12 + 6 = 31$$

3) A probabilidade de a média de idade dos dois jogadores da comissão sorteada ser estritamente menor que a média de idade de todos os jogadores é $\dfrac{31}{66}$

***Respostas**: a) 66 b)* $\dfrac{31}{66}$

5

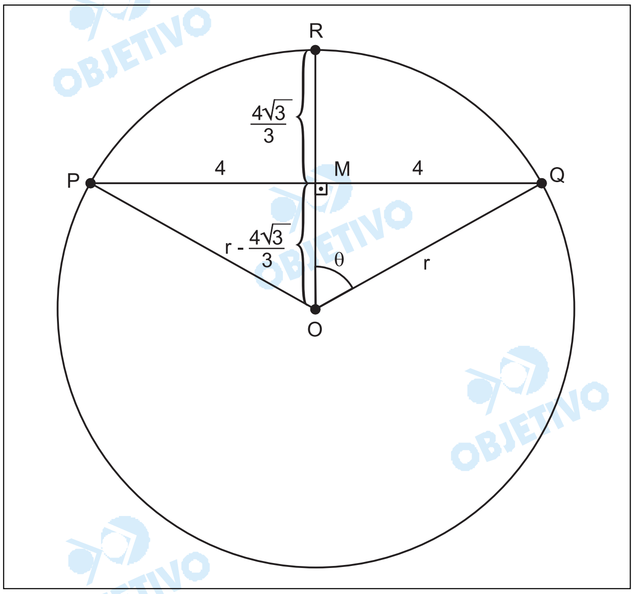
Na figura a seguir, M é o ponto médio da corda $\overline{PQ}$ da circunferência e PQ = 8. O segmento $\overline{RM}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$ e RM = $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Calcule:



a) O raio da circunferência.

b) A medida do ângulo $P\hat{O}Q$, onde O é o centro da circunferência.

Resolução



a) *No triângulo retângulo OMQ, tem-se:*

1) $OM = r - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, $MQ = 4$, $OQ = r$ e

$$(OQ)^2 = (OM)^2 + (MQ)^2$$

Assim sendo, $r^2 = \left(r - \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4^2 \Leftrightarrow r = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

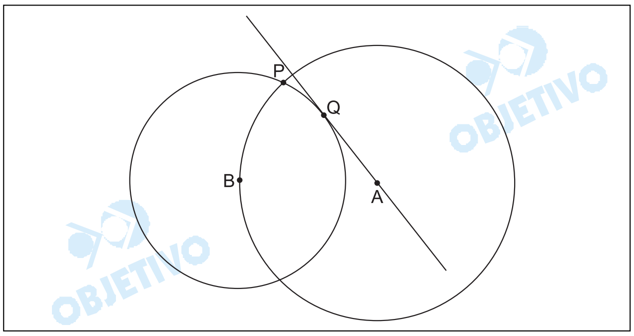
2) $\text{sen}\ \theta = \dfrac{4}{r} = \dfrac{4}{\dfrac{8\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 60°$

b) *A medida do ângulo* $P\hat{O}Q$ *é* $2 \,.\, \theta = 120°$

Respostas: *a)* $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ *b) 120°*

6

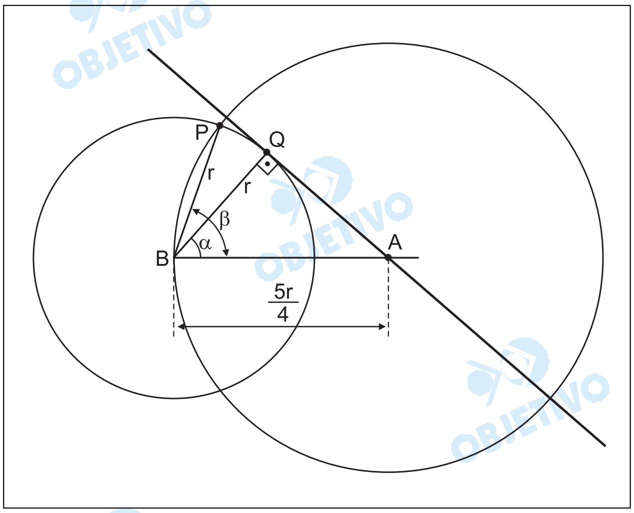
Na figura a seguir, as circunferências têm centros A e B. O raio da maior é $\dfrac{5}{4}$ do raio da menor; P é um ponto de intersecção delas e a reta $\overleftrightarrow{AQ}$ é tangente à circunferência menor no ponto Q.



