Estratégia Militares

CURSO EXTENSIVO

ITA 2023

GEOMETRIA ESPACIAL I

AULA 15

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

APRESENTAÇÃO

Olá!

Iniciaremos o último assunto de geometria, a espacial. Para aprender bem o conteúdo desta aula, o requisito básico é ter feito as aulas de geometria plana e ter bem consolidado os diversos conceitos abordados nelas. Nesta aula, estenderemos o conceito que aprendemos no plano ao espaço tridimensional. Veremos muitos exemplos e teoremas que nos ajudarão a resolver os exercícios dos vestibulares.

Se você for um aluno que já possui os conceitos de geometria espacial bem fundamentados, pule direto para a lista de exercícios e tente resolver todas as questões. Caso você não consiga resolver alguma, consulte a resolução e, sempre que precisar, você poderá nos encontrar no fórum de dúvidas.

Então, vamos à aula.

Bons estudos.

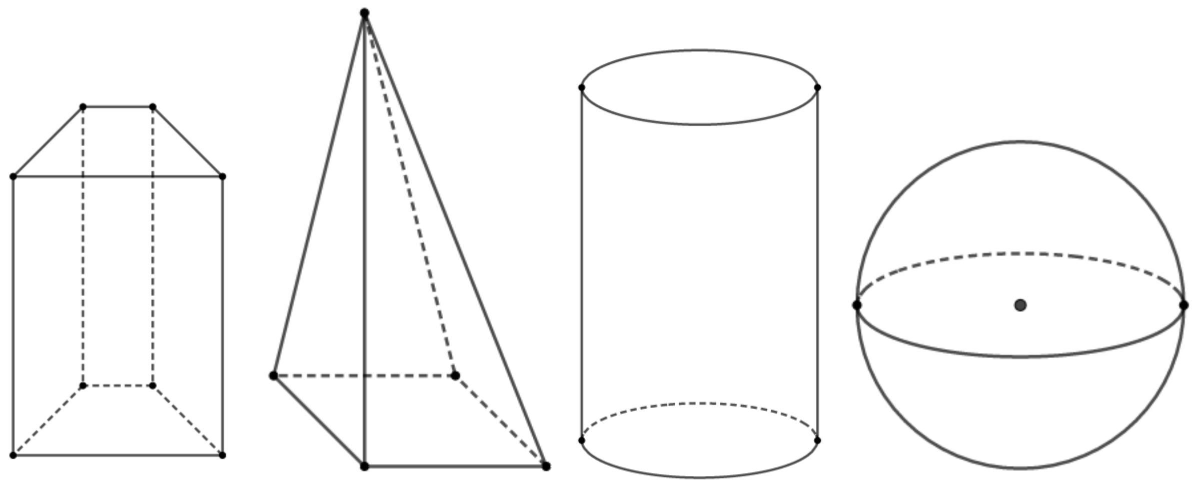
FALE COMIGO

/profvictorso

1. GEOMETRIA DE POSIÇÃO

No estudo da Geometria Plana, vimos diversos postulados sobre os elementos primitivos (ponto, reta e plano). Esses postulados foram apenas uma simplificação da geometria euclidiana. Podemos adaptar esses postulados para o espaço e usá-los para construir o nosso conhecimento na Geometria Espacial. Na verdade, tudo o que aprendemos lá será usado nesta aula, ou seja, os conceitos de áreas de figuras planas, propriedades de triângulos e círculos, polígonos etc. Tudo isso será aproveitado. A única diferença aqui é a inclusão de mais uma dimensão, surgindo, assim, as figuras de sólidos. Estudaremos todos os conceitos de sólidos que são passíveis de serem cobrados na prova.

Para o estudo da Geometria Espacial, usaremos uma noção intuitiva da percepção de espaço. Diferentemente da Geometria Plana, em que era mais fácil desenhar as figuras geométricas, na Geometria Espacial devemos representar uma figura tridimensional em um plano. Para isso, usaremos nossa imaginação para fazer uma representação ilusória das figuras tridimensionais. Usaremos a linha contínua para representar as partes dos sólidos que são visíveis de frente e a linha pontilhada para as partes que não são visíveis. Vejamos os exemplos abaixo:



Agora, vamos adaptar os postulados ao nosso estudo geométrico do espaço.

1.1. POSTULADOS OU AXIOMAS

Considerando que os postulados ou axiomas são proposições primitivas aceitas sem demonstração, vejamos os principais.

1.1.1. POSTULADO DA EXISTÊNCIA

a) Existe reta e numa reta, existem infinitos pontos dentro e fora dela.

b) Existe plano e num plano, existem infinitos pontos dentro e fora dele.

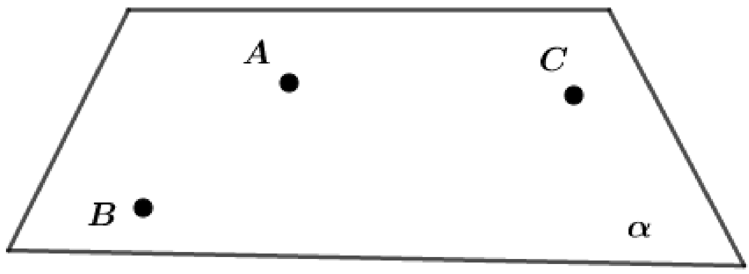
Aqui, temos a inclusão de diversos pontos fora do plano.

1.1.2. POSTULADO DA DETERMINAÇÃO

a) Dois pontos distintos no espaço determinam uma única reta que passa por eles.

b) Três pontos não colineares no espaço determinam um único plano que passa por eles.

$$A \neq B, \exists r \text{ tal que } r = \overleftrightarrow{AB}$$

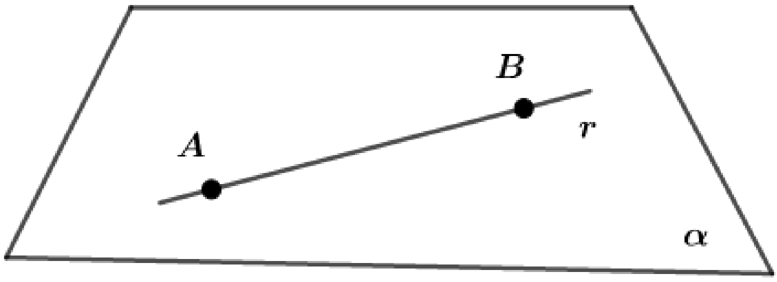


$$A, B, C \text{ são não colineares, então } \exists \alpha \text{ tal que } \alpha = (A; B; C)$$

Podemos usar a notação $\alpha = (A; B; C)$ para dizer que α é determinado por esses três pontos.

1.1.3. POSTULADO DA INCLUSÃO

a) Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.



Se $A \in \alpha$,$B \in \alpha$ e $A \neq B$, então $r = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow r \subset \alpha$.

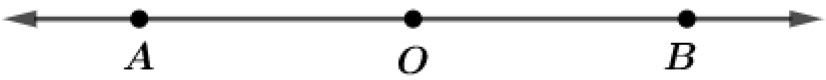
1.1.4. POSTULADOS DA SEPARAÇÃO

a) Um ponto $\boldsymbol{O}$ contido em uma reta $\overleftrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ separa-a em duas semirretas $\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}$ e $\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}$, e a origem das semirretas é o ponto dado.

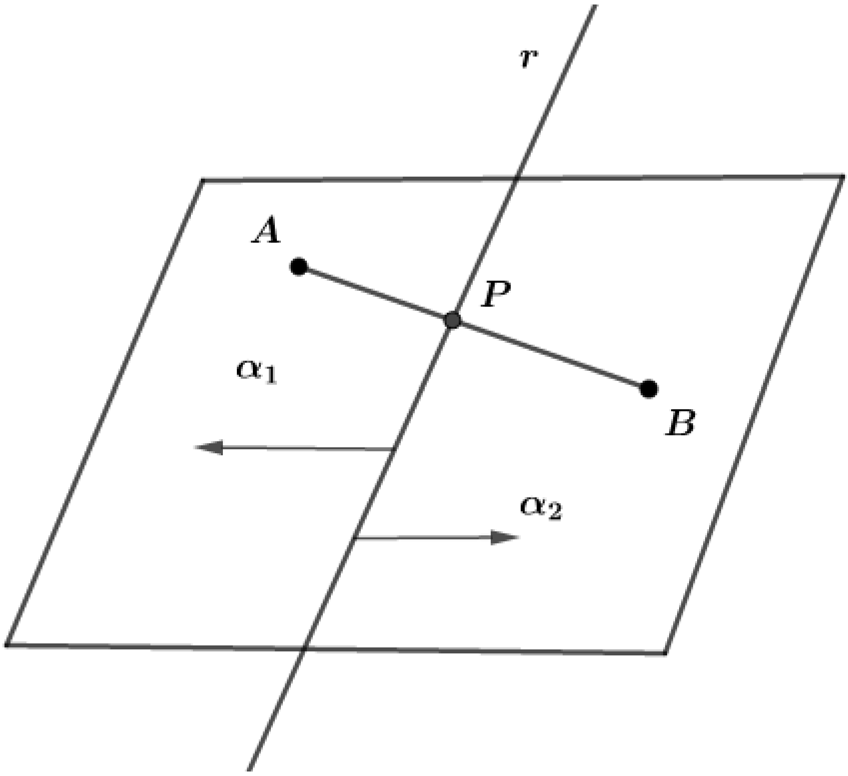
b) Uma reta $\boldsymbol{r}$ contida em um plano $\boldsymbol{\alpha}$ separa-o em dois semiplanos $\boldsymbol{\alpha_1}$ e $\boldsymbol{\alpha_2}$, e a origem dos semiplanos é a reta dada.

c) Um plano $\boldsymbol{\alpha}$ de um espaço $\boldsymbol{E}$ separa-o em dois semiespaços, $\boldsymbol{E_1}$ e $\boldsymbol{E_2}$, e a origem dos semiespaços é o plano dado.

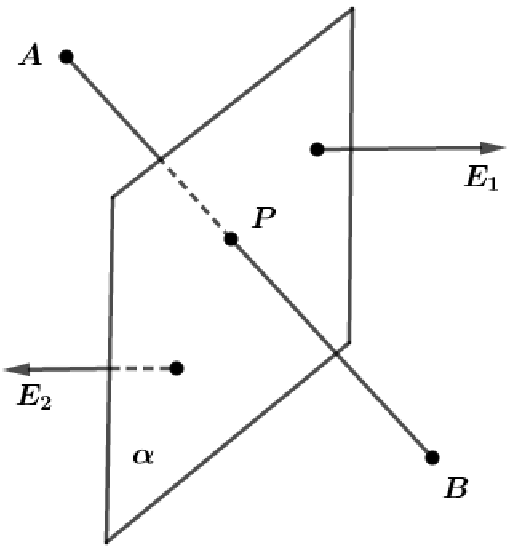
a) $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas



b) $(A \in \alpha_1, A \notin r, B \in \alpha_2, B \notin r) \Rightarrow \overline{AB} \cap r = \{P\}$



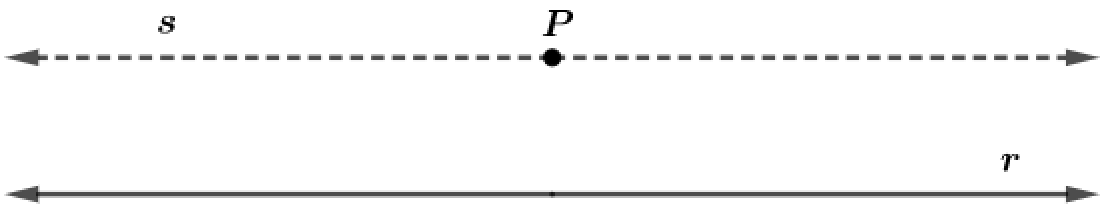
c) $(A \in E_2, A \notin \alpha, B \in E_1, B \notin \alpha) \Rightarrow \overline{AB} \cap \alpha = \{P\}$



O plano α divide o espaço E em dois semiespaços, E_1 e E_2.

1.1.5. POSTULADO DE EUCLIDES

Por um ponto $\boldsymbol{P}$, situado fora de uma reta $\boldsymbol{r}$, passa uma única reta paralela à $\boldsymbol{r}$ que passa por $\boldsymbol{P}$.



$\exists s$ tal que $P \in s$ e $r//s$

Esse postulado é conhecido como postulado das paralelas. Lembrando da definição de retas paralelas, se $r//s$, temos apenas duas possibilidades: ou r e s são retas coincidentes ($r \equiv s$) ou r e s são distintas. Assim, poderíamos ter $P \in r$ e, mesmo assim, existiria uma reta s paralela à reta r (quando $r \equiv s$).

1.2. O ESPAÇO

Visto os postulados, vamos iniciar a construção da base do conhecimento de Geometria Espacial. Iniciemos pelas propriedades decorrentes dos axiomas vistos. Esses conceitos serão importantes na hora de resolver questões.

1.2.1. O PLANO

Pelo postulado da determinação, sabemos que três pontos não colineares determinarão um único plano. Assim, um triângulo cujos vértices são A, B, C determinarão um único plano no espaço.

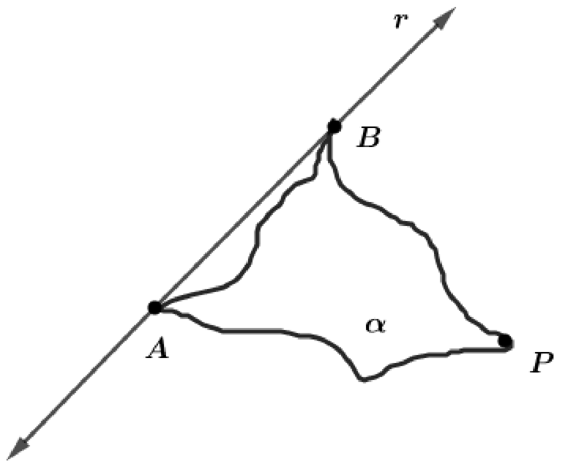
Vamos apresentar algumas propriedades provenientes dos postulados. Não veremos a demonstração de todas elas, pois este não é um assunto que será cobrado diretamente na prova.

Propriedade 1. Uma reta $\boldsymbol{r}$ e um ponto $\boldsymbol{P} \notin \boldsymbol{r}$ determinam um único plano.

Supondo que dois pontos A e B pertencem à reta r e sabendo que P não pertence à r, temos que A, B, P não são colineares e, assim, pelo postulado da determinação, esses pontos determinam um único plano. Essa não é a prova formal desse teorema, mas apenas uma forma de verificar sua veracidade. Para demonstrá-la, devemos mostrar que existe um plano α que contém P e r, e provar que o plano é único. Vejamos a demonstração:

I) Prova da existência do plano

Sabemos, pela suposição feita anteriormente, que os pontos distintos A e B de r determinam um único plano com P.



Assim, se o plano α é determinado pelos pontos A, B, P, temos:

$$A \neq B \text{ e } A, B \in r \Rightarrow r \subset \alpha$$

Portanto, existe um plano α que contém r e P, ou seja, $\alpha = (r; P)$. Vamos provar que ele é único.

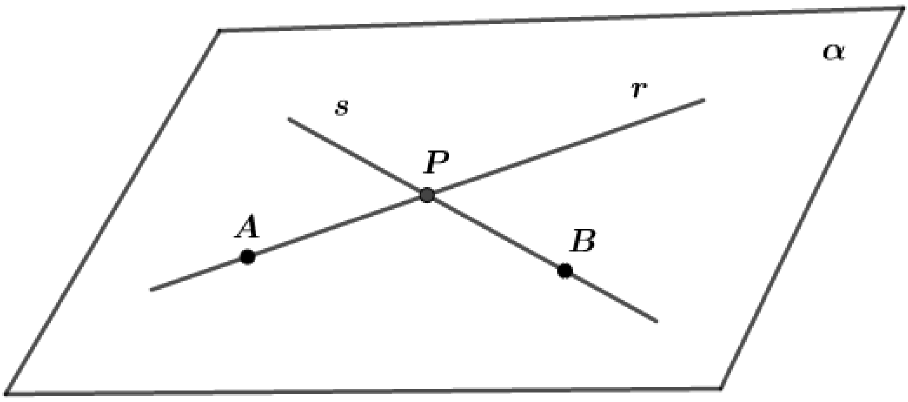
II) Prova da unicidade

Se β é um plano determinado pela reta r e pelo ponto P, temos $\beta = (r; P)$. Se A e B são pontos da reta r, então $\beta = (A; B; P)$. Mas $\alpha = (A; B; P)$, portanto, $\alpha = \beta$. Ou seja, o plano α é único.

Portanto, existe um único plano α tal que $P \in \alpha$ e $r \subset \alpha$.

Propriedade 2. Duas retas concorrentes determinam um único plano.

Sabendo que r e s são retas concorrentes num ponto P, tomando-se os pontos $A \in r$ e $B \in s$ tal que $A \neq P$ e $B \neq P$, temos que existe um plano α tal que $\alpha = (A; B; P)$.



Como $r = \overleftrightarrow{AP}$, temos que $r \subset \alpha$. Analogamente, $s = \overleftrightarrow{BP}$ implica que $s \subset \alpha$. Portanto, o plano α determinado pelos pontos A, B, P é o único plano que contém simultaneamente as retas r e s.

Propriedade 3. Duas retas paralelas e distintas determinam um único plano.

Nesse caso, temos a própria definição de retas paralelas. Se r e s são retas paralelas tais que $r \neq s$, então existe um plano α que contém r e s.

Para provar que esse plano é único, podemos tomar os pontos distintos A e B pertencentes à r e o ponto P pertencente à s. Assim, temos que se $\alpha = (r; s)$:

$$A, B \in r \text{ e } P \in s \Rightarrow \alpha = (r; s) = (A; B; P)$$

Se existir um outro plano β tal que $\beta = (r; s)$, então:

$$A, B \in r \text{ e } P \in s \Rightarrow \beta = (r; s) = (A; B; P) = \alpha$$

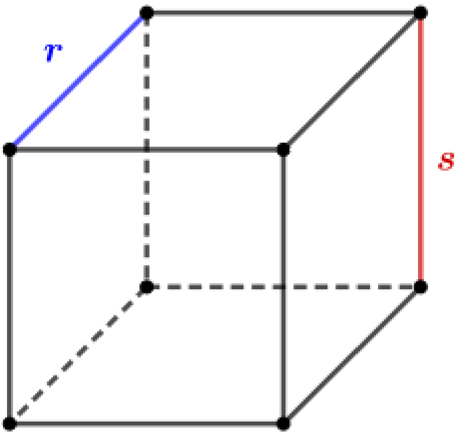
Portanto, os planos α e β são coincidentes, ou seja, há apenas um único plano que contém as retas paralelas r e s.

1.2.2. RETAS REVERSAS

Duas retas no espaço são reversas se não estão contidas em um mesmo plano.

$$\boxed{r \text{ e } s \text{ são retas reversas} \Leftrightarrow \nexists \alpha \text{ tal que } r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha}$$

Um exemplo de retas reversas pode ser visto na figura a seguir:

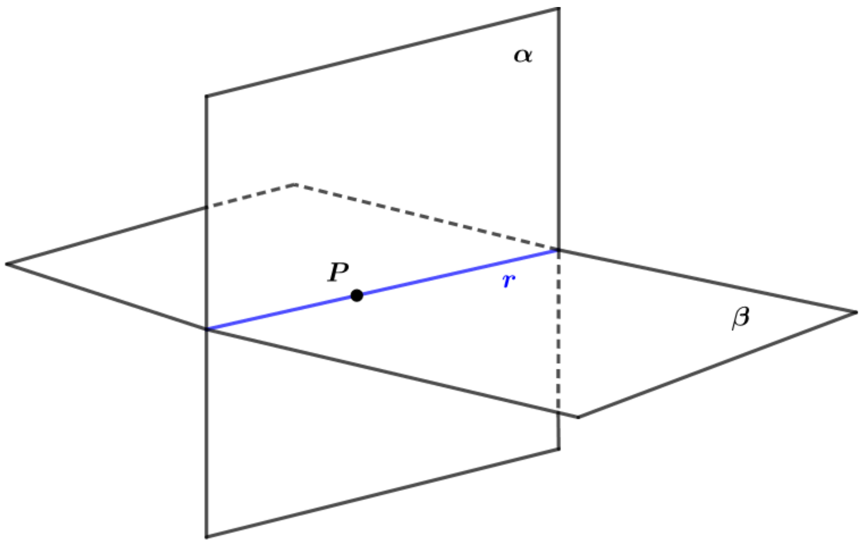


Note que os segmentos de reta r e os segmentos de reta s do cubo não podem pertencer a um mesmo plano, pois não conseguimos tomar um plano que contenha uma das retas sem que a outra o "fure".

1.2.3. TEOREMA DA INTERSECÇÃO

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Se dois planos distintos possuem um ponto em comum, então a intersecção entre eles} \\ \text{é uma única reta que passa por esse ponto.}\end{array}}$$

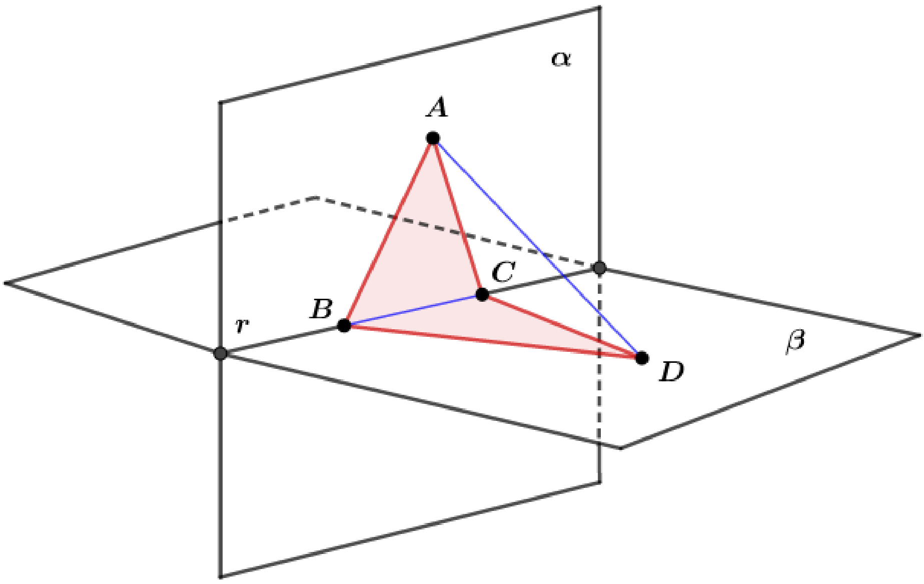
O que devemos extrair desse teorema é que a intersecção entre dois planos não paralelos e não coincidentes é uma reta, ou seja, dois planos secantes formam uma reta. Basta pensarmos no quarto da nossa residência: duas paredes adjacentes podem ser vistas como dois planos, e o que as separa é justamente uma reta. A figura abaixo exemplifica o teorema:



$$\alpha \cap \beta = r$$

1.2.4. QUADRILÁTERO REVERSO

Tomemos dois planos secantes, α e β, cuja intersecção é a reta r e os pontos A, B, C, D representados conforme a figura abaixo:



Chamamos de quadrilátero reverso à figura $ABCD$, pois as diagonais $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ são segmentos de retas reversos. Uma outra definição para quadrilátero reverso é que seus quatro vértices não podem pertencer a um mesmo plano.

1.3. PARALELISMO NO ESPAÇO

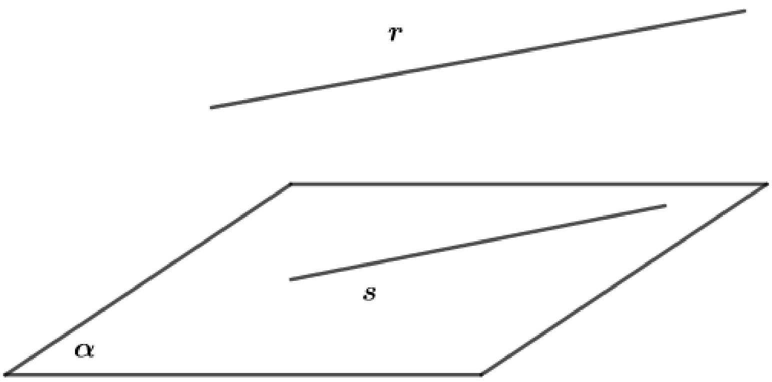
Relembremos a definição de retas paralelas e adaptemos ao espaço. Dizemos que duas retas r e s no espaço são paralelas se, e somente se, são coplanares e não possuem ponto em comum, ou seja, $r \parallel s \Leftrightarrow r \cap s = \emptyset$. Note que a definição é a mesma usada na Geometria Plana.

Conhecendo esse fato, vamos estudar o paralelismo entre retas e planos no espaço. Iniciando pelo teorema:

Uma reta não contida em um plano é paralela a este plano se, e somente se, for paralela a uma reta contida neste plano.

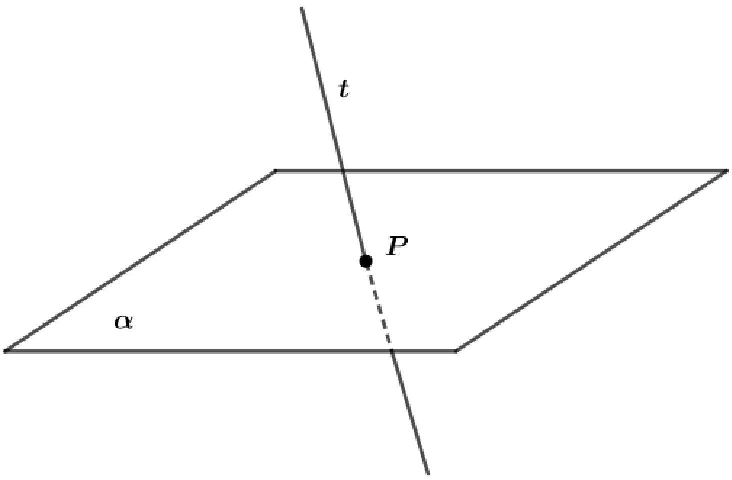
A questão é: como saber se uma reta é paralela a um plano?

Sabemos que, em um plano, há infinitas retas, e conhecemos a definição de retas paralelas. Assim, basta tomar uma reta do plano que seja paralela à reta dada. Intuitivamente, se pensarmos em uma reta que "não fura" o plano, podemos afirmar que, ou ela está contida no plano, ou ela é paralela ao plano. Vejamos as figuras a seguir:



$$s \subset \alpha \ e \ s \cap r = \emptyset \Rightarrow r \parallel \alpha$$

Neste caso, a reta r é paralela ao plano α, pois podemos tomar a reta s contida em α que é paralela à reta r.



Esse é um exemplo de reta que não é paralela ao plano, pois a reta t intercepta o plano no ponto P, ou seja, $r \cap \alpha = \{P\} \neq \emptyset$.

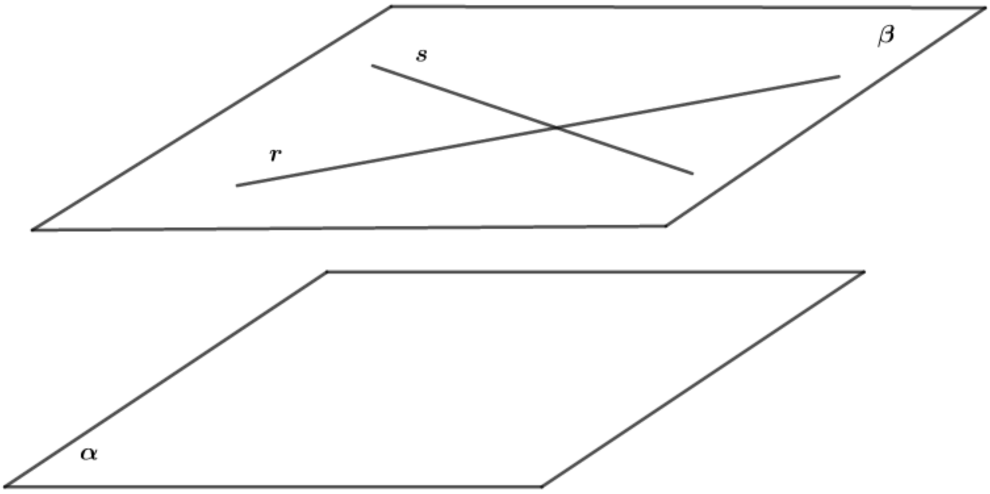
1.3.1. PLANOS PARALELOS

A definição de paralelismo entre planos é a mesma usada entre retas. Vejamos.

Os planos α e β são paralelos se, e somente se, eles não têm ponto comum ou são coincidentes.

Para saber se dois planos são paralelos, podemos tomar duas retas concorrentes a um plano e, se essas retas forem ambas paralelas a outro plano, então os planos são paralelos. Esse é o teorema para testar o paralelismo de planos.

Dois planos α e β são paralelos entre si se, e somente se, existir em β um par de retas concorrentes paralelas a α.

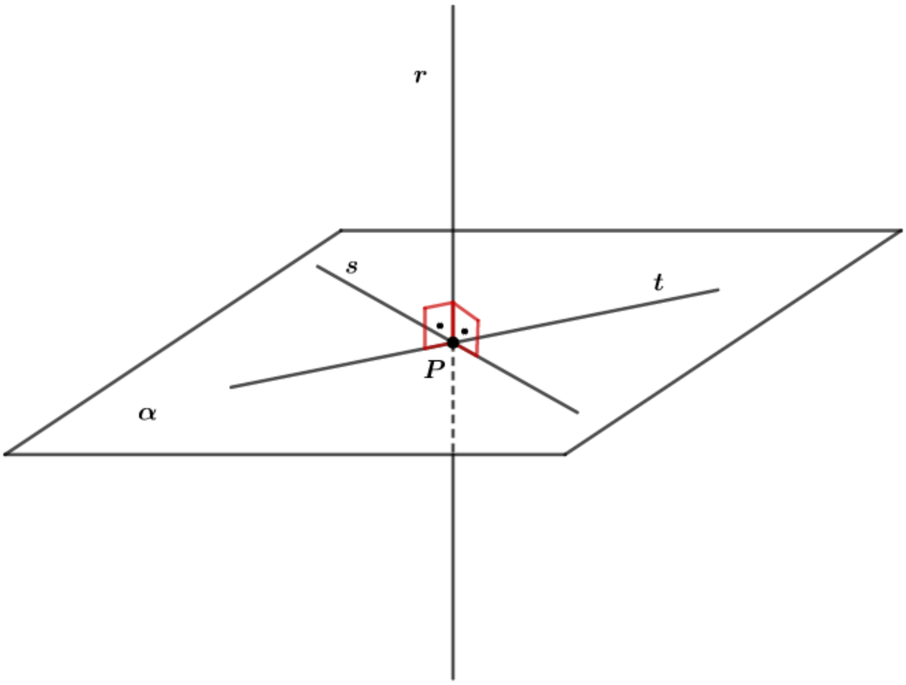


As retas r e s estão contidas no plano β e ambas são paralelas ao plano α, logo, α é paralelo a β.

1.4. PERPENDICULARISMO NO ESPAÇO

Como saber se uma reta é perpendicular a um plano?

Intuitivamente, se r é uma reta perpendicular a um plano α, então r deve interceptar o plano em um ponto P (esse ponto é chamado de pé da reta r, perpendicular ao plano). Para que seja perpendicular, todas as retas contidas em α que passam por P devem ser perpendiculares à reta r.



Pela figura, podemos ver que $r \perp s$ e $r \perp t$, como $s, t \subset \alpha$, temos que $r \perp \alpha$.

Assim, segue o teorema:

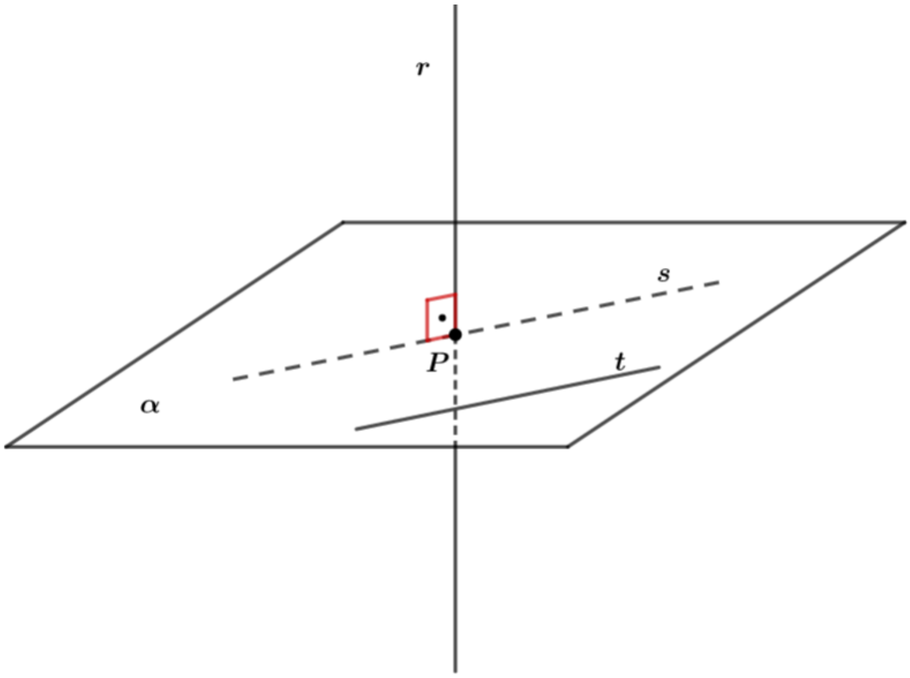
$$\boxed{\text{Uma reta é perpendicular a um plano se, e somente se, for perpendicular a duas retas concorrentes do plano.}}$$

Esse teorema garante que uma reta é perpendicular a um plano.

Para saber se dois planos são perpendiculares, basta tomar uma reta contida em um deles que seja perpendicular ao outro.

1.4.1. RETAS ORTOGONAIS

Dizemos que duas retas são ortogonais se elas são reversas e formam um ângulo reto, ou seja, se r é perpendicular a um plano α e t é uma reta do plano que não possui ponto comum com r, então r e t são ortogonais.

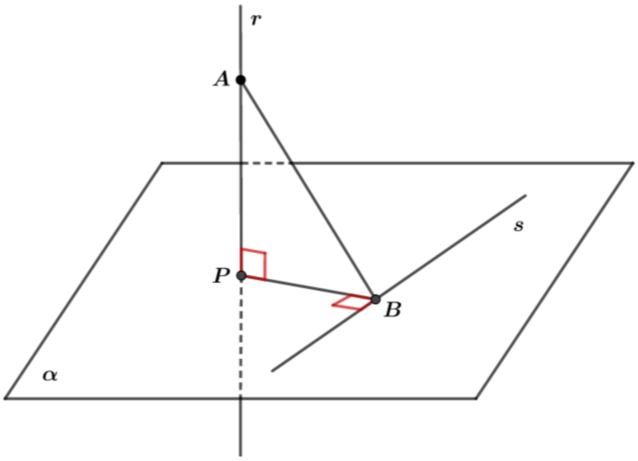


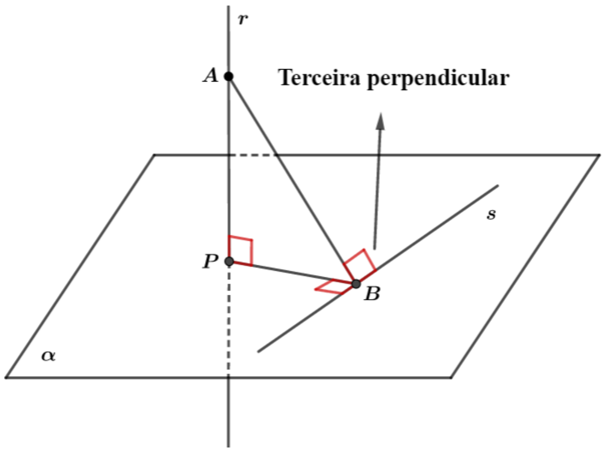
Na figura acima, r e t são retas ortogonais, pois r é perpendicular ao plano α e não intercepta a reta t contida em α, logo r e t são reversas e formam um ângulo reto. Note que $t \parallel s$.

1.4.2. TEOREMA DAS TRÊS PERPENDICULARES

Sejam r e s duas retas reversas e um plano α tais que r é perpendicular a α, $r \cap \alpha = \{P\}$ e $s \subset \alpha$. Se A é um ponto pertencente à r e B é um ponto pertencente à s, então $\overline{AB}$ é perpendicular à s se, e somente se, $\overline{PB}$ é perpendicular à s.

Essa propriedade é conhecida como o **teorema das três perpendiculares**. O que podemos afirmar dela é que, tomando-se A como um ponto qualquer da reta r, se $r \perp \alpha$ e $\overline{PB} \perp s$, então $\overline{AB} \perp s$.

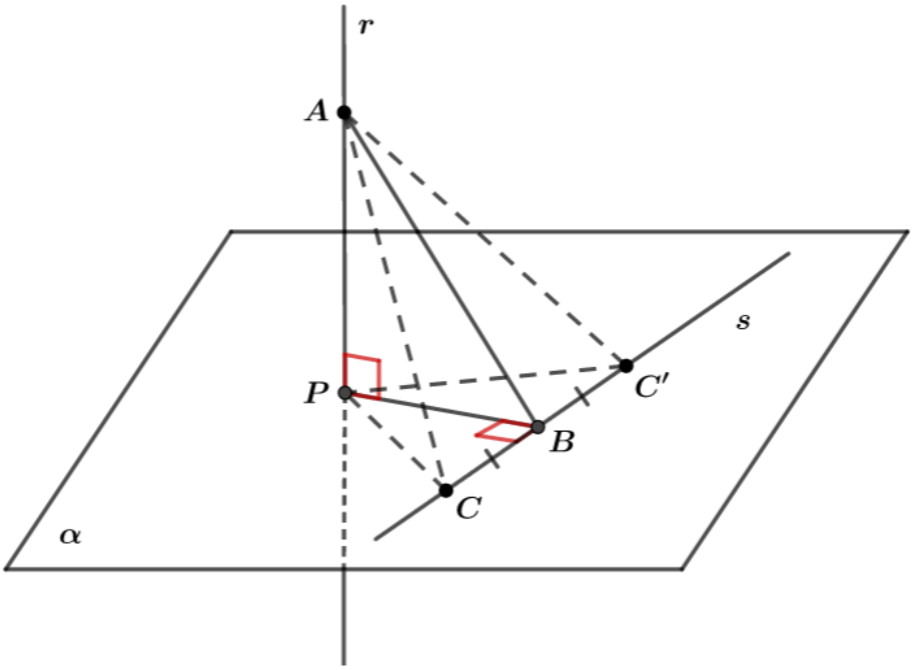




Vejamos sua demonstração.

Demonstração

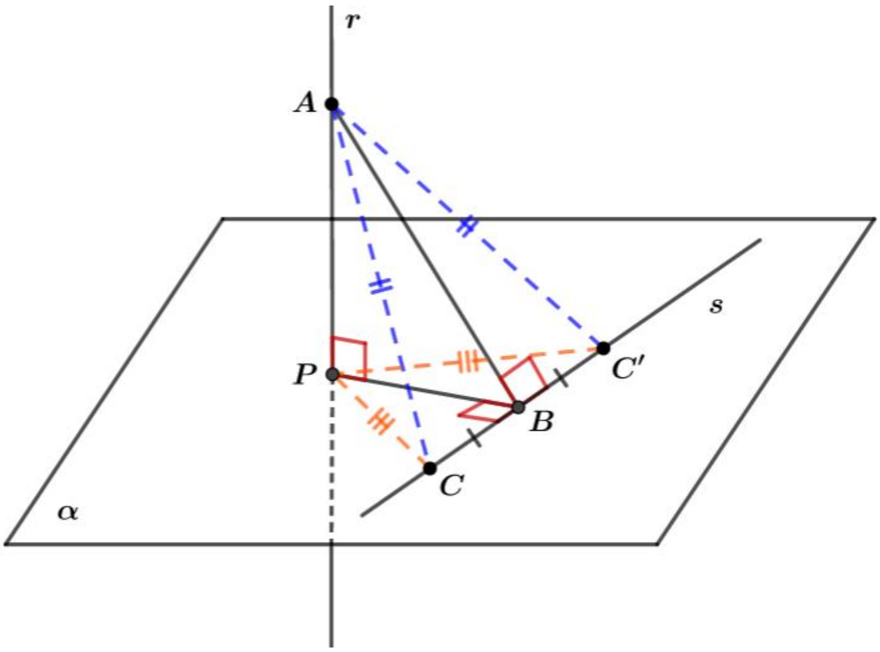
Considere a figura abaixo:



A reta r é perpendicular ao plano α e é ortogonal à reta s. C e C' são pontos pertencentes à s tais que $CB = C'B$, ou seja, B é ponto médio do segmento CC'. Pelo critério de congruência LAL, podemos ver que:

$$CB = C'B, P\hat{B}C = P\hat{B}C', PB = PB \Rightarrow \Delta PBC \equiv \Delta PBC' \therefore PC = PC'$$

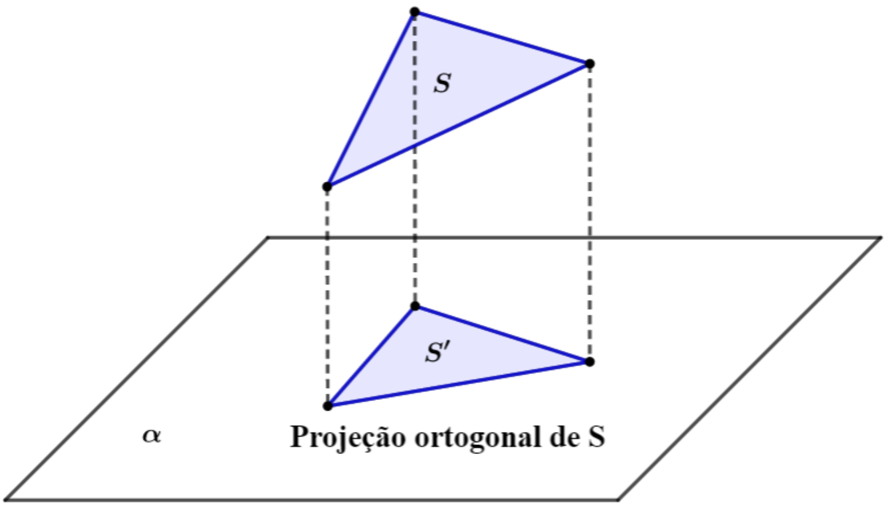
Como AP é segmento de reta comum dos triângulos ΔAPC e $\Delta APC'$, $PC = PC'$ e $APC = APC'$ (pois $r \perp \alpha$), temos por LAL que $\Delta APC \equiv \Delta APC'$, logo, $AC = AC'$. Com isso, $\Delta ACC'$ é isósceles e, portanto, como $CB = CB'$, temos que AB é altura do triângulo, ou seja, AB forma ângulo reto com a reta s.



