

2018

GUIA  
**PREPARAENEM**

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

---

"Insanidade é continuar fazendo sempre a mesma coisa e esperar resultados diferentes."

*Albert Einstein*



## EDITORIAL



**ALEXANDRE PULLIG CORRÊA**  
Diretor Geral do GRUPO PREPARAENEM

As concepções do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem destacam o atuante papel do educando. Isso nos leva a constatar que nós, educadores, aqui estamos como mediadores e instrutores no processo de ensino-aprendizagem. Exercemos influência no desenvolvimento de nossos alunos, mas é deles o papel de destaque neste percurso.

## ENEM 2018

### FALTAM 9 SEMANAS

Tendo isso em vista, é crucial que os professores e a escola conheçam e tenham domínio sobre formas concretas de ajudar os alunos a pensar e a aprender; esta, que é a primeira e a mais importante aprendizagem: aprender a aprender. Consoante a estas aflições, à escola tem sido destinada a tarefa de ensinar o aluno a compreender e a refletir. Isso, sob a luz de domínio de sua autonomia, da sua necessidade de formação contínua e, claro, sua ascensão profissional futura.

Quando a escola não é capaz de estimular a motivação e a cognição, teremos, então, um espaço apenas exigente, mas não um ambiente feito de pessoas que aprendem uma com as outras, e onde o desenvolvimento depende da pluralidade de experiências das pessoas que ali estão. É neste meio, onde o repertório é aprender a aprender, que todos os membros se envolvem na produção conjunta de conhecimento e saberes. Entre tais habilidades, é indispensável destacar a relevância de um ensino promotor da descoberta, da atividade, dos conhecimentos anteriores e das capacidades de cada aluno.

Nesse sentido, é imprescindível auxiliar o educando a, de forma clara, atender, organizar e processar as informações recebidas em seu dia a dia. Se o desvio está na recepção,

por exemplo, uma efetiva estratégia para evoluir é controlar a ansiedade ou o desinteresse do aluno diante da informação em que se sente ter inferior rendimento, além de incentivar que o aluno não tome a parte pelo todo. Caso o deslize esteja no encadeamento e análise das ideias, alguns caminhos podem ser trilhados, tais como: organizar a informação de acordo com suas particularidades, ordenar eventos ou aspectos num esquema, identificar semelhanças estruturais ou mais profundas entre as áreas de conhecimento apreendido, ensaiar a aplicação de informações em áreas diversas, além de cruzar informações e ideias de diferentes disciplinas sobre um mesmo assunto.

Nota-se, portanto, o quão fundamental é o trabalho conjunto entre educador, educando e a escola para efetivação, com qualidade, do processo de ensino-aprendizagem. Este influente combo reflete-se direta e satisfatoriamente sobre o rendimento acadêmico dos nossos jovens pensantes. São estes estudantes, que manifestam compreender e praticar mais estratégias, os mais preparados para conduzir os esforços indispensáveis para tomarem propriedade do que é, de fato, aprendido.

**A prova mais aguardada do ano está chegando! Daqui a 9 semanas, o ENEM 2018 será aplicado, em dois domingos consecutivos: dias 4 e 11 de novembro. Apesar de faltar pouco tempo, não é hora de desespero. Ainda é possível se preparar para enfrentá-la.**

#### ESTRATÉGIA



A resolução de provas anteriores (2009 a 2017) é um método produtivo de se adaptar ao estilo da avaliação e, principalmente, balizar a gestão do tempo das suas resoluções, lembrando que a distribuição dos grupos das áreas do conhecimento em vigor difere das praticadas de 2009 a 2016, ou seja, é mais indicado que a resolução seja feita por área de conhecimento. Além disso, uma excelente estratégia para este momento é a revisão de alguns assuntos que sempre aparecem no exame e merecem ser privilegiados.

#### SAÚDE



Uma preparação adequada para o Enem não é feita só de estudos. É indispensável, também, aprender a respeitar os momentos de descanso. Por isso, é crucial pensar na saúde física e mental nessas semanas que antecedem o exame. Os estudantes devem se atentar para as horas dormidas de um bom sono, manter uma alimentação equilibrada, separar momentos para relaxar e, se possível, praticar atividades físicas para desestressar e chegar com mais disposição nos dias das provas.

#### ACREDITE



Assim que o local de prova for divulgado, evite imprevistos, visite-o. Além disso, uma outra boa maneira de evitar mais algumas surpresas é conduzindo bem o seu tempo durante a realização das provas: deixe as questões mais difíceis por último!

