“Quando o treino é difícil, o combate é fácil.”

SUMÁRIO

ANÁLISE COMBINATÓRIA

1. FATORIAL

Definimos fatorial de um número natural n, tradicionalmente denotado por $n!$, ao número definido indutivamente por: $0! = 1$ e $n! = n(n-1)!$

Temos que $n! = n(n-1)\ldots 2 \,.\, 1$, logo tem-se que $5! = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 120$; $3! = 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 6$; etc...

2. COEFICIENTES BINOMIAIS

Definição

Dados os naturais n e k, sendo $n \geq k$ chama-se coeficiente binomial n sobre k e se indica $\binom{n}{k}$ ao número definido por: $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ se $1 \leq k \leq n$.

Da definição que para $1 \leq k \leq n$ tem-se: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\ldots 1}$ onde o numerador da fração contém k fatoriais.

EXEMPLO:

Calcule n, sabendo-se que $\frac{(n+1)!}{n!} = 7$.

Solução: Temos que $(n+1)! = (n+1) \,.\, n \,.\, (n-1) \,.\, \ldots \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = (n+1) \,.\, n!$.

Logo, $\frac{n!(n+1)}{n!} = 7 \Rightarrow n+1 = 7 \Rightarrow n = 6$.

3. TRIÂNGULO DE PASCAL

O triângulo de Pascal é um triângulo aritmético formado por números que têm muitas relações entre si. Algumas dessas relações foram descobertas por Pascal.

Onde C_n^k representa combinação de n escolhe k, n é o número da linha e k representa o número da coluna.

Os quadros abaixo representam o triângulo de Pascal:

C_0^0
$C_1^0 \quad C_1^1$
$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$
$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$
$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$
$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$
$C_6^0 \quad C_6^1 \quad C_6^2 \quad C_6^3 \quad C_6^4 \quad C_6^5 \quad C_6^6$
...

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
...

4. RELAÇÃO DE STIFEL

Trata-se de uma propriedade que permite construir o Triângulo de Pascal dada pela seguinte fórmula: $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

Somando 2 elementos consecutivos de uma mesma linha obtemos o elemento localizado abaixo da segunda parcela.

Prova: Considere o número de comissões de p+1 pessoas que podemos formar a partir de um grupo de n+1 pessoas, sabendo que uma destas n+1 pessoas é Pedro.

O total dessas comissões é igual a C_{n+1}^{p+1}, por outro lado podemos contar este total separando em dois casos; primeiro caso comissões que Pedro participa que são C_n^p e o segundo caso, as comissões na qual Pedro não participa que são C_n^{p-1}.

5. TEOREMA DAS LINHAS

A soma dos termos da linha n é igual a 2n.

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$

Prova: Seja o conjunto A={1,2,3,...,n} o total de subconjuntos é igual a $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$, por outro lado para formar um subconjunto de A cada elemento de A tem duas opções , participar ou não do subconjunto.

Concluímos que o total de subconjuntos é igual a 2n.

6. TEOREMA DAS COLUNAS

A soma dos elementos de uma coluna do triângulo, começando no primeiro termo da coluna, é igual ao elemento que está na linha e na coluna posteriores ao último elemento da soma.

$C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \ldots + C_{p+n}^p = C_{p+n+1}^{p+1}$

Prova: Considere o conjunto A={1,2,...,p,...,n+p,n+p+1} com $p < n$, o total de subconjuntos de p+1 elementos de A é igual a C_{n+p+1}^{p+1}.

Por outro lado cada um destes subconjuntos tem um elemento que é o máximo (maior elemento do conjunto).

▸ **Primeiro caso:** $p+1$ é o máximo, os outros p elementos são escolhidos à partir de $\{1,2,\ldots,p\}$.

Total de subconjuntos = C_p^p.

▸ **Segundo caso:** $p+2$ é o máximo; agora devemos escolher os outros p elementos de $p+1$ elementos $\{1,2,\ldots,p+1\}$.

Total de subconjuntos = C_{p+1}^p.

...

...

Caso N: $n+p+1$ é o máximo; Agora devemos escolher os outros p elementos à partir do conjunto $\{1,2,3,\ldots,n+p\}$.

Total de subconjuntos = C_{n+p}^p.