Esse teorema será muito útil para resolvermos algumas questões de Geometria Espacial.

1.5. PROJEÇÕES ORTOGONAIS

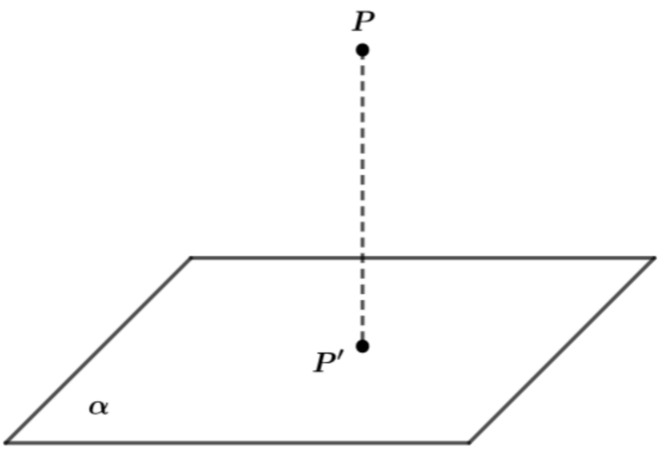
Projeção ortogonal é a imagem de uma figura geométrica projetada perpendicularmente em um plano. Podemos entender essa projeção como a sombra que a figura faz em um plano quando o sol está no seu ponto mais alto. Desse modo, a dimensão da figura projetada não seria alterada.



Estudaremos agora os tipos de projeções.

1.5.1. PROJEÇÃO DE UM PONTO

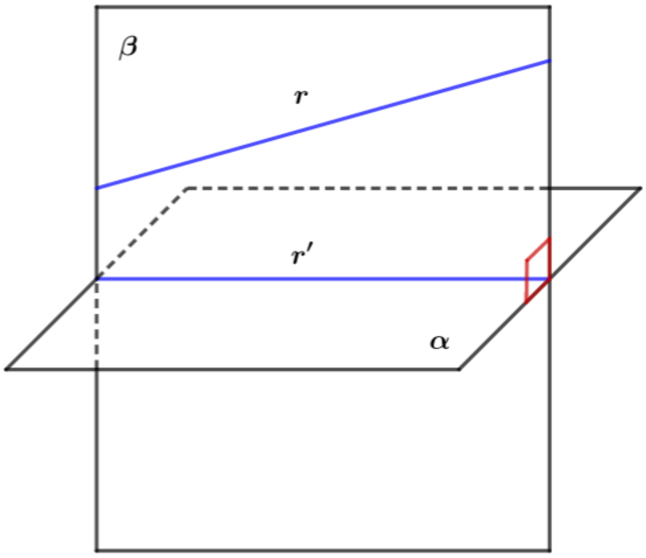
A projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é o pé da reta perpendicular ao plano que contém P.



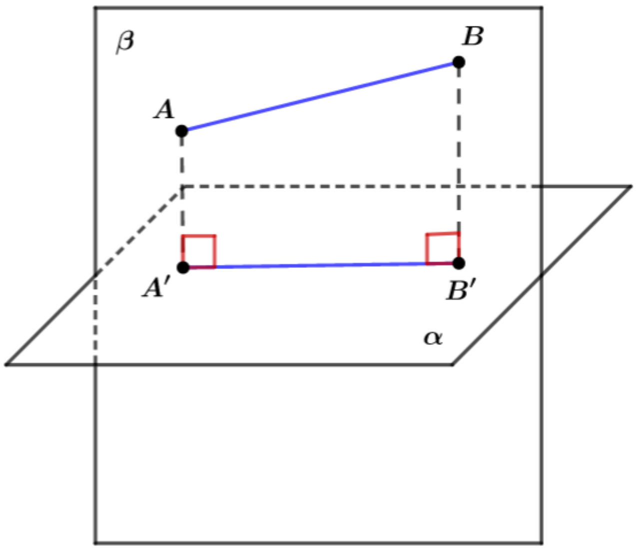
P' é a projeção ortogonal de P sobre o plano α.

1.5.2. PROJEÇÃO DE UMA RETA

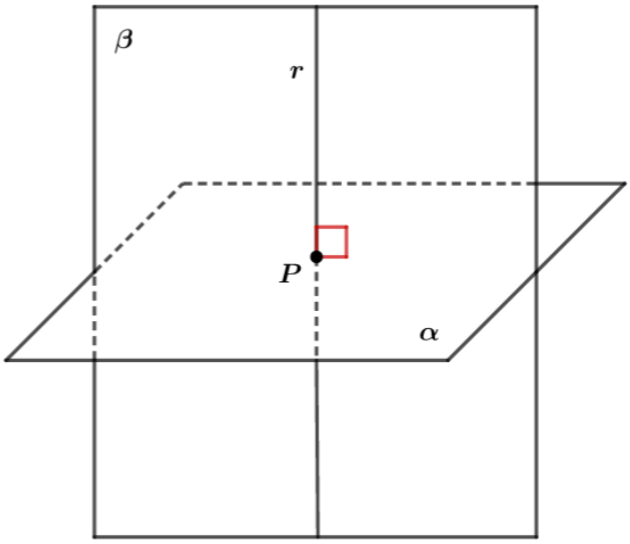
A projeção ortogonal de uma reta r oblíqua sobre um plano α é a reta formada pela intersecção de um plano β, perpendicular a α, que contém a reta r.



No caso de termos um segmento de reta não perpendicular ao plano cujas extremidades são os pontos A e B, a projeção ortogonal desse segmento em um plano α é o segmento de reta que liga a projeção ortogonal dos pontos A e B sobre α.

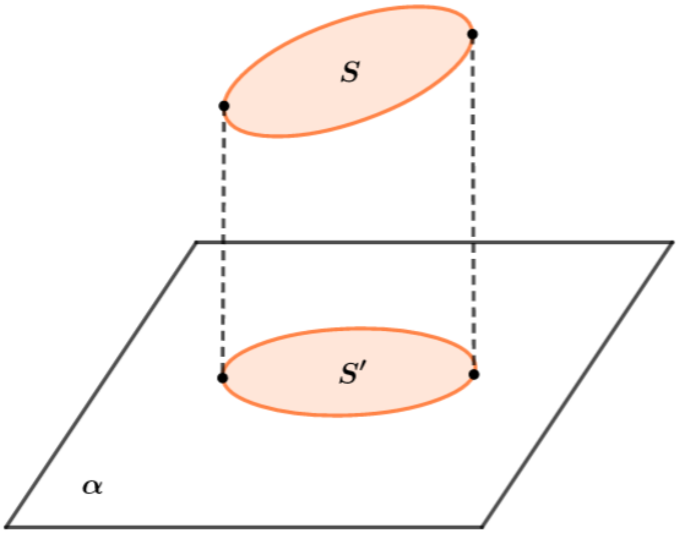


A projeção ortogonal de uma reta ou segmento de reta que é perpendicular a um plano é apenas um ponto.



1.5.3. PROJEÇÃO DE UMA FIGURA

Quando a projeção ortogonal é de uma figura geométrica, a projeção será a figura formada pelo conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos que formam a figura. Na prática, o que fazemos é desenhar a sombra da figura sobre um plano.

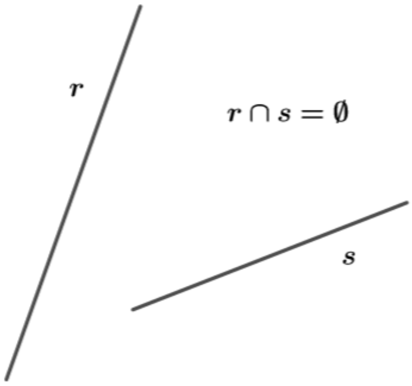


1.6. ÂNGULOS E DISTÂNCIAS NO ESPAÇO

Tudo que estudamos na Geometria Plana sobre os conceitos de ângulos e distâncias é válido na Geometria Espacial. A única diferença aqui é que os elementos primitivos, ponto, reta e plano, podem não pertencer a um mesmo plano. A questão é: como determinar o ângulo e distância entre elementos primitivos que não estão contidos no mesmo plano? Para responder a essa pergunta, veremos cada caso separadamente.

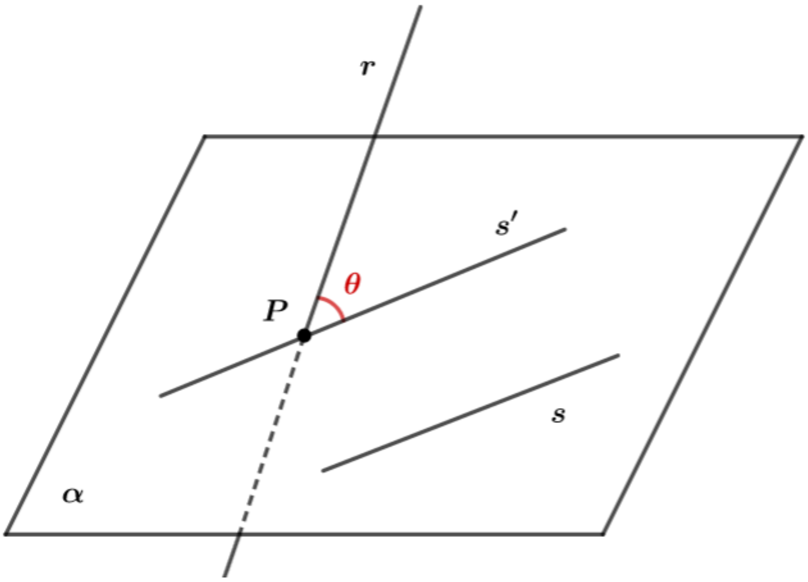
1.6.1. ÂNGULO ENTRE RETAS

Vamos estudar o ângulo entre retas reversas, pois o caso de retas coplanares já foi abordado na Geometria Plana. Consideremos, então, as retas reversas r e s:



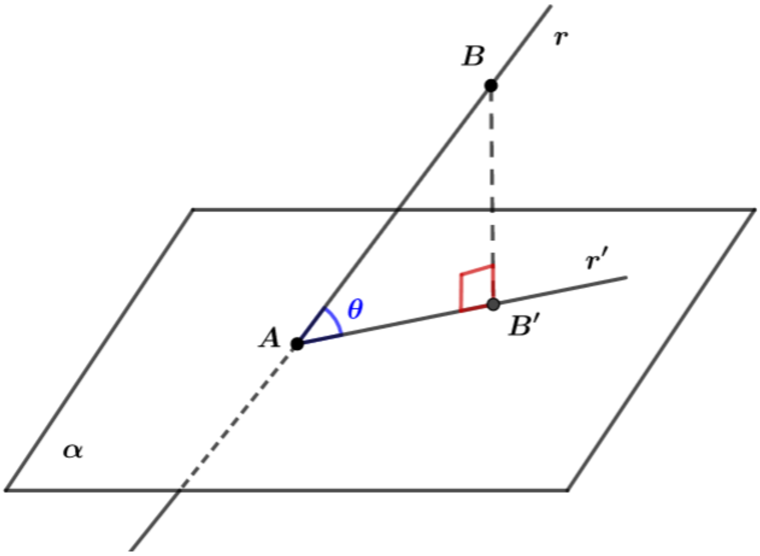
Para determinar o ângulo entre r e s, podemos proceder da seguinte forma:

Tomamos um plano α que contém a reta s. A reta r intercepta α em um ponto P. Traçamos a reta s' paralela à s, contida em α, que contém P. O ângulo entre as retas r e s será igual ao ângulo agudo entre r e s'.



1.6.2. ÂNGULO ENTRE RETA E PLANO

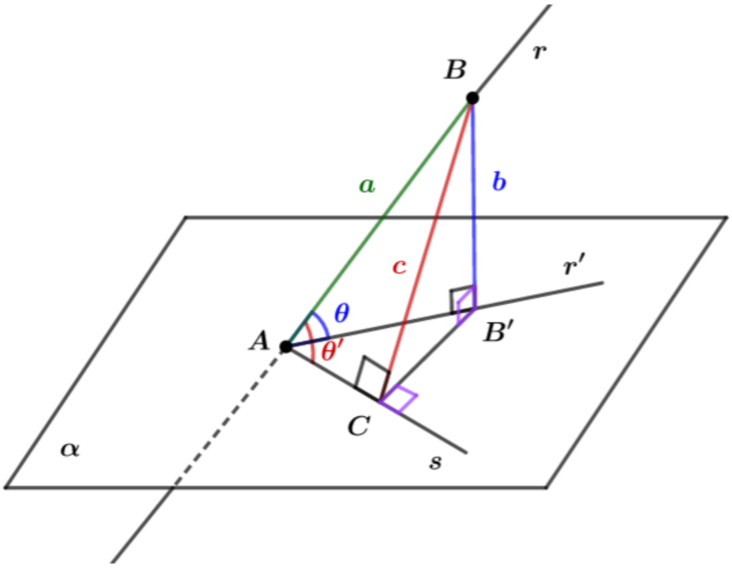
Estudaremos o caso em que a reta é oblíqua ao plano. Para determinarmos o ângulo formado entre uma reta r e um plano α, construímos a projeção ortogonal de r sobre α. O menor ângulo entre r e α será igual ao ângulo agudo entre r e sua projeção ortogonal r'.



B é um ponto da reta r e $r \cap \alpha = \{A\}$.

O ângulo θ pode ser denotado por $\widehat{r\alpha}$.

Para verificarmos essa propriedade, podemos usar a trigonometria. Considere a figura a seguir.



Construímos $B'C$ de modo que $B^{'}C \perp s$. Pelo teorema das três perpendiculares, como $BB' \perp \alpha$ e $B^{'}C \perp s$, temos que $BC \perp s$. Assim, temos:

$$\Delta ABB' \Rightarrow sen\ \theta = \frac{b}{a}$$

$$\Delta ABC \Rightarrow sen\ \theta' = \frac{c}{a}$$

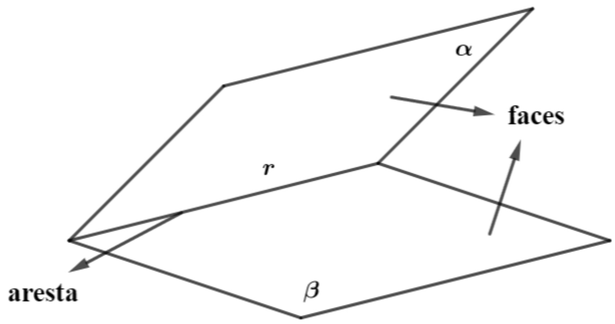
Como BC é hipotenusa do triângulo retângulo $BB'C$, temos que $c > b$. Logo,

$$\frac{c}{a} > \frac{b}{a} \therefore sen\ \theta^{'} > sen\ \theta$$

Como θ e θ' pertencem ao intervalo $]0;\ \pi/2\ [$, temos $\theta < \theta'$, ou seja, θ é o menor ângulo agudo entre r e α.

1.6.3. ÂNGULO ENTRE DOIS PLANOS

Quando estudamos ângulos na Geometria Plana, vimos que ela é a figura formada por dois pares de semirretas com a mesma origem. Podemos estender esse conceito à Geometria Espacial. Nesse caso, o **ângulo entre planos** é chamado de **diedro**. Um diedro é a união de dois semiplanos com a mesma reta de origem. Os semiplanos que determinam o diedro são as faces do diedro e a origem comum dos semiplanos é sua aresta.



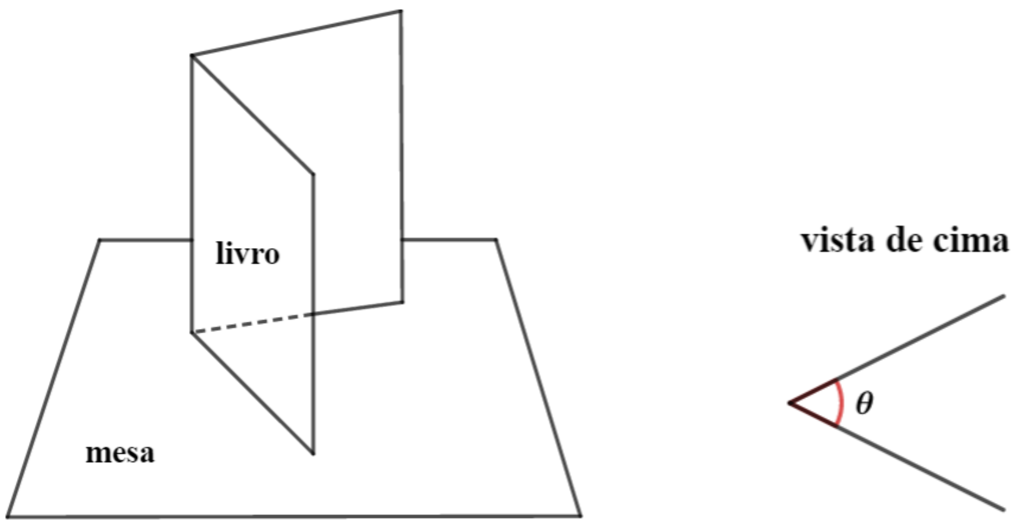
$$\alpha\, \hat{r}\, \beta = \alpha \cup \beta$$

O diedro determinado pelos semiplanos α e β cuja origem comum é a reta r pode ser denotado por: $\alpha\, \hat{r}\, \beta$, $\widehat{\alpha\beta}$ ou $di(r)$. Há outras denotações para o diedro, mas vamos usar apenas essas.

Um bom exemplo de diedro é um livro aberto. As páginas opostas do livro são as faces do diedro, e a lombada do livro é a aresta do diedro.

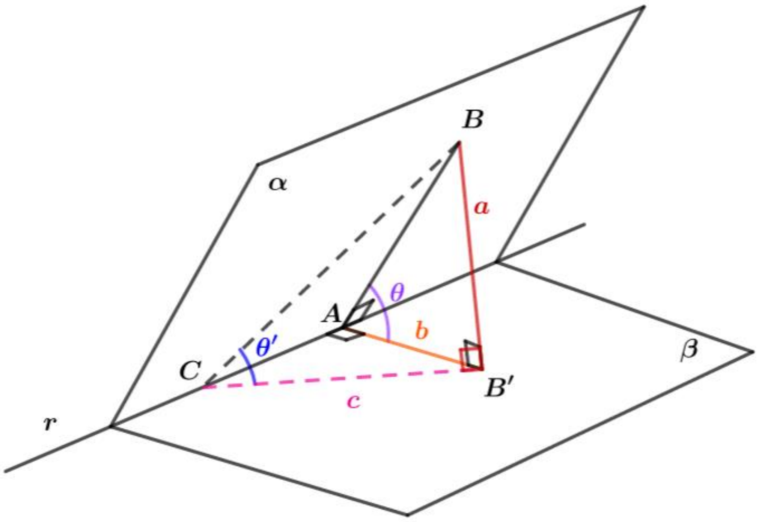
Como saber a medida do diedro?

Vamos usar o exemplo do livro. Se colocarmos esse livro semiaberto em uma mesa de tal forma que ele fique em pé (apoiado pela parte de baixo do livro), podemos ver pela vista de cima o ângulo formado pelas páginas do livro. Esse ângulo é a medida do diedro.



Assim, para determinarmos a medida de um diedro formado pelos planos α e β, devemos seccionar os planos com um plano secante perpendicular à aresta do diedro. Esse plano determinará duas semirretas de mesma origem e o ângulo formado por essas semirretas será a medida do diedro.

É possível provar, por trigonometria, que esse ângulo é o maior ângulo agudo entre α e β. Para isso, consideremos dois planos secantes α e β com origem comum à reta r. Seja $B \in \alpha, B' \in \beta, A \in r$ e $C \in r$ conforme ilustra a figura abaixo:



AB' é a projeção ortogonal de AB sobre o plano β. Pela figura, podemos ver que:

$$\Delta ABB' \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{a}{b}$$

$$\Delta CBB' \Rightarrow \operatorname{tg}\theta' = \frac{a}{c}$$

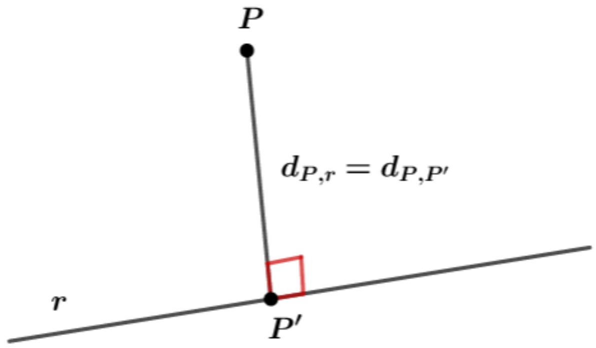
Como CB' é a hipotenusa do triângulo retângulo $\Delta AB'C$, temos $c > b$. Logo,

$$\frac{a}{b} > \frac{a}{c} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta > \operatorname{tg}\theta'$$

Para θ e θ' pertencentes ao intervalo $]0;\ \pi/2[$, temos que $\theta > \theta'$, ou seja, θ é o maior ângulo entre α e β.

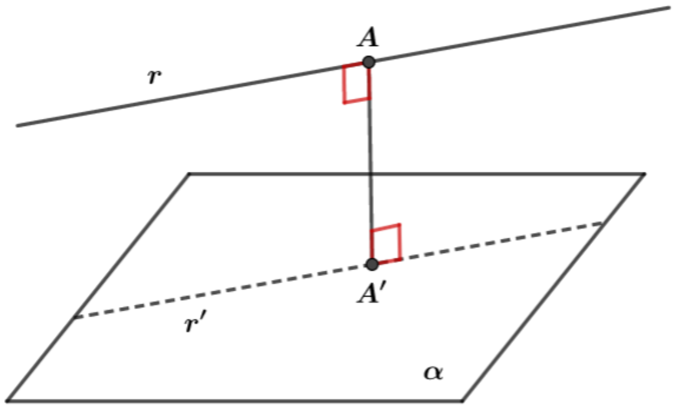
1.6.4. DISTÂNCIA ENTRE PONTO E RETA

Para determinar a distância entre um ponto P e uma reta r no espaço, devemos tomar uma reta s perpendicular à r que passa por P. A intersecção de s com r é o ponto P'. Assim, a distância de P à r será igual à distância de P a P'.



1.6.5. DISTÂNCIA ENTRE RETA E PLANO PARALELOS

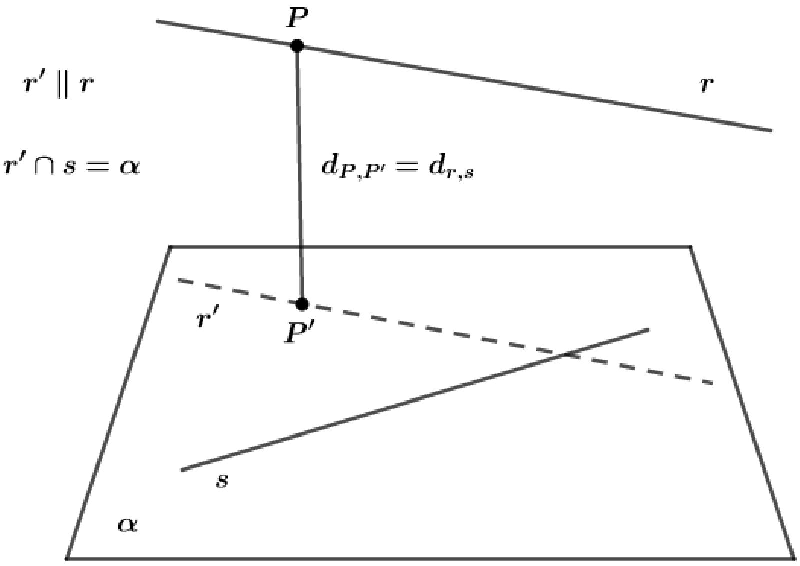
Se r é uma reta paralela ao plano α, então a distância de r a α será igual à distância de r à sua projeção ortogonal em α.



$$d_{r,\alpha} = d_{AA'}$$

1.6.6. DISTÂNCIA ENTRE DUAS RETAS REVERSAS

Por último, vamos aprender a calcular a distância entre duas retas reversas. Leve em consideração que r e s são duas retas reversas. Para determinar a distância entre essas retas, basta tomar um plano α que contém a reta s e que seja paralela à r. A distância entre as retas reversas será igual à distância entre a reta r e o plano paralelo α.



1. **(ITA/1969)**

Dizemos que um conjunto C de pontos do espaço é convexo se dados pontos A e B quaisquer pertencentes a C, o segmento de reta AB está contido em C. Há conjunto convexo numa das afirmações abaixo? Assinale a afirmação verdadeira.

a) o plano excluído um dos seus pontos.

b) o conjunto dos pontos situados sobre uma câmara de ar de automóvel.

c) a região plana limitada por um quadrilátero.

d) a superfície lateral de um prisma.

e) nenhum dos conjuntos acima.

Comentários

Vamos analisar cada uma das alterativas.

a) o plano excluído um dos seus pontos.

Se foi excluído um dos pontos do plano, há uma espécie de "vazio" dentro desse plano, um "buraco", uma concavidade.

Dessa forma, é possível que um segmento de reta que contenha dois pontos desse plano passe exatamente em cima dessa concavidade, e isso descaracteriza a região como convexa.

b) o conjunto dos pontos situados sobre uma câmara de ar de automóvel.

A superfície da câmara de ar de um automóvel é um exemplo claro de concavidade. Como podemos traçar segmentos com extremidades que pertençam à câmara e pontos do segmento que não pertencem a ela, a região é côncava, não convexa.

d) a superfície lateral de um prisma.

Mesmo caso da câmara de ar. Se só a superfície for considerada, podemos ter segmentos de reta que contenham pontos da superfície do prisma e pontos fora dela. Assim, temos, novamente, uma região côncava.

e) nenhum dos conjuntos acima.

Como não encontramos região alguma nas alternativas anteriores que caracterizasse uma região convexa, essa é nosso gabarito.

Gabarito: "e".

---

2. **(ITA/1969)**

Consideremos um plano α e uma reta r que encontra esse plano num ponto P, e que não é perpendicular a α. Assinale qual das afirmações é a verdadeira.

a) existem infinitas retas de α perpendiculares a r pelo ponto P.

b) existe uma e somente uma reta de α perpendicular a r por P.

c) não existe reta de α, perpendicular a r, por P.

d) existem duas retas de α perpendiculares a r passando por P.

e) nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

Comentários

Se a reta r fosse perpendicular ao plano α, todas as retas de α que passam por P seriam perpendiculares à reta r.

Como isso não é verdade, ou seja, r não é perpendicular a α, temos apenas uma reta do plano α que passa por P que é perpendicular à r.

Para explicitar o caso, imagine um plano perpendicular à r e que passe por P. A intersecção entre esse plano novo e o plano α delimita uma reta perpendicular à r e pertencente a α. Como esses dois planos não são coincidentes, a intersecção destes delimita uma única reta, portanto, essa reta, que é perpendicular à r e pertencente a α existe e é única.

Gabarito: "b".

---

3. **(ITA/1969)**

Considere o plano de uma mesa e um ponto dado deste plano. Você dispõe de uma folha de papel que possui um só bordo reto. Dobrando esta folha de papel, conduza uma perpendicular ao plano da mesa, pelo ponto dado. A justificativa de tal construção está em um dos teoremas abaixo.

a) Se uma reta é perpendicular a um plano, todo plano que passa por ela é perpendicular ao primeiro.

b) Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um deles que for perpendicular à intersecção será perpendicular ao outro.

c) Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes pelo seu ponto de intersecção, então a reta é perpendicular ao plano determinado por essas duas retas.

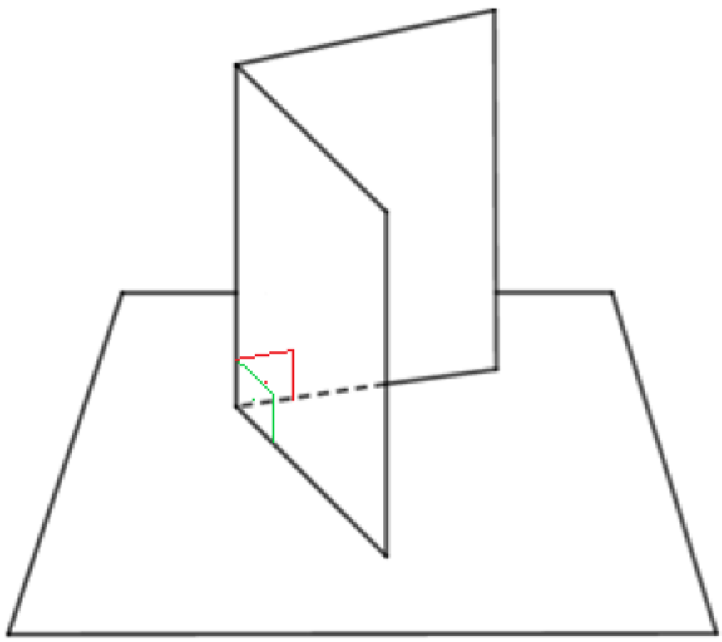
d) Por um ponto exterior a um plano passa uma reta perpendicular ao plano e somente uma.

e) Todas as perpendiculares a uma reta traçadas por um de seus pontos pertencem a um plano.

Comentários

Ao dobrar a folha de papel exatamente no meio do bordo reto, pode-se construir um vinco perpendicular a duas retas, definidas por cada segmento de reta gerado pela dobradura.

Ao colocar o bordo reto da folha no plano da mesa, geramos duas retas (pertencentes ao plano) perpendiculares ao vinco, o que está de acordo com o exposto na alternativa c).



Gabarito: "c".

4. **(ITA/1968)**

Dadas duas retas concorrentes a e b e dado um ponto M, fora do plano determinado por a e b, consideremos os pontos E e F, simétricos de M em relação às retas a e b, respectivamente. A reta que une os pontos E e F é:

a) Perpendicular ao plano determinado por a e b.

b) Paralela ao plano determinado por a e b.

c) Oblíqua ao plano determinado por a e b.

d) Pertencente ao plano determinado por a e b.

e) Nenhuma das respostas anteriores.

Comentários

Se E é simétrico de M em relação à reta a, E está à mesma distância do plano formado por a e b que M.

O mesmo ocorre com o ponto F. Se F é simétrico de M em relação à reta b, F está à mesma distância do plano formado por a e b que M.

Dessa forma, como E e F têm a mesma distância do plano formado por a e b que M, a reta que os une é paralela ao plano.

Gabarito: “b”.

5. **(Inédita)**

Os pontos A e A' são simétricos com relação ao plano α e nenhum deles pertencem a α. A intersecção entre a reta r definida A e A' com o plano α define

a) uma reta pertencente a α e perpendicular a r.

b) uma reta pertencente a α e paralela a r.

c) um único ponto.

d) uma única reta, não pertencente a r.

e) um outro plano.

Comentários

Como os pontos A e A' não pertencem ao plano α, a reta definida por eles é secante ao plano, ou seja, só apresenta um ponto em comum com α.

Gabarito: “c”.

2. LUGARES GEOMÉTRICOS

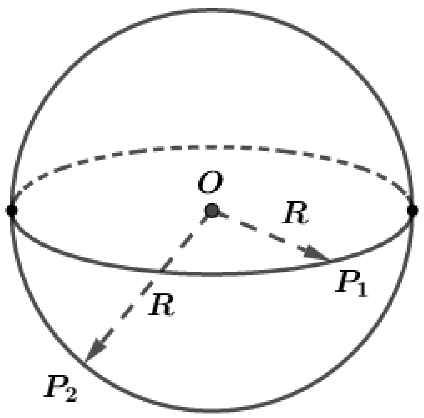
O conceito de **lugares geométricos**, na Geometria Espacial, não é muito diferente dos vistos na Geometria Plana. A diferença aqui é a inclusão de uma dimensão. Apresentaremos neste tópico alguns lugares geométricos no espaço.

Na Geometria Plana, vimos que o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um dado ponto é chamado de circunferência, ou seja, dado um ponto O, chamado de centro, temos que a circunferência λ de raio r e centro O é definida por:

$$\lambda\{O,r\} = \left\{P \in \underbrace{\alpha}_{plano} \middle| d_{P,O} = \underbrace{r}_{raio\ da\ circunferência}\right\}$$

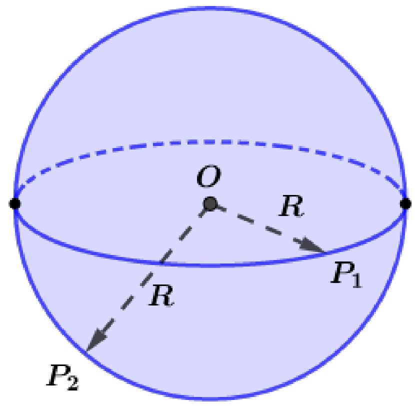
Quando usamos essa definição de pontos equidistantes de um dado ponto no espaço, o lugar geométrico que esse conjunto representa é uma **superfície esférica**. Todos os pontos dessa figura **equidistam do centro $\boldsymbol{O}$**:

$$S\{O,R\} = \left\{P \in \underbrace{\epsilon}_{espaço} \middle| d_{P,O} = \underbrace{R}_{raio\ da\ esfera}\right\}$$



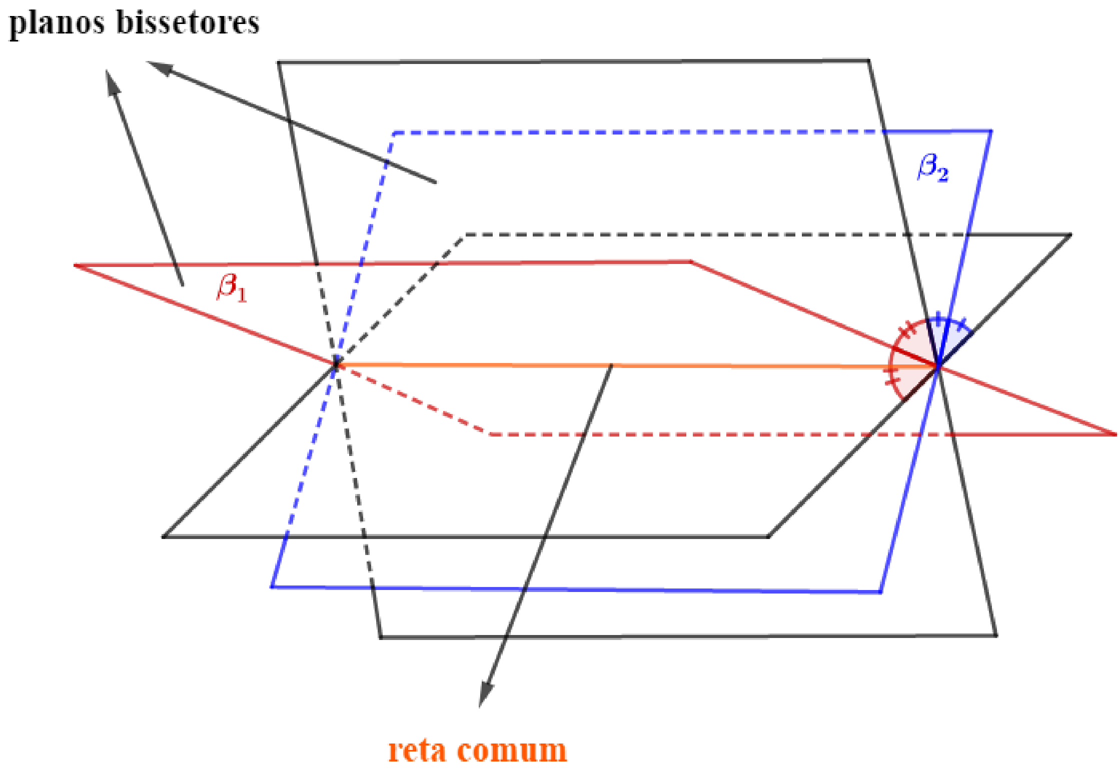
Se quisermos uma esfera maciça, basta trocar o sinal de igual pela desigualdade $\leq$:

$$S_1\{O,R\} = \{P \in \epsilon | d_{P,O} \leq R\}$$

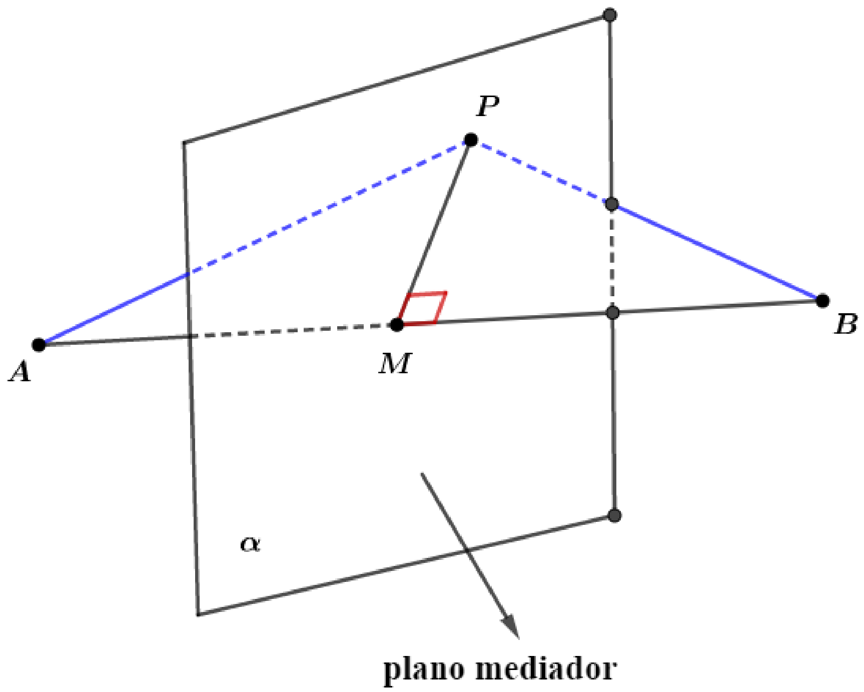


Nesse caso, todos os pontos da superfície esférica e do interior da esfera fazem parte do lugar geométrico.

Outro lugar geométrico no espaço é o plano bissetor. Na Geometria Plana, estudamos a reta bissetriz. Esse é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de duas retas concorrentes. Na Geometria Espacial, no lugar de reta, teremos um plano. Desse modo, o lugar geométrico dos pontos do espaço que **equidistam de dois planos secantes** é chamado de **plano bissetor**. E assim como no estudo plano, onde duas retas concorrentes geram duas retas bissetrizes, no estudo do espaço, temos que dois planos secantes gerarão dois planos bissetores.

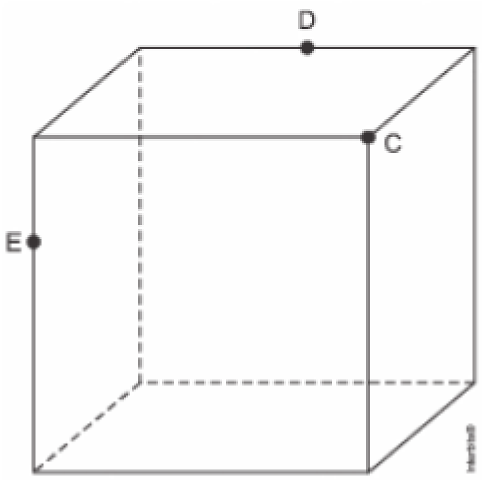


Temos também o lugar geométrico **plano mediador**. Ele é o conjunto dos **pontos equidistantes de dois pontos distintos**. Assim, dado um segmento de reta AB no espaço, ele será o plano perpendicular ao segmento e conterá o seu ponto médio. Na Geometria Plana, ele é conhecido como reta mediatriz.



6. (UPF/2019)

Na figura a abaixo, está representado um cubo.



A seção produzida no cubo pelo plano CDE tem a forma de

a) triângulo.

b) trapézio.

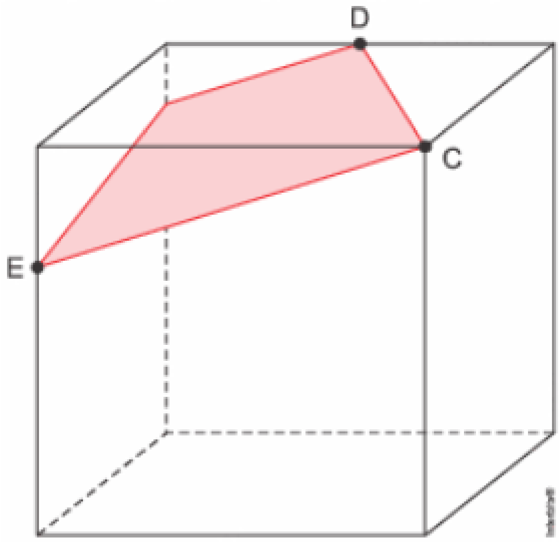
c) retângulo.

d) pentágono.

e) hexágono.

Comentários

Façamos o corte no plano CDE, conforme o enunciado orienta.

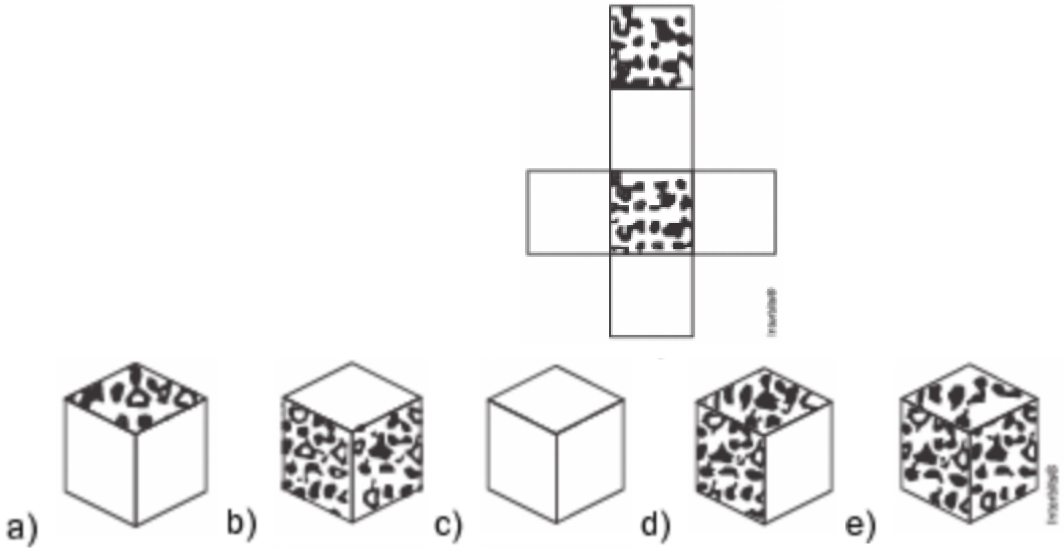


Como as faces opostas do cubo são sempre paralelas, temos um trapézio.

Gabarito: "b".

7. (UFJF/2018)

Qual sólido geométrico representa a planificação abaixo?



Comentários

Como as alternativas apresentam apenas três faces perpendiculares entre si, podemos inferir que uma das faces pintadas será visível e outra não, já que são opostas na planificação.

A única alternativa que apresenta uma única face pintada é a alternativa a.