Calcule:

a) $\cos \widehat{ABQ}$ b) $\cos \widehat{ABP}$ c) $\cos \widehat{QBP}$

Resolução



Sejam $BP = BQ = r$, $AB = AP = \dfrac{5r}{4}$, $\widehat{ABQ} = \alpha$ *e* $\widehat{ABP} = \beta$.

No triângulo ABQ, retângulo em Q, tem-se:

$$\cos \alpha = \frac{BQ}{AB} = \frac{r}{\dfrac{5r}{4}} = \frac{4}{5} \quad e$$

$$\text{sen}\, \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

No triângulo ABP, isósceles, tem-se:

$AP^2 = AB^2 + BP^2 - 2AB \,.\, BP \cos \beta \Rightarrow$

$$\left(\frac{5r}{4}\right)^2 = \left(\frac{5r}{4}\right)^2 + r^2 - 2 \,.\, \frac{5r}{4} \,.\, r \,.\, \cos \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{2}{5} \text{ e sen } \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Assim sendo, tem-se:

a) $\cos \widehat{ABQ} = \cos \alpha = \dfrac{4}{5}$

b) $\cos \widehat{ABP} = \cos \beta = \dfrac{2}{5}$

c) $\cos \widehat{QBP} = \cos(\beta - \alpha) =$

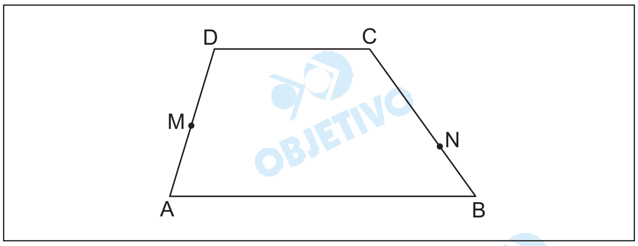
$= \cos \beta \,.\, \cos \alpha + \text{sen}\, \beta \,.\, \text{sen}\, \alpha =$

$$= \frac{2}{5} \,.\, \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{21}}{5} \,.\, \frac{3}{5} = \frac{8 + 3\sqrt{21}}{25}$$

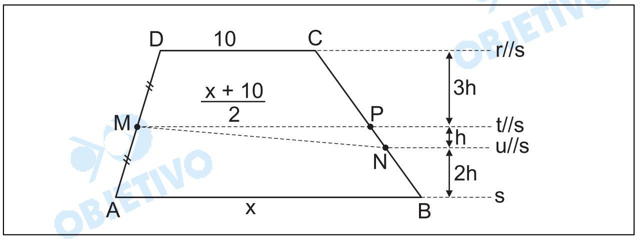
Respostas: a) $\dfrac{4}{5}$ b) $\dfrac{2}{5}$ c) $\dfrac{8 + 3\sqrt{21}}{25}$

7

No trapézio ABCD, M é o ponto médio do lado $\overline{AD}$; N está sobre o lado $\overline{BC}$ e 2BN = NC. Sabe-se que as áreas dos quadriláteros ABNM e CDMN são iguais e que DC = 10. Calcule AB.



Resolução



Sejam:

- *P o ponto médio de $\overline{BC}$*
- *r e s as retas suportes das bases $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$ do trapézio*
- *t e u as retas paralelas às bases, conduzidas por P e N, respectivamente*
- *h a distância entre as retas paralelas t e u*
- *x a medida do segmento $\overline{AB}$*

A área do quadrilátero ABNM é igual à diferença entre as áreas do trapézio ABPM e do triângulo MPN, e a área do quadrilátero CDMN é igual à soma das áreas do trapézio MPCD e do triângulo MPN, ou seja:

$S_{ABPM} - S_{MPN} = S_{MPCD} + S_{MPN} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_{ABPM} = S_{MPCD} + 2 \,.\, S_{MPN}$

Assim:

$$\frac{\left(x + \dfrac{x+10}{2}\right)3h}{2} = \frac{\left(\dfrac{x+10}{2} + 10\right)3h}{2} +$$

$$+ 2 \,.\, \frac{\dfrac{x+10}{2} \,.\, h}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (3x + 10)3h = (x + 30)3h + 2(x + 10)h \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9x + 30 = 3x + 90 + 2x + 20 \Leftrightarrow 4x = 80 \Leftrightarrow x = 20$

***Resposta**: AB = 20*

8

Nos itens abaixo, z denota um número complexo e i a unidade imaginária ($i^2 = -1$). Suponha $z \neq i$.

a) Para quais valores de z tem-se $\dfrac{z + i}{1 + iz} = 2$?

b) Determine o conjunto de todos os valores de z para os quais $\dfrac{z + i}{1 + iz}$ é um número real.

Resolução

a) $\dfrac{z + i}{1 + iz} = 2 \Leftrightarrow z + i = 2 + 2iz \Leftrightarrow z - 2iz = 2 - i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\,(1 - 2i) = 2 - i \Leftrightarrow z = \dfrac{2 - i}{1 - 2i} \cdot \dfrac{1 + 2i}{1 + 2i} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{4 + 3i}{5} \Leftrightarrow z = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$

b) Seja $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$

$\dfrac{z + i}{1 + iz} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{x + yi + i}{1 + i\,(x + yi)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x + (y + 1)\,i}{1 - y + xi} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x + (y + 1)\,i}{(1 - y) + xi} \cdot \dfrac{(1 - y) - xi}{(1 - y) - xi} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x\,(1 - y) - x^2 i + (y + 1)\,(1 - y)\,i + (y + 1)\,.\,x}{(1 - y)^2 + x^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x - (x^2 + y^2 - 1)\,i}{(1 - y)^2 + x^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, que é o conjunto de todos os pontos de uma circunferência de centro na origem e raio igual a 1, que pode ser indicado por $|z| = 1$.

Respostas: a) $z = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i$

b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \text{ e } z \neq i\}$

9

Determine os valores de x no intervalo $]0,2\pi[$ para os quais $\cos x \geq \sqrt{3}\,\text{sen}\,x + \sqrt{3}$.

Resolução

$\cos x \geq \sqrt{3}\,\text{sen}\,x + \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow$

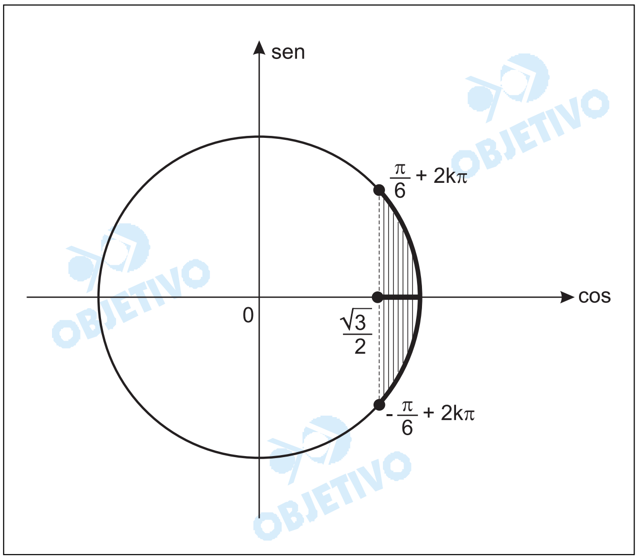
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\,.\,\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\,x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow cos\dfrac{\pi}{3} \,.\, cos\, x - sen\,\dfrac{\pi}{3} \,.\, sen\, x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \dfrac{\pi}{3} + x \leq \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, *pois no ciclo trigonométrico tem-se*