Igualando as duas formas, o teorema está provado.

7. OUTRAS PROPRIEDADES

a) $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \ldots + C_{n+p}^p = C_{n+p+1}^{p+1}$; teorema das diagonais.

b) $C_n^p = C_n^{n-p}$ relação das combinações complementares.

c) $C_n^p < C_n^{p+1}$ se $p<\dfrac{n-1}{2}$.

8. BINÔMIO DE NEWTON

Consideremos a igualdade: $(x+a)^n = (x+a)(x+a)\ldots(x+a)$ (n fatores) (1)

Para se formar um termo do produto $(x+a)(x+a)\ldots(x+a)$ devemos escolher uma das duas parcelas em cada um dos n fatores $x+a$ e efetuar o produto das mesmas.

Por exemplo, se escolhermos p letras a em p dos n binômios, e $n-p$ letras x dos $n-p$ binômios restantes, então um termo genérico do desenvolvimento de $(x+a)^n$ é da forma: $\overbrace{\underbrace{a\,a\ldots a}_{p}\underbrace{x\,x\ldots x}_{n\,.\,p}}^{n} = a^p x^{n-p}$ com $p = 0, 1, 2, \ldots, n$ (2)

O número de termo da forma (2) é, então é igual ao número de modos de escolhermos p letras a em p dos n binômios $x+a$, isto é, C_n^p.

Portanto, reduzindo todos os termos da forma $a^p x^{n-p}$, encontramos um único termo, $C_n^p a^p x^{n-p}$.

Finalmente, fazendo em p variar de 0 até n, encontramos todos os termos do desenvolvimento de $(x+a)^n$.

Então, $(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p x^{n-p}$.

Expandindo o somatório acima, temos: $(x+a)^n = x^n + \binom{n}{1} a\,x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} x + a^n$ (I)

9. TERMO GERAL DO DESENVOLVIMENTO DE $(x + a)^n$

Todos os termos do desenvolvimento de (x + a)n são obtidos de $C_n^p a^p x^{n-p}$ quando fazemos neste termo, p variar de 0 a n.

Por este motivo, $C_n^p a^p x^{n-p}$ é chamado de termo geral.

Chamando o 1º, 2º, 3º, ... termos do desenvolvimento de $(x+a)^n$ respectivamente por $T_1,\ T_2,\ T_3, \ldots,$ podemos observar que:

Para p = 0 obtemos $T_1 = C_n^0 a^0 x^n$

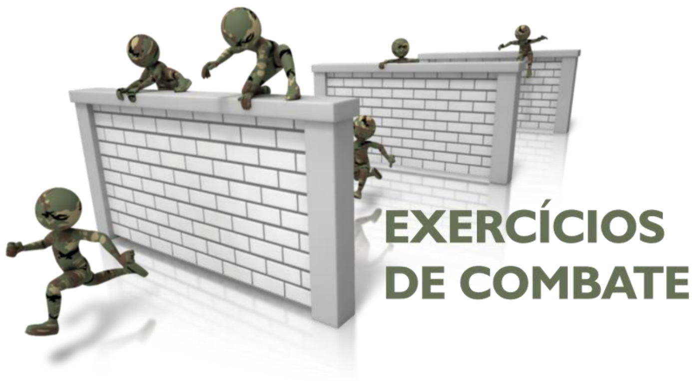
Para p = 1 obtemos $T_2 = C_n^1 a^1 x^{n-1}$

Para p = 2 obtemos $T_3 = C_n^2 a^2 x^{n-2}$

Para p = 3 obtemos $T_4 = C_n^3 a^3 x^{n-3}$

...

Isto é, a ordem de cada termo é igual à taxa da combinação correspondente mais 1. Como a taxa da combinação do termo geral é p, segue-se que este termo é de ordem p + 1. Isto é, $T_{p+1} = C_n^p a^p x^{n-p}$.