Gabarito: “a”.

---

8. **(Inédita)**

O lugar geométrico no espaço cujos pontos são todos equidistantes de 3 unidades da origem é chamado de

a) circunferência

b) hiperboloide

c) esfera

d) raio

e) círculo

Comentários

Como temos um lugar geométrico no espaço com todos os pontos equidistantes da origem, temos uma esfera. No caso, o raio da esfera é de 3 unidades, mas o lugar geométrico em si não é o raio e sim a esfera, os pontos que estão distantes 3 unidades da origem.

Gabarito: “c”.

---

9. **(UFRGS/2016)**

Em uma caixa, há sólidos geométricos, todos de mesma altura: cubos, cilindros, pirâmides quadrangulares regulares e cones. Sabe-se que as arestas da base dos cubos e das pirâmides e têm a mesma medida; que o raio da base dos cones e dos cilindros tem a mesma medida. Somando o volume de 2 cubos e de 2 cilindros, obtêm-se $180\ cm^3$. A soma dos volumes de 3 cubos e 1 cone resulta em $110\ cm3$, e a soma dos volumes de 2 cilindros e 3 pirâmides resulta em $150\ cm3$.

O valor da soma dos volumes, em cm^3, de um cubo, um cilindro, dois cones e duas pirâmides é

a) 150. **b) 160.** **c) 190.** **d) 210.** **e) 240.**

Comentários

Como todos os sólidos têm a mesma altura, vamos denominá-la x.

Assim, podemos dizer que:

$$Volume\ do\ cubo = V_c = x^3$$

$$Volume\ da\ pirâmide = V_p = \frac{1}{3} \cdot Volume\ do\ cubo = \frac{1}{3} \cdot x^3$$

Sendo r o raio da base dos cones e dos cilindros, todos de altura x, temos:

$$Volume\ do\ cilindro = V_l = \pi \cdot r^2 \cdot x$$

$$Volume\ do\ cone = V_n = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot x$$

Utilizando o dado do exercício de que "Somando o volume de 2 cubos e de 2 cilindros, obtêm-se 180 cm^3", temos:

$$2 \cdot V_c + 2 \cdot V_l = 180$$

$$2 \cdot x^3 + 2 \cdot (\pi \cdot r^2 \cdot x) = 180$$

$$2 \cdot [x^3 + \pi \cdot r^2 \cdot x] = 180$$

$$x^3 + \pi \cdot r^2 \cdot x = \frac{180}{2}$$

$$x^3 + \pi \cdot r^2 \cdot x = 90$$

Tudo bem, não sabemos os valores específicos de x e de r e talvez nem precisemos.

O exercício nos pediu o valor dos volumes de um cubo, um cilindro, dois cones e duas pirâmides somados, ou seja:

$$V_c + V_l + 2 \cdot V_n + 2 \cdot V_p$$

$$x^3 + \pi \cdot r^2 \cdot x + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot x + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3$$

$$x^3 + \pi \cdot r^2 \cdot x + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [\pi \cdot r^2 \cdot x + x^3]$$

$$90 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [90]$$

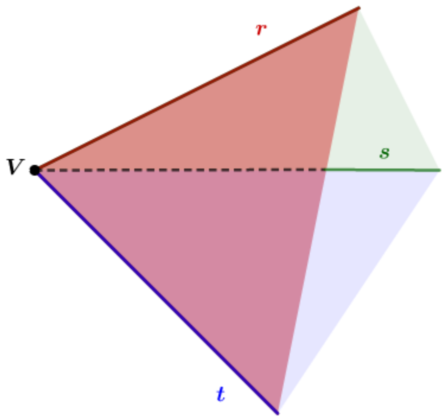
$$90 + 60$$

$$150$$

Gabarito: "a".

3. TRIEDROS

Vimos que um diedro é uma figura formada por dois semiplanos com a mesma origem, sendo essa uma reta comum. Um **triedro** é a figura formada por **três semirretas não coplanares e de mesma origem**, sendo essa origem um ponto comum chamado de vértice. Se r, s e t são semirretas que formam um triedro, então podemos denotar o triedro formado por essas semirretas por $V(r; s; t)$.



Dizemos que $\boldsymbol{V}$ é o **vértice** do triedro, cada **semirreta** é a **aresta** do triedro e as **faces** são determinadas por cada **par de semirretas**. Assim, temos:

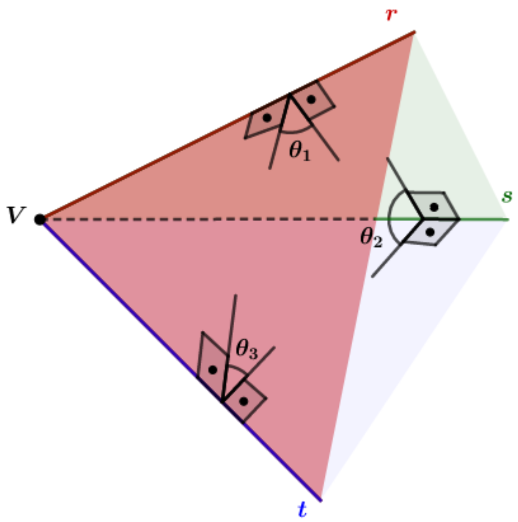
$$V - vértice$$

$$r, s, t - arestas$$

$$r\,\hat{V}\,s, r\,\hat{V}\,t, s\,\hat{V}\,t - \text{â}ngulos\ das\ faces\ ou\ faces$$

As faces também podem ser denotadas por $\widehat{rs}, \widehat{rt}$ e $\widehat{st}$.

Note que no triedro, cada semirreta forma um diedro, ou seja, este é determinado por duas faces do triedro.



$$\theta_1, \theta_2, \theta_3 - \text{â}ngulos\ diedros$$

3.1. PROPRIEDADES DO TRIEDRO

No estudo do triângulo, vimos a desigualdade triangular que diz que dado um triângulo de lados a, b e c, temos, para qualquer lado do triângulo:

$$|b - c| < a < b + c$$

No estudo do triedro, temos uma desigualdade parecida com essa. Enunciemos o teorema.

3.1.1. TEOREMA 1 – DESIGUALDADE DOS ÂNGULOS DAS FACES

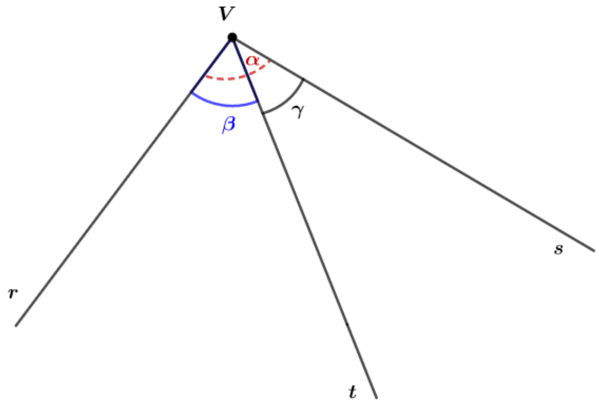
Em um triedro de faces α, β e γ, temos válida a seguinte desigualdade:

$$\boxed{|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma}$$

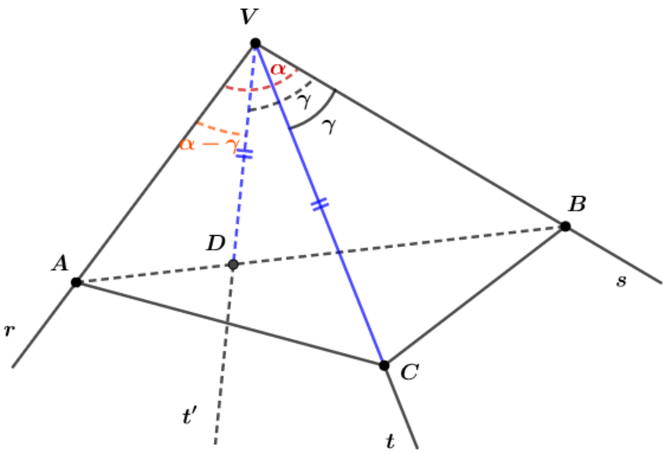
Essa desigualdade é válida tomando-se como referência qualquer face do triedro.

Demonstração

Seja um triedro cujas arestas são as semirretas r, s, t tais que $\widehat{rs} = \alpha, \widehat{rt} = \beta$ e $\widehat{st} = \gamma$. Suponha que α seja o maior ângulo do triedro $V(\alpha, \beta, \gamma)$.



Assim, tomando-se A, B, C pontos das semirretas r, s e t, respectivamente, podemos construir na face α a semirreta t' tal que $D \in t'$ e $VD = VC$.



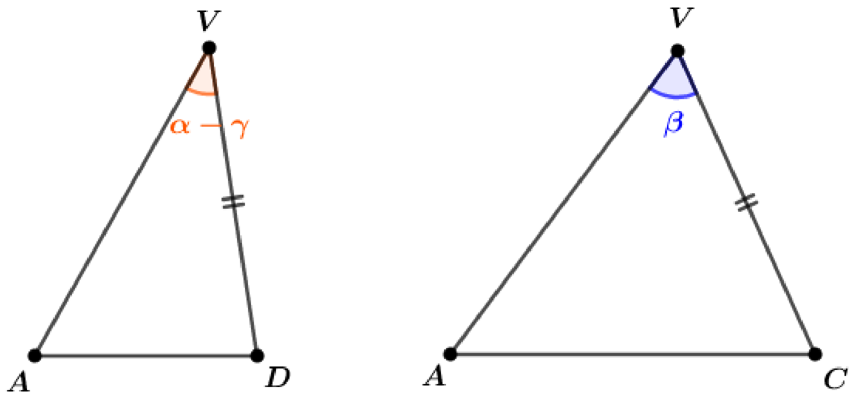
Pelo critério de congruência LAL, temos $\Delta DVB \equiv \Delta CVB$, logo, $DB = BC$. No triângulo ΔABC, temos pela desigualdade triangular:

$$AB < AC + BC$$

Como $AB = AD + DB$ e $DB = BC$, temos:

$$AD + DB < AC + BC \Rightarrow AD + \cancel{BC} < AC + \cancel{BC} \therefore AD < AC$$

Desse modo, temos os seguintes triângulos:



Como $AD < AC$, temos $\alpha - \gamma < \beta$, ou seja,

$$\alpha < \beta + \gamma$$

Sendo α a maior face do triedro, concluímos que qualquer uma de suas faces será menor que a soma das outras duas. Com isso, temos:

$$\begin{cases} \beta < \alpha + \gamma \\ \gamma < \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta - \gamma < \alpha \\ \gamma - \beta < \alpha \end{cases} \Rightarrow |\beta - \gamma| < \alpha$$

Portanto, para qualquer face do triedro, temos a seguinte desigualdade:

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$$

Além desse teorema, temos um outro que se refere à soma dos ângulos das faces.

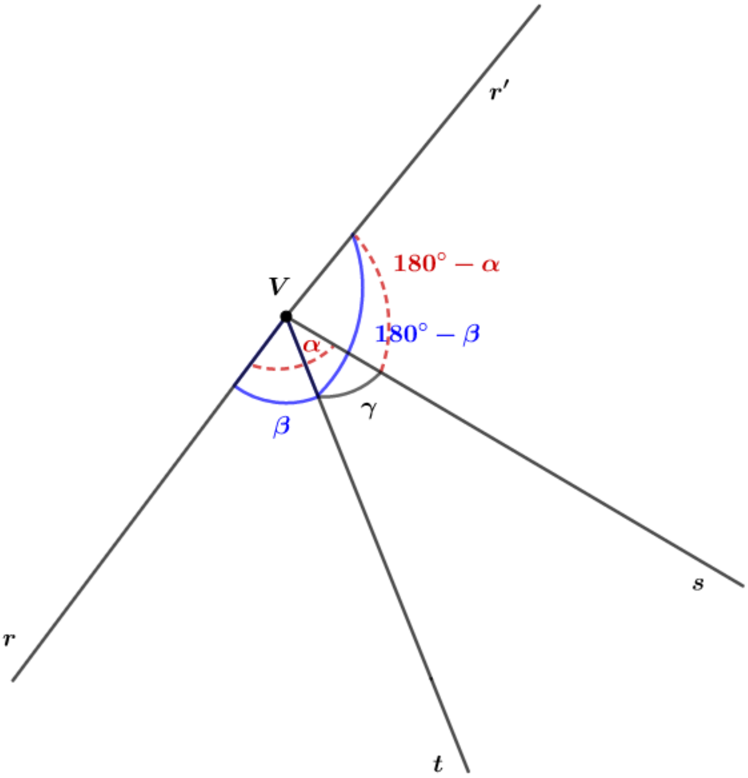
3.1.2. TEOREMA 2

A soma das faces em graus de um triedro qualquer é sempre menor que $360°$:

$$\alpha + \beta + \gamma < 360°$$

Demonstração

Consideremos Vr' a semirreta oposta da semirreta Vr do triedro $V(r, s, t)$. Desse modo, $\widehat{rs}$ e $\widehat{sr}'$ são ângulos adjacentes e suplementares, assim como os ângulos $\widehat{rt}$ e $\widehat{tr}'$, logo:



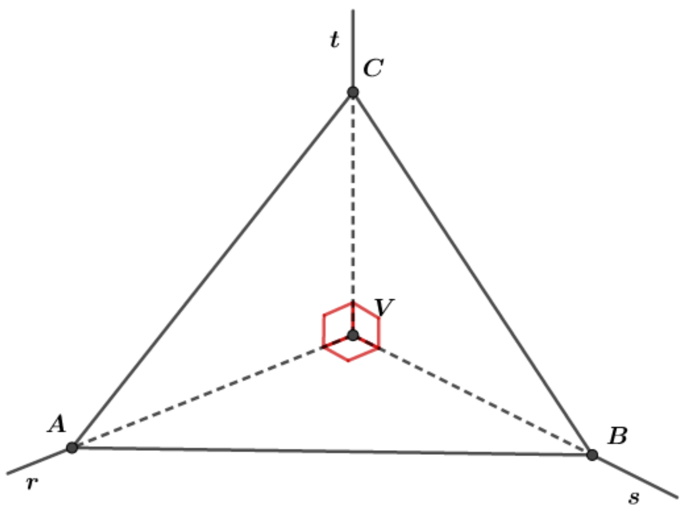
Usando a desigualdade das faces no triedro $V(r', s, t)$, obtemos:

$$\gamma < 180° - \alpha + 180° - \beta$$
$$\therefore \alpha + \beta + \gamma < 360°$$

3.2. TRIEDRO TRIRRETÂNGULO

Um triedro trirretângulo é aquele que possui todos os ângulos das faces iguais a 90°. Vamos estudar essa figura geométrica e extrair algumas propriedades dela.

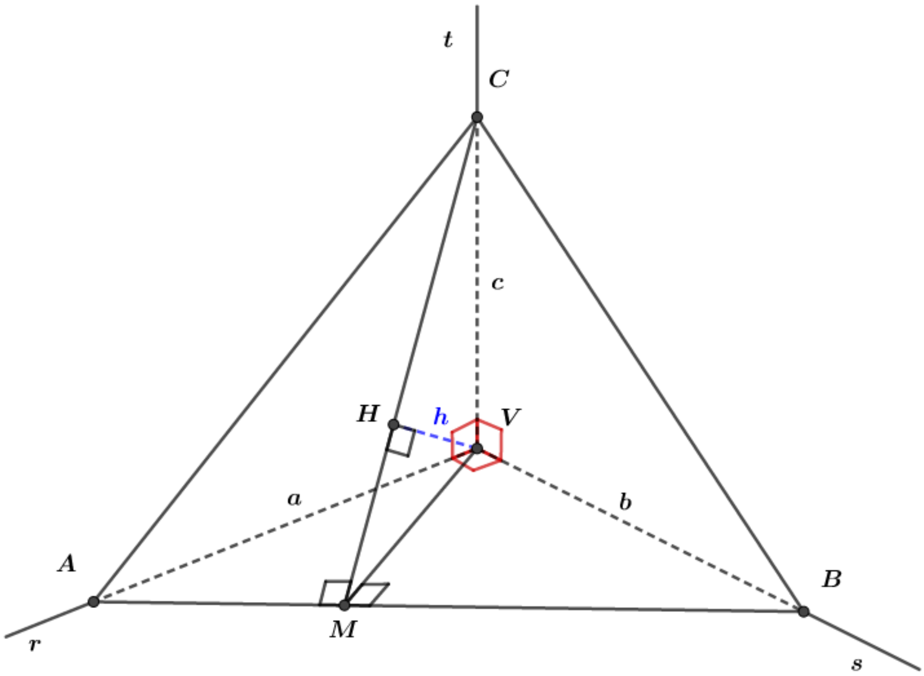
Considere um triedro trirretângulo no qual os pontos A, B, C sejam pontos de suas arestas, conforme representada na figura abaixo:



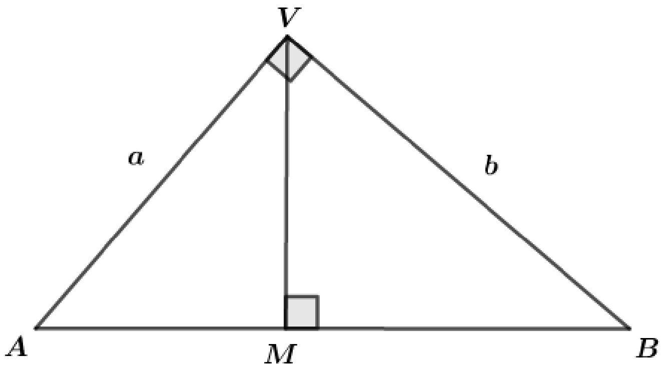
Os pontos A, B, C determinam um plano no espaço, ou seja, esse plano fecha o triedro na região aberta e, assim, obtemos a figura de uma pirâmide.

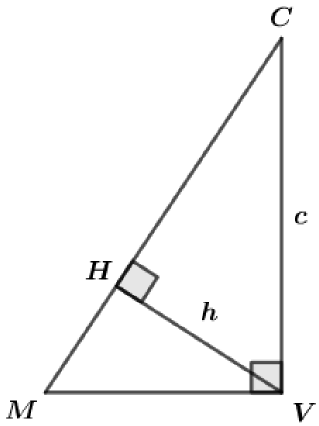
*Observação: muitas vezes, os pontos A, B, C podem não ser dados na questão e, ao invés disso, o problema pode dizer que um plano secciona (ou corta) o triedro a uma determinada distância do vértice. Isso “fechará” o triedro de modo a obter um sólido.

Vamos seccionar a pirâmide por um plano perpendicular à aresta AB e que contenha VC de modo a obter a seguinte figura:



VH é a distância do vértice à face ABC. Perceba, pelo desenho, que temos diversos triângulos retângulos no espaço. Analisemos esses triângulos.





Do triângulo ΔAVB, temos pelas relações métricas do triângulo retângulo:

$$\frac{1}{(MV)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad (I)$$

Do triângulo CVM:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{(MV)^2} \quad (II)$$

Portanto, substituindo (I) em (II):

$$\boxed{\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

Essa propriedade relaciona a altura da pirâmide $VABC$ com suas arestas a, b, c. Vamos calcular a área da face ABC.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\Delta AVB \Rightarrow (AB)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow AB = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Delta AVB \Rightarrow (AB)(MV) = ab \Rightarrow MV = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Delta CVM \Rightarrow MC^2 = c^2 + MV^2 \Rightarrow MC = \sqrt{c^2 + \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow MC = \sqrt{\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2}}$$

A área do ΔABC é dada por:

$$\underbrace{[ABC]}_{\text{área do } \Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB)(MC) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{a^2+b^2}}$$

$$[ABC] = \frac{1}{2}\cdot\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}} = \sqrt{\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{4}}$$

$$[ABC]^2 = \underbrace{\left(\frac{ab}{2}\right)^2}_{[AVB]} + \underbrace{\left(\frac{ac}{2}\right)^2}_{[AVC]} + \underbrace{\left(\frac{bc}{2}\right)^2}_{[BVC]}$$

$$\therefore \boxed{[ABC]^2 = [AVB]^2 + [AVC]^2 + [BVC]^2}$$

Portanto, a área da face ABC ao quadrado é igual à soma das áreas das outras faces ao quadrado.

10. (Inédita)

Um plano corta os eixos coordenados nos pontos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,3)$.

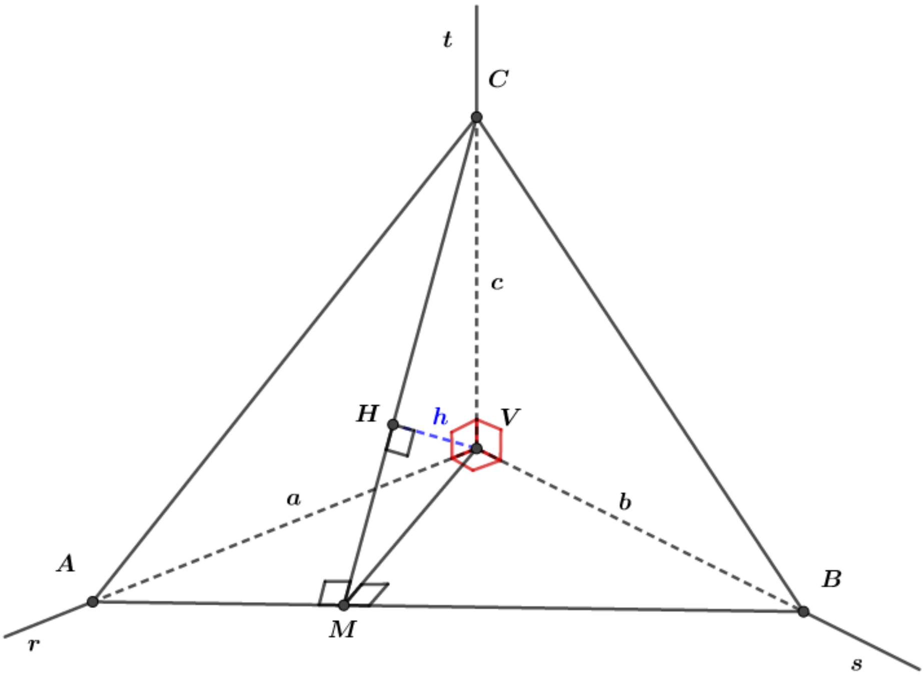
A figura formada pela origem O e pelos pontos A, B e C é um tetraedro $OABC$, cuja altura com relação à base ABC vale:

a) $\frac{6}{7}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{6}{5}$ **d)** $\frac{3}{7}$ **e)** $\frac{4}{9}$

Comentários

Como vimos, a origem O dos eixos coordenados faz papel de vértice do tetraedro $OABC$. Dessa forma, a, b e c são os interceptos do plano com os eixos.

Dessa forma, temos uma representação parecida com o que vimos no exemplo do triedro trirretângulo:



Assim, podemos calcular a altura com relação à base ABC com a fórmula

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{36 + 9 + 4}{36}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{49}{36}$$

$$h^2 = \frac{36}{49}$$

$$\sqrt{h^2} = \sqrt{\frac{36}{49}}$$

$$|h| = \frac{6}{7}$$

$$h = \pm\frac{6}{7}$$

Como estamos lidando com uma medida de distância, podemos considerar apenas a opção positiva como resposta.

$$h = \frac{6}{7}$$

Gabarito: "a".

11. (Inédita)

Em um triedro trirretângulo, as dimensões das arestas que passam pelo vértice são 12, 3 e 9. A área da base desse triedro é igual a

a) 65,9

b) 56,7

c) 58,5

d) 60

e) 63,7

Comentários

Aqui, temos uma aplicação direta da fórmula das áreas das faces do triedro trirretângulo. Como as faces são todas triângulos retângulos, podemos dizer que

$$[ABC]^2 = [AVB]^2 + [AVC]^2 + [BVC]^2$$

$$[ABC]^2 = \left[\frac{12 \cdot 3}{2}\right]^2 + \left[\frac{12 \cdot 9}{2}\right]^2 + \left[\frac{3 \cdot 9}{2}\right]^2$$

$$[ABC]^2 = \frac{144 \cdot 9}{4} + \frac{144 \cdot 81}{4} + \frac{9 \cdot 81}{4}$$

$$[ABC]^2 = \frac{1296 + 11664 + 729}{4}$$

$$[ABC]^2 = \frac{13689}{4}$$

$$\sqrt{[ABC]^2} = \sqrt{\frac{13689}{4}}$$

$$|ABC| = \frac{117}{2}$$

$$|ABC| = 58{,}5$$

Gabarito: "c".

12. (ITA/2013)

Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm^3, do sólido $VABC$ é

a) 2

b) 4

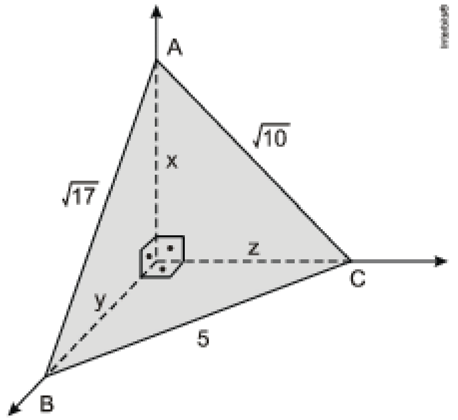
c) $\sqrt{17}$

d) 6

e) $5\sqrt{10}$

Comentários

Vamos esquematizar nosso triedro.



Dessa forma, podemos, aplicando Pitágoras em cada face, estabelecer o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{17}^2 \\ x^2+z^2=\sqrt{10}^2 \\ y^2+z^2=5^2 \end{cases}$$

Perceba que nosso sistema não é linear, pois há incógnitas (todas no caso) com potência diferente de um.

Sendo assim, uma maneira eficiente de resolvê-lo é a combinação linear entre as equações, aliada à boa e velha substituição.

Vamos escrever a equação equivalente à combinação $Linha\ 1+Linha\ 2-Linha\ 3$.

$$x^2+y^2+x^2+z^2-(y^2+z^2)=\sqrt{17}^2+\sqrt{10}^2-5^2$$

$$x^2+\cancel{y^2}+x^2+\cancel{z^2}-\cancel{y^2}-\cancel{z^2}=17+10-25$$

$$2\cdot x^2=2$$

$$x^2=1$$

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{1}$$

$$|x|=1$$

$$x=\pm1$$

Como estamos lidando com distâncias, consideraremos apenas a opção positiva.

$$x=1$$

Substituindo $x=1$ nas outras equações, temos:

$$x^2+y^2=\sqrt{17}^2$$

$$1^2+y^2=17$$

$$y^2=16$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{16}$$

$$|y| = 4$$

$$y = \pm 4$$

Pelo mesmo motivo de x, podemos considerar apenas a opção positiva.

$$y = 4$$

Façamos a última substituição.

$$x^2 + z^2 = \sqrt{10}^2$$

$$1^2 + z^2 = 10$$

$$z^2 = 9$$

$$\sqrt{z^2} = \sqrt{9}$$

$$|z| = 3$$

$$z = \pm 3$$

$$z = 3$$

Dessa forma, podemos calcular o volume do tetraedro como um terço do prisma de base triangular de lados y, z e 5.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \acute{a}rea\ da\ base \cdot altura$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{y \cdot z}{2} \cdot x$$

$$V = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{{}^{2}\cancel{4} \cdot \cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot 1$$

$$V = 1 \cdot 2$$

$$V = 2\ cm^3$$

Gabarito: "a".

---

13. (Fuvest/2014)

Três das arestas de um cubo, com um vértice em comum, são também arestas de um tetraedro. A razão entre o volume do tetraedro e o volume do cubo é

$a)\ \frac{1}{8}$ $b)\ \frac{1}{6}$ $c)\ \frac{2}{9}$ $d)\ \frac{1}{4}$ $e)\ \frac{1}{3}$

Comentários

Se chamarmos as arestas do cubo de x, podemos calcular a razão diretamente.

$$\frac{V_{tetraedro}}{V_{cubo}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \acute{a}rea\ da\ base \cdot altura}{x^3} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot x}{x^3} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} = \frac{1}{6}$$

Gabarito: "b".

---

14. (UPE/2013)

Para a premiação dos melhores administradores de uma galeria comercial, um designer projetou um peso de papel com a forma de um tetraedro regular reto, de aresta $20\ cm$ que será entregue aos vencedores. Esse peso de papel será recoberto com placas de platina, nas faces laterais e com uma placa de prata na base. Se o preço da platina é de 30 reais por centímetro quadrado, e o da prata é de 50 reais por centímetro quadrado, assinale a alternativa que apresenta o valor mais próximo, em reais, do custo desse recobrimento.

Considere $\pi = 1,7$

a) $24\ 000$

b) $18\ 000$

c) $16\ 000$

d) $14\ 000$

e) $12\ 000$

Comentários

Um tetraedro regular é formado por triângulos equiláteros.

A fórmula para a área de um triângulo equilátero é:

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

Como temos três faces que serão recobertas com platina ao custo de R$30,00 o centímetro quadrado e uma face que será recoberta com prata ao custo de R$50,00 o centímetro quadrado, podemos calcular o custo por:

$$C = 3 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot custo\ platina + 1 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot custo\ prata$$

$$C = 3 \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4} \cdot 30 + 1 \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4} \cdot 50$$

$$C = 3 \cdot \frac{400 \cdot 1{,}7}{4} \cdot 30 + 1 \cdot \frac{400 \cdot 1{,}7}{4} \cdot 50$$

$$C = 15300 + 8500$$

$$C = 23800$$

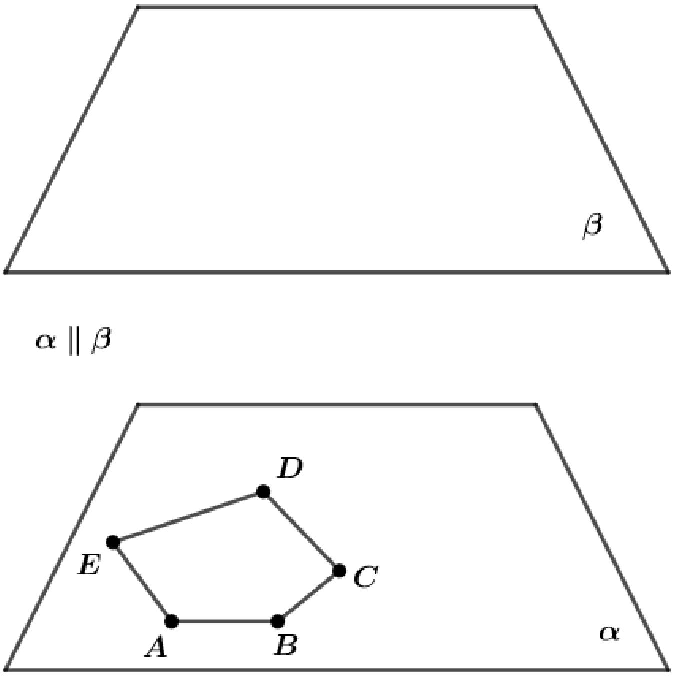
Gabarito: "a".

4. POLIEDROS

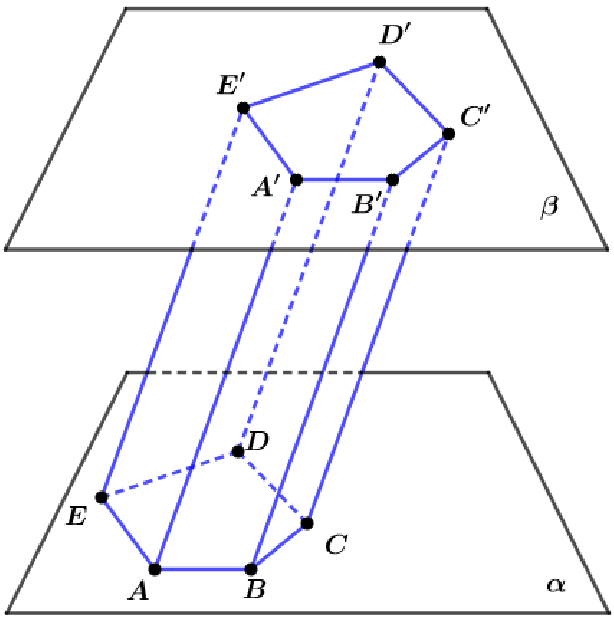
Neste capítulo, iniciaremos o estudo dos sólidos. Na Geometria Plana, estudamos diversos polígonos tais como o hexágono, o pentágono, o quadrado, entre outros... Na Geometria Espacial, os sólidos cujas faces são polígonos são chamados de poliedros. Diversos deles são figuras conhecidas, como o cubo, a pirâmide, o paralelepípedo, o prisma etc. Estudaremos cada um dos sólidos que podem ser cobrados na prova, então vamos iniciar pelo prisma.

4.1. PRISMAS

Consideremos dois planos paralelos α e β. Seja $ABCDE$ um polígono convexo determinado no plano α.

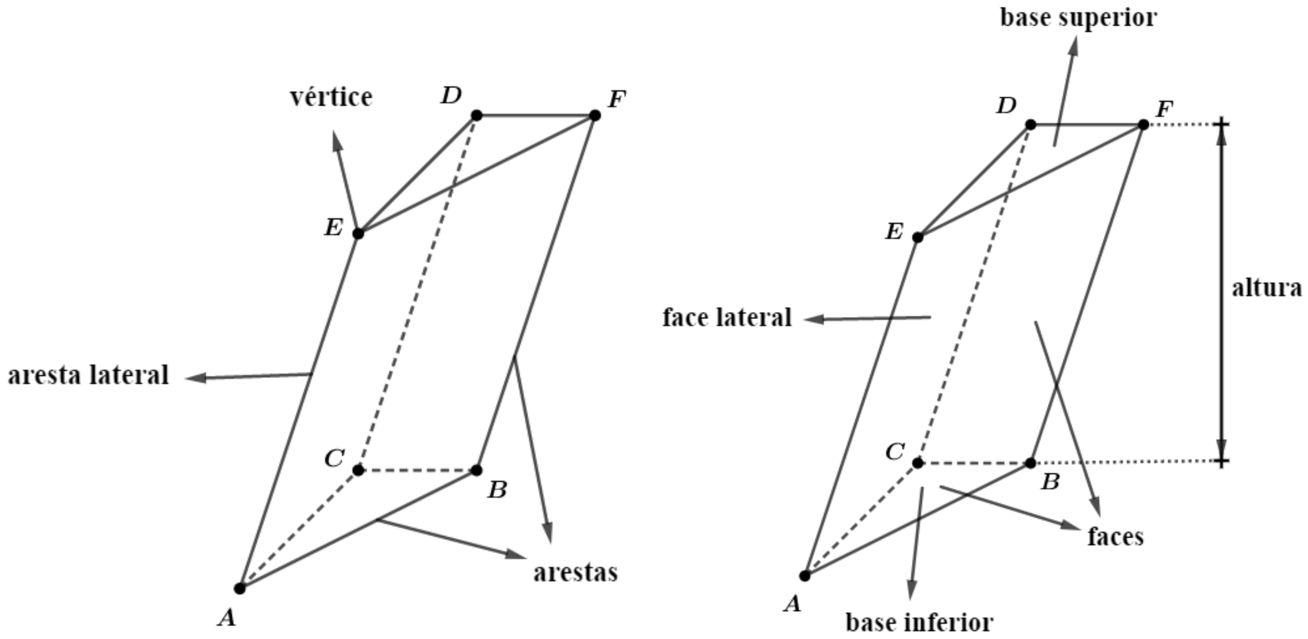


Tomando-se as retas paralelas que contém os vértices A, B, C, D, E do polígono em α, essas retas determinarão um polígono $A'B'C'D'E'$ em β. A figura formada pelos segmentos de retas e pelos polígonos convexos em α e β é chamada de prisma.



Perceba que $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ representam o mesmo polígono. Cada um dos segmentos $AA', \dots, EE'$ é chamado de **aresta lateral**. Os polígonos convexos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ são denominados de bases do prisma. Usualmente, definimos a base $\boldsymbol{ABCDE}$ como **base inferior** e a base $\boldsymbol{A'B'C'D'E'}$ como **base superior**. A medida da **altura** do prisma é igual à **distância entre**

os planos paralelos. Note que $ABB'A'$ é um paralelogramo. Cada um dos **paralelogramos do prisma** é chamado de **face lateral**. Os pontos $A, B, C, \ldots, D', E'$ são chamados de vértices do prisma. Cada segmento de reta do prisma é denominado de aresta. A figura abaixo apresenta os elementos presentes no prisma:



Se a base do prisma for um polígono de n lados, teremos:

- n faces laterais;
- n arestas laterais;
- $n + 2$ faces (faces laterais + duas bases);
- $3n$ arestas.

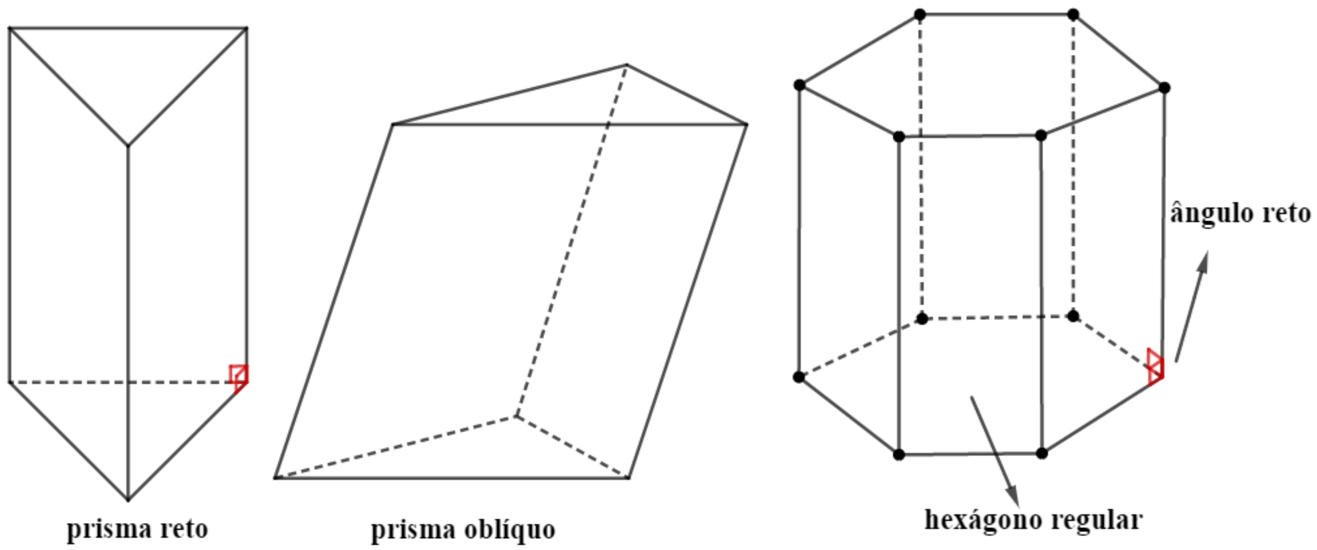
Note que a base do prisma pode ser qualquer polígono convexo. Se a base for um hexágono, por exemplo, teremos um prisma hexagonal. Se for um pentágono, teremos um prisma pentagonal.

Dependendo do ângulo que as arestas laterais formam com as bases, podemos ter dois tipos de prismas:

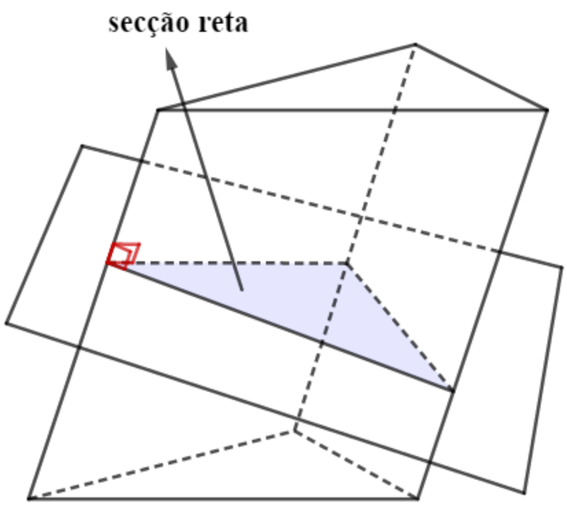
- Prisma oblíquo;
- Prisma reto.

Dizemos que um prisma é regular quando ele é reto e a base é um polígono convexo regular.

Vejamos alguns exemplos de prismas:



Quando cortamos o prisma com um plano perpendicular às arestas laterais, dizemos que a figura formada é uma **secção normal ou secção reta**.



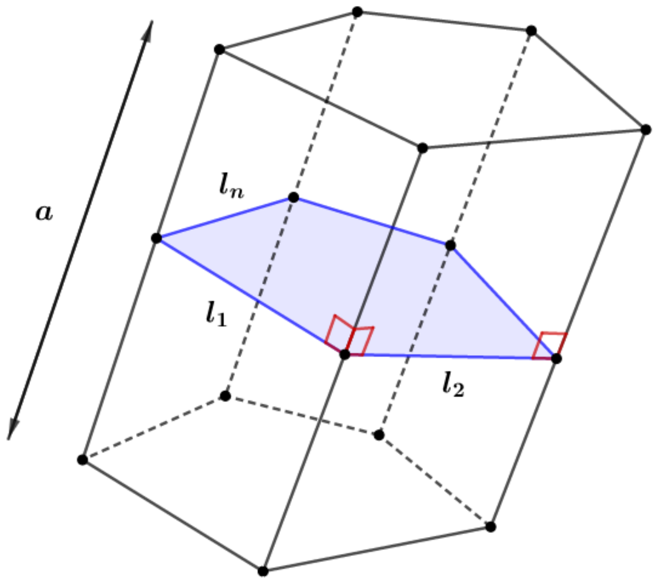
4.1.1. ÁREA DA SUPERFÍCIE DO PRISMA

Identificamos os elementos presentes no prisma. Na Geometria Plana, aprendemos a calcular a área de diversas figuras planas. Podemos usar esse conhecimento para calcular as áreas dos sólidos. A área total da superfície do prisma é dada por A_T, tal que:

$$A_T = A_L + 2A_B$$

Sendo que A_L é a área lateral do prisma e é igual à soma das áreas das faces laterais, e A_B é a área da base.