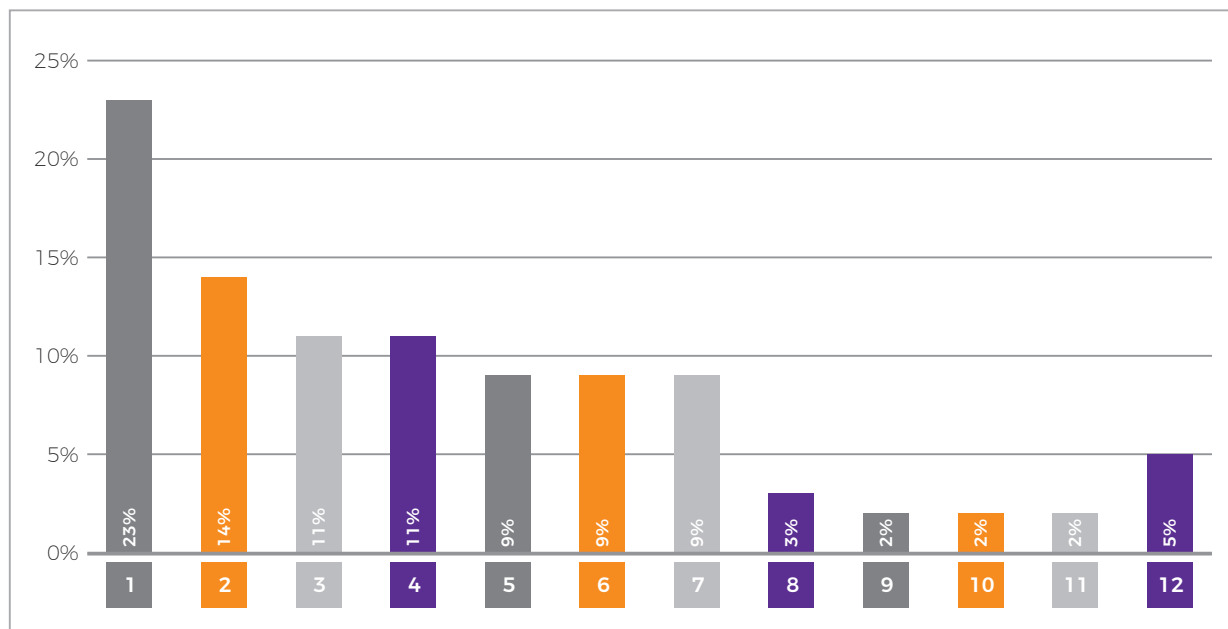
Confie nos seus estudos durante o ano, não vale a pena estudar na véspera das provas. Aliás, nestes dias, tente esquecer-la.

Para muitos estudantes, o maior desafio a ser superado nesta etapa é a ansiedade. Reconhecê-la é um grande passo em direção à realização do seu sonho. É tempo, então, de ter consciência de que você está passando por um período de muita expectativa, e a hora pede uma pausa para respirar fundo.

Não é tempo de negatividade. Uma projeção positiva dos dias de preparação que antecedem o exame, dos dias das provas e dos resultados obtidos é fundamental. Acredite nisto e você fará um excelente ENEM!

SAIBA QUAIS SÃO OS ASSUNTOS MAIS COBRADOS NO ENEM NA PROVA DE

# MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS



- 1** GRANDEZAS PROPORCIONAIS
- 2** CONJUNTOS E FUNÇÕES
- 3** GEOMETRIA ESPACIAL
- 4** ESTATÍSTICA
- 5** ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE
- 6** GEOMETRIA PLANA
- 7** ARITMÉTICA
- 8** NOÇÕES DE LÓGICA MATEMÁTICA
- 9** GEOMETRIA ANALÍTICA
- 10** TRIGONOMETRIA
- 11** PROGRESSÕES
- 12** OUTROS

<b>1</b> GRANDEZAS PROPORCIONAIS		<b>2</b> CONJUNTOS E FUNÇÕES		<b>3</b> GEOMETRIA ESPACIAL		<b>4</b> ESTATÍSTICA	
64%	Razões e Proporções	27%	Gráficos	33%	Prismas	78%	Medidas de Tendência Central
36%	Porcentagem	20%	Função Afim	27%	Cilindros	22%	Medidas de Dispersão
		16%	Conjuntos	8%	Esfera		
		14%	Função Quadrática	8%	Pirâmides		
		7%	F. Definidas por Sentenças	8%	Retas e Planos		
		7%	Miscelânea	7%	Cones		
		5%	Função Exponencial	5%	Poliedros		
		1%	Função Logarítmica	2%	Inscrições e Circunscrições		
		1%	Função Bijetora	2%	Troncos		
		1%	Relações Binárias				
		1%	Polinomial				