1. Desenvolver: $(2x^2 - y)^5$

2. Calcule o 5º termo do desenvolvimento de: $\left(\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{x}\right)^8$

3. Calcule sem desenvolver, o termo independente de x de $\left(3x^4 - \frac{2}{x^3}\right)^{14}$.

4. O algarismo das unidades do número $N = 1! + 2! + 3! + \cdots + 99!$ é igual a:
a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

5. (AFA 1994) No desenvolvimento de $\left(x^2 + 3x\right)^{12}$, o coeficiente de x^{20} é:
a) 32.110
b) 36.55
c) 35.110
d) 35.55

6. (AFA 1999) No desenvolvimento de $\left(x + 2\right)^n \cdot x^3$, o coeficiente de x^{n+1} é:
a) n.(n + 1)/2
b) n.(n – 1)/4
c) 2n.(n – 1)
d) 4n.(n – 1)

7. (AFA 2000) Se no desenvolvimento do binômio $(x+y)^{m+5}$, ordenado segundo as potências decrescentes de x, o quociente entre os termos que ocupam as posições $(m+3)$ e $(m+1)$ é $\frac{2}{3}y^2x^{-2}$, então o valor de m é:

a) Par.
b) Primo.
c) Ímpar.
d) Múltiplo de 3.

8. (ITA 2004) O termo independente de x no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}}-\sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$ é:

a) $729\sqrt[3]{45}$
b) $972\sqrt[3]{15}$
c) $891\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$
d) $376\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$
e) $165\sqrt[3]{75}$

9. (EN 2013) O coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x}+x^3\right)^7$ é:

a) 30
b) 90
c) 120
d) 270
e) 560

10. (ITA 2014) Para os inteiros positivos k e n, com $k \le n$, sabe-se que $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$. Então, o valor de $\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$ é igual a:

a) 2^n+1.
b) $2^{n+1}+1$.
c) $\frac{2^{n+1}+1}{n}$.
d) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.
e) $\frac{2^n-1}{n}$.

11. (ITA 2013) O coeficiente de x^4y^4 no desenvolvimento de $(1+x+y)^{10}$ é:

a) 3150
b) 6300
c) 75600
d) 81900
e) 151200

12. Simplifique: $\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

13. Por quantos zeros termina o resultado de $1\,000!$?

14. (IME 1999) Calcule o valor de $(1{,}02)^{-10}$, com dois algarismos significativos, empregando a expansão do binômio de Newton.

15. (ITA 2010) A expressão $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^5-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5$ é igual a:

a) $2630\sqrt{5}$
b) $2690\sqrt{5}$
c) $2712\sqrt{5}$
d) $1584\sqrt{15}$
e) $1604\sqrt{15}$

16. Em uma sala há 8 lâmpadas . De quantos modos pode ser iluminada a sala?

17. (EPCAR 3ªSÉRIE) Se n é o número de termos do desenvolvimento de $\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[10]{y}\right)^{55}$ que não contém radical, então n vale:

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7

18. (IME 89) Determine o coeficiente de x^{-9} no desenvolvimento de $\left(x^2+\dfrac{1}{x^5}\right)^2\cdot\left(x^3+\dfrac{1}{x^4}\right)^5$.

19. A soma dos três últimos dígitos de 19^{92} é:

a) 6
b) 9
c) 12
d) 15
e) 19

20. (ITA) Seja P(x) = $a_0 + a_1x + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_{100}x_{100}$, onde $a_{100} = 1$, um polinômio divisível por $(x + 9)^{100}$. Nestas condições temos:

a) $a_2 = 50.99.9^{98}$
b) $a_2 = \dfrac{100!}{2!98!}$
c) $a_2 = \dfrac{99!}{2!98!}$
d) $a_2 = \dfrac{100!9^2}{2!98!}$
e) nda

21. (AFA 99) O valor de m que satisfaz a expressão $\sum_{k=0}^{m} 3^k \cdot \binom{m}{k} = 1024$

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

22. (UFRJ – 2004) n e m são números naturais, n = 100! + 18 e m = 50! + 37.

Calcule o resto da divisão de n por 18.