Tomando-se a secção normal de um prisma de lados medindo $l_1, l_2, \dots, l_n$, temos:



A medida da aresta lateral do prisma é a, desse modo, podemos calcular a área de cada face lateral do prisma:

$$A_i = a \cdot l_i, i = \{1,2, \dots, n\}$$

A área lateral do prisma é igual à soma das áreas das faces laterais, logo:

$$A_l = a \cdot l_1 + a \cdot l_2 + \cdots + a \cdot l_n = a \cdot \underbrace{(l_1 + l_2 + \cdots + l_n)}_{perímetro\ da\ secção\ normal}$$

Definindo como $2p$ o perímetro da secção normal, obtemos:

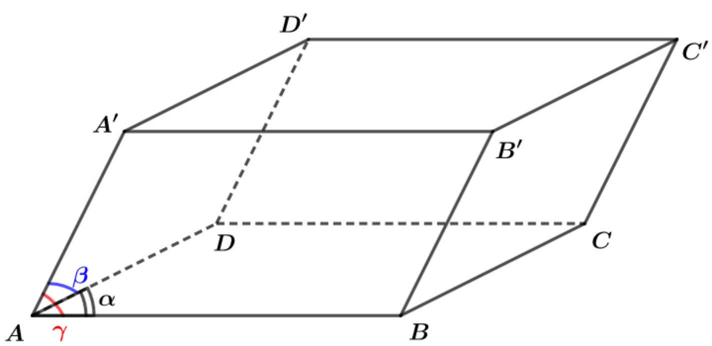
$$\boxed{A_l = 2p \cdot a}$$

4.1.2. PARALELEPÍPEDOS

Um paralelepípedo é um tipo específico de prisma cuja base é um paralelogramo. Todas as faces do paralelepípedo são paralelogramos. Vamos estudar os diferentes tipos desse sólido:

a) Oblíquo

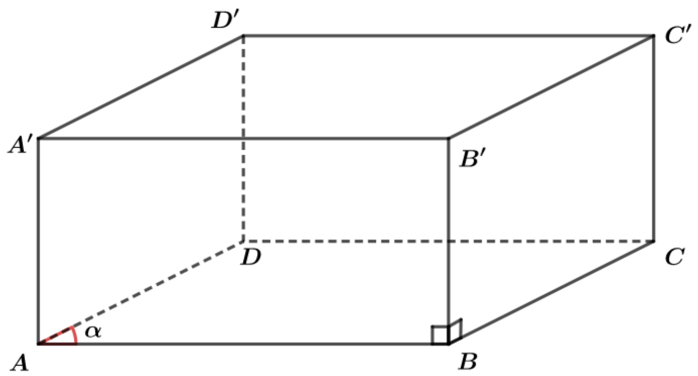
Um paralelepípedo é oblíquo quando sua aresta lateral não forma ângulo reto com o plano da base.



Paralelepípedo oblíquo

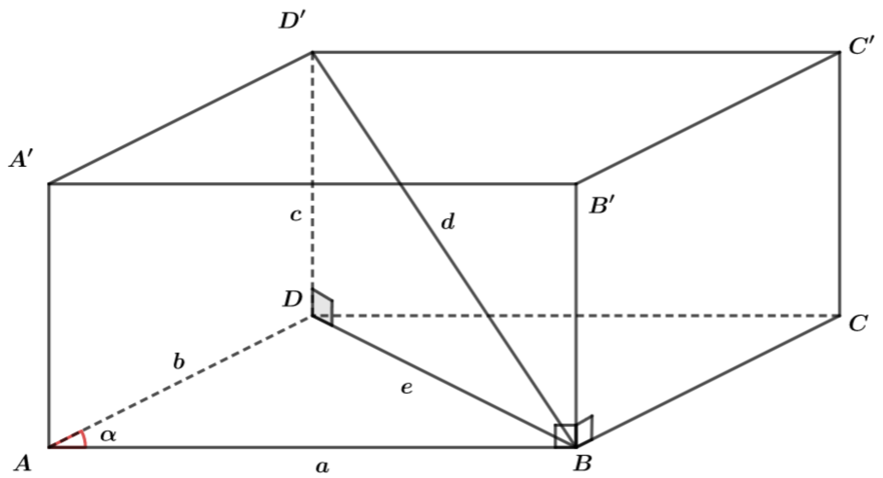
b) Reto

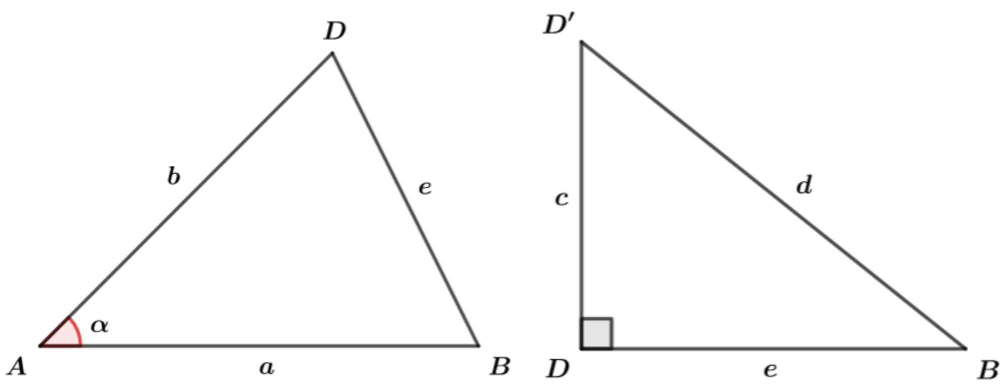
Um paralelepípedo é reto quando sua aresta lateral forma ângulo reto com a base.



Paralelepípedo reto

Vamos estudar algumas propriedades dessa figura. Consideremos o paralelepípedo de dimensões conforme a seguinte imagem:





e é a diagonal menor da base, e d é a diagonal menor do paralelepípedo. Observando as figuras, temos:

$$\Delta ABD \Rightarrow e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \ \ (lei\ dos\ cossenos)$$

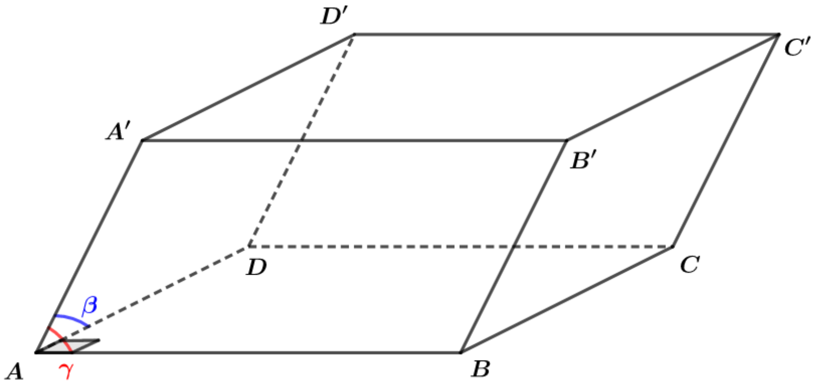
$$\Delta DBD' \Rightarrow d^2 = c^2 + e^2 \Rightarrow d^2 = c^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$

$$\therefore \boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha}}$$

Podemos usar o mesmo raciocínio para encontrar a outra diagonal do paralelepípedo.

c) Retângulo

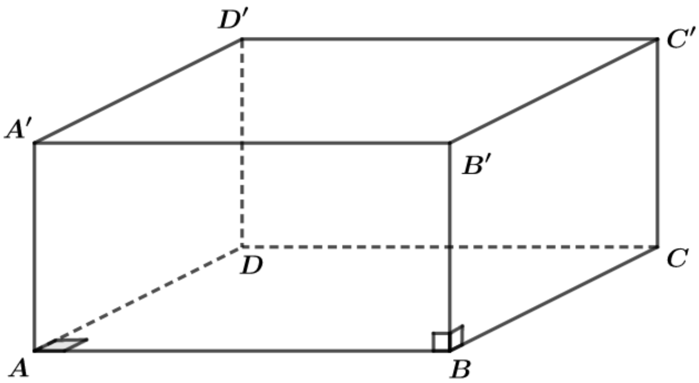
Um paralelepípedo é retângulo quando sua base é um retângulo.



Paralelepípedo retângulo

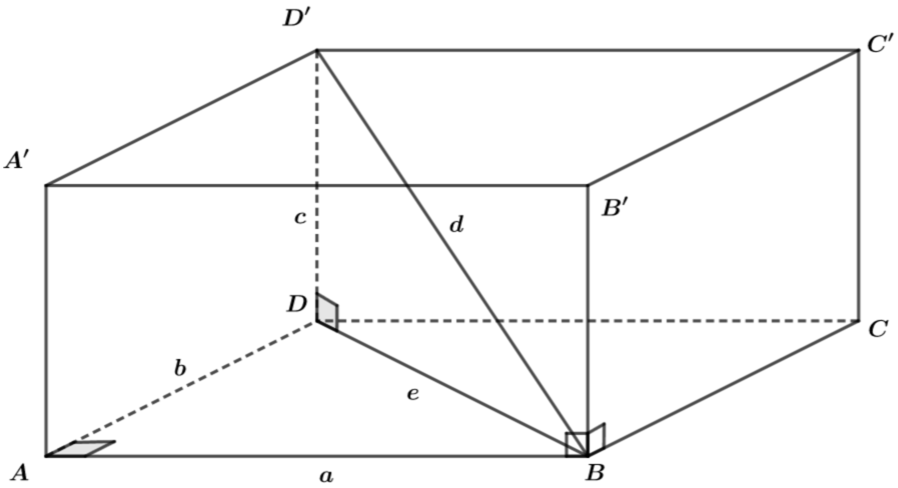
d) Reto-retângulo

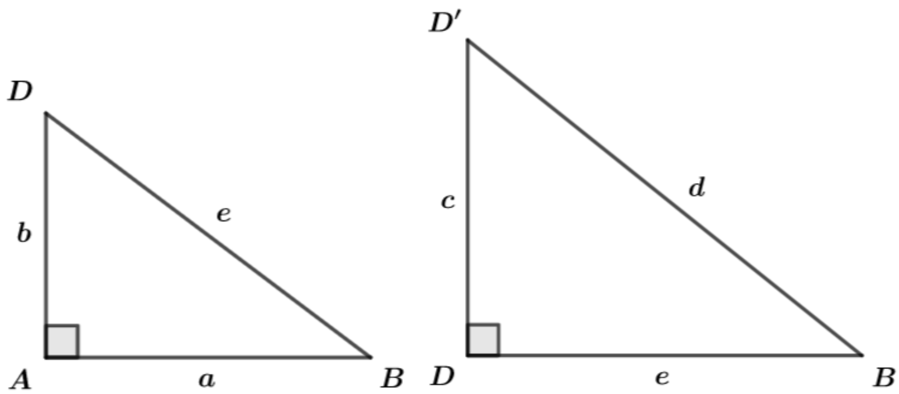
Um paralelepípedo é reto-retângulo quando sua aresta lateral forma ângulo reto com a base e esta é um retângulo.



Paralelepípedo reto-retângulo

Vejamos algumas propriedades desse sólido. Consideremos o paralelepípedo com as seguintes dimensões:





Pelas figuras, podemos ver que:

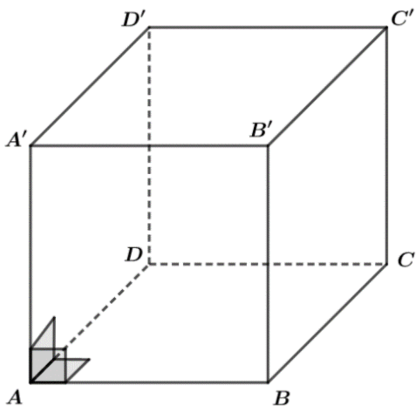
$$\Delta ABD \Rightarrow e^2 = a^2 + b^2$$

$$\Delta DBD' \Rightarrow d^2 = c^2 + e^2 = c^2 + a^2 + b^2 \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

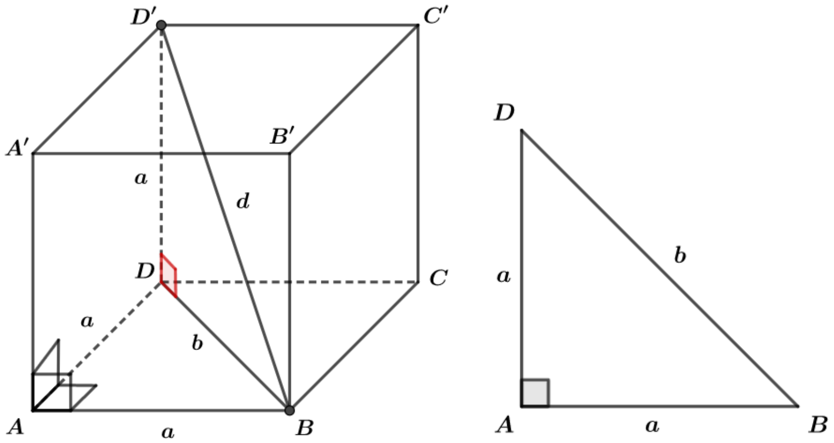
$$A_T = ab + ab + ac + ac + bc + bc \Rightarrow \boxed{A_T = 2(ab + ac + bc)}$$

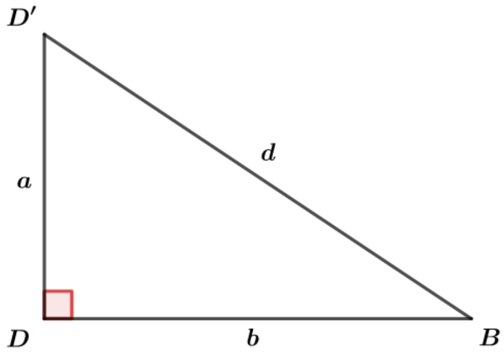
e) Cubo

Esse sólido é um paralelepípedo cujas faces são todas quadrados.



Vamos estudar algumas propriedades dessa figura. Consideremos um cubo de aresta a e tracemos as diagonais conforme a imagem abaixo:





b é a diagonal da base, e d é a diagonal do cubo. Observando as faces, temos:

$$\Delta ABD \Rightarrow b^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow \boxed{b = a\sqrt{2}}$$

$$\Delta DBD' \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{d = a\sqrt{3}}$$

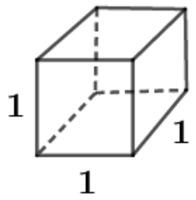
Além disso, como as faces são quadrados de lado a, para calcular a área total, basta somar seis vezes a área de cada face, ou seja:

$$\text{área total do cubo} \Rightarrow \boxed{A_T = 6a^2}$$

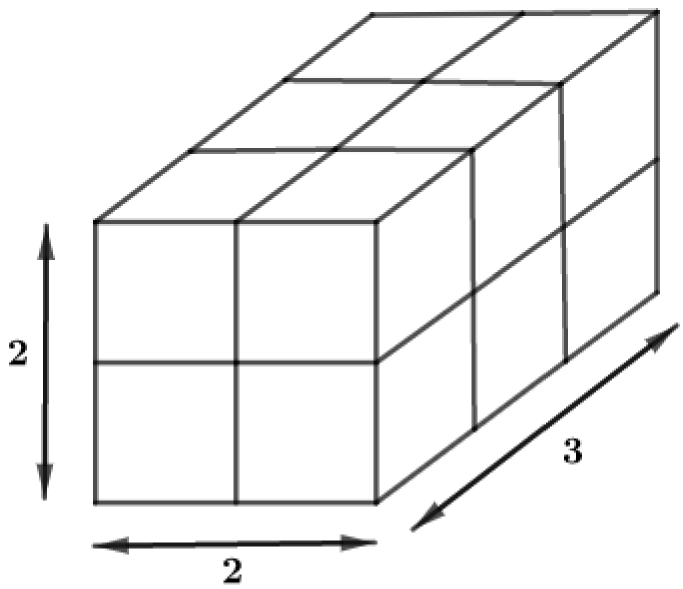
4.1.3. VOLUME DO PARALELEPÍPEDO

Introduziremos agora o conceito de volume. Imagine que você tenha uma caixa vazia e queira enchê-la de cubos. Antes de enchê-la, você se pergunta "quantos cubos será que cabem nessa caixa?". Para responder a essa pergunta, devemos conhecer o volume da caixa para saber quanto de espaço temos disponível. Então, se a caixa tem 10 unidades de volume e supondo que cada cubo ocupe 1 unidade de volume, nele caberá 10 cubos. Assim, o **volume** é a medida usada para determinar a **quantidade de espaço ocupada por um corpo** e, por isso, ele permite, também, determinar quanto um corpo, vazio por dentro, possui de espaço disponível**.**

Na Geometria Plana, ao calcular a área de figuras planas, usamos um quadrado de lado 1 como referência. Para o volume, usaremos um cubo de lado 1, a ele denominaremos de cubo unitário.



Se o cubo tiver aresta medindo $1m$, o seu volume será $1m^3$. Se tiver aresta medindo $1cm$, o seu volume será $1cm^3$. Geralmente, o volume tem unidades de tamanho cúbicos. Para calcular o volume de um sólido, devemos pensar em quantos cubos unitários cabem no sólido. Vamos pensar no caso mais simples, um paralelepípedo reto-retângulo. Considere o exemplo abaixo:



Para saber qual é o volume desse sólido, precisamos contar quantos cubos unitários formam essa figura. Observando-a, podemos ver que ele é formado por $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ cubos.

O volume de um paralelepípedo reto-retângulo é dado pelo produto entre a área da sua base e a sua altura.

$$\boxed{V = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura}) = A_B \cdot h}$$

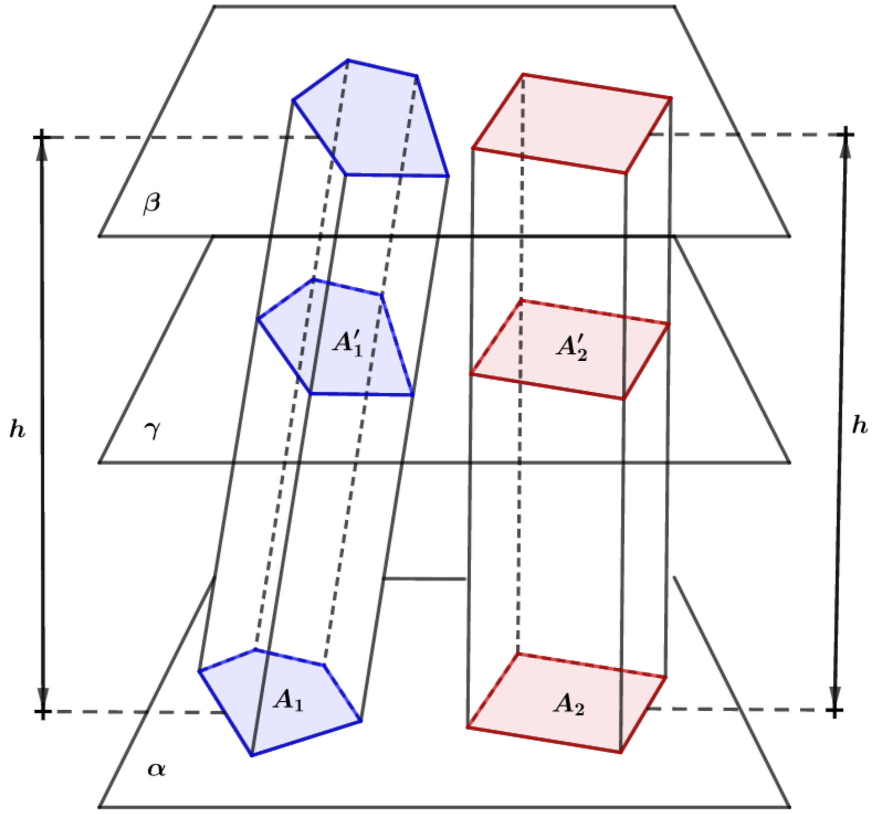
E se quisermos calcular o volume de um prisma qualquer? Para descobrir o volume desse sólido, estudaremos o **princípio de Cavalieri**.

4.1.4. PRINCÍPIO DE CAVALIERI

O princípio de Cavalieri diz que:

> Dados dois sólidos cujas bases estão contidas num mesmo plano, se qualquer plano secante, paralelo ao plano da base, forma superfícies de áreas iguais nos sólidos, então os sólidos têm volumes iguais.

Na prática, se dois prismas possuem alturas iguais e bases de mesma área, podemos afirmar que os dois sólidos possuem o mesmo volume. Assim, vamos tomar dois prismas: um será um prisma oblíquo de base pentagonal (a base pode ser qualquer polígono), e o outro será um paralelepípedo reto-retângulo. As suas bases estarão no mesmo plano e ambos têm mesma área. Vejamos a figura abaixo.



Como as bases têm áreas iguais, temos $A_1 = A_2$. Pelo princípio de Cavalieri, temos:

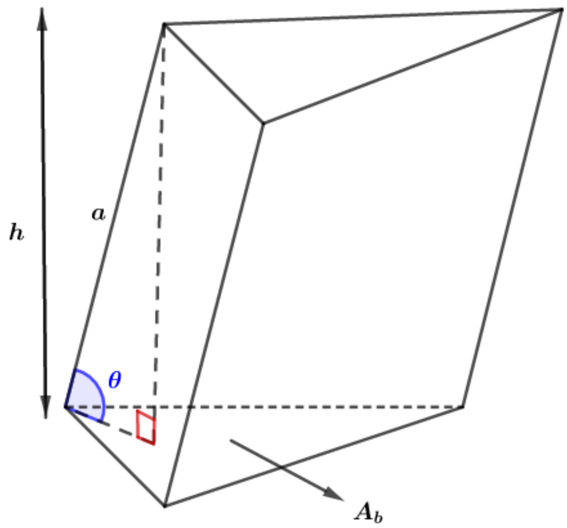
$$V_1 = V_2 = A_2 \cdot h = A_1 \cdot h$$

$$\therefore V_1 = A_1 \cdot h$$

Portanto, a área de um prisma qualquer é igual ao produto da área da base pela sua altura.

$$\boxed{V = A_B \cdot h}$$

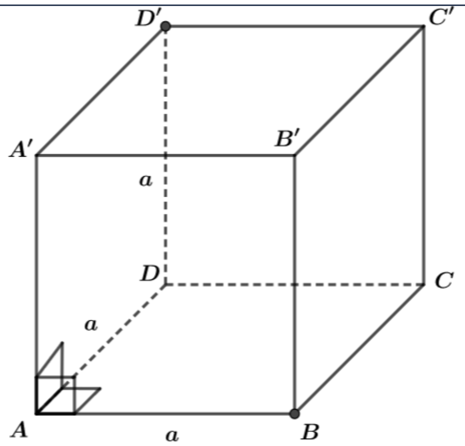
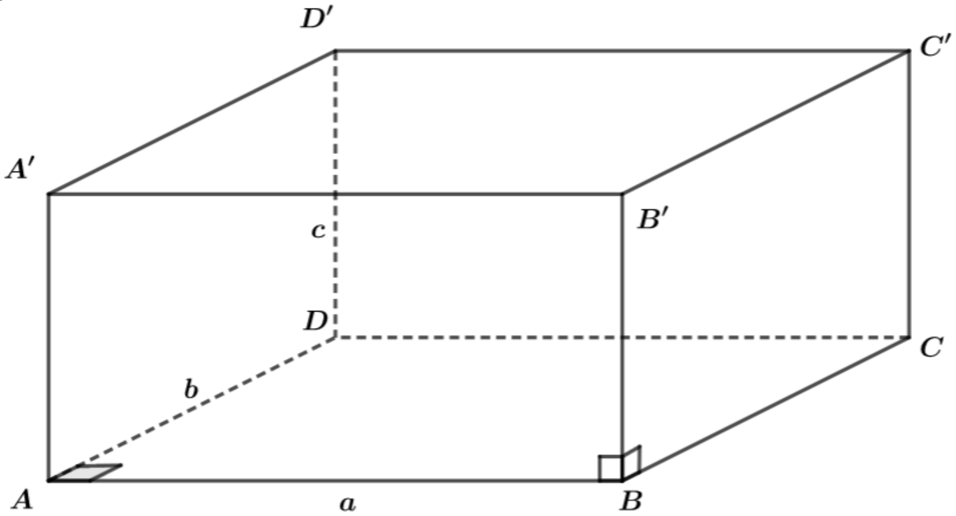
Se tivermos apenas a informação da aresta lateral ao invés da altura do prisma, podemos usar a trigonometria para encontrar a altura. Veja:

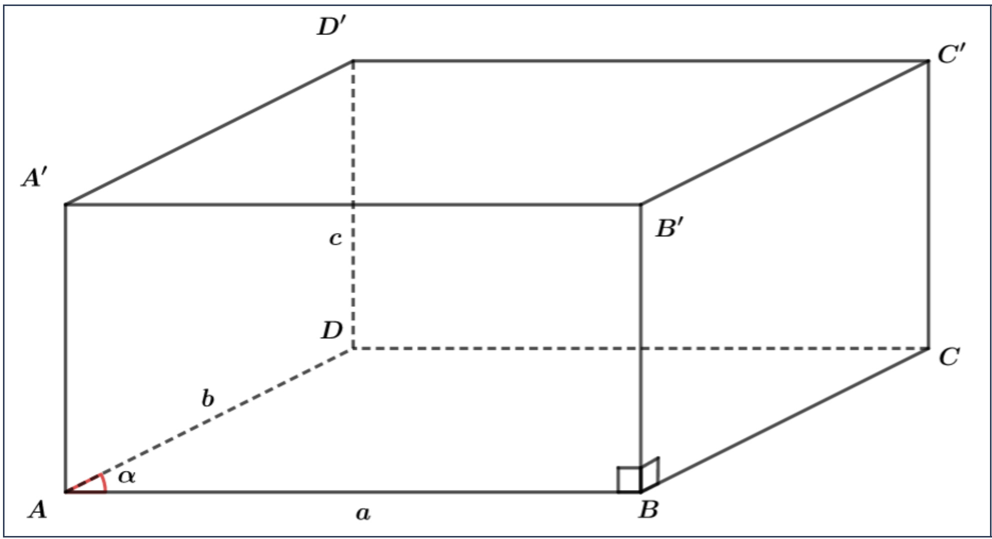


Podemos ver que:

$$sen\ \theta = \frac{h}{a} \Rightarrow \boxed{h = a \cdot sen\ \theta}$$

Vejamos o volume de alguns paralelepípedos:

	Cubo $V = A_B \cdot h = a \cdot a \cdot a$ $\boxed{V = a^3}$
	Reto-retângulo $V = \underbrace{A_B}_{ab} \cdot \underbrace{h}_{c}$ $\boxed{V = abc}$



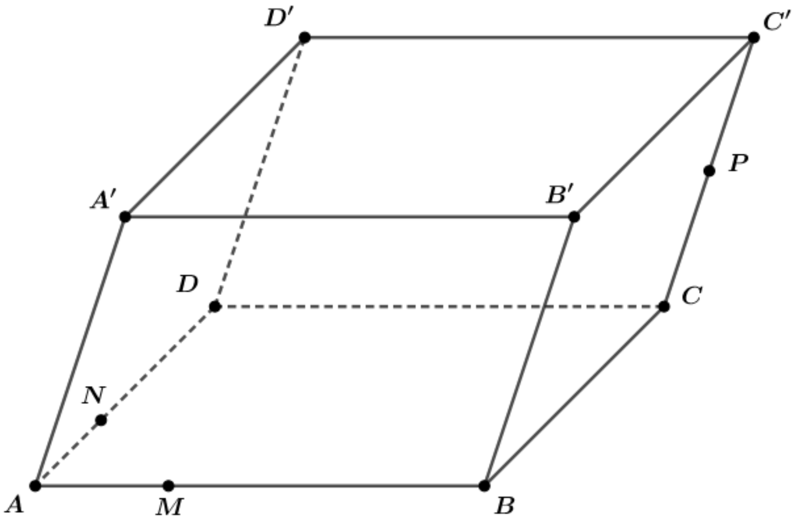
Reto

$$V = \underbrace{A_B}_{ab\,sen\alpha} \cdot \underbrace{h}_{c}$$

$$\boxed{V = abc\ sen\ \alpha}$$

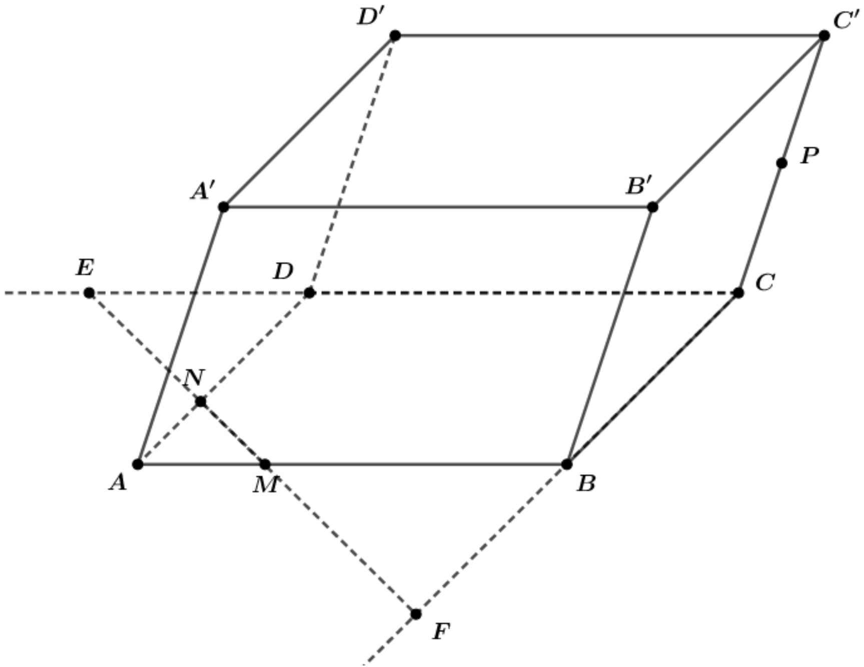
4.1.5. SECÇÃO PLANA DE UM PARALELEPÍPEDO

Vamos aprender a analisar a secção plana formada por um plano secante a um paralelepípedo qualquer. Consideremos o caso abaixo:

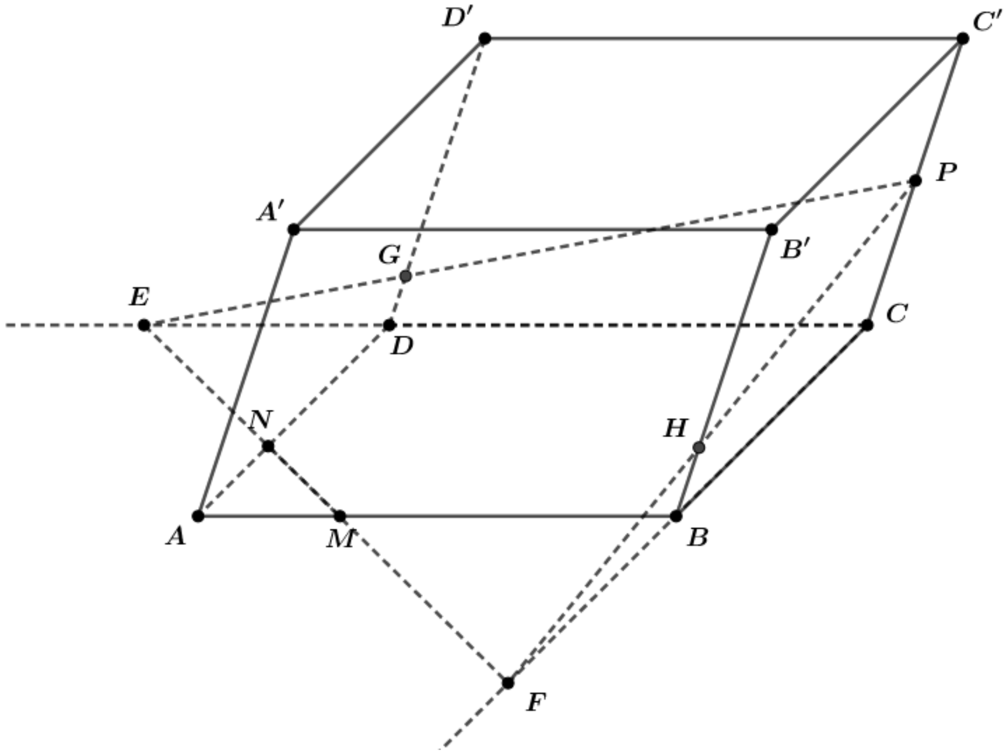


MNP determinam um plano, e este forma uma secção plana no paralelepípedo. Como podemos analisar a secção plana formada? Vejamos o passo a passo:

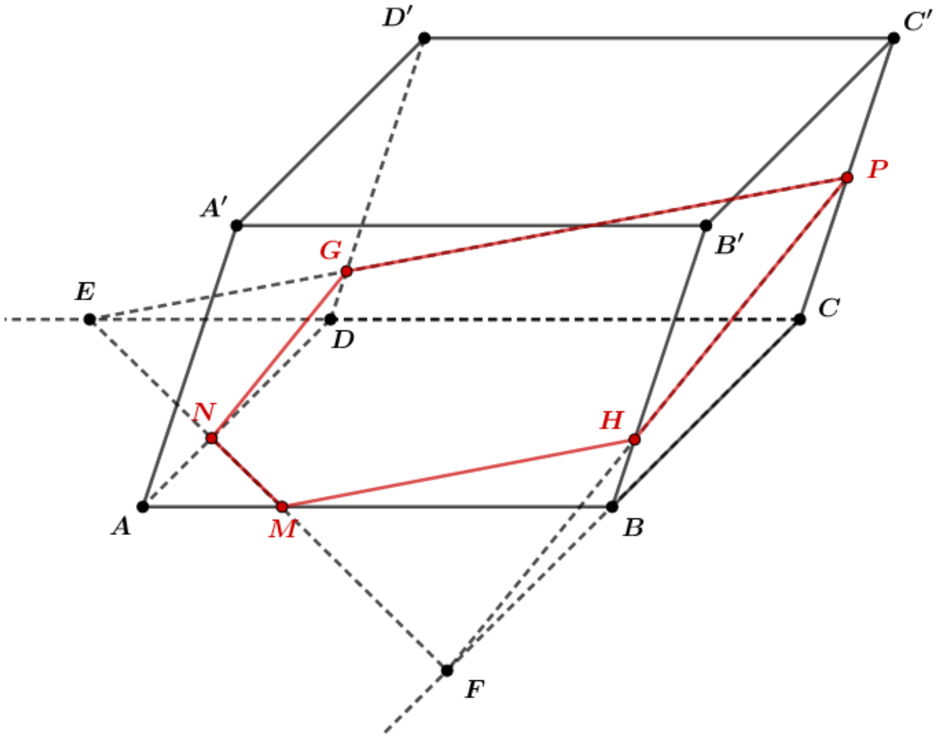
1) O primeiro passo é prolongar os segmentos de retas MN, CD e CB. Eles se interceptarão nos pontos E e F, conforme mostra a figura:



2) Agora, construímos os segmentos de retas PE e PF. Eles interceptarão as arestas DD' e BB' nos pontos G e H:



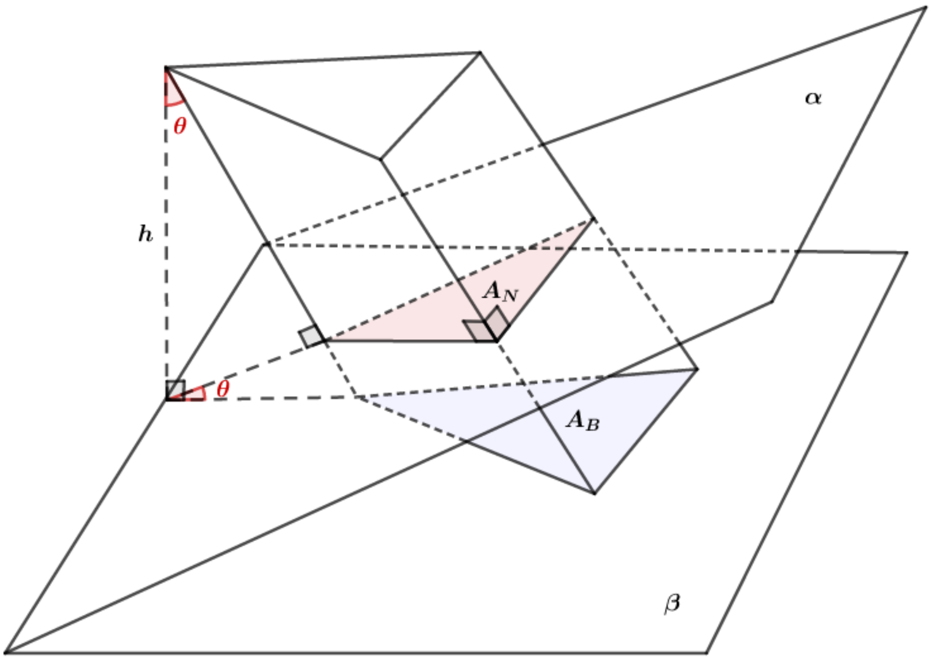
3) Por fim, basta ligar os segmentos de retas MH e NG. A secção plana formada é o polígono $MNGPH$:



Esse é um exemplo de um caso possível que pode ser cobrado na prova. O importante é você saber como construir a secção plana dadas as condições no enunciado da questão.

4.1.6. PROJEÇÃO ORTOGONAL NO PRISMA OBLÍQUO

Seja α um plano que corta, perpendicularmente, a aresta lateral de um prisma oblíquo, segundo a figura abaixo:



Consideremos a seguinte legenda:

A_B: *área da base*

h: *altura*

A_N: *área da secção normal*

θ: *medida do diedro formado entre α e o plano da base β*

A_N é a projeção ortogonal de A_B sobre o plano α, logo, podemos escrever:

$$\boxed{A_B \cdot \cos\theta = A_N}$$

Dessa relação, temos:

$$A_B = \frac{A_N}{\cos\theta}$$

Além disso, θ também é o ângulo formado entre a aresta lateral do prisma e sua altura:

$$a \cdot \cos\theta = h$$

Como o volume do prisma é

$$V = A_B \cdot h$$

Temos:

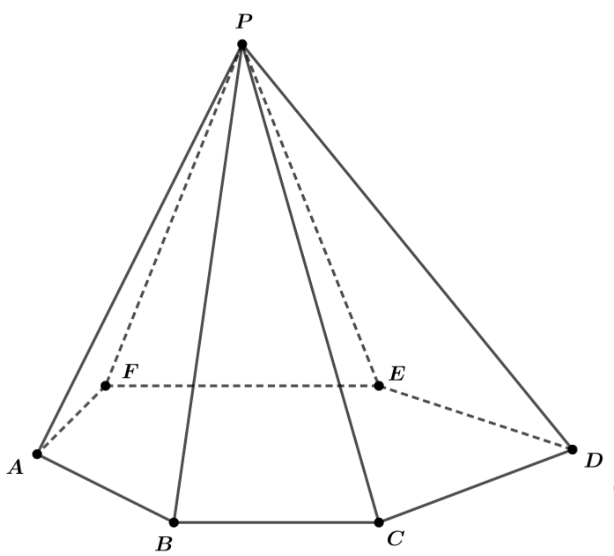
$$V = \frac{A_N}{\cos\theta} \cdot a \cdot \cos\theta$$

$$\therefore \boxed{V = A_N \cdot a}$$

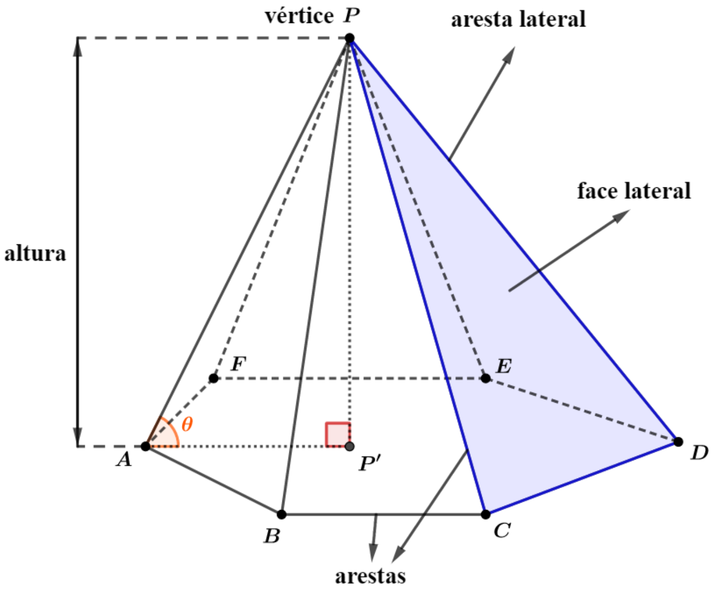
Portanto, o volume do prisma é igual ao produto entre a área da secção normal e sua aresta lateral.

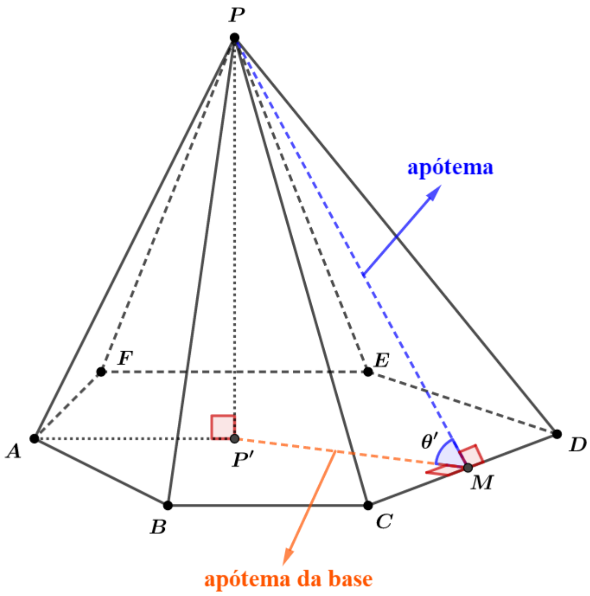
4.2. PIRÂMIDES

Consideremos um polígono convexo contido em um plano α e um ponto P fora de α. A figura formada pelos segmentos de reta que ligam P aos vértices do polígono é chamada de pirâmide convexa.



Vejamos os elementos presentes na pirâmide.





θ é o ângulo formado pela aresta lateral AP e o plano da base;

A altura da pirâmide é igual à distância entre o vértice P e o plano da base;

Apótema é o termo usado para a altura de uma face lateral;

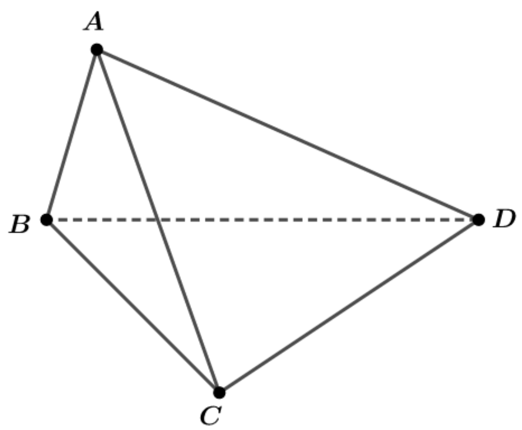
θ' é o ângulo diédrico da aresta CD.

A natureza da pirâmide varia de acordo com o polígono da base. Se a base for um pentágono, teremos uma pirâmide pentagonal. Se a base for um hexágono, teremos uma pirâmide hexagonal, e assim por diante.