<b>5</b> ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE		<b>6</b> GEOMETRIA PLANA		<b>7</b> ARITMÉTICA		<b>8</b> NOÇÕES DE LÓGICA MATEMÁTICA	
68%	Probabilidade	51%	Área das Figuras Planas	58%	Sistema de Numeração e Métrico Decimal		
19%	Princípio Fundamental	12%	Circunferência e Círculo	30%	Problemas (4 Operações)		
8%	Combinação	10%	Polígonos Regulares	12%	Múltiplos e Divisores		
5%	Permutação	9%	Fundamentos				
		7%	Semelhança de Triângulos				
		4%	Arcos na Circunferência				
		4%	Quadriláteros Notáveis				
		3%	Outros				

<b>9</b> GEOMETRIA ANALÍTICA		<b>10</b> TRIGONOMETRIA		<b>11</b> PROGRESSÕES		<b>12</b> OUTROS	
42%	Fundamentos	47%	Razões Trigonométricas	68%	Geométricas		
42%	Reta	33%	Funções Trigonométricas	32%	Aritméticas		
11%	Circunferência	7%	Arcos na Circunferência				
5%	Cônicas	7%	Equações Trigonométricas				
		7%	Lei dos Senos e Cossenos				

# GRANDEZAS PROPORCIONAIS

## ESCALAS

Escala é uma relação matemática existente entre as dimensões verdadeiras de um objeto e a sua representação. Ou seja, toda representação cartográfica mantém uma certa relação de proporção com o objeto representado.

A representação da superfície terrestre, necessariamente, é de forma reduzida. Seria praticamente impossível um mapa em escala real em que os objetos fossem representados em sua dimensão verdadeira. Além do mais, qual praticidade isso teria?

A relação escalar é proporcional a um valor pré-estabelecido. Se duas figuras semelhantes possuem ângulos congruentes dois a dois, e lados correspondentes (homólogos) proporcionais, será sempre possível, por meio de um desenho geométrico, obter figuras semelhantes às do terreno.

Se o desenho e o terreno são figuras semelhantes, a razão ou relação de semelhança é dada por:

$$E = \frac{d}{D}$$

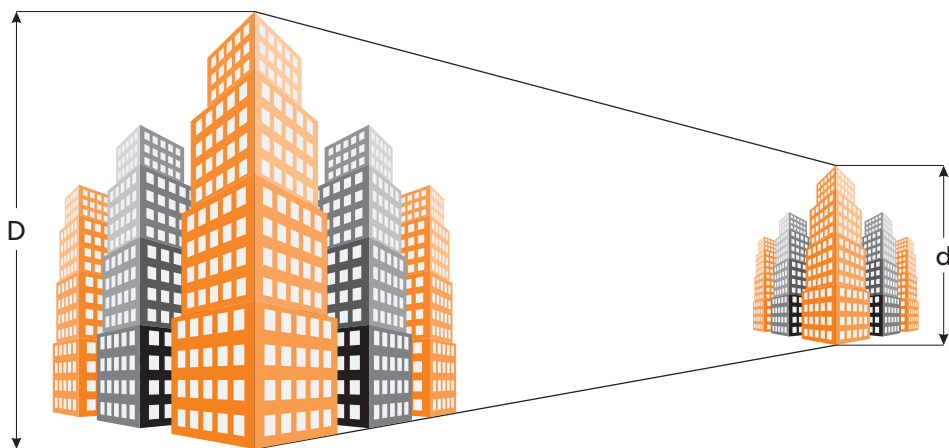
Onde:

D = Comprimento tomado no terreno, que é a distância real natural.

d = Comprimento homólogo no desenho, que é a distância prática.

**OBSERVAÇÕES:**

Por conveniência, na notação das escalas, usamos para o numerador, a unidade. Já para o denominador, adotamos um número múltiplo de dez.



### Interpretando a escala

**Exemplos:**

1:10.000

Significa que uma unidade no mapa corresponde a dez mil dessa mesma unidade no terreno (real).

Em unidades de medição linear, temos: 1 cm : 10.000 cm ou 1 cm : 100 m.

1:450.000

Significa que uma unidade no mapa corresponde a quatrocentas e cinquenta mil dessa mesma unidade no terreno (real).