1. Pela fórmula (III), temos: $(2x, y) = (2x^2)^5 - C_2^1 y(2x^2)^4 + C_5^2 y^2 (2x^2)^3 - C_5^3 y^3 (2x^2)^2 + C_5^4 y^4 (2x^2) - y^5 =$

$32x^{19} - 80x^8 y + 80x^6 y^2 - 40x^4 y^3 + 10x^2 y^4 - y^5$

2. Neste caso, n = 8 e p + 1 = 5 , p = 4.

Termo geral: $T_{p+1} = (-1)^p C_n^p a^p x^{n-p}$

$$T_5 = (-1)C_8^4 \left(\frac{1}{x}\right)^4 \left(\frac{1}{2}x^2 y\right)^4 = \frac{35}{8}x^4 y^4$$

3. Termo geral: $T_{p+1} = (-1)^n C_n^p a^p x^{n-p}$

$$= (-1)^p C_{14}^p \left(\frac{2}{x^3}\right)^p (3x^4)^{14-p}$$

$$= (-1)^p C_{14}^p .2^p .3^{14-p} .x^{56-4p-3p}$$

$$= (-1)^p C_{14}^p .2^p .3^{14-p} .x^{56-7p}$$

Para que o termo seja independente de x, deve-se ter: $56 - 7p = 0 \therefore p = 8$

Logo, o termo pedido é: $T_9 = (-1)^8 C_{14}^8 .2^8 .3^6 = C_{14}^8 \ .\ 2^8 \ .\ 3^6$

4. B

5. B

6. C

7. A

8. O termo de ordem $p+1$ no desenvolvimento de $\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}}-\sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}=\left(3^{1/2}5^{-1/2}x^{-1/3}-3^{-1/3}5^{1/3}x^{1/6}\right)^{12}$ é dado por:

$$T_{p+1}=\binom{12}{p}\cdot\left(-3^{-1/3}5^{1/3}x^{1/6}\right)^{p}\left(3^{1/2}5^{-1/2}x^{-1/3}\right)^{12-p}=\binom{12}{p}\cdot(-1)^{p}\cdot 3^{6-\frac{p}{2}-\frac{p}{3}}\cdot 5^{-6+\frac{p}{2}+\frac{p}{3}}\cdot x^{-4+\frac{p}{3}+\frac{p}{6}}=\binom{12}{p}\cdot(-1)^{p}\cdot 3^{6-\frac{5p}{6}}\cdot 5^{-6+\frac{5p}{6}}\cdot x^{-4+\frac{p}{2}}.$$

O termo independente de x ocorre para $-4+\frac{p}{2}=0\Leftrightarrow p=8$, portanto é o termo:

$$T_{8+1}=\binom{12}{8}\cdot(-1)^{12}\cdot 3^{6-\frac{5\cdot 8}{6}}\cdot 5^{-6+\frac{5\cdot 8}{6}}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot 3^{-2/3}\cdot 5^{2/3}=495\sqrt[3]{\frac{25}{9}}=165\sqrt[3]{75}.$$

9. $\binom{7}{p}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^{7-p}\cdot\left(x^{3}\right)^{p}=\binom{7}{p}\cdot 2^{7-p}\cdot x^{4p-7}$

Como o expoente de x é 5, temos 4p – 7 = 5, isto é p = 3. Fazendo, agora, p = 3, temos: $\binom{7}{3}\cdot 2^{7-3}\cdot x^{4\cdot 3-7}=35\cdot 16\cdot x^{5}=560x^{5}$.

Portanto, o coeficiente pedido é 560.

10. $\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=$

$$\frac{\frac{n+1}{1}\binom{n}{0}+\frac{n+1}{2}\binom{n}{1}+\frac{n+1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{n+1}{n}\binom{n}{n}}{n+1}=$$

$$=\frac{\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\ldots+\binom{n+1}{n+1}}{n+1}=$$

$$=\frac{2^{n+1}-\binom{n+1}{0}}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

11. O termo de y^4 no desenvolvimento de $\left((1+x)+y\right)^{10}$ é $\binom{10}{4}(1+x)^6.y^4$.

O termo de x^4 no desenvolvimento de $(1+x)^6$ é $\binom{10}{4}1^6.x^4$.

Portanto, o coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $(1+x+y)^{10}$ é $\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{4}=210.15=3150$.