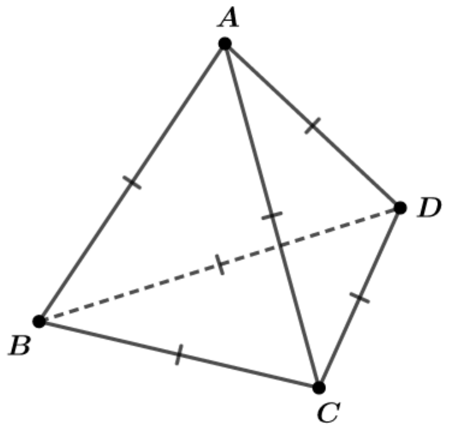
Dizemos que uma pirâmide é **regular** quando a sua **base é um polígono regular** e a **projeção ortogonal do vértice é o centro da base**. Nesse caso, as arestas laterais são todas congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles.

4.2.1. TETRAEDRO

Tetraedro é uma figura que costuma ser cobrada bastante nas provas. Ela é uma pirâmide triangular.



Um tetraedro é regular quando todas as suas arestas são congruentes. Desse modo, as faces dessa pirâmide são triângulos equiláteros.



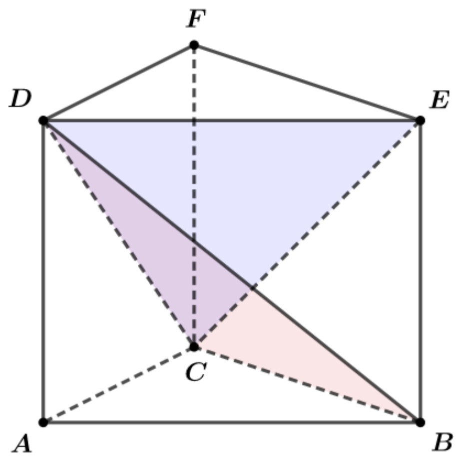
4.2.2. ÁREA DA SUPERFÍCIE DA PIRÂMIDE

A área lateral de uma pirâmide é igual à soma das áreas laterais das faces.

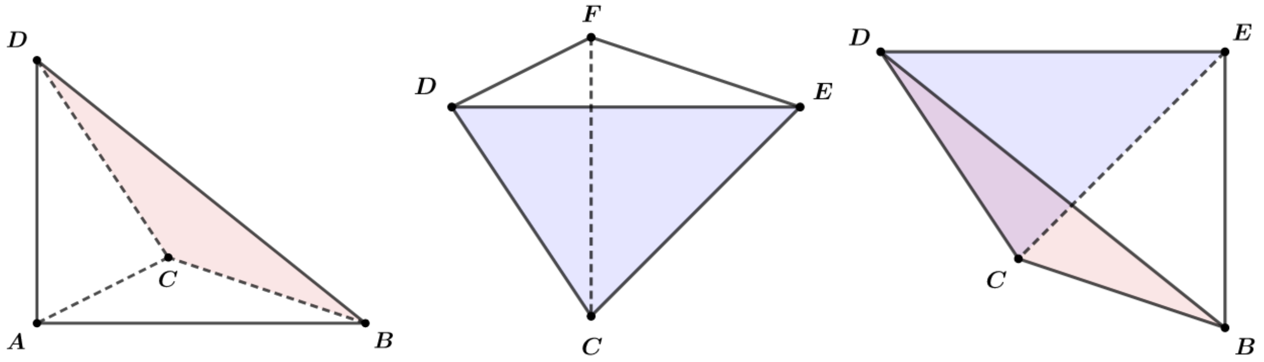
A área total é igual à soma da área lateral com a área com base.

4.2.3. VOLUME DA PIRÂMIDE

Vamos deduzir a fórmula do volume para pirâmides. Consideremos uma pirâmide $PABC$ de base triangular ABC e um prisma $ABCDEF$ de mesma base e mesma altura da pirâmide.



Note que esse prisma pode ser decomposto em três pirâmides triangulares.



As pirâmides $ABCD$ e $CEFD$ possuem bases de mesma área ($A_{\Delta\text{ABC}} = A_{\Delta\text{DEF}}$) e mesma altura, assim como as pirâmides $CEFD$ e $BCDE$, que possuem bases CEF e BCE congruentes e também possuem mesma altura. Logo, podemos afirmar:

$$V_{ABCD} = V_{CEFD} = V_{BCDE} = V_{pirâmide}$$

Como o prisma possui base ABC e altura igual à pirâmide $ABCD$, temos:

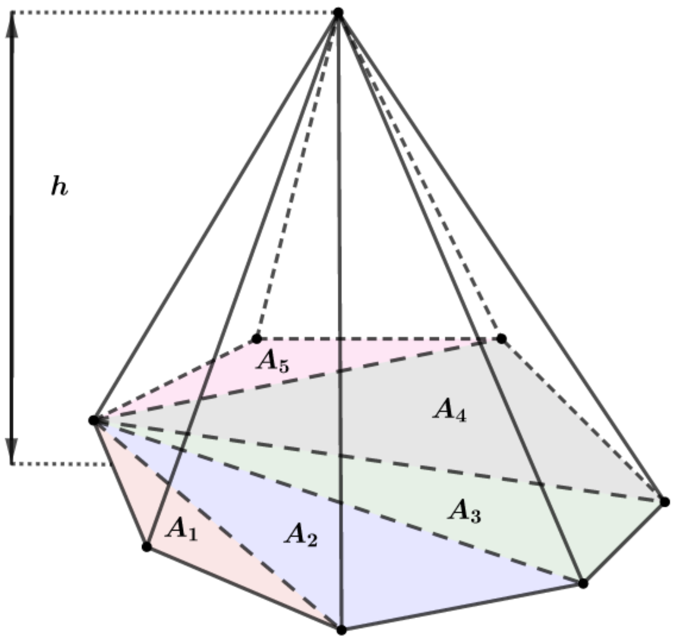
$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$$

Além disso, ele é formado pela união das três pirâmides:

$$V_{prisma} = V_{ABCD} + V_{CEFD} + V_{BCDE} = 3V_{pirâmide}$$

$$\therefore \boxed{V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h}$$

Essa fórmula é válida para qualquer tipo de pirâmide convexa, pois qualquer polígono convexo pode ser decomposto em diversos triângulos. Assim, basta somar o volume de cada pirâmide com base triangular.



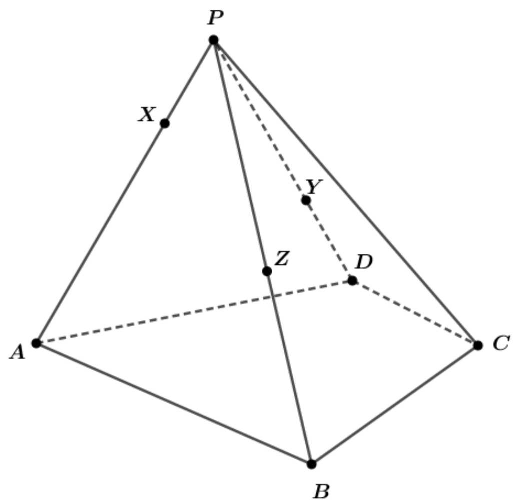
$$V = \frac{1}{3} A_1 \cdot h + \frac{1}{3} A_2 \cdot h + \frac{1}{3} A_3 \cdot h + \frac{1}{3} A_4 \cdot h + \frac{1}{3} A_5 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3}\underbrace{(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5)}_{\text{área da base}} \cdot h$$

$$\therefore \boxed{V = \frac{1}{3} A_B \cdot h}$$

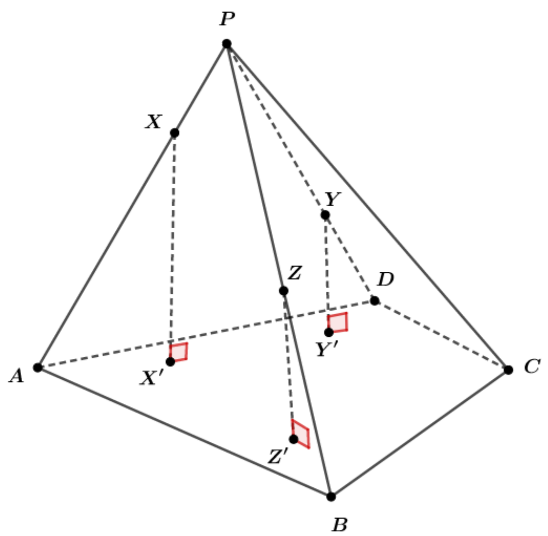
4.2.4. SECÇÃO PLANA DA PIRÂMIDE

Consideremos a pirâmide abaixo:

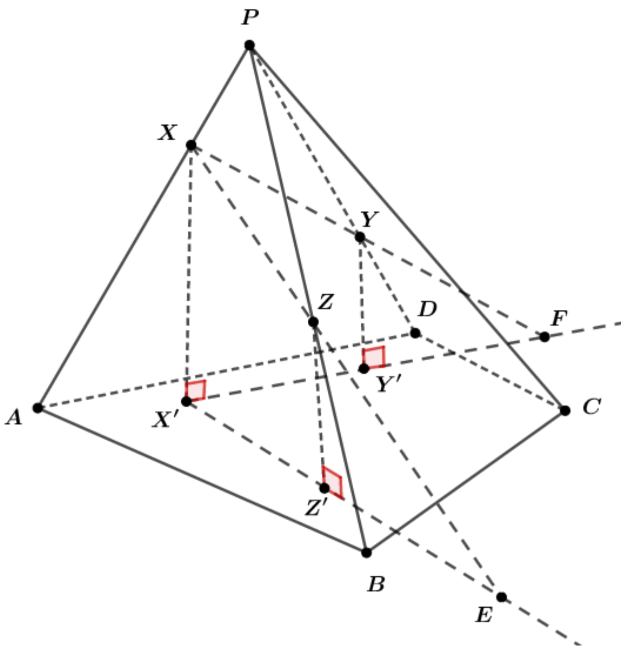


X, Y, Z determinam um plano secante à pirâmide. Vamos analisar como podemos construir a secção plana que esse plano forma na pirâmide. Para isso, devemos tentar encontrar a intersecção desse plano com o plano da base. Vejamos.

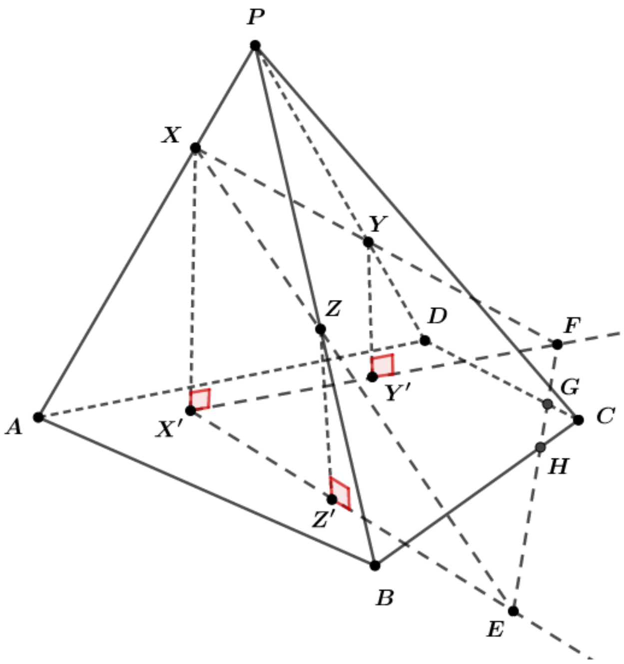
1) O primeiro passo é fazer a projeção ortogonal dos pontos X, Y, Z no plano da base:



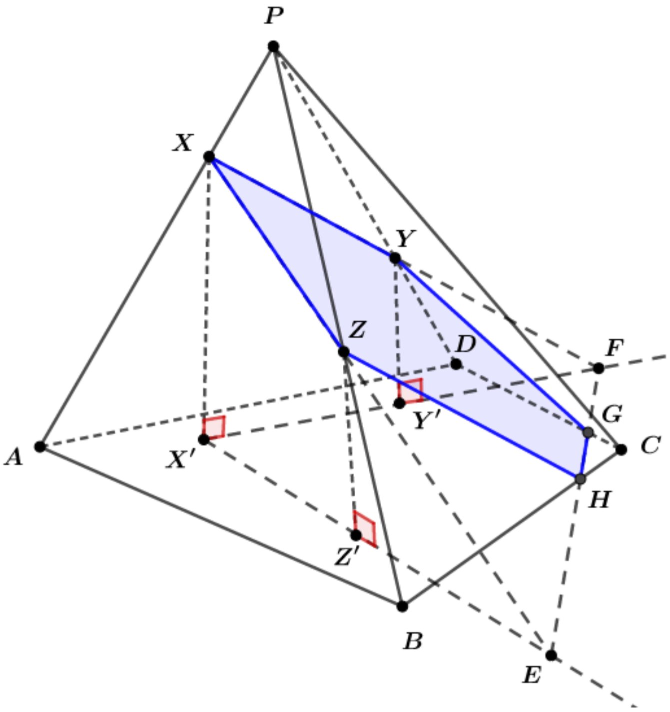
2) Prolongamos os segmentos de retas XZ e $X'Z'$. Eles se interceptarão em algum ponto do plano da base. Analogamente, prolongamos os segmentos XY e $X'Y'$.



3) Construímos o segmento de reta EF para verificar se eles interceptam algum ponto da base.

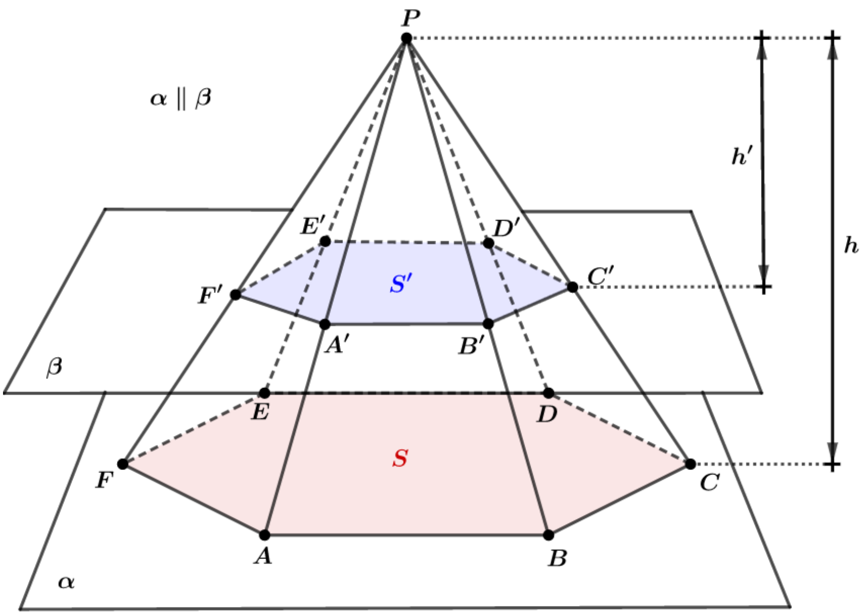


4) Note que EF é a aresta do diedro formado entre o plano da secção e o plano da base. A secção está determinada.



4.2.5. PLANO SECANTE PARALELO À BASE DA PIRÂMIDE

Quando seccionamos um plano paralelamente ao plano da base, obtemos duas pirâmides semelhantes.



A razão entre as áreas da pirâmide menor e a pirâmide maior é igual k^2, onde k é a razão de proporção entre os segmentos das pirâmides.

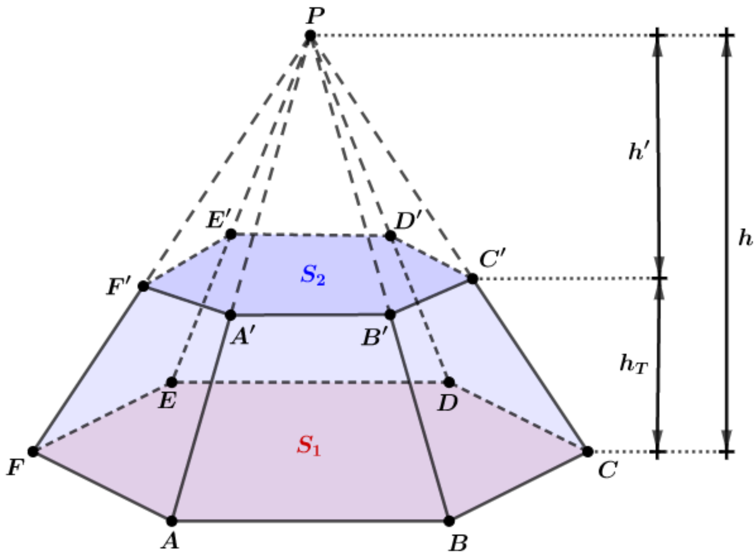
$$\frac{h}{h'} = \frac{PA}{PA'} = \frac{PB}{PB'} = \cdots = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \cdots = k$$

$$\boxed{\frac{S}{S'} = k^2}$$

A razão entre os volumes da pirâmide menor e a pirâmide maior é igual k^3:

$$\boxed{\frac{V}{V'} = k^3}$$

A figura formada pelos vértices $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ é chamada de **tronco de pirâmide de bases paralelas**. Vamos calcular o volume desse tronco.



Sejam V_1, V_2, V_T os volumes da pirâmide maior, da pirâmide menor e do tronco, respectivamente. Assim, temos:

$$V_T = V_1 - V_2 = \frac{1}{3} S_1 \underbrace{h}_{h' + h_T} - \frac{1}{3} S_2 h'$$

$$\Rightarrow V_T = \frac{1}{3} S_1 (h' + h_T) - \frac{1}{3} S_2 h'$$

$$\Rightarrow V_T = \frac{1}{3} [(S_1 - S_2)h' + S_1 h_T]$$

Como as pirâmides são semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{(h' + h_T)}{h'} \Rightarrow \sqrt{S_1} h' = \sqrt{S_2} h' + \sqrt{S_2} h_T$$

$$\therefore h' = \frac{h_T \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$$

Substituindo h' na expressão do volume:

$$V_T = \frac{1}{3}\left[(S_1 - S_2)\left(\frac{h_T \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}\right) + S_1 h_T\right]$$

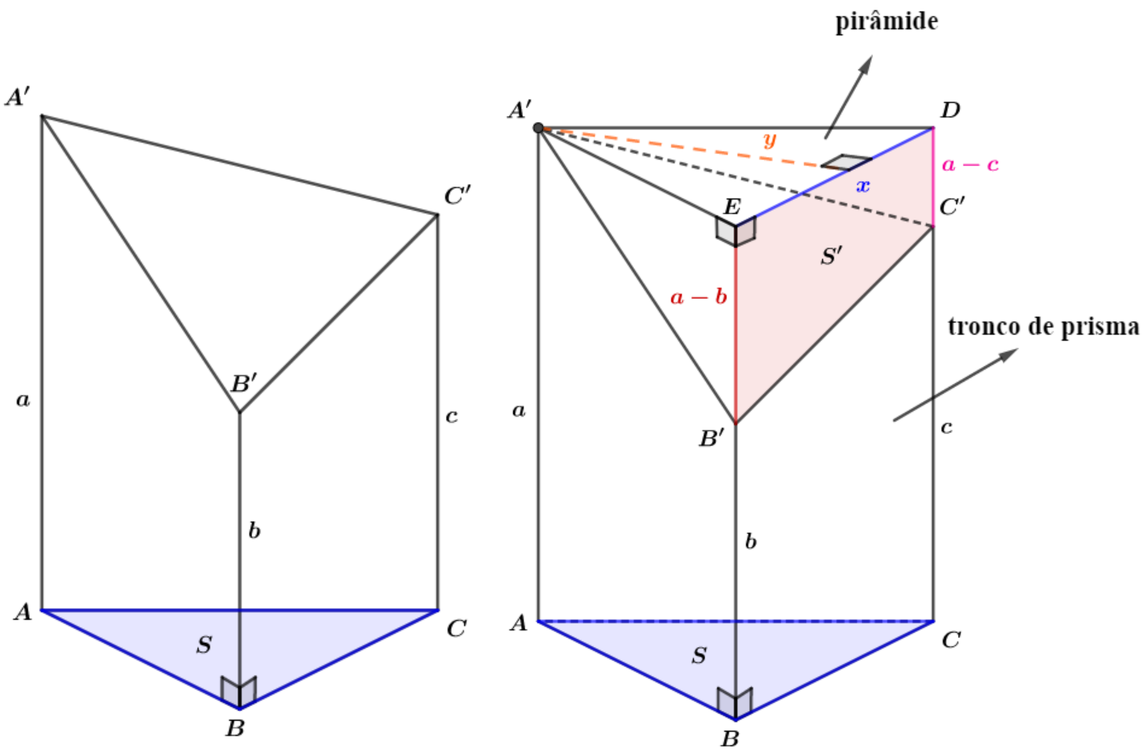
Note que $S_1 - S_2 = \sqrt{(S_1)^2} - \sqrt{(S_2)^2} = (\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})$, substituindo acima:

$$V_T = \frac{1}{3}\left[\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)\sqrt{S_2}h_T + S_1 h_T\right]$$

$$\boxed{V_T = \frac{h_T}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)}$$

4.2.6. TRONCO DE PRISMA TRIANGULAR

Vamos estudar o volume de um tronco de prisma triangular. Consideremos um tronco de prisma triangular com uma base perpendicular às arestas laterais, conforme mostra a figura abaixo.



A área da base perpendicular é S. Podemos completar esse tronco de prisma com uma pirâmide de modo a formar um prisma reto. Desse modo, temos que o volume do tronco é dado por:

$$V_T = V_{prisma} - V_{pirâmide}$$

$$V_{prisma} = a \cdot S$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3}S' y = \frac{1}{3}\frac{[(a - b + a - c)x]}{2} y = \frac{1}{3} \cdot (2a - b - c) \cdot \underbrace{\frac{xy}{2}}_{S} = \frac{1}{3}(2a - b - c) \cdot S$$

$$\Rightarrow V_T = a \cdot S - \frac{1}{3}(2a - b - c) \cdot S$$

$$\therefore \boxed{V_T = \frac{1}{3}(a + b + c) \cdot S}$$

Caso o prisma tenha ambas as bases não perpendiculares às arestas laterais, podemos dividir esse prisma por uma secção normal e, assim, teremos dois prismas cuja base forma um ângulo reto com as arestas laterais. Procedendo dessa forma, encontramos:

$$\boxed{V_T = \frac{1}{3}(a + b + c) \cdot S}$$

Onde a, b, c são as medidas das arestas laterais do tronco de prisma oblíquo e S é a área da secção normal.

4.3. POLIEDROS CONVEXOS

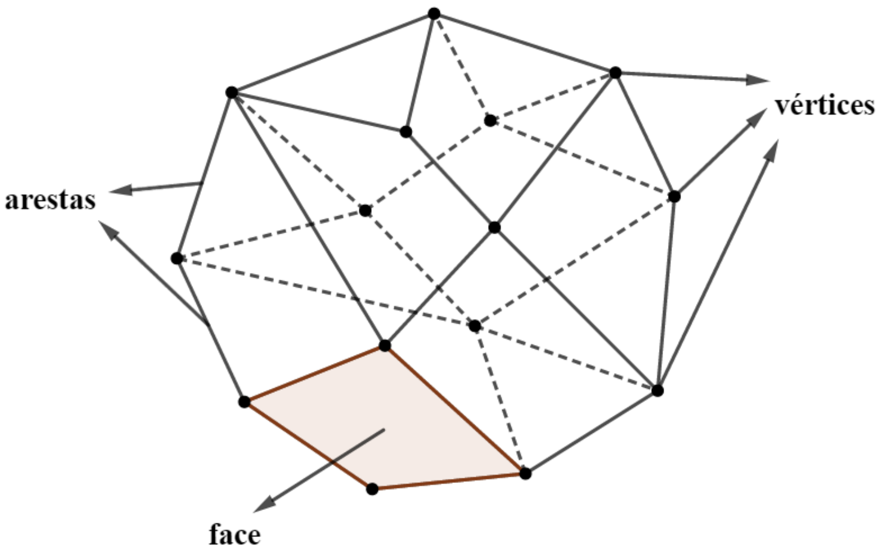
Dizemos que um sólido é um poliedro convexo quando a sua superfície é formada por n polígonos que satisfazem as seguintes condições:

Dois polígonos quaisquer não estão no mesmo plano;

Qualquer aresta de um polígono é comum a apenas dois polígonos;

O plano de qualquer polígono deixa os demais no mesmo semiespaço.

As faces do poliedro convexo são os polígonos convexos, as suas arestas são os lados dos polígonos e os seus vértices são os vértices dos polígonos.



4.3.1. RELAÇÃO DE EULER

A relação de Euler é uma propriedade que relaciona as arestas, vértices e faces de um poliedro convexo. Para todo poliedro convexo, vale a relação:

$$\boxed{V - A + F = 2}$$

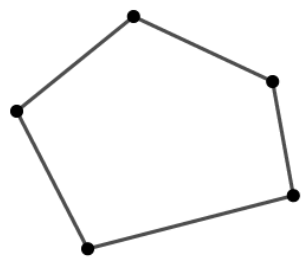
Demonstração

Para demonstrar essa relação, precisamos de um teorema preliminar. Vejamos:

Para toda superfície poliédrica convexa aberta, vale a relação:
$$V_A - A_A + F_A = 1$$

Provaremos essa propriedade por indução finita.

1) Veja que, para $F_A = 1$, a superfície poliédrica convexa aberta (SPCA) se torna um polígono convexo plano de n lados e assim:



superfície poliédrica convexa aberta de 1 face

$$V_A = n = A_A$$

Logo:

$$V_A - A_A + F_A = n - n + 1 = 1$$

2) Suponha que essa propriedade seja válida para uma SPCA de F' faces (possui V' vértices e A' arestas) tal que:

$$V' - A' + F' = 1$$

Devemos provar que ela é válida para $F' + 1$ faces.

Adicionando uma face com a arestas e b arestas compartilhadas para a SPCA inicial, temos para a nova superfície formada:

$$F = F' + 1$$

$$A = A' + a - b \text{ (} b \text{ arestas compartilhadas)}$$

$$V = V' + a - (b + 1) \text{ (} b \text{ arestas compartilhadas, temos } b + 1 \text{ vértices coincidindo)}$$

Verificando a relação, obtemos:

$$V - A + F = [V' + a - (b + 1)] - [A' + a - b] + F' + 1$$

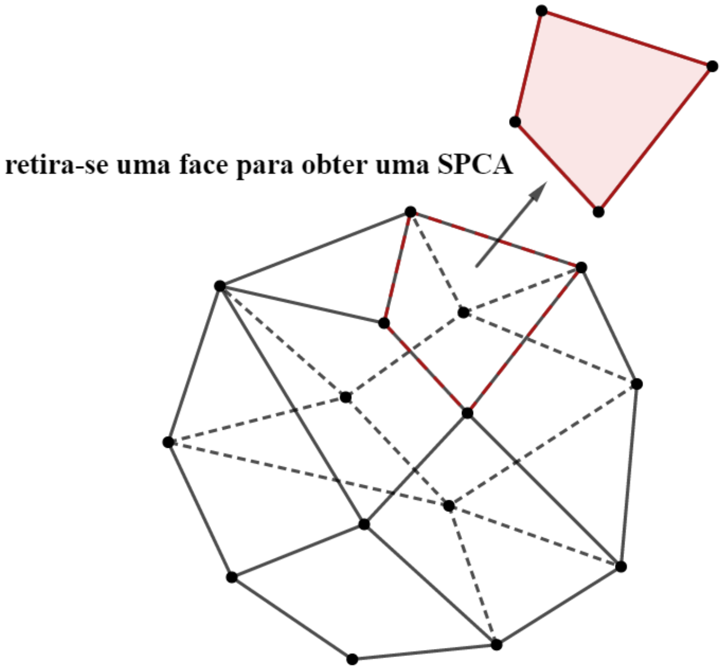
$$V - A + F = V' + a - b - 1 - A' - a + b + F' + 1$$

$$V - A + F = V' - A' + F'$$

Portanto, a relação não se altera adicionando-se ou removendo-se uma face na superfície, o que prova nossa hipótese de indução.

Agora, vamos proceder à demonstração da relação de Euler.

Tomemos um poliedro convexo fechado de F faces (possui V vértices e A arestas) e dele retiramos uma face. Obteremos uma SPCA e, assim, vale a relação:



$$V_A - A_A + F_A = 1$$

Como retiramos apenas uma face, temos para essa SPCA:

$$V_A = V; A_A = A; F_A = F - 1$$

Logo:

$$V_A - A_A + F_A = 1 \Rightarrow V - A + F - 1 = 1 \Rightarrow \boxed{V - A + F = 2}$$

Os poliedros que admitem a relação de Euler são chamados de **poliedros eulerianos**. Atenção! Todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo poliedro euleriano é convexo!

4.3.2. SOMA DOS ÂNGULOS DAS FACES DE UM POLIEDRO CONVEXO

A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é igual à

$$S = (V - 2) \cdot 360°$$

Em que V é o número de vértices do poliedro convexo.

Demonstração

Consideremos um poliedro convexo de V vértices, A arestas e F faces. Sejam $n_1, n_2, n_3, \dots, n_f$ o número de lados das faces $1, 2, 3, \dots, F$. Como cada face é um polígono convexo, temos que a soma dos ângulos internos de cada face é:

$$S_i = (n_i - 2) \cdot 180°; i = \{1, 2, 3, \dots, F\}$$

Assim, somando-se todos os ângulos internos das faces, temos:

$$S = (n_1 - 2) \cdot 180° + (n_2 - 2) \cdot 180° + \dots + (n_F - 2) \cdot 180°$$

$$S = (n_1 + n_2 + \cdots + n_F) \cdot 180° \underbrace{-2 \cdot 180° - 2 \cdot 180° - \cdots - 2 \cdot 180°}_{F\ vezes}$$

$$S = (n_1 + n_2 + \cdots + n_F) \cdot 180° - F \cdot 360°$$

Como cada lado do poliedro é compartilhado por duas faces, temos:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_F = 2A$$

Logo:

$$S = 2A \cdot 180° - F \cdot 360° \Rightarrow S = (A - F) \cdot 360°$$

Sendo um poliedro convexo, ele admite a relação de Euler:

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 2 = A - F$$

$$\therefore \boxed{S = (V - 2) \cdot 360°}$$

4.3.3. NÚMERO DE ARESTAS

Podemos calcular o número de arestas de um poliedro convexo usando a seguinte relação:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots + nF_n$$

Em que F_i indica o número de faces de i lados. Assim, uma face triangular terá 3 arestas, uma face quadrangular terá 4 arestas, e assim por diante. Quando somamos o total de arestas de cada face presente no poliedro, acabamos somando duas vezes as arestas, isso é porque uma face vai compartilhar uma aresta comum com outra face. Para contabilizar corretamente, indicamos que a soma das arestas de todas as faces é 2A e não apenas A.

4.3.4. CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DO POLIEDRO

Para que um poliedro convexo exista, ela deve satisfazer a seguinte condição:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$$

Note que

$$3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots \geq 3F_3 + 3F_4 + 3F_5 + \cdots = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \cdots) = 3F$$

$$\Rightarrow 2A \geq 3F$$

4.3.5. DIAGONAIS DE UM POLIEDRO

Para calcularmos o número de diagonais de um poliedro convexo, podemos pensar em quantos segmentos de retas podemos formar com a quantidade de vértices disponíveis. Esse número é dado por:

$$C_{V,2} = \frac{V \cdot (V - 1)}{2}$$

Sendo V o número de vértices do poliedro. Desse valor devemos subtrair a quantidade de arestas e a quantidade de diagonais das faces. Assim, o número de diagonais de um poliedro convexo é dado por:

$$D = C_{V,2} - A - \sum diagonais\ das\ faces$$

Em que A é a quantidade de arestas do poliedro e $\sum diagonais\ das\ faces$ indica o total de diagonais de todas as faces do poliedro.

Exemplo:

(ESPCEX/2022) **Dado um dodecaedro regular, exatamente, quantas retas ligam dois de seus vértices mas não pertencem a uma mesma face desse dodecaedro?**

a) 60

b) 100

c) 130

d) 160

e) 190

Comentários

Um dodecaedro regular possui 12 faces pentagonais. Calculando o número de vértices e arestas:

$$2A = 5F_5$$

$$2A = 5 \cdot 12 \Rightarrow A = 30$$

Usando a relação de Euler:

$$V - A + F = 2$$

$$V - 30 + 12 = 2 \Rightarrow V = 20$$

Para calcular o número de diagonais do poliedro convexo, podemos calcular o total de retas que podemos formar usando todos os vértices do poliedro e subtrair o número de arestas e o total de diagonais de cada face do poliedro, logo:

$$D = C_{V,2} - A - \sum diagonais\ das\ faces$$

Lembrando que as diagonais de um polígono convexo é

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Para as 12 faces pentagonais:

$$D = C_{20,2} - 30 - 12 \cdot \frac{5(5-3)}{2}$$

$$D = 20 \cdot \frac{19}{2} - 30 - 12 \cdot 5$$

$$D = 190 - 30 - 60$$

$$\therefore D = 100$$

Gabarito: B

4.3.6. POLIEDROS DE PLATÃO

Um poliedro é classificado como poliedro de Platão quando satisfaz os seguintes requisitos:

- Todas as faces possuem o mesmo número de arestas;
- De cada vértice, parte um mesmo número de arestas;
- Admite a relação de Euler.

Existem apenas cinco tipos de poliedros de Platão, são eles:

- Tetraedro;
- Hexaedro;
- Octaedro;
- Dodecaedro;
- Icosaedro.

Não veremos a prova disso, pois este não é um assunto que costuma cair em prova.

4.3.7. POLIEDROS REGULARES

Os poliedros convexos são classificados como regulares quando:

- ✓ Todas as faces possuem o mesmo número de arestas;
- ✓ De cada vértice, parte um mesmo número de arestas;
- ✓ Todas as faces são polígonos regulares.

Note que os poliedros regulares possuem uma definição parecida com os poliedros de Platão. A única ressalva é que as faces dos poliedros regulares são polígonos regulares.

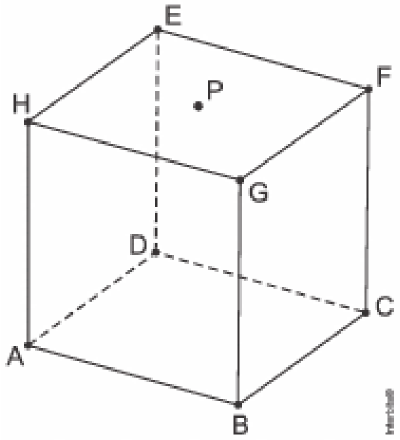
Assim, temos apenas cinco tipos de poliedros regulares:

- ✓ Tetraedro regular;
- ✓ Hexaedro regular (cubo);
- ✓ Octaedro regular;
- ✓ Dodecaedro regular;
- ✓ Icosaedro regular.

HORA DE PRATICAR!

15. (UFRGS/2019)

Na figura a seguir, está representado um cubo cuja aresta tem 2 cm de medida. O ponto P está localizado no centro da face EFGH.

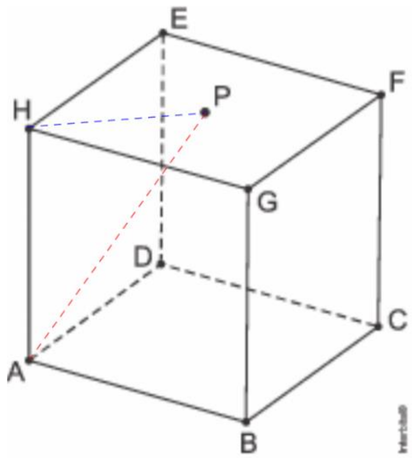


A medida do segmento AP é

a) $\sqrt{2}$ **b) 2** **c)** $\sqrt{6}$ **d)** $2\sqrt{3}$ **e) 3**

Comentários

Podemos pensar em um triângulo retângulo AHP para encontrar o valor da hipotenusa AP.



Como FH é uma diagonal da face quadrada $EFGH$ cujo lado vale 2, temos que $FH = 2\sqrt{2}$, o que implica $HP = \sqrt{2}$.

Dessa forma, podemos aplicar o teorema de Pitágoras ao triângulo AHP.

$$AP^2 = AH^2 + HP^2$$

$$AP^2 = 2^2 + \sqrt{2}^2$$

$$AP^2 = 4 + 2$$

$$AP^2 = 6$$

$$\sqrt{AP^2} = \sqrt{6}$$

$$|AP| = \sqrt{6}$$

$$AP = \pm\sqrt{6}$$

Como AP é uma distância, $AP = \sqrt{6}$.

Gabarito: "c".

16. (UFRGS/2019)

Em um curso de dobraduras, a instrutora orientou que fosse construída uma pirâmide de base quadrada, de lado igual a $3\ cm$ e altura igual a $10\ cm$. O volume dessa pirâmide é igual a

a) 25 cm^3

b) 30 cm^3

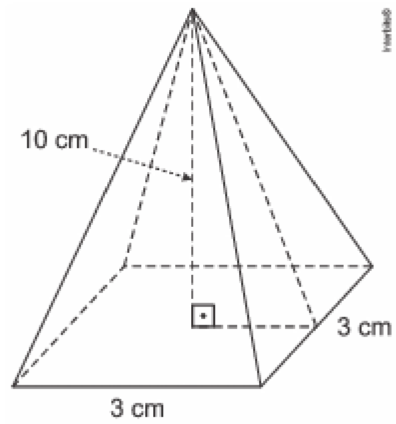
c) 15 cm^3

d) 9 cm^3

e) 12 cm^3

Comentários

Podemos representar a pirâmide do enunciado no esboço:



Dessa forma, o volume dessa pirâmide é dado por:

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 10$$

$$V_p = 30\ cm^3$$

Gabarito: "b".

17. (UDESC/2012)

Uma caixa de um perfume tem o formato de um tronco de pirâmide quadrangular regular fechado. Para embrulhá-la, Pedro tirou as seguintes medidas: aresta lateral 5 cm e arestas das bases 8 cm e 2 cm. A quantidade total de papel para embrulhar esta caixa, supondo que não haja desperdício e nem sobreposição de material, foi:

a) $88\ cm2$

b) $168\ cm2$

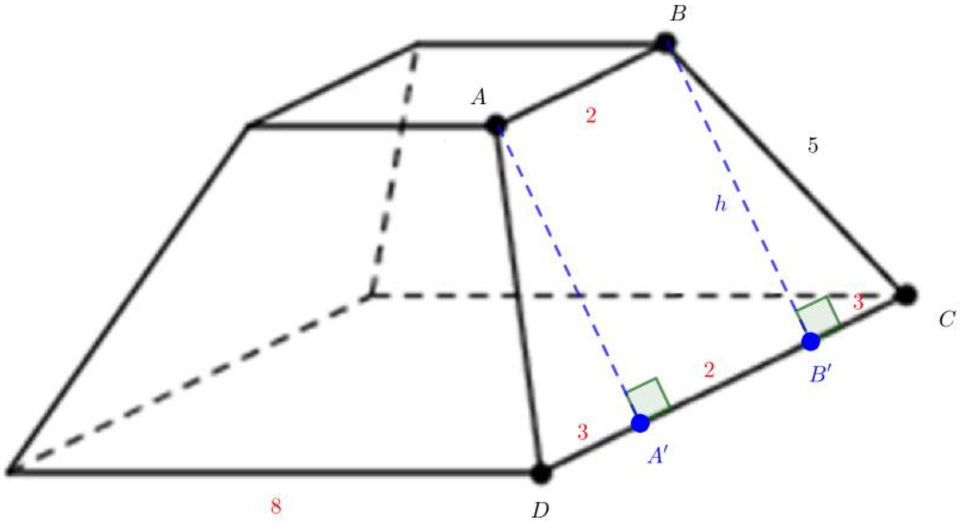
c) $80\ cm2$

d) $68\ cm2$

e) $148\ cm2$

Comentários

Esquematizando a caixa de perfume em voga, temos:



Perceba que o comprimento de $\overline{AA'}$ e de $\overline{BB'}$ representam a altura h do trapézio que forma a lateral do tronco de pirâmide.

Como $AB = A'B' = 2$, só podemos ter os comprimentos $\overline{A'D} + \overline{B'C} = 6$, ou seja, $\overline{A'D} = \overline{B'C} = 3$.

Assim, temos que o triângulo $BB'C$ é retângulo em B'. Podemos, então, descobrir o valor de h aplicando, a esse triângulo, o teorema de Pitágoras.

$$\overline{B'B}^2 + \overline{B'C}^2 = BC^2$$

$$h^2 + 3^2 = 5^2$$

$$h^2 = 25 - 9$$

$$h^2 = 16$$

$$\sqrt{h^2} = \sqrt{16}$$

$$|h| = 4$$

$$h = \pm 4$$

Como estamos falando sobre uma altura, consideremos apenas o sinal positivo para $h = 4$.

Com esses dados, podemos dizer que a área total do tronco de pirâmide que forma a caixa de perfume tem área total A_t igual à

$$A_t = \textcolor{blue}{Area\ da\ base\ inferior} + \textcolor{green}{Área\ da\ base\ superior} + 4 \cdot área\ das\ faces\ laterais$$

$$A_t = \textcolor{blue}{8^2} + \textcolor{green}{2^2} + 4 \cdot \textcolor{red}{\frac{(8+2)\cdot 4}{2}}$$

$$A_t = 64 + 4 + 80$$

$$A_t = 148\ cm^2$$

Gabarito: “e”.

18. (Inédita)

Um cubo e uma pirâmide de base quadrada têm o mesmo volume.

Se a área da base da pirâmide é igual a um terço da área da base do cubo, podemos dizer que

a) a altura da pirâmide é igual ao dobro da altura do cubo.

b) não é possível que uma pirâmide tenha o mesmo volume que um cubo.

c) a área total da pirâmide é igual à área total do cubo, uma vez que seus volumes são iguais.

d) a altura da pirâmide é igual à altura do cubo.

e) a altura do cubo é igual a um nono da altura da pirâmide.

Comentários

Como o enunciado nos informa que o volume do cubo V_c é igual ao volume da pirâmide de base quadrada V_p, e admitindo a aresta do cubo igual a x, temos:

$$V_c = V_p$$

$$base\ do\ cubo \cdot altura\ do\ cubo = \frac{1}{3} \cdot base\ da\ pirâmide \cdot altura\ da\ pirâmide$$

$$x^2 \cdot x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot h$$

$$\cancel{x^2} \cdot x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \cancel{x^2} \cdot h$$

$$x = \frac{1}{9} \cdot h$$

Gabarito: "e".

---

19. (UCPEL/2017)

A área de um quadrado de lado $x\ cm$ aumenta em $28\ cm^2$ se o seu lado for aumentado em $2\ cm$. Considerando que a medida da aresta de um tetraedro regular é igual ao lado x deste quadrado, então a altura h deste tetraedro vale

a) $2\sqrt{6}\ cm$ b) $2\sqrt{3}\ cm$ c) $2\sqrt{2}\ cm$ d) $3\sqrt{2}\ cm$ e) $4\sqrt{6}\ cm$

Comentários

"A área de um quadrado de lado $x\ cm$ aumenta em $28\ cm^2$ se o seu lado for aumentado em $2\ cm$."