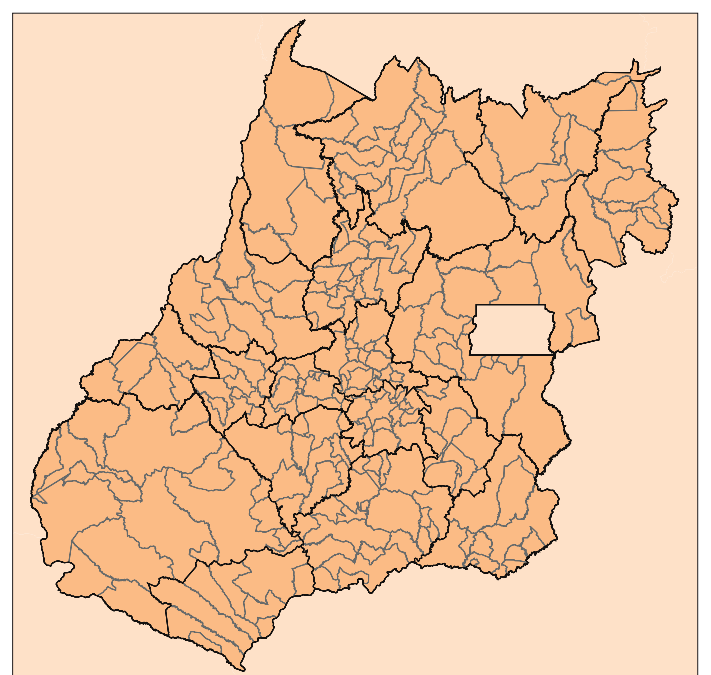
Em unidades de medição linear, temos: 1 mm : 450.000 mm ou 1 mm : 450 m.

### Escala x Área Representada

Uma mesma área geográfica pode ser representada em diferentes escalas, a depender do objetivo do mapeamento. Dessa forma, a escala escolhida retratará diferentemente os objetos presentes no território.

## MAIOR X MENOR

Quanto **MAIOR** o denominador, menor a escala, menos detalhes



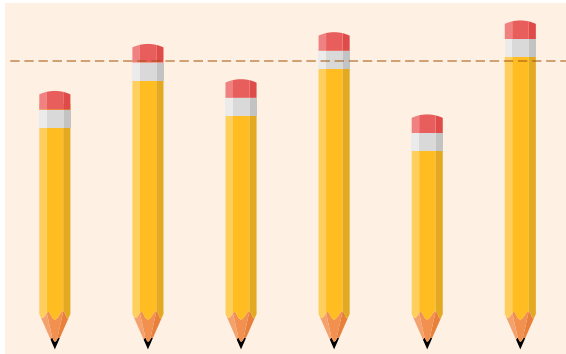
Quanto menor o denominador, **MAIOR** a escala, mais detalhes

# ESTATÍSTICA

## MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

1

### MÉDIA



Se considerarmos um conjunto de valores  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , a média aritmética ( $\bar{x}$ ) dos valores desse conjunto é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

2

### MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

#### Observe a seguinte situação

Cinco baldes contêm 4 litros de água cada um. Três outros, 2 litros de água cada um e, ainda, dois baldes com capacidade de 5 litros de água, cada um. Se toda essa água fosse distribuída igualmente em cada um dos baldes, com quantos litros ficaria cada um?

#### Solução

A quantidade de litros que ficaria em cada balde é a média aritmética ponderada:

$$\bar{x}_p = \frac{4\ell \times 5 + 2\ell \times 3 + 5\ell \times 2}{5 + 3 + 2} = 3,6\ell$$

Ou seja, a quantidade, em litros, de água em cada balde é chamada de média ponderada dos valores 4 litros, 2 litros e 5 litros, com pesos 5, 3 e 2.

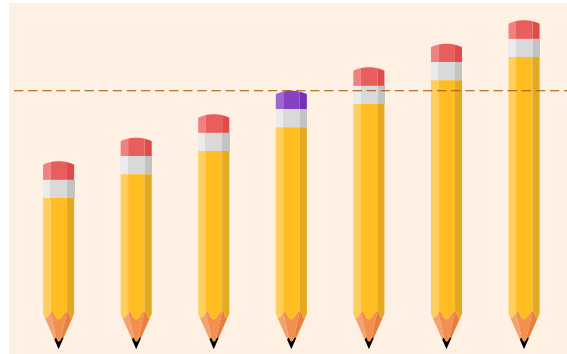
Obs.: A média ponderada nada mais é do que uma média aritmética com repetição de alguns dados, denominados “pesos”.