12. Temos que $(n+2)!=(n+2)\,.\,(n+1)\,.\,n\,.\,(n-1)\,.\,\ldots\,.\,3\,.\,2\,.\,1=(n+2)\,.\,(n+1)$

Assim, $\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}=\frac{(n+2)\,.\,(n+1)!+(n+1)!}{(n+2)\,.\,(n+1)!-(n+1)!}=\frac{(n+1)!(n+2+1)}{(n+1)!(n+2-1)}=\frac{n+3}{n+1}$

13. Suponhamos que $1\,000!$ termina por p zeros, isto é, $1\,000!=N\,.\,10^p$.

Como $10^p=2^p\,.\,5^p$ pode parecer, à primeira vista, que o número de zeros é igual ao número de fatores iguais a 2 ou de fatores iguais a 5, que ocorrem na decomposição de $1\,000!$. Entretanto, isto não é verdade, pois o fator primo 2 ocorre um maior número de vezes que o fator primo 5, na decomposição de $1\,000!$.

Assim, para se calcular o expoente p, é suficiente contar o número de fatores primos iguais a 5 que ocorrem na decomposição de $1\,000!$.

Daí, tem-se:

$$1000!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\boxed{5}\cdot\ldots\cdot9\cdot\boxed{5\cdot2}\cdot11\cdot\ldots\cdot999\cdot\boxed{5\cdot200}=$$

$$=\underbrace{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 9\cdot 11\cdot \ldots \cdot 999)}_{A}\left[5\cdot(5-2)\cdot(5\cdot 3)\cdot \ldots \cdot(5\cdot 200)\right]= = A\,.\,5^{200}(1.2.3.4.5.\,\ldots\,.\,200)=$$

$$=A\cdot 5^{200}\left[1\cdot 2\cdot 3\cdot \boxed{4}\cdot 5\cdot \ldots \cdot 9\cdot \boxed{5\cdot 2}\cdot 11\cdot \ldots \cdot 199\cdot \boxed{5\cdot 40}\right]= A\cdot 5^{200}(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 11\cdot \ldots \cdot 199)\left[5\cdot(5\cdot 2)\cdot \ldots \cdot(5\cdot 40)\right]=$$

$$=A\cdot 5^{200}\cdot B\cdot 5^{40}(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot 40)= A\cdot B\cdot 5^{240}\left[1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \boxed{5}\cdot 6\cdot \ldots \cdot 9\cdot \boxed{5\cdot 2}\cdot 11\cdot 11\cdot \ldots \cdot 39\cdot \boxed{5\cdot 8}\right]=$$

$$=A\cdot B\cdot 5^{240}\underbrace{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 11\cdot \ldots \cdot 39)}_{C}\left[5\cdot(5\cdot 2)\cdot \ldots \cdot(5-8)\right]=$$

$$A\cdot B\cdot 5^{240}\cdot C\cdot 5^{8}(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8)=$$

$$=A\cdot B\cdot C\cdot 5^{248}\underbrace{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 8)}_{D}\cdot \boxed{5}=$$

$$=A\cdot B\cdot C\cdot D\cdot 5^{249}$$

Daí, sendo $p=249$, conclui-se que $1000!$ termina por 249 zeros.

14. $(1{,}02)^{-10}=\left(\frac{102}{100}\right)^{-10}=\left(\frac{51}{50}\right)^{-10}=\left(\frac{50}{51}\right)^{10}=\left(1-\frac{1}{51}\right)^{10}=\sum_{p=0}^{10}\binom{10}{p}\cdot\left(-\frac{1}{51}\right)^{p}\cdot 1^{10-p}=\sum_{p=0}^{10}\binom{10}{p}\cdot\frac{(-1)^p}{51^p}$

Analisando os primeiros termos do somatório, temos:

$$\sum_{p=0}^{10}\binom{10}{p}\cdot\frac{(-1)^p}{51^p}=\binom{10}{0}\cdot\frac{(-1)^0}{51^0}+\binom{10}{1}\cdot\frac{(-1)^1}{51^1}+\binom{10}{2}\cdot\frac{(-1)^2}{51^2}+\binom{10}{3}\cdot\frac{(-1)^3}{51^3}\ldots\; =1-\frac{10}{51}+\frac{45}{51^2}+\frac{120}{51^3}+\Delta=0{,}820\ldots+\Delta$$