Reescrevendo a mesma informação na forma de equação e a resolvendo, temos:

$$(x+2)^2 = x^2 + 28$$

$$\cancel{x^2} + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = \cancel{x^2} + 28$$

$$4x + 4 = 28$$

$$4x = 28 - 4$$

$$4x = 24$$

$$x = \frac{24}{4}$$

$$x = 6$$

A altura do tetraedro regular pode ser calculada com a fórmula

$$h = \frac{x \cdot \sqrt{6}}{3}$$

$$h = \frac{6 \cdot \sqrt{6}}{3}$$

$$h = 2 \cdot \sqrt{6}$$

Gabarito: “a”.

---

5. QUESTÕES NÍVEL 1

1. **(ESA/2015)**

A palavra “icosaedro”, de origem grega, significa “20 faces”. Sabendo que o icosaedro regular é formado por 20 triângulos regulares, determine o número de vértices.

a) 12

b) 42

c) 52

d) 8

e)48

2. **(ESA/2013)**

O volume de um tronco de pirâmide de $4dm$ **de altura e cujas áreas das bases são iguais a** $36\ dm^2$ **e** $144\ dm^2$ **vale:**

a) $330cm^3$

b) $720dm^3$

c) $330dm^3$

d) $360m^3$

e) $336dm^3$

3. **(ESA/2009)**

A altura de um prisma hexagonal regular é de 5m. Sabe-se também que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume desse prisma, em m^3**, é:**

a) $270\sqrt{3}$

b) $220\sqrt{3}$

c) $200\sqrt{3}$

d) $285\sqrt{3}$

e) $250\sqrt{3}$

4. (ESA/2008)

A pirâmide de Quéops, em Gizé, no Egito, tem aproximadamente $90\sqrt{2}\ metros$ de altura, possui uma base quadrada e suas faces laterais são triângulos equiláteros. Nessas condições, pode-se afirmar que, em metros, cada uma de suas arestas mede:

a) 90

b) 120

c) 160

d) 180

e) 200

5. (EsPCEx/2017)

Considere dois planos α e β perpendiculares e três retas distintas r, s e t tais que r ? α, s ? β e t = α ? β. Sobre essas retas e os planos é correto afirmar que

a) as retas r e s somente definirão um plano se forem concorrentes com t em um único ponto.

b) as retas r e s podem definir um plano paralelo à reta t.

c) as retas r e s são necessariamente concorrentes.

d) se r e s forem paralelas, então elas definem um plano perpendicular a α e β.

e) o plano definido por r e t é necessariamente paralelo a s.

6. (EsPCEx/2016)

Determine o volume (em cm^3) de uma pirâmide retangular de altura a e lados da base b e c (a, b e c em centímetros), sabendo que $a + b + c = 36$ e a, b e c são, respectivamente, números diretamente proporcionais a 6, 4 e 2.

a) 16

b) 36

c) 108

d) 432

e) 648

7. (EsPCEx/2015)

As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo são diretamente proporcionais a $3, 4$ e 5 e a soma dessas medidas é igual a $48\ cm$. Então a medida da sua área total, em cm^2, é

a) 752

b) 820

c) 1024

d) 1302

e) 1504

8. (EsPCEx/2013)

Considere um prisma regular reto de base hexagonal tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Aumentando-se a aresta da base em 2 cm e mantendo-se a aresta lateral, o volume do prisma ficará aumentado de $108\ cm^3$. O volume do prisma original é

a) $18\ cm^3$

b) $36\ cm^3$

c) $18\sqrt{3}\ cm^3$

d) $36\sqrt{3}\ cm^3$

e) $40\ cm^3$

9. (EsPCEx/2012)

Considere as seguintes afirmações:

I. Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então todas as retas de α são perpendiculares ou ortogonais a r;

II. Se a medida da projeção ortogonal de um segmento $\overline{AB}$ sobre um plano α é a metade da medida do segmento $\overline{AB}$, então a reta $\overleftrightarrow{AB}$ faz com α um ângulo de $60°$;

III. Dados dois planos paralelos α e β, se um terceiro plano γ intercepta α e β, as interseções entre esses planos serão retas reversas;

IV. Se α e β são dois planos secantes, todas as retas de α também interceptam β.

Estão corretas as afirmações

a) Apenas I e II

b) Apenas II e III

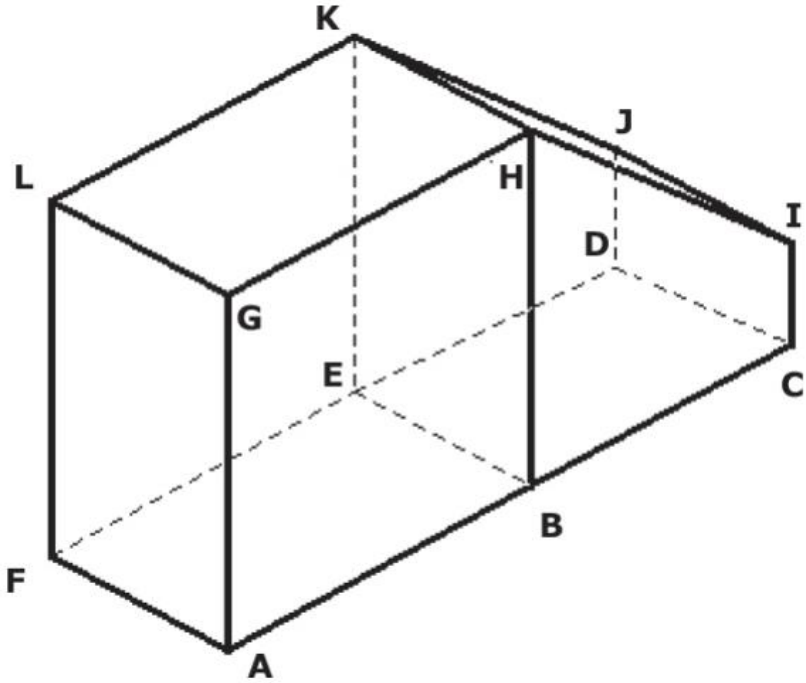
c) I, II e III

d) I, II e IV

e) II, III e IV

10. (EsPCEx/2012)

O sólido geométrico abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma. Considere os seguintes pares de retas definidas por pontos dessa figura: as retas $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$; as retas $\overline{AG}$ e $\overline{HI}$ e as retas $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$. As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,



a) concorrentes; reversas; reversas.

b) reversas; reversas; paralelas.

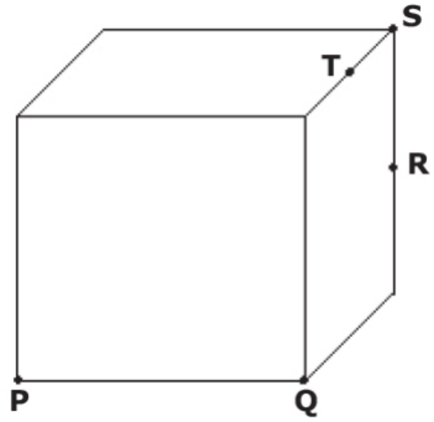
c) concorrentes, reversas; paralelas.

d) reversas; concorrentes; reversas.

e) concorrentes; concorrentes; reversas.

11. (EsPCEx/2011)

Na figura abaixo, está representado um cubo em que os pontos T e R são pontos médios de duas de suas arestas.



Sabe-se que a aresta desse cubo mede $2\ cm$. Assim, o volume do sólido geométrico definido pelos pontos $PQRST$, em cm^3, é

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{4}{3}$

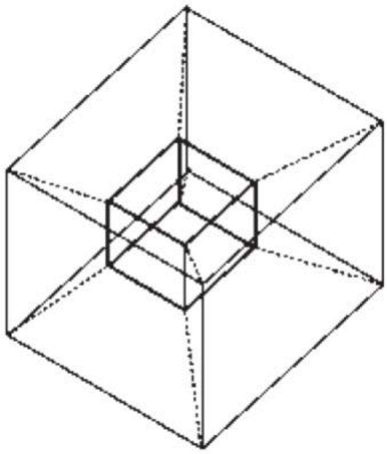
c) $\frac{5}{3}$

d) $\frac{16}{3}$

e) $\frac{32}{3}$

12. (EsPCEx/2011)

A figura espacial representada abaixo, construída com hastes de plástico, é formada por dois cubos em que, cada vértice do cubo maior é unido a um vértice correspondente do cubo menor por uma aresta e todas as arestas desse tipo têm a mesma medida.



Se as arestas dos cubos maior e menor medem, respectivamente, $8\ cm$ e $4\ cm$, a medida de cada uma das arestas que ligam os dois cubos é

a) $6\sqrt{2}\ cm$

b) $3\sqrt{2}\ cm$

c) $2\sqrt{3}\ cm$

d) $4\sqrt{3}\ cm$

e) $6\sqrt{3}\ cm$

13. (EsPCEx/2011)

Considere as seguintes afirmações:

I. Se dois planos α e β são paralelos distintos, então as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ são sempre paralelas.

II. Se α e β são planos não paralelos distintos, existem as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ tal que r_1 e r_2 são paralelas.

III. Se uma reta r é perpendicular a um plano α no ponto P, então qualquer reta de α que passa por P é perpendicular a r.

Dentre as afirmações acima, é (são) verdadeira(s)

a) Somente II

b) I e II

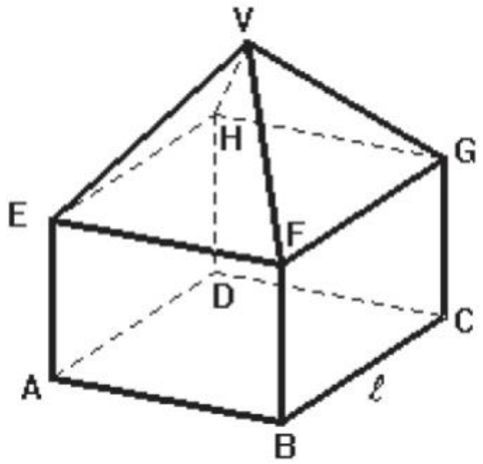
c) I e III

d) II e III

e) I, II e III

14. (EsPCEx/2010)

Na figura abaixo, está representado um sólido geométrico de 9 faces, obtido a partir de um cubo e uma pirâmide.



Sabendo que todas as arestas desse sólido têm medida l, então as medidas da altura (distância do ponto V à face $ABCD$) e da superfície total desse sólido são, respectivamente,

a) $l\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)\ e\ l^2\left(\sqrt{3}+4\right)$

b) $l\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)\ e\ l^2\left(\sqrt{3}+5\right)$

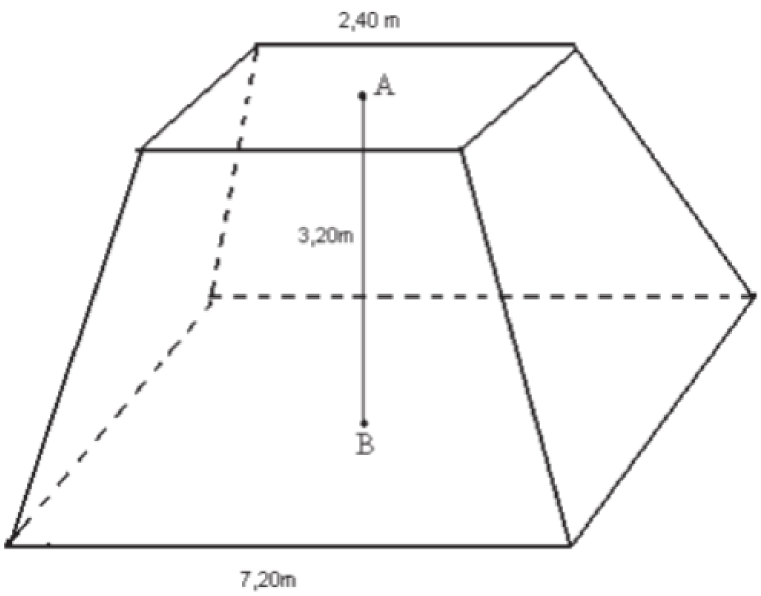
c) $l\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)\ e\ l^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+5\right)$

d) $l\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ e\ l^2\left(\sqrt{3}+5\right)$

e) $l\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ e\ l^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+4\right)$

15. (EsPCEx/2009)

Um reservatório em forma de tronco de pirâmide regular de base quadrada e dimensões indicadas na figura deverá ter suas paredes laterais externas cobertas por uma tinta impermeável, cujo rendimento é de $11\ m^2$ por galão.



Desenho fora de escala
Os pontos A e B representam os centros das bases do tronco de pirâmide

O número mínimo de galões que devem ser adquiridos para tal operação é:

a) 6

b) 7

c) 9

d) 10

e) 11

16. (EsPCEx/2009)

Considere duas retas r e s no espaço e quatro pontos distintos, A, B, C e D, de modo que os pontos A e B pertencem à reta r e os pontos C e D pertencem à reta s.

Dentre as afirmações abaixo

I. Se as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são concorrentes, então r e s são necessariamente concorrentes.

II. Os triângulos ABC e ABD serão sempre coplanares.

III. Se $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ forem concorrentes, então as retas r e s são coplanares.

Pode-se concluir que

a) somente a I é verdadeira.

b) somente a II é verdadeira.

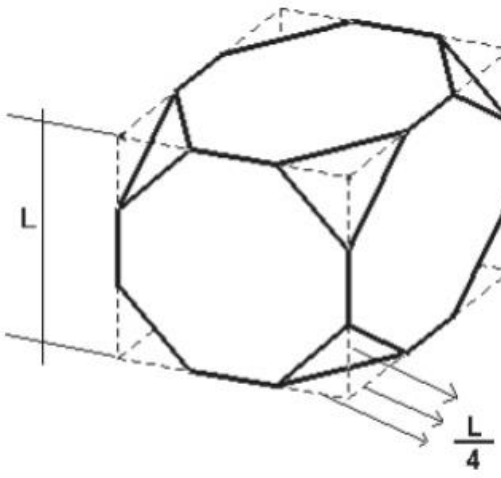
c) somente a III é verdadeira.

d) as afirmações II e III são verdadeiras.

e) as afirmações I e III são verdadeiras.

17. (EsPCEx/2008)

Para obter o sólido geométrico representado abaixo, partiu-se de um cubo de aresta L e retirou-se de cada um dos vértices desse cubo uma pirâmide de base triangular com as arestas laterais medindo $\frac{L}{4}$, conforme a figura.



Desenho Fora de Escala

Denominando-se V o volume do cubo a partir do qual foi obtido o sólido, pode-se concluir que o volume desse sólido é

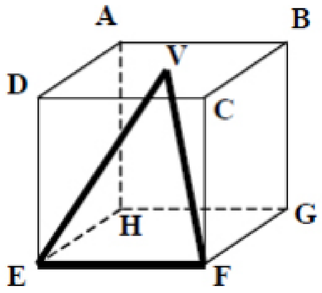
a) $\frac{23}{24}V$

b) $\frac{47}{48}V$

c) $\frac{71}{72}V$
d) $\frac{95}{96}V$
e) $\frac{143}{144}V$

18. (EsPCEx/2008)

Em um cubo de aresta medindo $4\ cm$, forma-se um triângulo VEF, conforme figura abaixo, em que V é o centro do quadrado $ABCD$. A área, em cm^2, do triângulo VEF é igual a



a) $4\sqrt{5}$
b) $4\sqrt{6}$
c) $5\sqrt{5}$
d) $5\sqrt{6}$
e) $6\sqrt{6}$

19. (EsPCEx/2006)

Dispondo de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo, com as dimensões da figura, preenchido com água até o nível indicado, um aluno fez o seguinte experimento:

- mergulhou na água um cubo maciço, com $1\ cm^3$ de volume;
- mergulhou, sucessivamente, novos cubos, cada vez maiores, cujos volumes formam, a partir do cubo de $1\ cm^3$ de volume, uma progressão aritmética de razão $2\ cm^3$.

Após mergulhar certo número de cubos, que ficaram completamente submersos, verificou que a altura do nível da água passou para $39\ cm$.

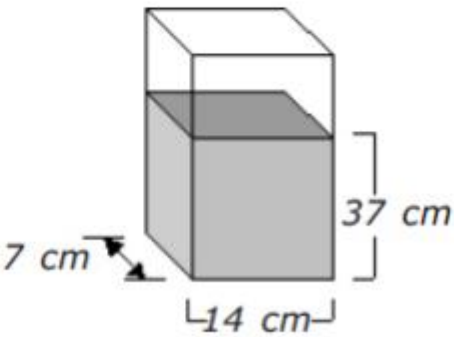


Figura fora de escala

Com base nessas informações, a área total do último cubo colocado é de

a) $54\ cm^2$

b) $42\ cm^2$

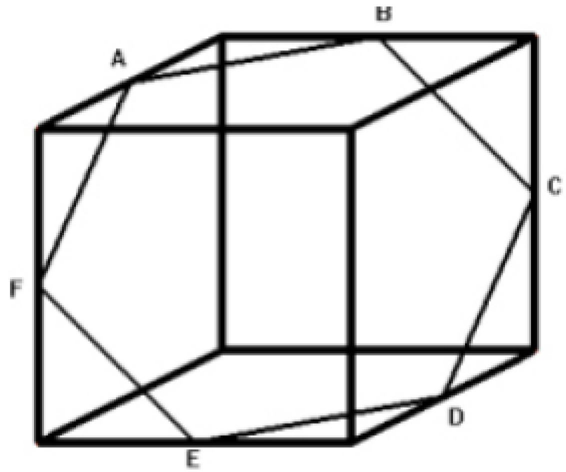
c) $24\ cm^2$

d) $150\ cm^2$

e) $216\ cm^2$

20. (EsPCEx/2005)

O hexágono regular $ABCDEF$ é uma secção plana de um cubo de aresta $2a\sqrt{3}$. Cada vértice do polígono divide ao meio a aresta na qual está apoiado.



A área do hexágono é

a) $9a^2\sqrt{3}$

b) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$

d) $4a^2\sqrt{3}$

e) $\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$

21. (EsPCEx/2004)

Um prisma reto com $5\ cm$ de altura e base retangular com dimensões de $4\ cm$ e $6\ cm$ contém água até uma altura de $3\ cm$. Um cubo maciço de aresta igual a $2\ cm$ é colocado dentro deste prisma, ficando totalmente submerso. A partir de então, a altura do nível da água, em cm, passa a ser de:

a) $\frac{13}{4}$

b) $\frac{10}{3}$

c) $\frac{15}{4}$

d) $\frac{13}{3}$

e) $\frac{14}{4}$

22. (EsPCEx/2002)

Pedro construiu um aquário em forma cúbica. Enquanto o enchia, notou que, colocando 64 litros de água, o nível subia $10\ cm$. O volume máximo, em litros, que comporta esse aquário é de:

a) 216

b) 343
c) 512
d) 729
e) 1024

23. (EsPCEx/2002)

Considere as afirmações abaixo:

I- Se um plano encontra outros dois planos paralelos, então as intersecções são retas paralelas.

II- Uma reta perpendicular a uma reta de um plano e ortogonal a outra reta desse plano é perpendicular ao plano.

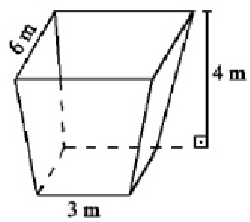
III- Se a intersecção de uma reta r com um plano é o ponto P, reta essa não perpendicular ao plano, então existe uma única reta s contida nesse plano que é perpendicular à reta r passando por P.

Pode-se afirmar que

a) todas são verdadeiras.
b) apenas I e II são verdadeiras.
c) apenas I e III são verdadeiras.
d) apenas II e III são verdadeiras.
e) todas são falsas.

24. (EsPCEx/2001)

Um reservatório com forma de tronco de pirâmide regular, representado pela figura abaixo, com bases quadradas e paralelas, está repleto de água. Deseja-se esvaziá-lo com o auxílio de uma bomba de sucção que retira água com uma vazão constante.

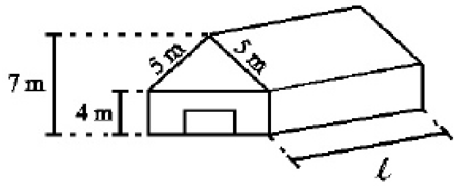


A vazão, em litros/segundo, que esta bomba deve ter para que o reservatório seja esvaziado exatamente em 1 hora e 40 minutos é:

a) $12\ l/s$
b) $18\ l/s$
c) $16\ l/s$
d) $14\ l/s$
e) $20\ l/s$

25. (EsPCEx/2001)

Um galpão com as dimensões do desenho abaixo deverá ser construído para armazenar produtos que necessitam de controle de temperatura. Cada um dos condicionadores de ar disponíveis, que atendem às suas especificações, é capaz de climatizar um volume de até $220\ m^3$. Nessas condições, pode-se afirmar que o maior comprimento l que o galpão pode ter, em metros, para ser equipado com 3 (três) aparelhos de ar condicionado é:



(desprezar a espessura das paredes e considerar que o galpão é um prisma reto e não tem forro nem laje)

a) $13\ m$

b) $20\ m$

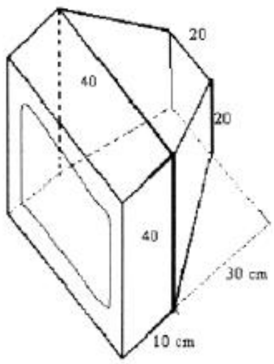
c) $5\ m$

d) $25\ m$

e) $15\ m$

26. (EsPCEx/2000)

Uma fábrica produz monitores para computador que têm a forma de um bloco retangular associado a um tronco de pirâmide, conforme o desenho e dimensões abaixo. Os monitores são acondicionados para venda em caixas cúbicas, com aresta $40\ cm$, medidos internamente. Os espaços vazios da caixa são preenchidos com isopor, para proteger o aparelho. Sabendo que a produção diária da fábrica é de 300 aparelhos, podemos dizer que o consumo diário de isopor em metros cúbicos é de:



(dados: volume da pirâmide $\rightarrow V = \frac{1}{3} S_b \cdot h, S_b \rightarrow \acute{a}rea\ da\ base, h \rightarrow altura$)

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

27. (ESPCEX/2021)

Um poliedro possui 20 vértices. Sabendo-se que de cada vértice partem 3 arestas, o número de faces que o poliedro possui é igual a

a) 12

b) 22

c) 32

d) 42

e) 52

GABARITO

1. A
2. E
3. E
4. D
5. B
6. D
7. E
8. B
9. A
10. E
11. B
12. C
13. D
14. B
15. B
16. C
17. B
18. A
19. A
20. A
21. B
22. C
23. C
24. D
25. E
26. E
27. A

RESOLUÇÃO

1. (ESA/2015)

A palavra "icosaedro", de origem grega, significa "20 faces". Sabendo que o icosaedro regular é formado por 20 triângulos regulares, determine o número de vértices.

a) 12

b) 42

c) 52

d) 8

e)48

Comentários

Sabemos que cada triângulo tem 3 arestas, quando todos eles são ligados entre si todos os vértices se sobrepõem dois a dois, logo o número total de arestas cai pela metade e, portanto, temos que o número de arestas de um icosaedro é:

$$A = \frac{3 \cdot 20}{2} = 30$$

Pela relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 2$$
$$V = 2 - F + A$$
$$V = 2 - 20 + 30$$
$$V = 12$$

Gabarito: A

---

2. **(ESA/2013)**

O volume de um tronco de pirâmide de $4dm$ de altura e cujas áreas das bases são iguais a $36\ dm^2$ e $144\ dm^2$ vale:

a) $330cm^3$

b) $720dm^3$

c) $330dm^3$

d) $360m^3$

e) $336dm^3$

Comentários

Sabemos que o volume de um tronco de pirâmide regular é dado pela seguinte equação:

$$V = \frac{\left(A_b + A_B + \sqrt{A_b \cdot A_B}\right) \cdot h}{3}$$

Em que A_b é a área da menor base e A_B é a área da maior base, portanto, temos:

$$V = \frac{\left(36 + 144 + \sqrt{36 \cdot 144}\right) \cdot 4}{3}$$

$$V = \frac{(180 + 72) \cdot 4}{3}$$

$$V = 84 \cdot 4 = 336\ dm^3$$

Gabarito: E

---

3. **(ESA/2009)**

A altura de um prisma hexagonal regular é de 5m. Sabe-se também que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume desse prisma, em m^3, é:

a) $270\sqrt{3}$

b) $220\sqrt{3}$

c) $200\sqrt{3}$

d) $285\sqrt{3}$

e) $250\sqrt{3}$

Comentários

Vamos considerar que o lado da base hexagonal seja l. As faces laterais do prisma são todas retangulares e são 6. Portanto, sua área lateral é, considerando que a altura é 5:

$$A_l = 6 \cdot l \cdot 5 = 30l$$

Agora, a área da base desse prisma é igual à área de um hexágono regular de lado l. Sabemos que a área de um hexágono é 6 vezes a área de um triangulo equilátero de lado l:

$$A_{base} = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

A área lateral é o dobro da área da base. Portanto:

$$30l = 2 \cdot \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 30l = 3l^2\sqrt{3} \Rightarrow \div\, 3l$$

$$\Rightarrow 10 = l\sqrt{3} \Rightarrow l = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Portanto, elevando ao quadrado:

$$l^2 = \frac{100}{3} \Rightarrow 3l^2 = 100$$

Assim, podemos calcular o volume do prisma:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = 250\sqrt{3}$$

Gabarito: E

---

4. **(ESA/2008)**

A pirâmide de Quéops, em Gizé, no Egito, tem aproximadamente $90\sqrt{2}\ metros$ de altura, possui uma base quadrada e suas faces laterais são triângulos equiláteros. Nessas condições, pode-se afirmar que, em metros, cada uma de suas arestas mede:

a) 90

b) 120

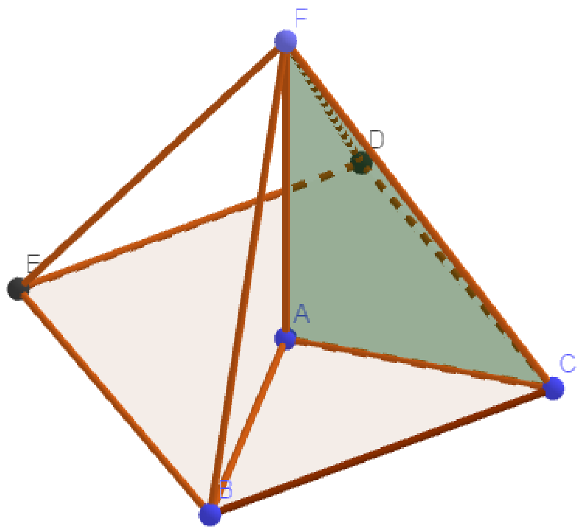
c) 160

d) 180

e) 200

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte imagem:



No triângulo ΔACD temos a seguinte relação por Pitágoras:

$$l^2 = \left(l\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + h^2$$
$$l^2 - \frac{l^2}{2} = h^2$$
$$l^2 = 2h^2$$
$$l = \sqrt{2} \cdot 90\sqrt{2}$$
$$l = 180\ m$$

Gabarito: D

---

5. (EsPCEx/2017)

Considere dois planos α e β perpendiculares e três retas distintas r, s e t tais que r □ α, s □ β e t = α □ β. Sobre essas retas e os planos é correto afirmar que

a) as retas r e s somente definirão um plano se forem concorrentes com t em um único ponto.

b) as retas r e s podem definir um plano paralelo à reta t.

c) as retas r e s são necessariamente concorrentes.

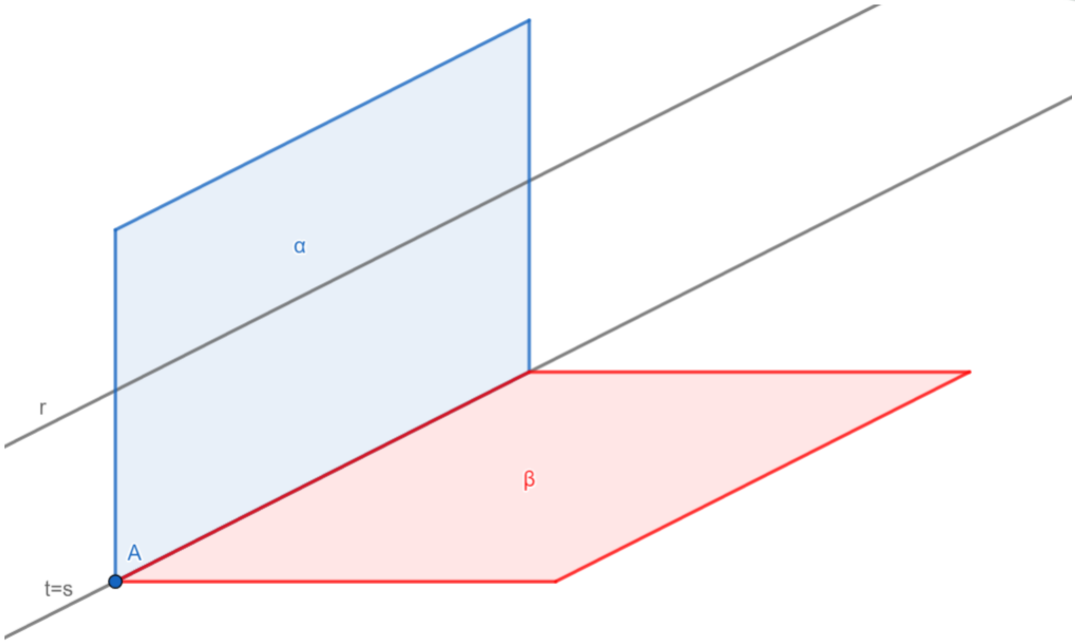
d) se r e s forem paralelas, então elas definem um plano perpendicular a α e β.

e) o plano definido por r e t é necessariamente paralelo a s.

Comentários

Sendo $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ planos perpendiculares entre sí, a intersecção entre eles é formada por uma única reta. Logo $\boldsymbol{t}$ está na intersecção dos planos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$

a) FALSO. Seja $\boldsymbol{r}$ paralelo à $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{s}$ coincidente com $\boldsymbol{t}$, podemos formar um plano coincidente com o plano $\boldsymbol{\alpha}$ tal que $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ não são coincidentes com $\boldsymbol{t}$ em um único ponto.

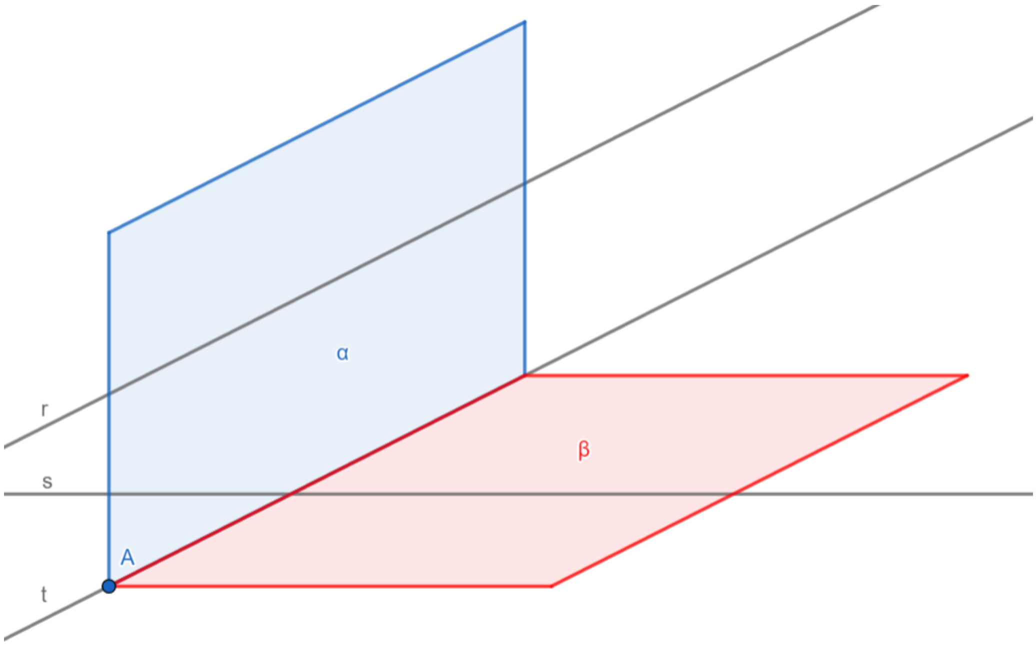


b) VERDADEIRO. Nas condições propostas acima, podemos formar um plano coincidente com $\boldsymbol{\alpha}$, o plano $\boldsymbol{\alpha}$ é paralelo a reta t (Se um plano contém uma reta, o dito plano é paralelo à reta).

c) FALSO. Nas condições propostas na resposta do item a) conclui-se que $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são paralelos por construção.

d) FALSO. Nas condições do problema e pensando no espaço do $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$, um plano perpendicular $\boldsymbol{\alpha}$ é necessariamente paralelo a $\boldsymbol{\beta}$

e) FALSO. Sendo $\boldsymbol{r}$ perpendicular a $\boldsymbol{t}$ o plano definido será coincidente com o plano $\boldsymbol{\alpha}$, se a reta $\boldsymbol{s}$ for perpendicular a $\boldsymbol{t}$, então ela será perpendicular a $\boldsymbol{\alpha}$



Gabarito: B

---

6. (EsPCEx/2016)

Determine o volume (em cm^3) de uma pirâmide retangular de altura a e lados da base b e c (a, b e c em centímetros), sabendo que $a + b + c = 36$ e a, b e c são, respectivamente, números diretamente proporcionais a 6, 4 e 2.

a) 16

b) 36

c) 108

d) 432

e) 648

Comentários

Como a, b e c são proporcionais a $6, 4$ e 2. Façamos k a razão de proporção. Então,

$$\begin{cases} a = 6k \\ b = 4k \\ c = 2k \end{cases} \Rightarrow \quad a + b + c = 6k + 4k + 2k = 12k = 36 \Rightarrow \quad k = 3$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a = 6 \cdot 3 = 18 \\ b = 4 \cdot 3 = 12 \\ c = 2 \cdot 3 = 6 \end{cases}$$

Então o volume da pirâmide é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (b \cdot c) \cdot (a) = \frac{1}{3} \cdot (12 \cdot 6) \cdot 18 = 432$$

$$V = 432\ cm^3$$

Gabarito: D

---

7. (EsPCEx/2015)

As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo são diretamente proporcionais a $3, 4$ e 5 e a soma dessas medidas é igual a $48\ cm$. Então a medida da sua área total, em cm^2, é

a) 752

b) 820

c) 1024

d) 1302

e) 1504

Comentários

No Sejam a, b e c as medidas das arestas do paralelepípedo. Como a, b e c são proporcionais a $3, 4$ e 5. Façamos k a razão de proporção. Então,

$$\begin{cases} a = 3k \\ b = 4k \\ c = 5k \end{cases} \Rightarrow \quad a + b + c = 3k + 4k + 5k = 12k = 48 \Rightarrow \quad k = 4$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a = 3 \cdot 4 = 12 \\ b = 4 \cdot 4 = 16 \\ c = 5 \cdot 4 = 20 \end{cases}$$

Então a área superficial do paralelepípedo é dada por:

$$S_{sup} = 2ab + 2ac + 2bc = 2 \cdot 12 \cdot 16 + 2 \cdot 12 \cdot 20 + 2 \cdot 16 \cdot 20 = 384 + 480 + 640 = 1504$$

$$S_{sup} = 1504\ cm^2$$

Gabarito: E

8. **(EsPCEx/2013)**

Considere um prisma regular reto de base hexagonal tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Aumentando-se a aresta da base em 2 cm e mantendo-se a aresta lateral, o volume do prisma ficará aumentado de $108\ cm^3$. O volume do prisma original é

a) $18\ cm^3$

b) $36\ cm^3$

c) $18\sqrt{3}\ cm^3$

d) $36\sqrt{3}\ cm^3$

e) $40\ cm^3$

Comentários

Lembrete: área do hexágono regular de lado l: $A = \frac{3\sqrt{3}l^2}{2}$

Logo o volume do prisma é dado por:

$$V = B \cdot h = \left(\frac{3\sqrt{3}l^2}{2}\right) \cdot h$$

Segundo o enunciado, $\Delta V = 108$

$$\Delta V = V_f - V_i = (A_f) \cdot h - (A_i) \cdot h =$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{3}(l+2)^2}{2}\right) \cdot h - \left(\frac{3\sqrt{3}l^2}{2}\right) \cdot h = \frac{3\sqrt{3}}{2} h \cdot ((l+2)^2 - l^2)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} h \cdot (l^2 + 4l + 4 - l^2) = 6\sqrt{3}h \cdot (l+1)$$

Mas segundo o enunciado: $\frac{l}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = l\sqrt{3}$, então

$$6\sqrt{3}(l\sqrt{3}) \cdot (l+1) = 18l^2 + 18l = 108$$

$$l^2 + l - 6 = (l-2)(l+3)$$

$$l = -3\ (não\ convém)\ \text{ou}\ l = 2$$

Sendo $l = 2\ cm$ temos que:

$$h = 2\sqrt{3}$$

Sendo assim:

$$V = \left(\frac{3\sqrt{3}l^2}{2}\right) \cdot h = \left(\frac{3\sqrt{3}(2)^2}{2}\right) \cdot (2\sqrt{3}) = 36$$

$$V = 36\ cm^3$$

Gabarito: B

9. **(EsPCEx/2012)**

Considere as seguintes afirmações:

I. Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então todas as retas de α são perpendiculares ou ortogonais a r;

II. Se a medida da projeção ortogonal de um segmento $\overline{AB}$ sobre um plano α é a metade da medida do segmento $\overline{AB}$, então a reta $\overleftrightarrow{AB}$ faz com α um ângulo de $60°$;

III. Dados dois planos paralelos α e β, se um terceiro plano γ intercepta α e β, as interseções entre esses planos serão retas reversas;

IV. Se α e β são dois planos secantes, todas as retas de α também interceptam β.

Estão corretas as afirmações

a) Apenas I e II

b) Apenas II e III

c) I, II e III

d) I, II e IV

e) II, III e IV

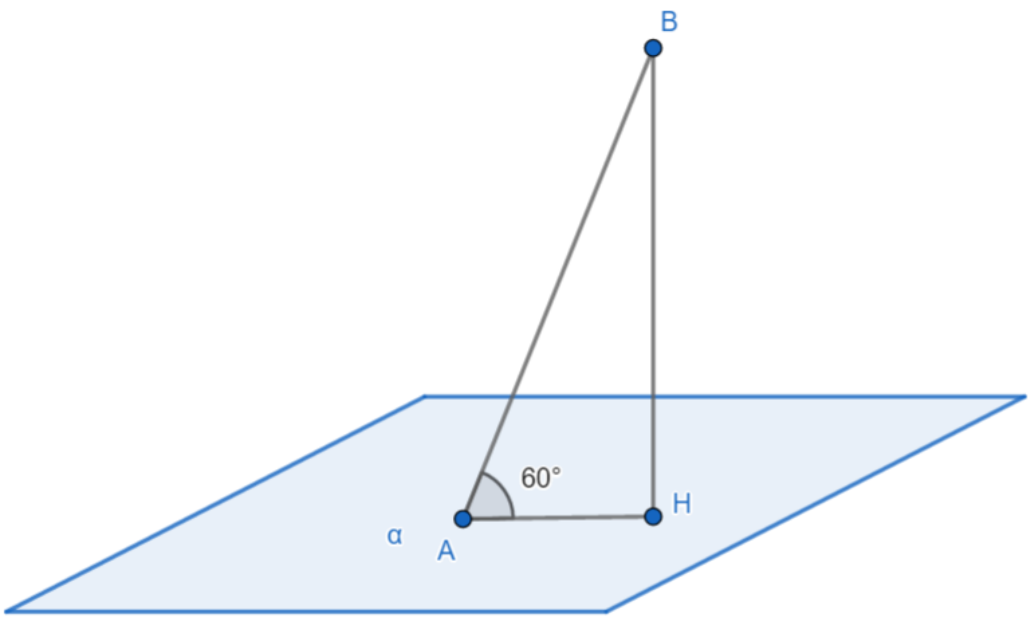
Comentários

I. VERDADEIRO.

Esta afirmação é verdadeira pela própria definição de reta perpendicular à plano. "Uma reta é perpendicular a um plano se, e somente se, esta reta é perpendicular ou ortogonal a todas as retas contidas no plano."

II. VERDADEIRO.

Usemos o seguinte desenho para analisar

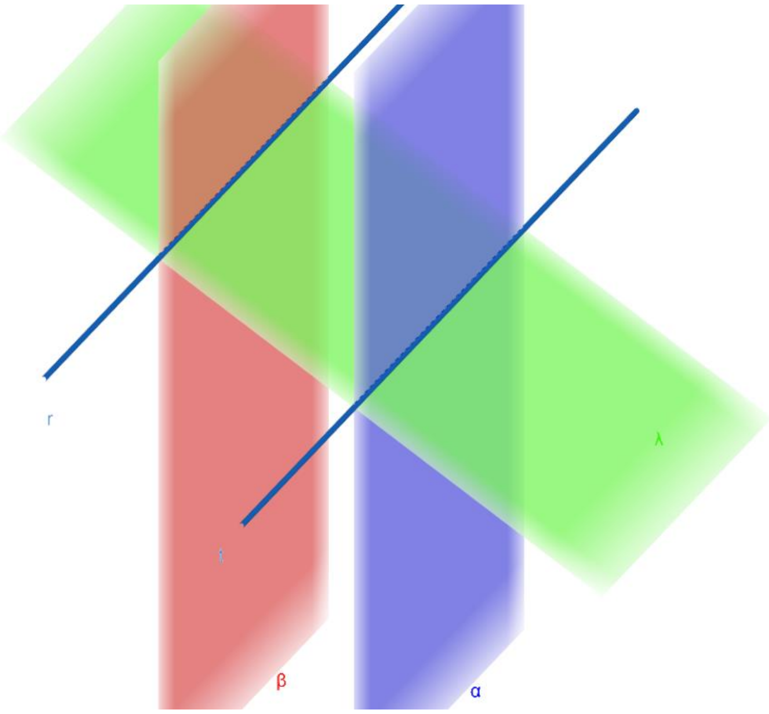


Se a medida da projeção ortogonal é metade da medida do segmento $\overline{AH} = \frac{AB}{2}$, sendo o ângulo $\widehat{H} = 90°$, então o ângulo $\widehat{B} = 30°$, sendo assim:

$$\widehat{A} = 60°$$

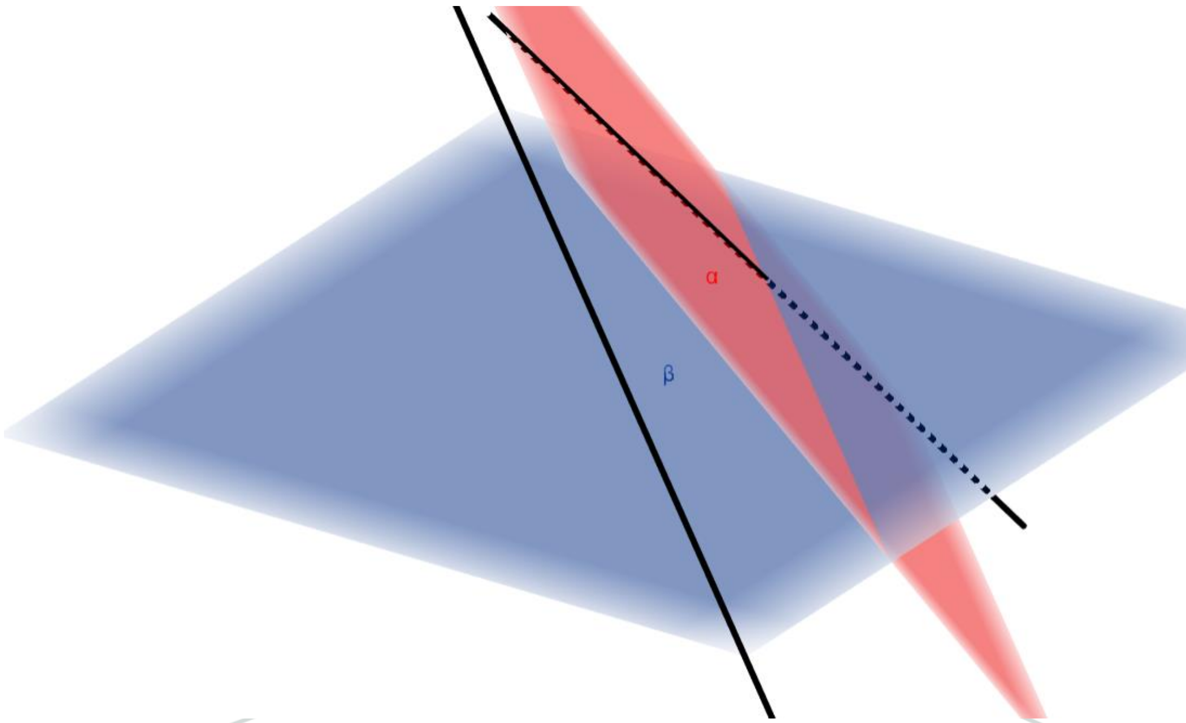
III. FALSO.