#### Generalizando

$$\bar{x}_p = \frac{x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_n \times p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

3

### MEDIANA

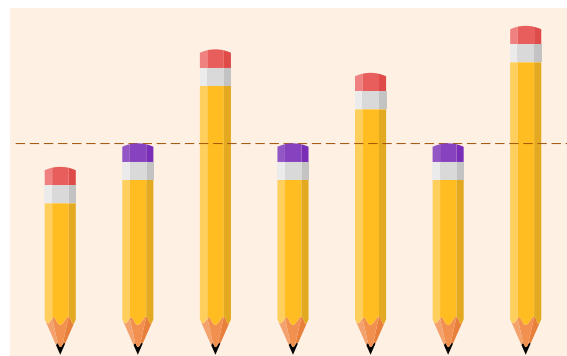


A mediana de um conjunto o **separa em duas partes** de modo que metade dos valores sejam menores que ela e a outra metade dos valores sejam maiores que ela. Em um conjunto onde seus elementos estão dispostos em **ordem crescente ou decrescente**, a **mediana é o termo central** desse conjunto ou o elemento que está exatamente no centro.

Para obtermos a mediana de um conjunto de dados, devemos sempre ordenar esse conjunto. Se o conjunto tiver um número ímpar de termos, a mediana é o próprio termo central. Caso o conjunto tenha um número par de termos, a mediana será a média aritmética dos dois termos centrais.

4

### MODA



É o valor observado com mais frequência dentre todos os dados. É utilizada quando os valores ou observações não são numéricos.

### EXEMPLOS

- 5, 8, 13, 15, 17 → Amodal (Não tem Moda)
- 4, 5, 7, 13, 4, 7, 9, 4 → Moda = 4

### O PRINCÍPIO DAS CASAS DOS POMBOS

Muitas vezes usado por nós de forma intuitiva, o Princípio da Casa dos Pombos é formalmente pouco conhecido, mas pode ser uma ferramenta importante na hora de resolver exercícios, que frequentemente têm aparecido nas provas do ENEM. O Princípio da Casa dos Pombos foi utilizado pela primeira vez por G. Lejeune Dirichlet em 1834 com o nome de Schubfachprinzip (“princípio das gavetas”). Em razão disso, esse princípio também é conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet. O Princípio da Casa dos Pombos pode ser anunciado em sua versão mais simples da seguinte forma:

“Se tivermos  $n+1$  pombos para serem colocados em  $n$  casas, então pelo menos uma casa conterá, pelo menos, dois pombos”

Essa afirmação parece óbvia uma vez que, se tivermos um grupo de  $n+1$  pombos voando para dentro de  $n$  casas, então, na pior das hipóteses, se todas as casas contiverem um pombo, fica claro que pelo menos uma casa deverá conter pelo menos dois pombos. Veja:



Para aplicá-lo, devemos identificar, na situação dada, quem faz o papel dos pombos e quem faz o papel das casas. Veja um exemplo de problema com resolução a partir do princípio.

Uma máquina contém pequenas bolas de borracha de 10 cores diferentes, sendo 10 bolas de cada cor. Ao inserir uma moeda na máquina, uma bola é expelida ao acaso. Observe a ilustração abaixo.



Qual é o menor número de moedas a serem inseridas na máquina para garantir a retirada de 4 bolas de uma mesma cor?

- A** 5 **B** 13 **C** 31 **D** 40 **E** 41

Como temos 10 possibilidades de cores (casas), inserindo  $3 \times 10 = 30$  moedas (pombos), ainda teríamos a possibilidade de obtermos exatamente 3 bolas de cada cor. Logo, para garantir a retirada de 4 bolas de uma mesma cor, deverão ser inseridas  $30 + 1 = 31$  moedas.

# Projeções ORTOGONAIS

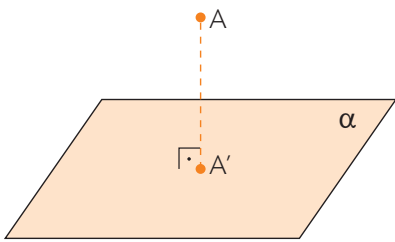
A projeção ortogonal de uma figura geométrica sobre um plano pode ser comparada à sombra dessa figura no momento em que o Sol está a pino, ou seja, com incidência de 90°.

Questões de projeções ortogonais têm sido frequentes no Enem e a maioria dos livros didáticos do ensino médio não abordam tal assunto. Então fique atento ao resumo que preparamos para você.