Cada termo do desenvolvimento pode ser representado como $T_{p+1}=\binom{10}{p}\cdot\frac{(-1)^p}{51^p}$ e

$$\left|\frac{T_{p+1}}{T_p}\right|=\left|\frac{\binom{10}{p}\cdot\frac{(-1)^p}{51^p}}{\binom{10}{p-1}\cdot\frac{(-1)^{p-1}}{51^{p-1}}}\right|=\left|\frac{-(11-p)}{51\cdot p}\right|<\frac{11}{51p}<1\Leftrightarrow |T_{p+1}|<|T_p|\,.$$

Assim, $\Delta=\sum_{p=4}^{10}T_{p+1}=\sum_{p=4}^{10}\binom{10}{p}\cdot\frac{(-1)^p}{51^p}<7\cdot|T_5|=7\cdot\left|\binom{10}{4}\cdot\frac{(-1)^4}{51^4}\right|=7\cdot\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot\frac{1}{51^4}=\frac{2^4\cdot 3\cdot 490}{2^4\cdot 51^4}<\frac{23520}{100^4}<\frac{25000}{10^8}<\frac{1}{4000}=0{,}00025$

Logo, $\Delta<0{,}00025$ não afeta o segundo algarismo da representação decimal e, portanto, a representação de $(1{,}02)^{-10}$ com dois algarismos significativos é $0{,}82$.

15. Por desenvolvimento de Binômio de Newton: $(a+b)^5-(a-b)^5=2\left[5a^4b+10a^2b^3+5b^5\right]$.

Assim: $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})^5-(2\sqrt{3}-\sqrt{5})^5=2\left[5\left(2\sqrt{3}\right)^4(\sqrt{5})+10\left(2\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{5}\right)^3+\left(\sqrt{5}\right)^5\right]=$

$=2\left[5\cdot16\cdot9\cdot\sqrt{5}+10\cdot4\cdot3\cdot5\sqrt{5}+25\sqrt{5}\right]=1440\sqrt{5}+1200\sqrt{5}+50\sqrt{5}=2690\sqrt{5}$

16. 28 – 1 = 255 modos.

17. Pelo desenvolvimento do binômio de Newton, temos: $\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[10]{y}\right)^{55}=\sum_{p=1}^{55}\binom{55}{p}\left(\sqrt[5]{x}\right)^{55-p}\left(\sqrt[10]{y}\right)^{p}$.

Todos os termos em x que não possuem radical ocorrerão para 55 - p múltiplo de 5 e os termos em y que não possuem radical ocorrerão para "p" múltiplo de 10. Como todo "p" múltiplo de 10 tornará 55 - p múltiplo de 5, temos que o número de "p"s possíveis são 6, ou seja, (0, 10, 20, 30, 40, 50). Assim, n = 6.

18. 35.

19. $19^{92}=\left(20-1\right)^{92}=\binom{92}{92}20^{92}-\binom{92}{91}20^{91}+\ldots+\binom{92}{2}20^2-\binom{92}{1}20+\binom{92}{0}$

Todas as parcelas exceto as três últimas são múltiplas de 1000:

$\binom{92}{2}20^2-\binom{92}{1}20+\binom{92}{0}=\frac{92\cdot91}{2}\cdot400-92\cdot20+1=1674400-1840+1=1672561$

Logo os três últimos dígitos são 561, cuja soma é 12.

20. Se P(x) possui grau 100 e é divisível por $(x+9)^{100} \Longrightarrow P(x)=A(x+9)^{100}$

Como o coeficiente de x^{100} é igual a 1 $\Longrightarrow A=1 \Longrightarrow P(x)=(x+9)^{100}$

Pelo desenvolvimento do binômio de Newton para $(x + 9)^{100}$ temos que o coeficiente de x^2 é:

$T_2 = C_{100,\,2}(x^2)(9)^{98} \implies a_2 = C_{100,\,2}9^{98} \implies a_2 = 50.99.9^{98}$

21. D

22.

a) Zero;

$n = 100 \times 99 \times 98 \times \ldots \times 18 \times \ldots \times 2 \times 1 + 18 \Rightarrow$ n é múltiplo de 18.

b) Não.

$m = 50 \times 49 \times 48 \times \ldots \times 37 \times \ldots \times 2 \times 1 + 37 \Rightarrow$ m é múltiplo de 37.