A figura abaixo ilustra a situação, note que as retas são paralelas.



IV. FALSO.

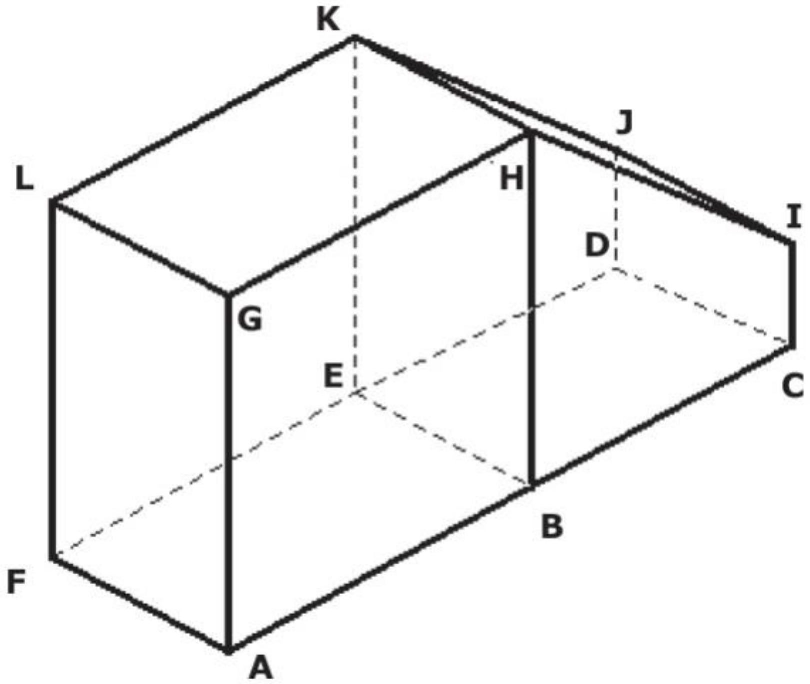
Perceba que podemos construir uma figura em que duas retas contidas em planos secantes nunca se tocam.



Gabarito: A

10. (EsPCEx/2012)

O sólido geométrico abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma. Considere os seguintes pares de retas definidas por pontos dessa figura: as retas $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$; as retas $\overline{AG}$ e $\overline{HI}$ e as retas $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$. As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,



a) concorrentes; reversas; reversas.

b) reversas; reversas; paralelas.

c) concorrentes, reversas; paralelas.

d) reversas; concorrentes; reversas.

e) concorrentes; concorrentes; reversas.

Comentários

Perceba que as retas $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$ são diagonais do bloco retangular, logo, elas são **concorrentes**.

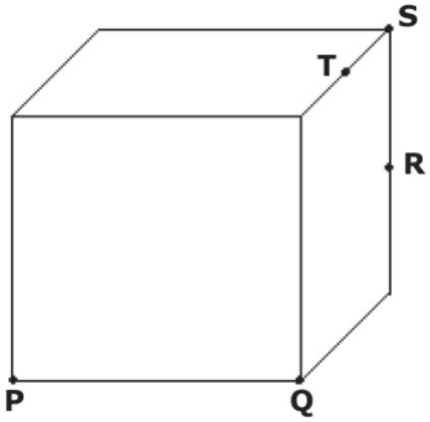
Perceba que as retas $\overline{AG}$ e $\overline{HI}$ são **concorrentes**, pois, elas fazem parte do plano definido pela face ACG e não são paralelas, logo elas concorrem em um único ponto.

Perceba que as retas $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$ são **reversas**, pois elas não são paralelas e não pertencem ao mesmo plano.

Gabarito: E

11. (EsPCEx/2011)

Na figura abaixo, está representado um cubo em que os pontos T e R são pontos médios de duas de suas arestas.



Sabe-se que a aresta desse cubo mede $2\ cm$. Assim, o volume do sólido geométrico definido pelos pontos $PQRST$, em cm^3, é

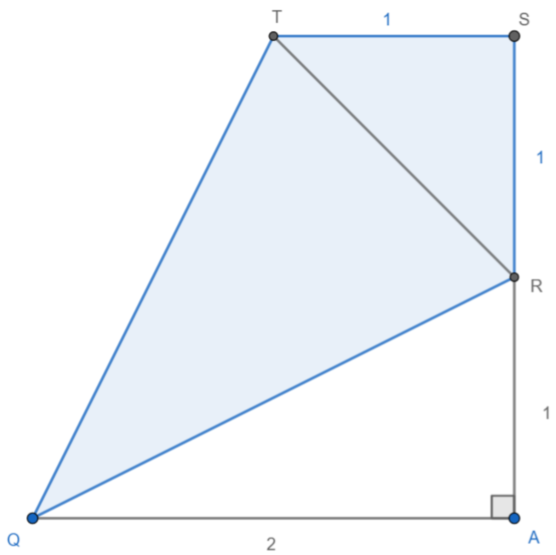
a) $\frac{2}{3}$
b) $\frac{4}{3}$
c) $\frac{5}{3}$
d) $\frac{16}{3}$
e) $\frac{32}{3}$

Comentários

Considere que o sólido é uma pirâmide de base $QRST$, iremos calcular o volume do sólido partindo da área do quadrilátero $QRST$ e da altura até o ponto P.

Veja que $h = 2\ cm$, pois o lado PQ do cubo já representa a projeção do ponto P sobre o plano da base.

Calculemos agora a área da base:



Por Pitágoras, conclui-se que $TR = \sqrt{2}\ cm$ e $QR = \sqrt{5}\ cm$, perceba que o triângulo QRT é isósceles, sendo assim, podemos concluir que a medida da altura deste é

$$h=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Sendo assim a área do triângulo QRT é

$$S_{QRT}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{3}{2}\ cm^2$$

O triângulo RST é isósceles retângulo e tem área dada por:

$$S_{RST}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}\ cm^2$$

Sendo assim:

$$S_{QRST}=S_{QRT}+S_{RST}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\ cm^2$$

Por fim, o volume da pirâmide pode ser calculado:

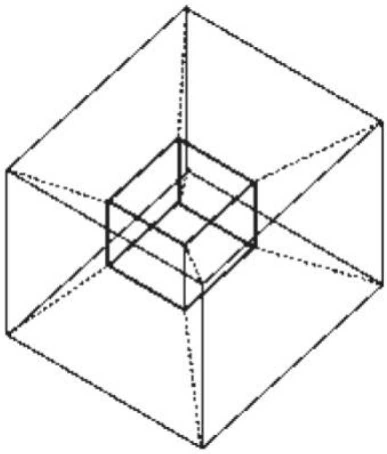
$$V=\frac{1}{3}\cdot B\cdot h=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 2=\frac{4}{3}\ cm^3$$

Gabarito: B

---

12. **(EsPCEx/2011)**

A figura espacial representada abaixo, construída com hastes de plástico, é formada por dois cubos em que, cada vértice do cubo maior é unido a um vértice correspondente do cubo menor por uma aresta e todas as arestas desse tipo têm a mesma medida.



Se as arestas dos cubos maior e menor medem, respectivamente, $8\ cm$ e $4\ cm$, a medida de cada uma das arestas que ligam os dois cubos é

a) $6\sqrt{2}\ cm$

b) $3\sqrt{2}\ cm$

c) $2\sqrt{3}\ cm$

d) $4\sqrt{3}\ cm$

e) $6\sqrt{3}\ cm$

Comentários

Perceba primeiramente a simetria da construção. Ambos os cubos possuem o mesmo centro geométrico, sendo assim, a soma da medida das arestas com a diagonal do cubo menor, é igual a medida da diagonal do cubo maior, ou seja:

$$D = 2a + d$$

Sendo $D = 8\sqrt{3}\ cm$ e $d = 4\sqrt{3}\ cm$. Logo:

$$8\sqrt{3} = 2a + 4\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a = 2\sqrt{3}\ cm$$

Gabarito: C

---

13. (EsPCEx/2011)

Considere as seguintes afirmações:

I. Se dois planos α e β são paralelos distintos, então as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ são sempre paralelas.

II. Se α e β são planos não paralelos distintos, existem as retas $r_1 \subset \alpha$ e $r_2 \subset \beta$ tal que r_1 e r_2 são paralelas.

III. Se uma reta r é perpendicular a um plano α no ponto P, então qualquer reta de α que passa por P é perpendicular a r.

Dentre as afirmações acima, é (são) verdadeira(s)

a) Somente II

b) I e II

c) I e III

d) II e III

e) I, II e III

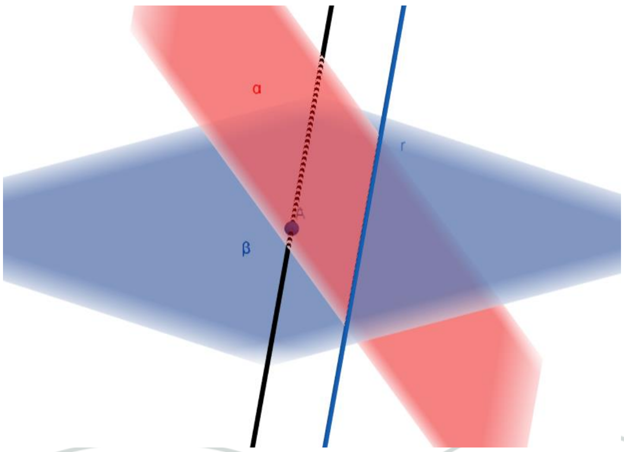
Comentários

I. FALSO.

Elas podem ser reversas.

II. VERDADEIRO.

Podemos construir da seguinte forma, tome a reta r_1 como a intersecção entre os planos, e faça a reta r_2 como uma reta pertencente ao plano β e paralela à r_1



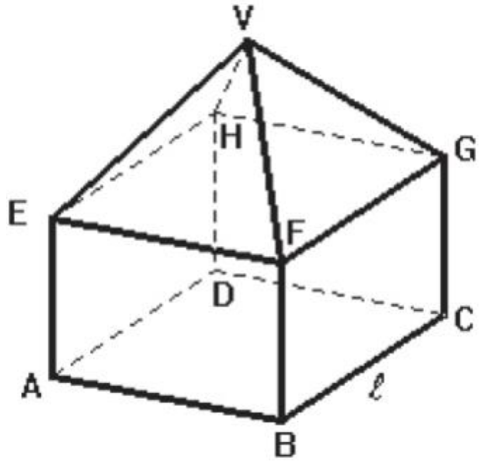
III. VERDADEIRO.

Decorre diretamente da própria definição de reta perpendicular ao plano.

Gabarito: D

14. (EsPCEx/2010)

Na figura abaixo, está representado um sólido geométrico de 9 faces, obtido a partir de um cubo e uma pirâmide.



Sabendo que todas as arestas desse sólido têm medida l, então as medidas da altura (distância do ponto V à face $ABCD$) e da superfície total desse sólido são, respectivamente,

a) $l\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)$ e $l^2(\sqrt{3}+4)$

b) $l\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)$ e $l^2(\sqrt{3}+5)$

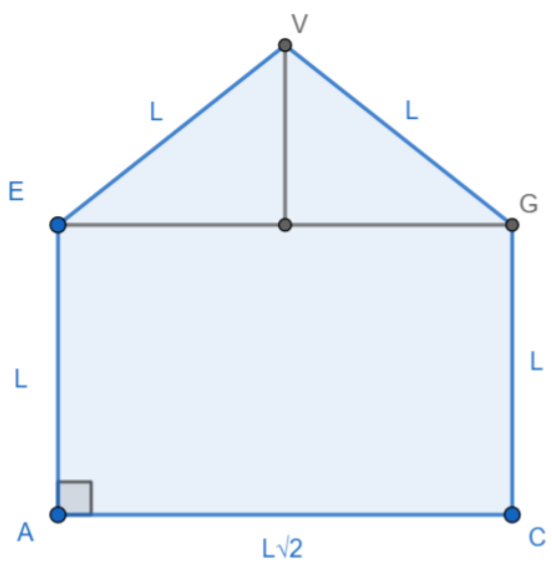
c) $l\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$ e $l^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+5\right)$

d) $l\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $l^2(\sqrt{3}+5)$

e) $l\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $l^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+4\right)$

Comentários

Fazendo a seção do sólido pelo plano $ACGVE$, obtemos:



Calculando a altura do triângulo GVE por Pitágoras, obtemos:

$$h=\sqrt{(L)^2-\left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{L\sqrt{2}}{2}$$

Sendo assim a altura total do sólido é:

$$h_{sol}=L+\frac{L\sqrt{2}}{2}=L\frac{(2+\sqrt{2})}{2}$$

A área lateral total é a área de 5 quadrados e 4 triângulos equiláteros de lado L

$$S_l=5S_Q+4S_T=5\cdot(L^2)+4\cdot\left(L^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=L^2(5+\sqrt{3})$$

Resposta:

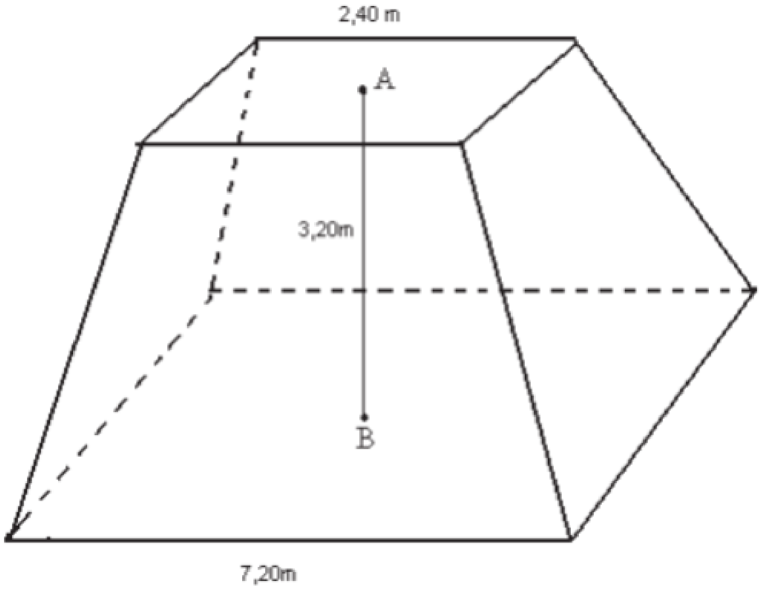
$$L\frac{(2+\sqrt{2})}{2}\ e\ L^2(5+\sqrt{3})$$

Gabarito: B

---

15. (EsPCEx/2009)

Um reservatório em forma de tronco de pirâmide regular de base quadrada e dimensões indicadas na figura deverá ter suas paredes laterais externas cobertas por uma tinta impermeável, cujo rendimento é de $11\ m^2$ por galão.



Desenho fora de escala
Os pontos A e B representam os centros das bases do tronco de pirâmide

O número mínimo de galões que devem ser adquiridos para tal operação é:

a) 6

b) 7

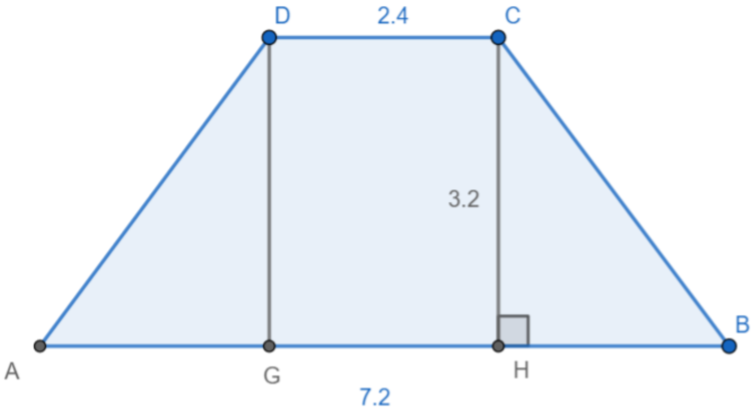
c) 9

d) 10

e) 11

Comentários

Precisamos primeiramente obter a área lateral do tronco de pirâmide. Para isso devemos descobrir a medida da altura da face lateral. Observe a seção meridiana do tronco:



Devido a simetria da figura obtemos que $HB = \frac{7,2-2,4}{2} = 2,4\ m$

Aplicando Pitágoras no triângulo BCH obtemos que $BC = \sqrt{(3,2)^2 + (2,4)^2} = 4\ m$

Sendo assim podemos agora obter a área lateral do tronco. Sendo a lateral do tronco composta por 4 faces laterais trapezoidais, obtemos:

$$S = 4 \cdot S_t = 4 \cdot \frac{B+b}{2} \cdot h = 4 \cdot \frac{(7,2+2,4)}{2} \cdot 4 = 76,8\ m^2$$

Sendo o rendimento da tinta de $11\ m^2$ por galão, precisaremos de

$$\frac{76,8}{11} \approx 7\ galões$$

Gabarito: B

16. (EsPCEx/2009)

Considere duas retas r e s no espaço e quatro pontos distintos, A, B, C e D, de modo que os pontos A e B pertencem à reta r e os pontos C e D pertencem à reta s.

Dentre as afirmações abaixo

I. Se as retas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ são concorrentes, então r e s são necessariamente concorrentes.

II. Os triângulos ABC e ABD serão sempre coplanares.

III. Se $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ forem concorrentes, então as retas r e s são coplanares.

Pode-se concluir que

a) somente a I é verdadeira.

b) somente a II é verdadeira.

c) somente a III é verdadeira.

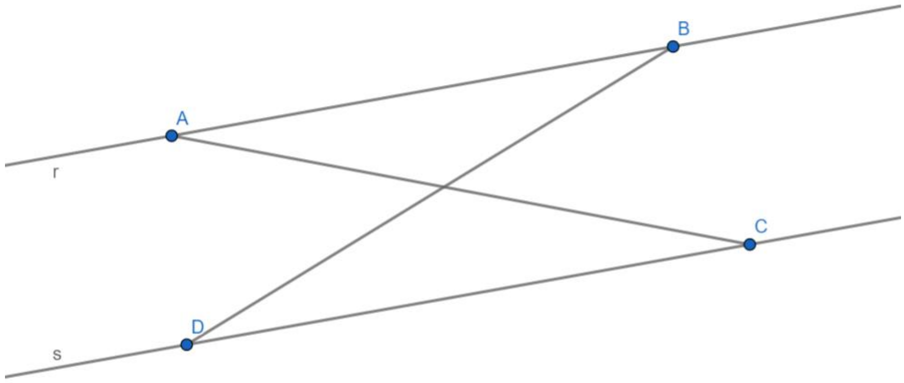
d) as afirmações II e III são verdadeiras.

e) as afirmações I e III são verdadeiras.

Comentários

I. Falso.

Conseguimos fazer as retas r e s paralelas e os dados segmentos concorrentes



II. Falso.

Se as retas r e s forem reversas, então teremos ABC e ABD em planos distintos, logo, esta afirmação é falsa.

III. Verdadeiro.

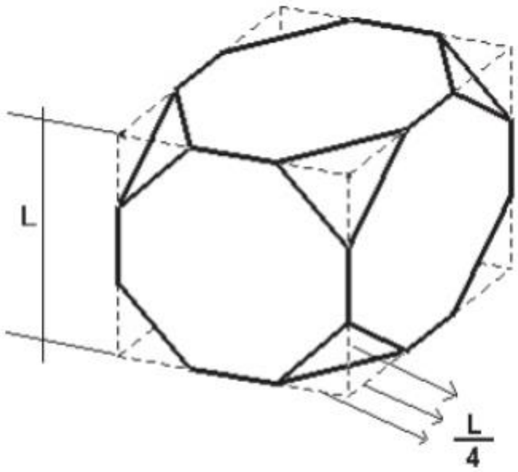
Sendo Se $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ concorrentes, é possível utilizar tais pontos para se montar um quadrilátero cujos os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ estão sobre as retas r e s, sendo os lados do quadrilátero $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ coplanares, então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são complanares, logo por fim, as retas r e s são coplanares

Gabarito: C

---

17. (EsPCEx/2008)

Para obter o sólido geométrico representado abaixo, partiu-se de um cubo de aresta L e retirou-se de cada um dos vértices desse cubo uma pirâmide de base triangular com as arestas laterais medindo $\frac{L}{4}$, conforme a figura.



Desenho Fora de Escala

Denominando-se V o volume do cubo a partir do qual foi obtido o sólido, pode-se concluir que o volume desse sólido é

a) $\frac{23}{24}V$

b) $\frac{47}{48}V$

c) $\frac{71}{72}V$
d) $\frac{95}{96}V$
e) $\frac{143}{144}V$

Comentários

O volume do sólido é a diferença entre o volume do cubo e o volume de 8 pirâmides retas.

$$V_s = V - 8 \cdot V_p$$

Sendo as pirâmides retas de área da base $A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{L}{4}\right) \cdot \left(\frac{L}{4}\right) = \frac{L^2}{32}$, e altura $h = \frac{L}{4}$, portanto:

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{L^2}{32}\right) \cdot \left(\frac{L}{4}\right) = \frac{L^3}{384}$$

E o volume do cubo é dado por: $V = L^3$

Logo:

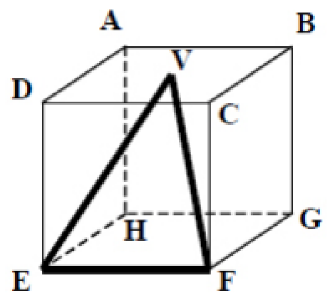
$$V_s = L^3 - 8 \cdot \left(\frac{L^3}{384}\right) = \frac{47}{48}L^3 = \frac{47}{48}V$$

Gabarito: B

---

18. (EsPCEx/2008)

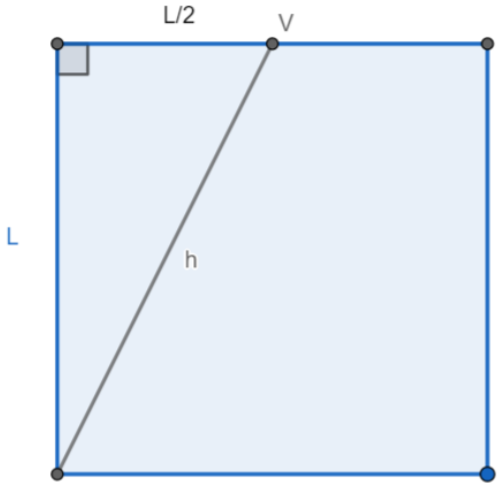
Em um cubo de aresta medindo $4\ cm$, forma-se um triângulo VEF, conforme figura abaixo, em que V é o centro do quadrado $ABCD$. A área, em cm^2 , do triângulo VEF é igual a



a) $4\sqrt{5}$
b) $4\sqrt{6}$
c) $5\sqrt{5}$
d) $5\sqrt{6}$
e) $6\sqrt{6}$

Comentários

Traçando-se a seção utilizando um plano passando por V e perpendicular ao lado $\overline{EF}$, obtemos:



Aplicando-se o teorema de Pitágoras, obtemos que

$$h = \sqrt{(L)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \frac{L\sqrt{5}}{2}$$

Sendo assim a área do triângulo VEF vale:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (L) \cdot \left(\frac{L\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{L^2\sqrt{5}}{4} = \frac{(4)^2\sqrt{5}}{4} = 4\sqrt{5}$$

Gabarito: A

---

19. (EsPCEx/2006)

Dispondo de um recipiente em forma de paralelepípedo retângulo, com as dimensões da figura, preenchido com água até o nível indicado, um aluno fez o seguinte experimento:

- **mergulhou na água um cubo maciço, com $1\ cm^3$ de volume;**
- **mergulhou, sucessivamente, novos cubos, cada vez maiores, cujos volumes formam, a partir do cubo de $1\ cm^3$ de volume, uma progressão aritmética de razão $2\ cm^3$.**

Após mergulhar certo número de cubos, que ficaram completamente submersos, verificou que a altura do nível da água passou para $39\ cm$.

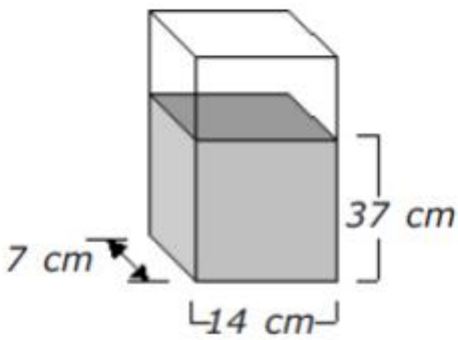


Figura fora de escala

Com base nessas informações, a área total do último cubo colocado é de

a) $54\ cm^2$

b) $42\ cm^2$

c) $24\ cm^2$

d) $150\ cm^2$

e) $216\ cm^2$

Comentários

Primeiramente temos que a soma S dos volumes dos cubos corresponde a variação do volume do recipiente. Sendo assim:

$$\Delta V = V_f - V_i = 7 \cdot 14 \cdot 39 - 7 \cdot 14 \cdot 37 = 196\ cm^3 = S$$

Logo a soma dos volumes de cubos em P.A vale $196\ cm^3$.

Sabemos que a soma dos n primeiros termos de uma P.A de razão r e termo inicial a é dada por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(a_1 + (a_1 + (n-1)r))}{2} = \frac{n^2 r + n(2a - r)}{2}$$

$$196 = \frac{n^2(2) + n(2 \cdot 1 - 2)}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 392 = 2n^2 \quad \therefore \ n = 14$$

Logo, $a_{14} = a_1 + (14-1)r = 1 + 13 \cdot 2 = 27\ cm^3 = l^3 \quad \therefore \quad l = 3\ cm,$ sendo $l - lado\ do\ ultimo\ cubo$

Logo, a área lateral do último cubo vale:

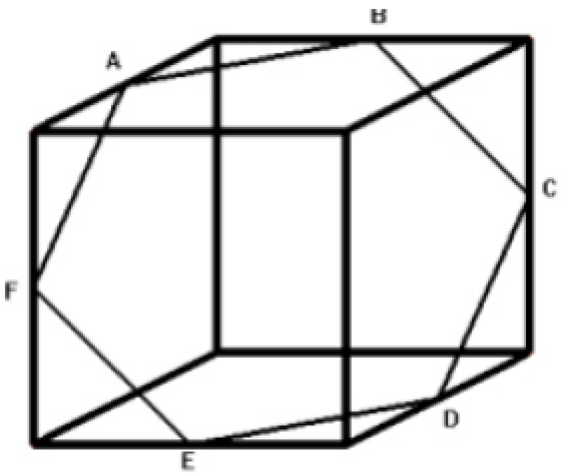
$$A = 6 \cdot l^2 = 6 \cdot (3)^2 = 54\ cm^2$$

Gabarito: A

---

20. (EsPCEx/2005)

O hexágono regular $ABCDEF$ é uma secção plana de um cubo de aresta $2a\sqrt{3}$. Cada vértice do polígono divide ao meio a aresta na qual está apoiado.



A área do hexágono é

a) $9a^2\sqrt{3}$

b) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$
d) $4a^2\sqrt{3}$
e) $\frac{5a^2\sqrt{3}}{4}$

Comentários

Observe as faces que contém as arestas do hexágono. Aplicando Pitágoras para descobrir a medida da aresta, descobrimos que:

$$l = \sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a\sqrt{6}$$

A área do hexágono regular é dada por:

$$S = \frac{l^2 3\sqrt{3}}{2}$$

Sendo assim, a área obtida é:

$$S = \frac{(a\sqrt{6})^2 3\sqrt{3}}{2} = 9a^2\sqrt{3}$$

Gabarito: A

---

21. (EsPCEx/2004)

Um prisma reto com $5\ cm$ de altura e base retangular com dimensões de $4\ cm$ e $6\ cm$ contém água até uma altura de $3\ cm$. Um cubo maciço de aresta igual a $2\ cm$ é colocado dentro deste prisma, ficando totalmente submerso. A partir de então, a altura do nível da água, em cm, passa a ser de:

a) $\frac{13}{4}$
b) $\frac{10}{3}$
c) $\frac{15}{4}$
d) $\frac{13}{3}$
e) $\frac{14}{4}$

Comentários

O aumento do volume do líquido corresponde ao volume do sólido inserido, sendo assim:

$$\Delta V = V_f - V_i = 4 \cdot 6 \cdot h - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 24 \cdot (h-3)\ cm^3$$

O volume do sólido é $V_{cubo} = 2^3 = 8\ cm^3$

Sendo assim:

$$\Delta V = V_{cubo} \quad \Rightarrow \quad 24 \cdot (h-3) = 8 \quad \therefore \quad h = \frac{8}{24} + 3 = \frac{10}{3}$$

Como $\frac{10}{3} < 5$ a água não transborda e esta resposta é valida.

Gabarito: B

---

22. (EsPCEx/2002)

Pedro construiu um aquário em forma cúbica. Enquanto o enchia, notou que, colocando 64 litros de água, o nível subia $10\ cm$. O volume máximo, em litros, que comporta esse aquário é de:

a) 216

b) 343

c) 512

d) 729

e) 1024

Comentários

Primeiramente, vamos trabalhar com cm^3. Logo: $64\ l = 64\ 000\ cm^3$

O aquário é cúbico, logo, possui arestas medindo l. Sendo assim, temos que:

$$V_{ini} = l \cdot l \cdot 10 = 10l^2 = 64000 \quad \Rightarrow \quad l = 80\ cm$$

Portanto o volume total do aquário é:

$$V = l^3 = (80)^3 = 512\ 000\ cm^3 = 512\ l$$

Gabarito: C

---

23. (EsPCEx/2002)

Considere as afirmações abaixo:

I- Se um plano encontra outros dois planos paralelos, então as intersecções são retas paralelas.

II- Uma reta perpendicular a uma reta de um plano e ortogonal a outra reta desse plano é perpendicular ao plano.

III- Se a intersecção de uma reta r com um plano é o ponto P, reta essa não perpendicular ao plano, então existe uma única reta s contida nesse plano que é perpendicular à reta r passando por P.

Pode-se afirmar que

a) todas são verdadeiras.

b) apenas I e II são verdadeiras.

c) apenas I e III são verdadeiras.

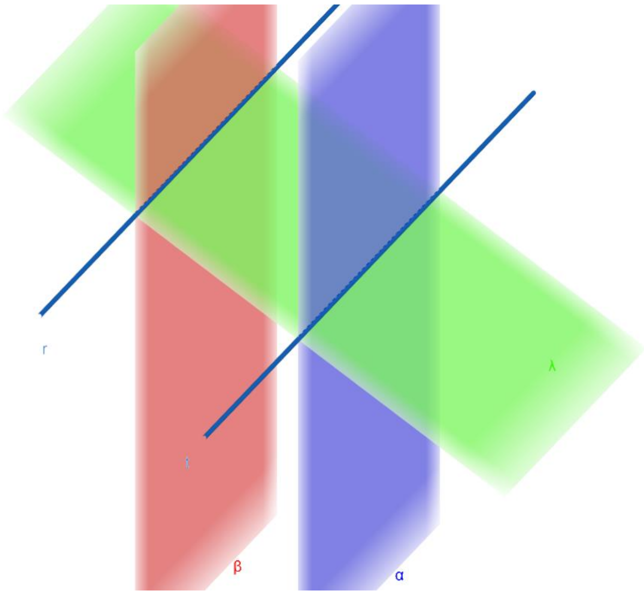
d) apenas II e III são verdadeiras.

e) todas são falsas.

Comentários

I. Verdadeiro.

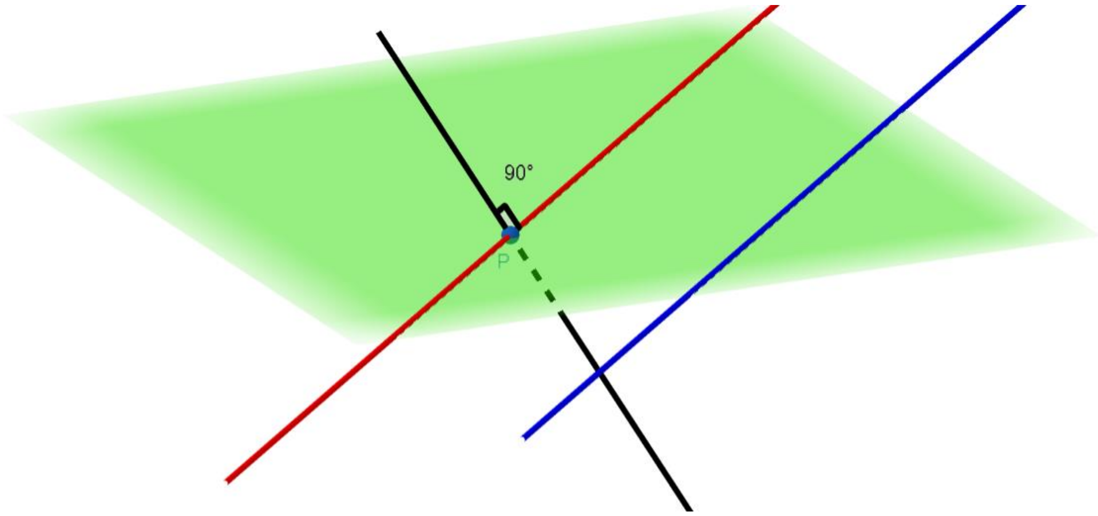
Observe a seguinte figura:



Perceba que as retas são de fato paralelas.

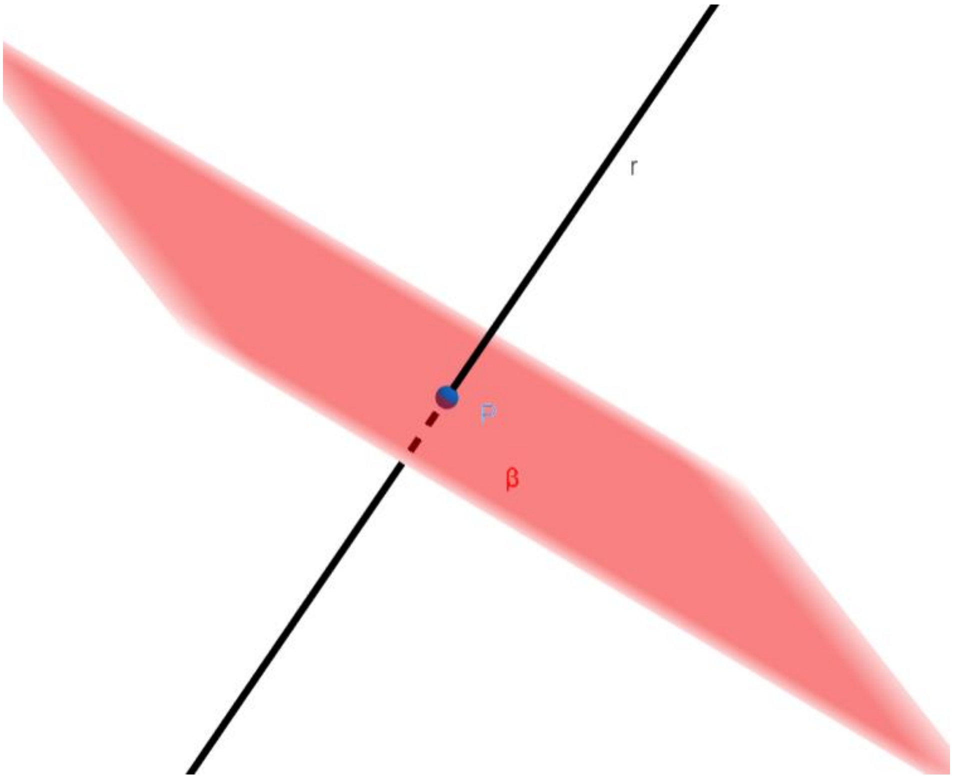
II. Falso.

Se as retas do plano forem paralelas, entre si o plano pode não ser perpendicular à reta que o corta.

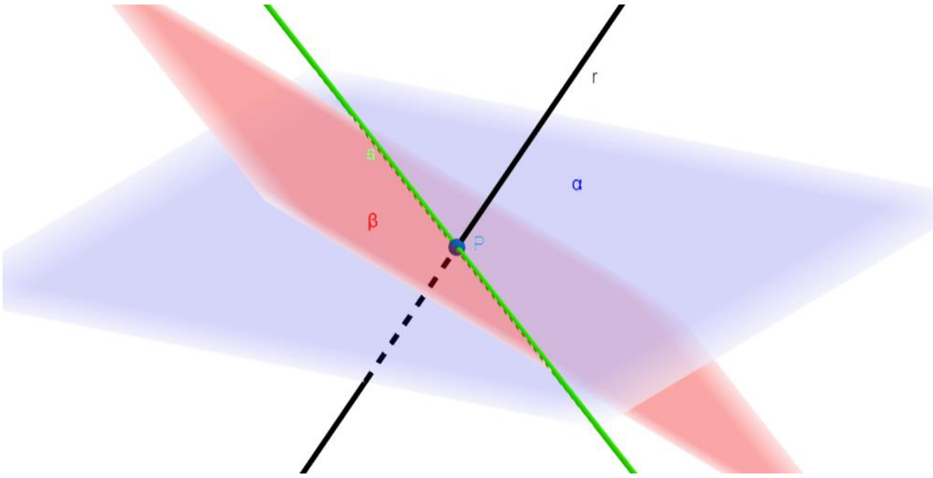


III. Verdadeiro.

O lugar geométrico dos pontos perpendiculares a uma reta sobre um ponto P é um plano perpendicular a esta reta. Conforme:



Devido ao fato do ponto P já pertencer a um dado plano α, o lugar geométrico da reta s perpendicular a reta r, é a intersecção entre os planos, conforme:



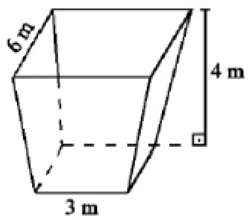
Portanto, existe uma única reta que satisfaz tal condição.

Gabarito: C

---

24. (EsPCEx/2001)

Um reservatório com forma de tronco de pirâmide regular, representado pela figura abaixo, com bases quadradas e paralelas, está repleto de água. Deseja-se esvaziá-lo com o auxílio de uma bomba de sucção que retira água com uma vazão constante.



A vazão, em litros/segundo, que esta bomba deve ter para que o reservatório seja esvaziado exatamente em 1 hora e 40 minutos é:

a) $12\ l/s$

b) $18\ l/s$

c) $16\ l/s$

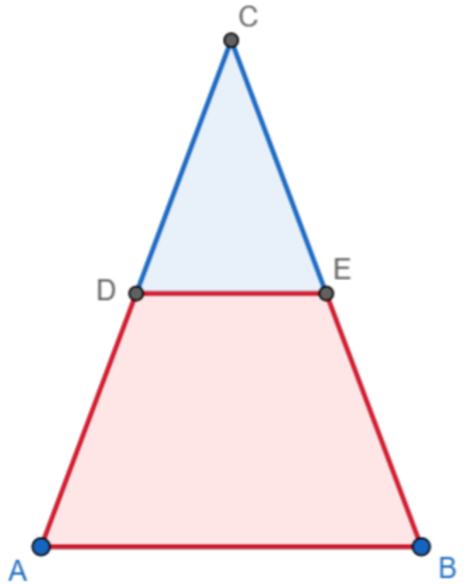
d) $14\ l/s$

e) $20\ l/s$

Comentários

Primeiramente, devemos calcular o volume do tronco.