A projeção ortogonal de uma figura geométrica sobre um plano pode ser comparada à sombra dessa figura no momento em que o Sol está a pino, ou seja, com incidência de 90°. Vamos às definições das projeções ortogonais mais elementares.

## PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM PONTO SOBRE UM PLANO

A projeção ortogonal de um ponto A sobre um plano  $\alpha$  é a intersecção A' da reta r perpendicular ao plano  $\alpha$  traçada a partir de A, veja:



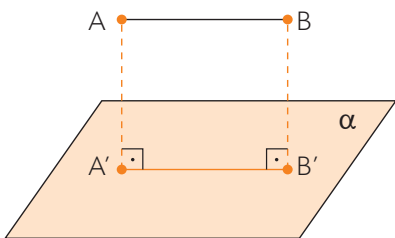
Projeção ortogonal A' do ponto A sobre o plano  $\alpha$ .

## PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM SEGMENTO DE RETA SOBRE UM PLANO

A projeção ortogonal de um segmento de reta sobre um plano dependerá da posição relativa desse segmento em relação ao plano, veja:

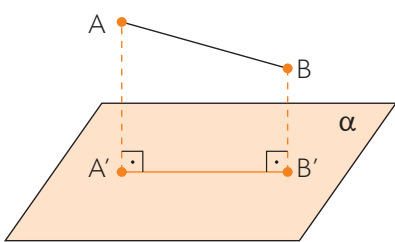
### 1º CASO: SEGMENTO DE RETA PARALELO AO PLANO.

A projeção ortogonal é um segmento de reta igual à medida do segmento de reta, ou seja, a projeção é em verdadeira grandeza.



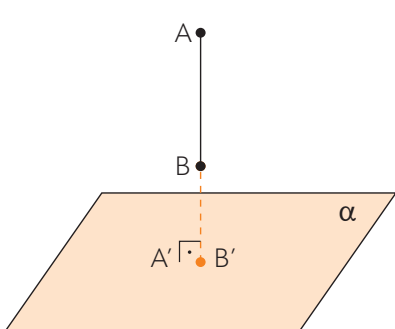
### 2º CASO: SEGMENTO DE RETA INCLINADO EM RELAÇÃO AO PLANO.

A projeção ortogonal é um segmento de reta cuja medida é menor que a medida do segmento de reta.



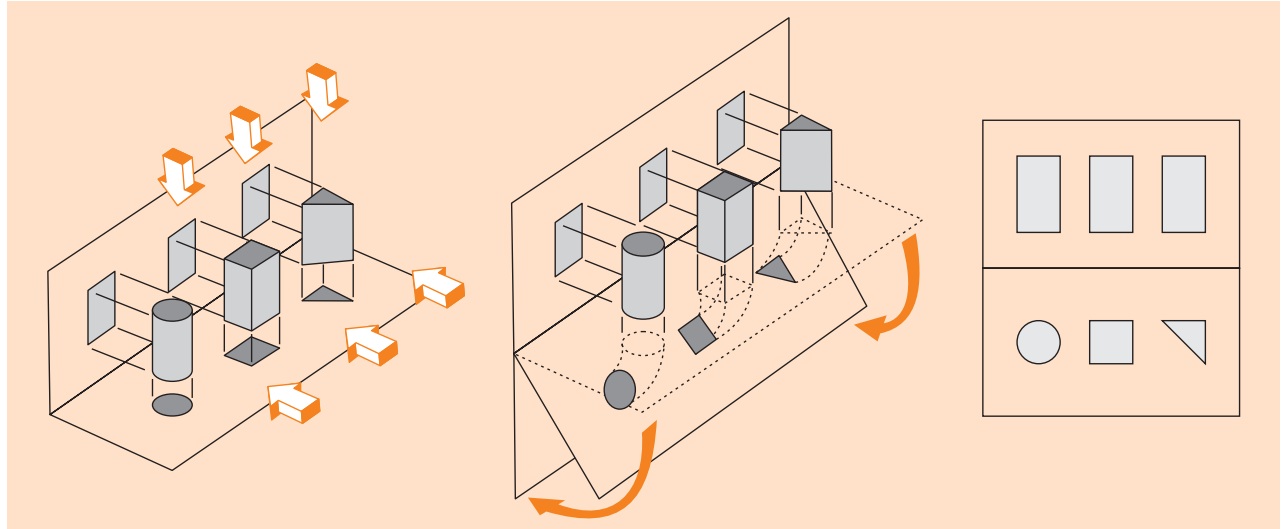
### 3º CASO: SEGMENTO DE RETA PERPENDICULAR AO PLANO.