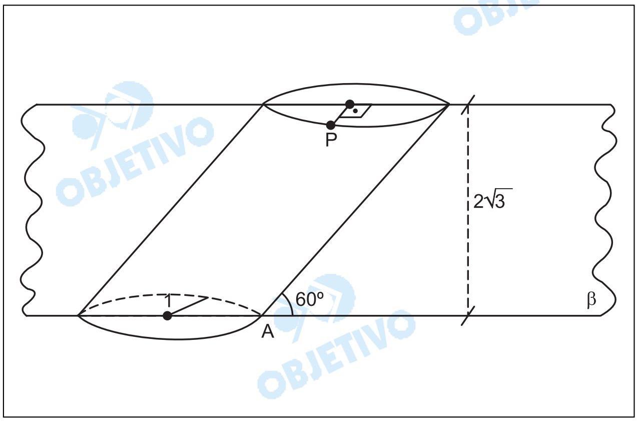


Se $k = 1$ *e* $0 < x < 2\pi$, *tem-se* $\dfrac{3\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{11\pi}{6}$.

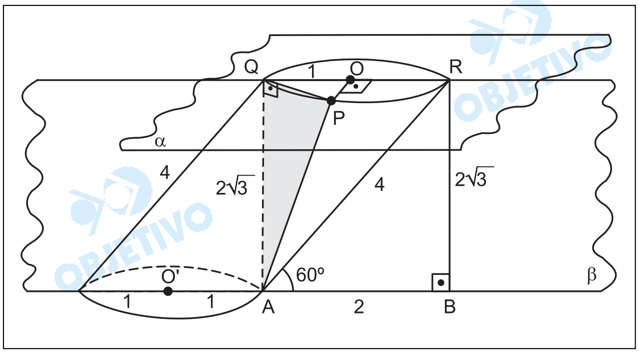
Resposta: $\dfrac{3\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{11\pi}{6}$.

10

Um cilindro oblíquo tem raio das bases igual a 1, altura $2\sqrt{3}$ e está inclinado de um ângulo de 60° (ver figura). O plano β é perpendicular às bases do cilindro, passando por seus centros. Se P e A são os pontos representados na figura, calcule PA.



Resolução



$$sen\ 60° = \frac{2\sqrt{3}}{AR} \Rightarrow AR = 4$$

$$tg\ 60° = \frac{2\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow AB = 2$$

O triângulo OPQ é retângulo em O e o triângulo QPA é retângulo em Q, pois $\overleftrightarrow{AQ}$ é perpendicular ao plano α que contém a base superior do cilindro.

Assim:

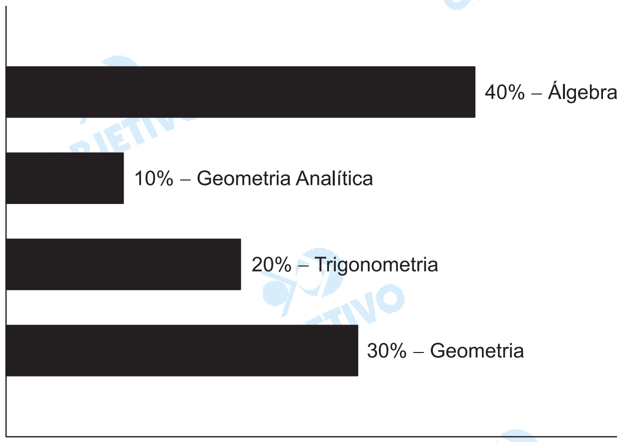
1º) $(QP)^2 = (QO)^2 + (OP)^2 \Leftrightarrow (QP)^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (QP)^2 = 2$

2º) $(PA)^2 = (QA)^2 + (QP)^2$
Logo $(PA)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2 \Leftrightarrow (PA)^2 = 14 \Leftrightarrow PA = \sqrt{14}$

Resposta: $PA = \sqrt{14}$

Comentário

Com quatro questões de álgebra, três de geometria, duas de trigonometria e uma de geometria analítica, todas muito bem enunciadas, sendo algumas delas originais e de bom nível, a banca examinadora organizou uma excelente prova de Matemática, que certamente cumpriu muito bem sua finalidade maior, a de selecionar candidatos às vagas de ciências exatas.


40% – Álgebra
10% – Geometria Analítica
20% – Trigonometria
30% – Geometria