A projeção ortogonal é um ponto.



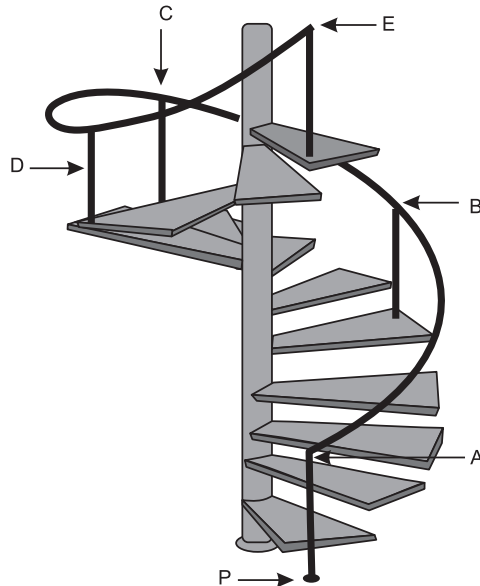
## PROJEÇÃO ORTOGONAL DE UM SÓLIDO SOBRE UM PLANO

A projeção ortogonal de um sólido qualquer sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais de seus pontos sobre o plano, veja:

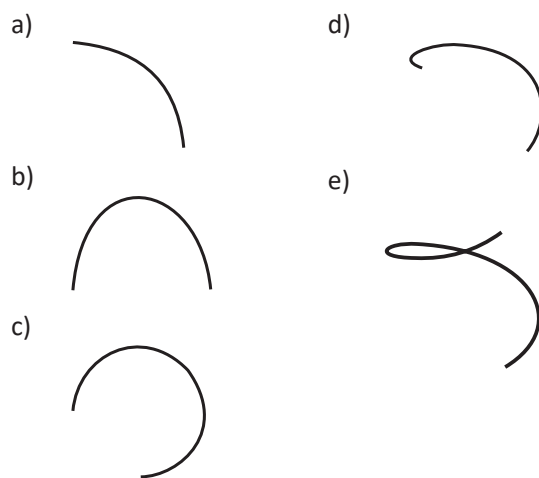


### VEJA ALGUMAS QUESTÕES DO ENEM:

**ENEM 2014** | O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol), representada na figura. Os cinco pontos A, B, C, D, E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto D.

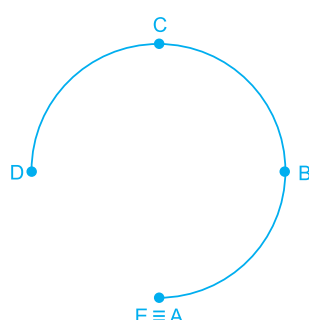


A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:

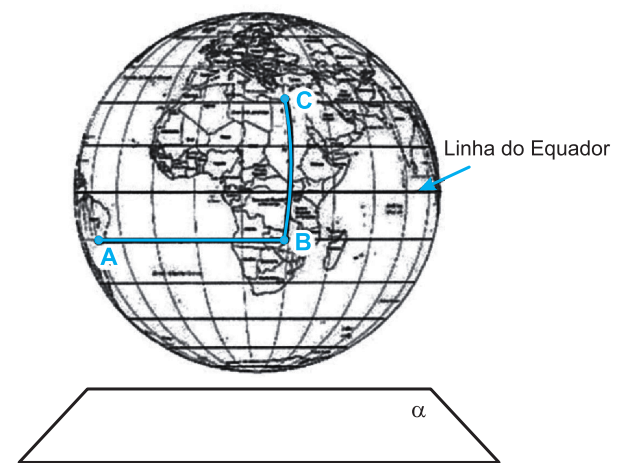


#### Resolução comentada: [C]

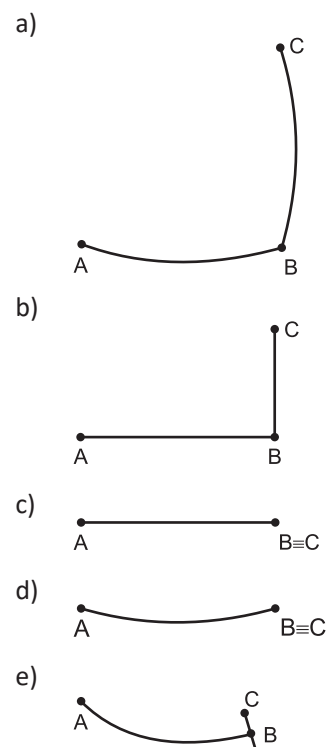
Tendo em vista que a escada é circular à projeção ortogonal, o corrimão completo sobre o piso (plano) é igual a uma circunferência. As projeções dos pontos A ao ponto D correspondem a 3/4 da circunferência.



**ENEM 2016** | A figura representa o globo terrestre e nela estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B, e o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano  $\alpha$  é paralelo à linha do equador na figura.



A projeção ortogonal, no plano  $\alpha$ , do caminho traçado no globo pode ser representada por:



#### Resolução comentada: [E]

Observe que, para quem olha de cima para baixo, a projeção ortogonal forma uma curva que se estende de A até B e, depois disso, faz um pequeno movimento para dentro e para a esquerda, quando "sobe" no mapa. Assim, a alternativa correta é a letra E.



# Taxas: INFLAÇÃO, REAL E APARENTE

A inflação é o aumento persistente e generalizado no valor dos preços. Quando a inflação chega a zero, dizemos que houve uma estabilidade nos preços.

O Brasil conta com diferentes índices que medem a inflação. Os principais são o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA, a inflação oficial abrange as famílias com rendimentos mensais entre 1 e 40 salários mínimos, qualquer que seja a fonte de rendimentos) e o Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC, que abrange as famílias com rendimentos mensais compreendidos entre 1 e 6 salários mínimos). Ambos são medidos pelo IBGE. Há, ainda, o Índice Geral de Preços (IGP), calculado pela Fundação Getúlio Vargas (FGV), e o Índice de Preços ao Consumidor (IPC), medido pela Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas (Fipe).

Os rendimentos financeiros são responsáveis pela correção de capitais investidos perante uma determinada taxa de juros. Essas taxas são corrigidas pelo governo de acordo com os índices inflacionários referentes a um período. Isso ocorre no intuito de corrigir a desvalorização dos capitais aplicados durante uma crescente alta da inflação.

Entendemos por taxa aparente o índice responsável pelas operações correntes. Dizemos que a taxa real e a aparente são as mesmas quando não há incidência de índices inflacionários no período. Mas quando existe inflação, a taxa aparente será formada por dois fatores: um ligado à inflação e o outro, ao juro real.

Para entendermos melhor a obtenção da taxa aparente e da taxa real de juros, vamos simular a seguinte situação:

Um banco oferece uma aplicação na qual a taxa de juros efetiva corresponde a 38% ao ano. Admitindo que no mesmo período fora registrado uma inflação de 15%, podemos afir-

mar que a taxa de 38% oferecida pelo banco não foi a taxa real de remuneração do capital, mas, sim, uma taxa aparente, pois os preços nesse período foram reajustados.

Para obtermos a taxa de juros real, devemos aplicar o capital à taxa de 38% e corrigir monetariamente o mesmo capital, usando o índice inflacionário do período. Feitos esses cálculos, basta realizar a comparação entre os valores, obtendo a taxa real de rendimento.

Supondo um capital de R\$ 100,00:

Montante da aplicação referente à taxa de juros de 38%:

$$R\$ 100,00 \times 1,38 = R\$ 138,00$$

Montante da correção do índice inflacionário correspondente a 11%:

$$R\$ 100,00 \times 1,15 = R\$ 115,00$$

Observe que o ganho real foi de R\$ 23,00 em relação ao valor corrigido de acordo com o índice inflacionário. Portanto, a taxa real é dada pela razão:

$$\frac{23,00}{115,00} = 0,20 = 20\%$$

A taxa real foi de 20%.

Podemos obter a taxa real, a taxa aparente e a inflação, utilizando a seguinte expressão:

$$1 + i_A = (1 + i_R) \cdot (1 + i_I)$$

Sendo:

$i_A$  (taxa aparente)

$i_R$  (taxa real)

$i_I$  (inflação)



As taxas de juros são corrigidas de acordo com os índices inflacionários referentes a um período. Isso ocorre no intuito de corrigir a desvalorização dos capitais aplicados durante uma crescente alta da inflação.

## COPE - ENSINO MÉDIO EQUIPE DE MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS



ARACÉLI

BRUNO FRAGA

CRISTIANO SIQUEIRA

LAFAYETTE


PULLIG

RAPHAEL

## AGENDE SUA ENTREVISTA

 Rua 36 | nº 149 | Setor Marista

 [www.grupopreparaenem.com.br](http://www.grupopreparaenem.com.br)

 62 3877-3223

# COPE

---

## ENSINO MÉDIO



**1º LUGAR MEDICINA UFG - LUIZ FERNANDO SPOSITO**