Vamos considerar o tronco como a diferença de duas pirâmides. Sendo assim, observe a seção meridiana da pirâmide completa:



Sabemos que $\overline{DE} = 3\ m$ e $\overline{AB} = 6\ m$ e os triângulos ABC e CDE são semelhantes, então podemos estabelecer uma relação de altura entre os triângulos conforme:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{H}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{3} = 2 = \frac{H}{h} \quad \therefore \quad H = 2h$$

Mas da figura depreende-se que $H - h = 4\ m$

$$2h - h = h = 4\ cm \quad \Rightarrow \quad H = 8\ m$$

Agora calcularemos o volume do tronco como a diferença entre os volumes das pirâmides.

$$V_{tronco} = V - v = \frac{1}{3} \cdot (6)^2 \cdot 8 - \frac{1}{3} \cdot (3)^2 \cdot 4 = 84\ m^3$$

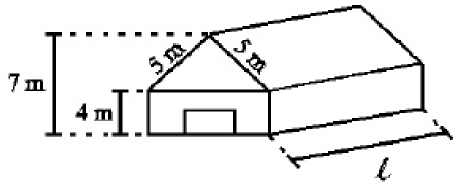
A vazão da bomba deve ser suficiente para esvaziar $84\ m^3 = 84\ 000\ l$ em $1h40min = 6\ 000\ s$

$$Z = \frac{84000}{6000} = 14\ l/s$$

Gabarito: D

25. (EsPCEx/2001)

Um galpão com as dimensões do desenho abaixo deverá ser construído para armazenar produtos que necessitam de controle de temperatura. Cada um dos condicionadores de ar disponíveis, que atendem às suas especificações, é capaz de climatizar um volume de até $220\ m^3$. Nessas condições, pode-se afirmar que o maior comprimento l que o galpão pode ter, em metros, para ser equipado com 3 (três) aparelhos de ar condicionado é:



(desprezar a espessura das paredes e considerar que o galpão é um prisma reto e não tem forro nem laje)

a) $13\ m$

b) $20\ m$

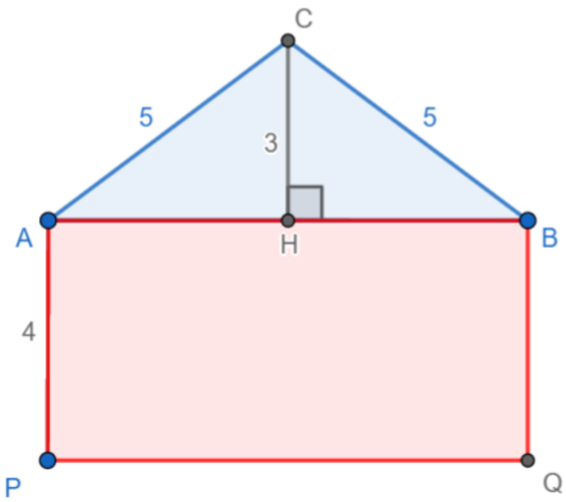
c) $5\ m$

d) $25\ m$

e) $15\ m$

Comentários

Perceba que o triângulo que forma o telhado possui $7 - 4 = 3\ m$ de altura, logo:



Aplicando Pitágoras no triângulo ACH descobrimos que $\overline{AH} = 4\ m$ e, portando $\overline{AB} = 8\ m$

A área do triângulo ABC é $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12\ m^2$

A área da parte retangular mede $S = 4 \cdot 8 = 32\ m^2$

Logo, a área da figura $S_{ACBQP} = 12 + 32 = 44\ m^2$

O volume do galpão é: $V = 44 \cdot l$

Sendo o volume máximo de cobertura de 3 aparelhos de $3 \cdot 220 = 660\, m^3$, então o comprimento l máximo do galpão é:

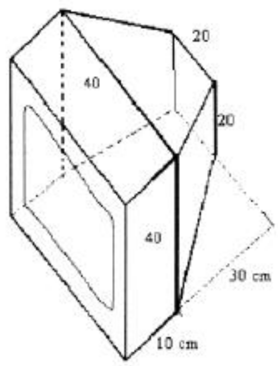
$$660 = 44 \cdot l \quad \therefore \quad l = 15\, m$$

Gabarito: E

---

26. (EsPCEx/2000)

Uma fábrica produz monitores para computador que têm a forma de um bloco retangular associado a um tronco de pirâmide, conforme o desenho e dimensões abaixo. Os monitores são acondicionados para venda em caixas cúbicas, com aresta $40\, cm$, medidos internamente. Os espaços vazios da caixa são preenchidos com isopor, para proteger o aparelho. Sabendo que a produção diária da fábrica é de 300 aparelhos, podemos dizer que o consumo diário de isopor em metros cúbicos é de:



(dados: volume da pirâmide $\rightarrow V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$, $S_b \rightarrow$ área da base, $h \rightarrow$ altura)

a) 2

b) 3

c) 4

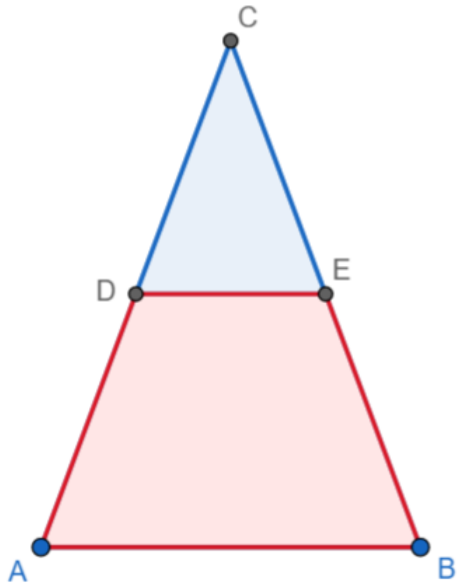
d) 5

e) 6

Comentários

Primeiramente, devemos calcular o volume da televisão, consideremos primeiro o tronco de pirâmide.

Vamos considerar o tronco como a diferença de duas pirâmides. Sendo assim, observe a seção meridiana da pirâmide completa:



Sabemos que $\overline{DE} = 20\ cm$ e $\overline{AB} = 40\ cm$ e os triângulos ABC e CDE são semelhantes, então podemos estabelecer uma relação de altura entre os triângulos conforme:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{H}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{40}{20} = 2 = \frac{H}{h} \quad \therefore \quad H = 2h$$

Mas da figura depreende-se que $H - h = 30\ cm$

$$2h - h = h = 30\ cm \quad \Rightarrow \quad H = 60\ cm$$

Agora calcularemos o volume do tronco como a diferença entre os volumes das pirâmides.

$$V_{tronco} = V - v = \frac{1}{3} \cdot (40)^2 \cdot 60 - \frac{1}{3} \cdot (20)^2 \cdot 30 = 28\,000\ cm^3$$

O volume da televisão é a soma do volume do tronco com o volume do paralelepípedo reto que constitui o restante da televisão, sendo assim:

$$V_{tel} = V_{paral} + V_{tronco} = 10 \cdot 40 \cdot 40 + 28000 = 44\,000\ cm^3$$

O volume de isopor corresponde a diferença de volume entre a caixa cúbica da televisão e o volume da própria televisão, portanto:

$$V_{isopor} = V_{caixa} - V_{tel} = 40 \cdot 40 \cdot 40 - 44000 = 20\,000\ cm^3 = 0{,}02\ m^3$$

Por fim, o total de isopor usado por dia é $300 \cdot 0{,}02 = 6\ m^3$ de isopor.

Gabarito: E

---

27. (ESPCEX/2021)

Um poliedro possui 20 vértices. Sabendo-se que de cada vértice partem 3 arestas, o número de faces que o poliedro possui é igual a

a) 12

b) 22

c) 32

d) 42

e) 52

Comentários

Podemos usar a relação de Euler:

$$V - A + F = 2$$

Do enunciado, temos que $V = 20$.

Para calcular A, sabemos que de cada vértice partem 3 arestas. Se multiplicarmos o número de vértices pelo número de arestas que partem de cada vértice, estaremos contabilizando 2 vezes as arestas, logo:

$$A = \frac{3 \cdot 20}{2} = 30$$

$$\Rightarrow 20 - 30 + F = 2$$

$$\therefore F = 12$$

Gabarito: A

---

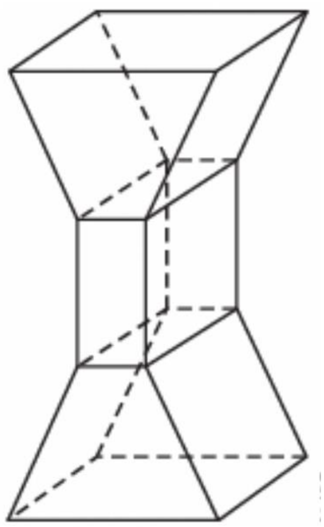
6. QUESTÕES NÍVEL 2

28. (AFA/2019)

Um objeto de decoração foi elaborado a partir de sólidos na rotina de estudos de um estudante de matemática.

Inicialmente, partiu-se de um cubo sólido de volume igual a $19.683 cm^3$.

Do interior desse cubo, retirou-se, sem perda de material, um sólido formado por dois troncos de pirâmide idênticos e um prisma reto, como mostra o esquema da figura a seguir.



Sabe-se que:

- as bases maiores dos troncos estão contidas em faces opostas do cubo;

- as bases dos troncos são quadradas;

- a diagonal da base maior de cada tronco está contida na diagonal da face do cubo que a contém e mede a sua terça parte;

- a diagonal da base menor de cada tronco mede a terça parte da diagonal da base maior do tronco; e

- os troncos e o prisma têm alturas iguais.

Assim, o volume do objeto de decoração obtido da diferença entre o volume do cubo e o volume do sólido esquematizado na figura acima, em cm^3, é um número do intervalo:

a) $[17.200, 17.800]$

b) $]17.800, 18.400]$

c) $]18.400, 19.000]$

d) $]19.000, 19.600]$

29. (AFA/2014)

Considere uma pirâmide regular $ABCDV$ de base $ABCD$.

Sendo $2\sqrt{2}cm$ a medida da aresta da base e $2\sqrt{3}cm$ a medida da altura dessa pirâmide, a distância, em cm, de A à aresta lateral VC é

a) $2\sqrt{2}$

$b)$ $2\sqrt{3}$

c) 4

d) $\sqrt{3}$

30. (AFA/2013)

Uma pirâmide regular $ABCV$, de base triangular ABC, é tal, que sua aresta lateral $\overline{AV}$ mede $3cm$. Sendo $\sqrt{5}cm$ a altura de tal pirâmide, a distância, em cm, de A à face BCV é igual a

a) $\frac{\sqrt{30}}{2}$

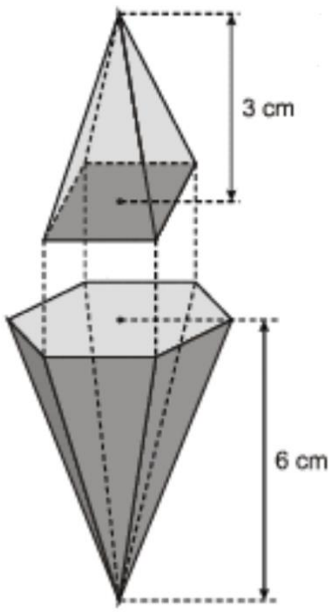
b) $\sqrt{7}$

c) $\frac{\sqrt{26}}{2}$

d) $2\sqrt{2}$

31. (AFA/2012)

Um sólido maciço foi obtido quando a base de uma pirâmide hexagonal regular de altura $6\ cm$ foi colada à base de uma pirâmide reta de base retangular e altura $3\ cm$, de forma que 4 dos 6 vértices da base da primeira coincidam com os vértices da base da segunda, conforme figura. Desprezando-se o volume da cola, se a aresta da base da pirâmide hexagonal mede $\sqrt{5}\ cm$, então, o volume do sólido obtido, em cm^3, é igual a



a) $15\sqrt{3}$

b) $20\sqrt{3}$

c) $25\sqrt{3}$

d) $30\sqrt{3}$

32. (EFOMM/2019)

Duas caixas cúbicas e retangulares perfeitas, têm seis faces de quadrados perfeitos. As faces da primeira caixa têm $3\ m^2$ de área, e cada face da segunda caixa tem $9\ m^2$ de área. A razão entre o volume da primeira caixa e o volume da segunda é:

a) $3^{\frac{1}{2}}$

b) $3^{-\frac{1}{2}}$

c) $3^{-\frac{3}{2}}$

d) $3^{\frac{3}{2}}$

e) $3^{-\frac{2}{3}}$

33. (EFOMM/2017)

O volume da pirâmide delimita pelos planos coordenados e pelo plano π: $5x - 2y + 4z = 20$ é:

a) $20/3\ u \cdot v.$

b) $50/3\ u \cdot v.$

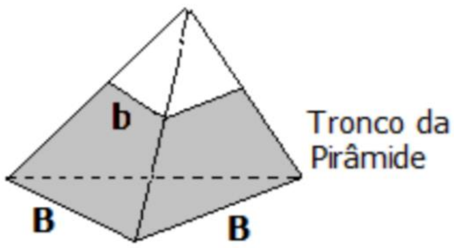
c) $100/3\ u \cdot v.$

d) $100\ u \cdot v.$

e) $200\ u \cdot v.$

34. (EFOMM/2014)

A área lateral de um tronco de pirâmide triangular regular cujas bases tem áreas $25\sqrt{3}cm^2$ e $4\sqrt{3}cm^2$ e altura $4\ cm$ é, em cm^2,



a) $19\sqrt{3}.$

b) $25\sqrt{3}.$

c) $15\sqrt{19}.$

d) $21\sqrt{19}.$

e) $25\sqrt{15}.$

35. (EFOMM/2010)

Sejam ABC e BCD dois triângulos retângulo congruentes, contidos em planos perpendiculares, com hipotenusas $\overline{AC} = \overline{BD} = 8m$ e cateto $\overline{AB} = 4m$. O volume, em m^3, do tetraedro $ABCD$ definido pelos vértices desses triângulos é igual a

a) $16\sqrt{3}$

b) $8\sqrt{3}$

c) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{32}{3}$

e) $\frac{32\sqrt{3}}{3}$

36. (EFOMM/2009)

Tem-se um contêiner no formato cúbico, onde o ponto P descreve o centro desse contêiner e o quadrado $ABCD$ a parte superior dele. Considerando-se o ΔAPC, o seno do ângulo $A\widehat{P}C$ vale

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{2}}{2}$

c) $2\sqrt{2}$

d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

e) $3\sqrt{2}$

37. (Escola Naval/2019)

O volume de um cubo de aresta $2x$ excede em 27 unidades o volume de um paralelepípedo retângulo com 54 unidades de área da base e altura x. Sendo assim o valor de x é

a) $8 \cdot \cos(40°)$

b) $3 \cdot \cos(20°)$

c) $8 \cdot \cos(20°)$

d) $9 \cdot \cos(40°)$

e) $2 \cdot \cos(30°)$

38. (Escola Naval/2017)

Uma pirâmide triangular tem como base um triângulo de lados $13cm, 14cm$ e $15cm$; as outras arestas medem l.

Sabendo que o volume da pirâmide é de $105\sqrt{22}\ cm^3$, o valor de l, em cm, é igual a:

a) $\frac{155}{8}$

b) $\frac{335}{11}$

c) $\frac{275}{9}$

d) $\frac{205}{8}$

e) $\frac{95}{8}$

39. (Escola Naval/2016)

A equação

$$\begin{vmatrix} sen^2x & 1 & \sec^2 x \\ 1 & \cos^2 x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{31}{16},$$

com $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, possui como solução o volume de uma pirâmide com base hexagonal de lado ℓ e altura $h = \sqrt{3}$. Sendo assim, é correto afirmar que o valor de ℓ é igual a:

a) $\sqrt{\frac{2\pi^2}{9}}$

b) $\sqrt{\frac{\pi}{18}}$

c) $\sqrt{\frac{8\pi}{9}}$

d) $\sqrt{\frac{32\pi}{9}}$

e) $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$

40. (Escola Naval/2015)

Em um polígono regular, cujos vértices A, B e C são consecutivos, a diagonal $\overline{AC}$ forma com o lado $\overline{BC}$ um ângulo de $30°$. Se o lado do polígono mede ℓ unidades de comprimento, o volume da pirâmide, cuja base é esse polígono e cuja altura vale o triplo da medida do lado, é igual a

a) $\frac{3\ell^3\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\ell^3\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{3\ell\sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{3\ell^3\sqrt{3}}{3}$

41. (Escola Naval/2015)

Um prisma quadrangular regular tem área lateral $36\sqrt{6}$ unidades de área. Sabendo que suas diagonais formam um ângulo de $60°$ com suas bases, então a razão do volume de uma esfera de raio $24^{\frac{1}{6}}$ unidades de comprimento para o volume do prisma é

a) $\frac{8}{81\pi}$

b) $\frac{81\pi}{8}$

c) $\frac{8\pi}{81}$

d) $\frac{8\pi}{27}$

e) $\frac{81}{8\pi}$

42. (Escola Naval/2014)

Um recipiente cúbico de aresta $4cm$ está apoiado em um plano horizontal e contém água até uma altura de $3\ cm$. Inclina-se o cubo, girando de um ângulo α em torno de uma aresta da base, até que o líquido comece a derramar. A tangente do ângulo α é

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\sqrt{3}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{1}{2}$

e) 1

43. (Escola Naval/2013)

Um quadrado $ABCD$, de lado $4\ cm$, tem os vértices num plano α. Pelos vértices A e C são traçados dois segmentos AP e CQ, perpendiculares a α, medindo respectivamente, $3cm$ e $7\ cm$. A distância PQ tem medida, em cm, igual a

a) $2\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{3}$

e) $4\sqrt{3}$

44. (Escola Naval/2013)

Nas proposições abaixo, coloque (V) na coluna à esquerda quando a proposição for verdadeira e (F) quando a proposição for falsa.

(   ) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

(   ) Se uma reta é perpendicular a uma reta perpendicular a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.

(   ) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.

( ) Se dois planos são perpendiculares, todo plano paralelo a um deles é perpendicular ao outro.

(   ) Se três planos são dois a dois perpendiculares, eles têm um único ponto em comum.

Lendo-se a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se

a) F-F-V-F-V

b) V-F-V-V-F

c) V-V-F-V-V

d) F-V-V-V-V

e) V-V-V-V-V

45. (Escola Naval/2013)

Qual é o menor ângulo formado por duas diagonais de um cubo aresta L?

a) $arcsen\frac{1}{4}$

b) $\arccos\frac{1}{4}$

c) $arcsen\frac{1}{3}$

d) $\arccos\frac{1}{3}$

e) $arctg\frac{1}{4}$

46. (Escola Naval/2013)

Num prisma hexagonal regular a área lateral é 75% da área total. A razão entre a aresta lateral e a aresta da base é

a) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

e) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

GABARITO

28. c
29. b
30. a
31. b
32. c
33. c
34. d
35. e
36. a
37. b
38. a
39. b
40. a
41. c
42. d
43. e
44. d
45. d
46. b

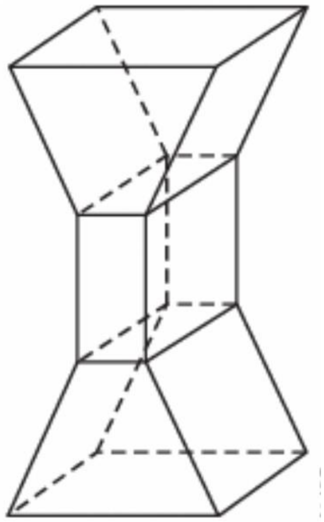
RESOLUÇÃO

28. (AFA/2019)

Um objeto de decoração foi elaborado a partir de sólidos na rotina de estudos de um estudante de matemática.

Inicialmente, partiu-se de um cubo sólido de volume igual a $19.683cm^3$.

Do interior desse cubo, retirou-se, sem perda de material, um sólido formado por dois troncos de pirâmide idênticos e um prisma reto, como mostra o esquema da figura a seguir.



Sabe-se que:

- as bases maiores dos troncos estão contidas em faces opostas do cubo;

- as bases dos troncos são quadradas;

- a diagonal da base maior de cada tronco está contida na diagonal da face do cubo que a contém e mede a sua terça parte;

- a diagonal da base menor de cada tronco mede a terça parte da diagonal da base maior do tronco; e

- os troncos e o prisma têm alturas iguais.

Assim, o volume do objeto de decoração obtido da diferença entre o volume do cubo e o volume do sólido esquematizado na figura acima, em cm^3, é um número do intervalo:

a) $[17.200, 17.800]$

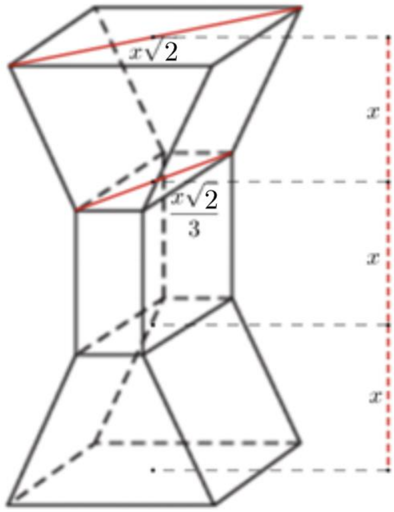
b) $]17.800, 18.400]$

c) $]18.400, 19.000]$

d) $]19.000, 19.600]$

Comentários

Analisando a descrição do enunciado, podemos montar a seguinte figura:



Explicando as marcações:

- Como as alturas dos troncos e prisma são iguais, a denominamos de x.
- Como as bases maiores dos troncos estão em faces opostas do cubo maior, então o lado do cubo mede $3x$.
- Sabemos que a diagonal da face de um cubo de lado L mede $L\sqrt{2}$ e, portanto, a diagonal da face de um cubo de lado $3x$ mede $3x\sqrt{2}$. Como a diagonal da base maior do tronco é um terço da diagonal do cubo, então ela vale $x\sqrt{2}$, como na figura. Podemos afirmar que essa base tem lado de medida x.
- A diagonal da base menor do tronco mede um terço da diagonal da base maior, então ela vale $\frac{x\sqrt{2}}{3}$, como na figura acima. Assim, a medida do seu lado é $x/3$.

Portanto, como as bases dos troncos são quadradas (e, portanto, as do prisma também), podemos achar a medida dos seus lados em função de x.

Na base maior do tronco, temos:

$$Área_{baseMaior} = x^2$$

Na base menor do tronco:

$$Área_{baseMenor} = \frac{x^2}{9}$$

Assim, calculando o volume do tronco em função das áreas das bases maior (A_B) e menor (A_b) e da altura entre elas ($h = x$):

$$V_{tronco} = \frac{h}{3}\left(A_B + \sqrt{A_B A_b} + A_b\right) = \frac{x}{3}\left(x^2 + \sqrt{x^2 \cdot \frac{x^2}{9}} + \frac{x^2}{9}\right) = \frac{x}{3}\left(x^2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{9}\right)$$

$$V_{tronco} = \frac{x}{3}\left(\frac{13x^2}{9}\right) = \frac{13x^3}{27}$$

É dito que o volume do cubo inicial (de lado $3x$) é igual a 19.683 cm³, portanto:

$$V_{cubo} = (3x)^3 = 19683 \Rightarrow 27x^3 = 19683 \Rightarrow x^3 = \frac{19683}{27} = 729$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{729} = 9$$

Portanto, queremos a subtração do volume desse cubo inicial pelo da figura acima:

$$V_{final} = 19683 - (2 \cdot V_{tronco} + V_{prisma})$$

Onde

$$V_{prisma} = Área_{baseMenor} \cdot h = \frac{x^2}{9} \cdot x = \frac{x^3}{9} = \frac{729}{9} = 81$$

$$V_{tronco} = \frac{13x^3}{27} = \frac{13 \cdot 729}{27} = 13 \cdot 27 = 351$$

$$\Rightarrow V_{final} = 19683 - (2 \cdot 351 + 81) = 19683 - 783 = 18900$$

Vemos que o valor acima está no intervalo $]18.400, 19.000]$.

Gabarito: "c".

---

29. (AFA/2014)

Considere uma pirâmide regular $ABCDV$ de base $ABCD$.

Sendo $2\sqrt{2}cm$ a medida da aresta da base e $2\sqrt{3}cm$ a medida da altura dessa pirâmide, a distância, em cm, de A à aresta lateral VC é

a) $2\sqrt{2}$

$b)$ $2\sqrt{3}$

c) 4

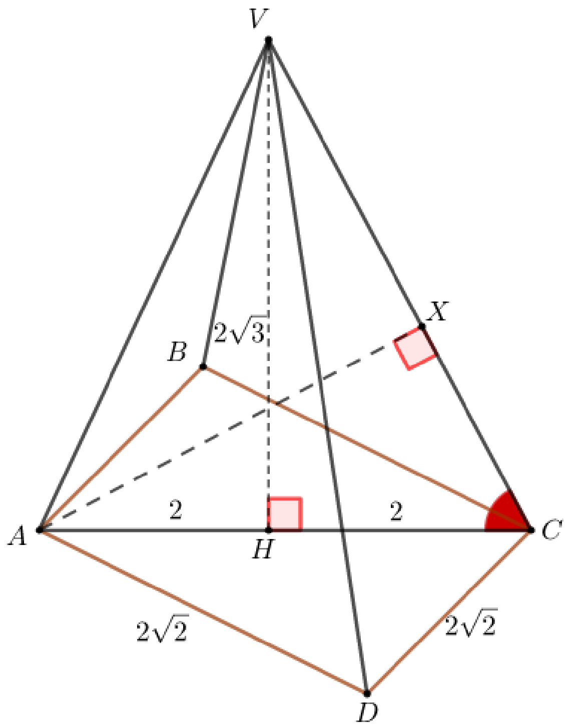
d) $\sqrt{3}$

Comentários

Como a pirâmide é regular, então a projeção ortogonal do vértice na base quadrada é o próprio centro do quadrado $ABCD$. Portanto, essa projeção é o ponto médio da diagonal. Calculando a diagonal D do quadrado por Pitágoras, sabendo que a aresta da base mede $2\sqrt{2}$:

$$D^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 16 \Rightarrow D = 4$$

Assim, fazendo o desenho com todas as informações do enunciado, temos:



Queremos o valor de AX, que é a distância de A ao lado VC. O ângulo marcado de vermelho acima é $\angle ACV = \angle ACX = \alpha$. No triângulo VHC temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{VH}{HC} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \alpha = 60°$$

Portanto, no triângulo AXC:

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen} 60° = \frac{AX}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AX}{4} \Rightarrow AX = 2\sqrt{3}$$

Gabarito: “b”.

30. (AFA/2013)

Uma pirâmide regular $ABCV$, de base triangular ABC, é tal, que sua aresta lateral $\overline{AV}$ mede $3cm$. Sendo $\sqrt{5}cm$ a altura de tal pirâmide, a distância, em cm, de A à face BCV é igual a

a) $\frac{\sqrt{30}}{2}$

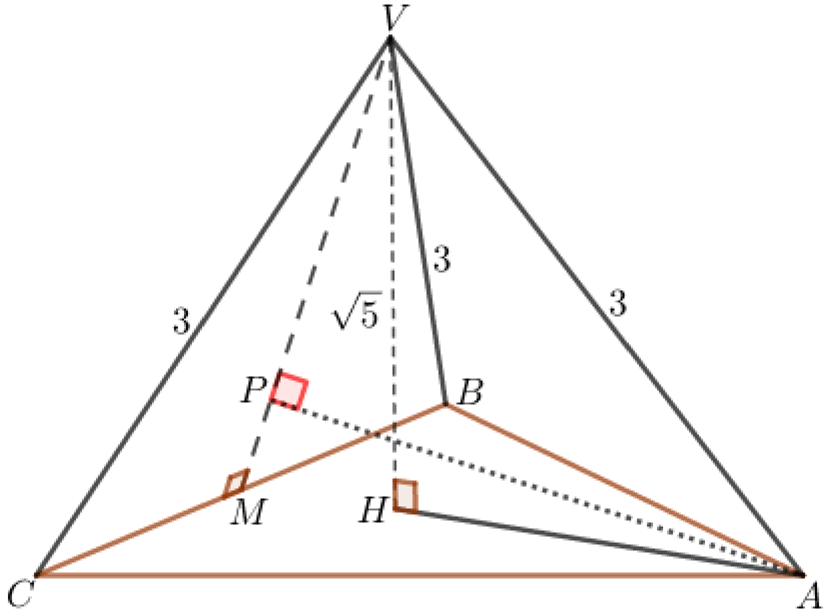
b) $\sqrt{7}$

c) $\frac{\sqrt{26}}{2}$

d) $2\sqrt{2}$

Comentários

Fazendo o desenho do que é descrito no enunciado, temos:



Onde M é o ponto médio do lado CB e VM é altura do triângulo VCB (pois é isósceles), P é a projeção de A no plano VCB e H a projeção do vértice V no centro do triângulo equilátero ABC.

Veja que, no triângulo VHA:

$$VA^2 = VH^2 + HA^2 \Rightarrow 9 = 5 + HA^2 \Rightarrow HA^2 = 4 \Rightarrow HA = 2$$

Porém, sabemos que, num triângulo equilátero (a base de uma pirâmide regular de base triangular é um triângulo equilátero) a distância do seu centro (baricentro e incentro) ao vértice é igual a dois terços de sua altura, pois o baricentro divide a altura na razão 2:1. Assim, sendo l o lado do triângulo equilátero:

$$HA = \frac{2}{3} \cdot altura \Rightarrow 2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} \Rightarrow l = 2\sqrt{3}$$

Agora, como M é ponto médio de $CB \Rightarrow CM = \frac{l}{2} = \sqrt{3}$. Pitágoras no triângulo CVM:

$$VC^2 = VM^2 + CM^2 \Rightarrow 9 = VM^2 + 3 \Rightarrow VM = \sqrt{6}$$

Assim, a área do triângulo VBC:

$$[VBC] = \frac{CB \cdot MV}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{2}$$

Portanto, o volume do prisma $ABCV$, usando como base VCB e altura PA:

$$V_{ABCV} = \frac{1}{3}[VBC] \cdot PA = \sqrt{2} \cdot PA$$

Por outro lado, usando ABC como base e $VH = \sqrt{5}$ como altura, sabendo que ABC é triângulo equilátero de lado l:

$$[ABC] = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V_{ABCV} = \frac{1}{3}[ABC] \cdot VH = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{15}$$

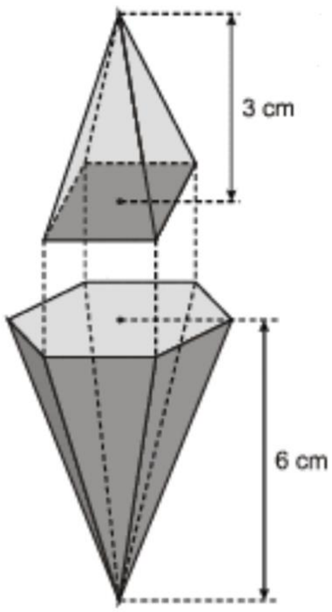
Portanto, igualando as duas expressões do volume:

$$\sqrt{2} \cdot PA = \sqrt{15} \Rightarrow PA = \sqrt{\frac{15}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

Gabarito: "a".

31. (AFA/2012)

Um sólido maciço foi obtido quando a base de uma pirâmide hexagonal regular de altura $6\ cm$ foi colada à base de uma pirâmide reta de base retangular e altura $3\ cm$, de forma que 4 dos 6 vértices da base da primeira coincidam com os vértices da base da segunda, conforme figura. Desprezando-se o volume da cola, se a aresta da base da pirâmide hexagonal mede $\sqrt{5}\ cm$, então, o volume do sólido obtido, em cm^3, é igual a



a) $15\sqrt{3}$
b) $20\sqrt{3}$
c) $25\sqrt{3}$
d) $30\sqrt{3}$

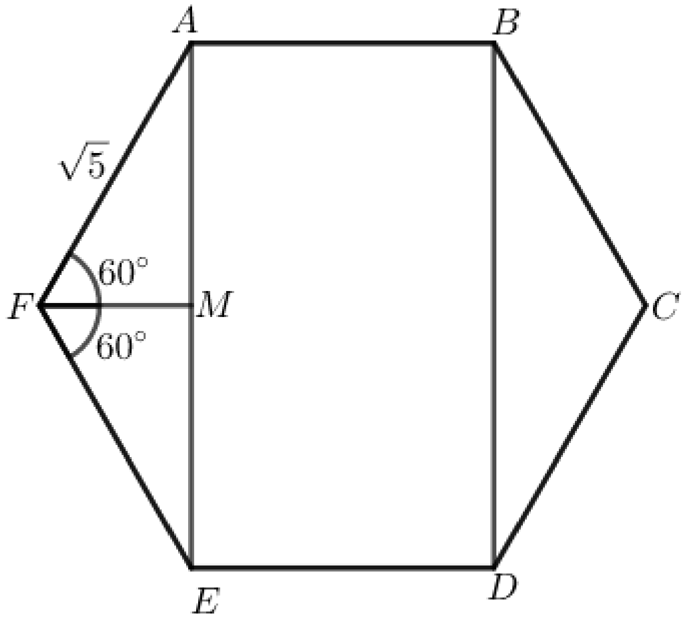
Comentários

O volume do sólido obtido nada mais é do que a soma dos volumes das duas pirâmides. O enunciado diz que quatro dos vértices do retângulo (base da pirâmide menor) coincidem com quatro vértices do hexágono regular.

Dessa maneira, lembrando que o hexágono regular possui todos lados iguais e ângulos internos iguais, calculando a medida de seus ângulos internos, para número de lados $n = 6$:

$$\hat{a}ngulo\ interno = \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{180° \cdot 4}{6} = 120°$$

Assim, fazendo a figura dos vértices em comum entre o retângulo e o hexágono, obtemos:



Se traçarmos a bissetriz FM do ângulo $\angle EFA = 120°$ acima, obteremos dois ângulos de 60° como na figura. Como o triângulo EFA é isósceles, então a bissetriz FM também é altura e mediana do triângulo EFA em relação à base AE, o que implica que o M é ponto médio de AE.

Assim, no triângulo retângulo FMA:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{AM}{FA} = \frac{\frac{AE}{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AE}{2\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{AE = \sqrt{15}}$$

Portanto, um dos lados distintos do retângulo mede $AE = \sqrt{15}$ e o outro mede o mesmo que o lado do hexágono, $AB = FA = \sqrt{5}$, como podemos ver na imagem.

Como a altura a pirâmide de base retangular foi dada $(h_1 = 3)$ então seu volume é facilmente calculado:

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot AE \cdot AB \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 3 = 5\sqrt{3}$$

A altura da pirâmide de base hexagonal foi dada também, e sua área da base é a mesma que a soma da área de 6 triângulos equiláteros de lado $\sqrt{5}$:

$$Área_{hexágono} = \frac{6 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot 5\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

Assim, o volume da pirâmide é dado por:

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot Área_{hexágono} \cdot 6 = 2 \cdot \frac{15\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

Assim, como se pede o volume total, queremos a soma desses dois volumes (lembre que o volume da cola é desprezado:

$$V_{total} = V_1 + V_2 = 5\sqrt{3} + 15\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$$

Gabarito: “b”.

32. (EFOMM/2019)

Duas caixas cúbicas e retangulares perfeitas, têm seis faces de quadrados perfeitos. As faces da primeira caixa têm 3 m^2 de área, e cada face da segunda caixa tem 9 m^2 de área. A razão entre o volume da primeira caixa e o volume da segunda é:

a) $3^{\frac{1}{2}}$

b) $3^{-\frac{1}{2}}$

c) $3^{-\frac{3}{2}}$

d) $3^{\frac{3}{2}}$

e) $3^{-\frac{2}{3}}$

Comentários

O enunciado nos leva a entender que as faces da primeira caixa possuem área de 3m². Se seu lado mede l, então:

$$l^2 = 3 \Rightarrow l = \sqrt{3}$$

É dito também que a área da face da outra caixa é 9m². Se chamarmos de L a aresta deste cubo, temos:

$$L^2 = 9 \Rightarrow L = 3$$

Assim, a razão entre o volume da primeira caixa e o volume da segunda é:

$$V_{primeira} = l^3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$V_{segunda} = L^3 = 27$$

$$\Rightarrow \frac{V_{primeira}}{V_{segunda}} = \frac{3\sqrt{3}}{27} = \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^2} \Rightarrow \frac{V_{primeira}}{V_{segunda}} = 3^{\frac{1}{2}-2} = 3^{-\frac{3}{2}}$$

Gabarito: "c".

---

33. (EFOMM/2017)

O volume da pirâmide delimita pelos planos coordenados e pelo plano π: $5x - 2y + 4z = 20$ é:

a) $20/3\ u \cdot v.$

b) $50/3\ u \cdot v.$

c) $100/3\ u \cdot v.$

d) $100\ u \cdot v.$

e) $200\ u \cdot v.$

Comentários

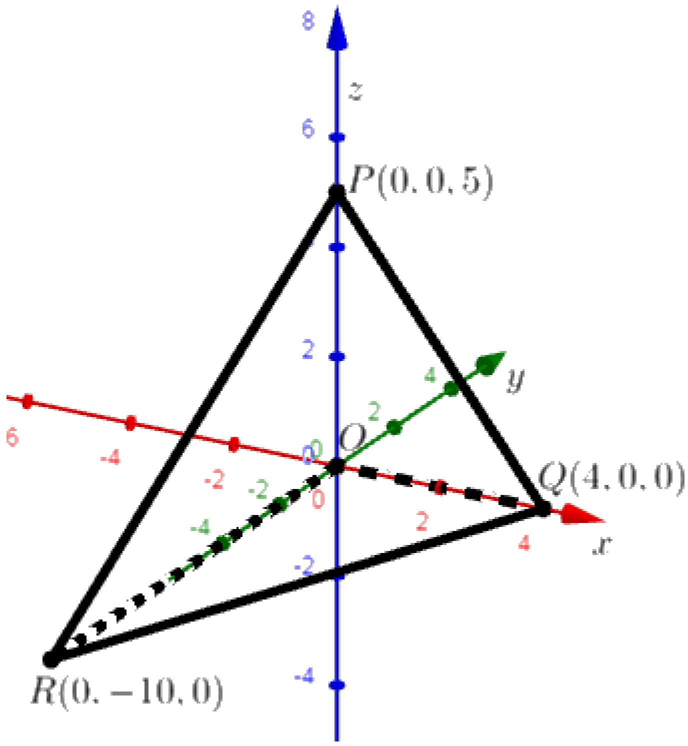
A interseção entre o dado plano e os eixos coordenados nos dará os três vértices distintos da origem dessa pirâmide citada. Calculando a interseção com cada eixo:

$$Interseção\ com\ o\ eixo\ z: x = y = 0 \Rightarrow 5 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4z = 20 \Rightarrow z = 5 \Rightarrow P(0,0,5)$$

$$Interseção\ com\ eixo\ x: y = z = 0 \Rightarrow 5x - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 20 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow Q(4,0,0)$$

$$Interseção\ com\ eixo\ y: x = z = 0 \Rightarrow 5 \cdot 0 - 2y + 4 \cdot 0 = 20 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow R(0,-10,0)$$

O outro vértice, pelo fato da pirâmide ser limitada pelos planos cartesianos, é a origem $O(0,0,0)$. Assim, desenhando essa pirâmide:



Assim, veja que se usarmos o triângulo ORQ, retângulo em O, como base para o cálculo do volume dessa pirâmide, então a altura relativa a essa base será $OP = 5$. Assim, sendo $[OQR]$ a área do triângulo OQR:

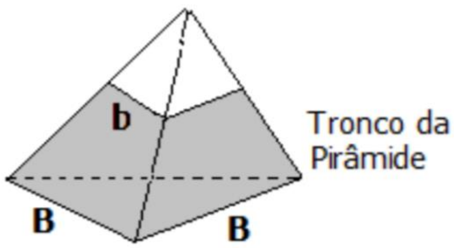
$$Volume = \frac{1}{3} \cdot [OQR] \cdot OP = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{OQ \cdot OR}{2}\right) \cdot OP = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{10 \cdot 4}{2}\right) \cdot 5 = \frac{100}{3}\ u.v.$$

Gabarito: "c".

---

34. (EFOMM/2014)

A área lateral de um tronco de pirâmide triangular regular cujas bases tem áreas $25\sqrt{3}cm^2$ e $4\sqrt{3}cm^2$ e altura $4\ cm$ é, em cm^2,



a) $19\sqrt{3}$.
b) $25\sqrt{3}$.
c) $15\sqrt{19}$.
d) $21\sqrt{19}$.
e) $25\sqrt{15}$.

Comentários

Se considerarmos o a pirâmide completa (preenchendo a parte vazia em branco) e apenas a pirâmide menos (em branco), observamos que são semelhantes (uma é uma imagem ampliada da outra). Portanto, a razão de semelhança r entre eles pode ser medida pela razão das áreas de suas bases:

$$r^2 = \frac{4\sqrt{3}}{25\sqrt{3}} \Rightarrow r = \frac{2}{5}$$

Agora, vamos calcular a área lateral da pirâmide completa (preenchida) e depois, pela razão de semelhança entre as áreas, iremos subtrair as áreas em branco (laterais da pirâmide em branco).

As áreas das bases são de triângulos equiláteros. Portanto, podemos achar a medida do lado das bases:

$$25\sqrt{3} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow L = 10$$

$$4\sqrt{3} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow l = 4$$

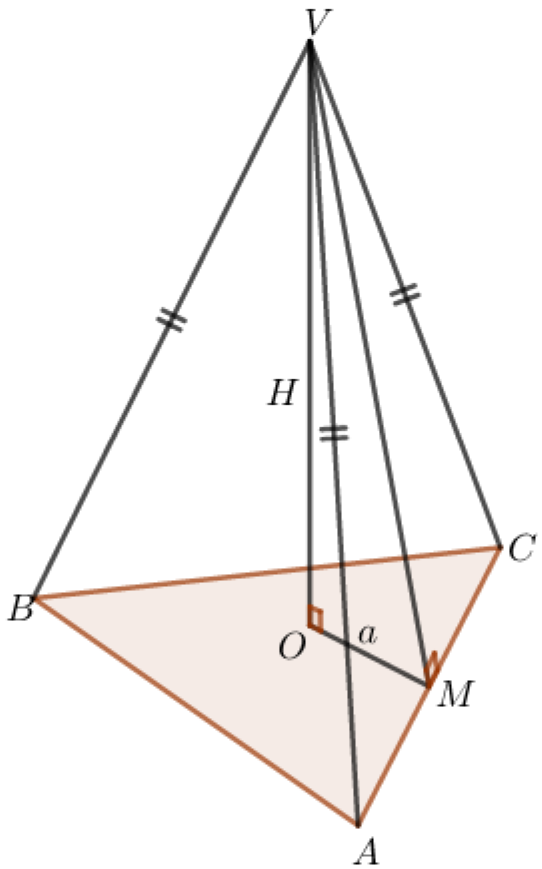
Se chamarmos a altura da pirâmide preenchida de H, então a altura da menor será:

$$\frac{h}{H} = \frac{2}{5} \Rightarrow h = \frac{2H}{5}$$

O enunciado nos dá a altura do tronco:

$$H - h = 4 \Rightarrow H - \frac{2H}{5} = 4 \Rightarrow 3H = 20 \Rightarrow H = \frac{20}{3}$$

Assim, sabemos a altura da pirâmide preenchida. Traçando essa altura na pirâmide e construindo um triângulo com um apótema da base, temos:



Veja que, como a pirâmide é regular ($VA = VB = VC$), a altura do triângulo VAC é também é mediana, e, assim, M é ponto médio de AC. Portanto, no triângulo retângulo VOM, onde $a = \frac{1}{3} \cdot \frac{L\sqrt{3}}{2}$, é o apótema da base, que é um triângulo equilátero de lado $L = 10$. Portanto:

$$VM^2 = a^2 + H^2 = \left(\frac{10\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{300}{36} + \frac{400}{9} = \frac{1900}{36}$$

$$\Rightarrow VM = \frac{5}{3}\sqrt{19}$$

Portanto, a área do triângulo VAC (igual à dos triângulos $VAB\ e\ VBC$) é:

$$[VAC] = \frac{AC \cdot VM}{2} = 10 \cdot \frac{5}{3}\sqrt{19} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{3}\sqrt{19}$$

Lembrando que para acharmos a área desejada precisamos subtrair de cada face da pirâmide maior a área referente à face da pirâmide "vazia". Sabemos a proporção entre as áreas, então:

$$\frac{A_{face_{VAZIA}}}{[VAC]} = \frac{4}{25} \Rightarrow A_{face_{VAZIA}} = \frac{4}{25}[VAC] = \frac{4}{3}\sqrt{19}$$

Portanto, a área de cada face do tronco é:

$$A_{face_{Tronco}} = [VAC] - A_{face_{VAZIA}} = \frac{25}{3}\sqrt{19} - \frac{4}{3}\sqrt{19} = \frac{21}{3}\sqrt{19}$$

Como queremos a área lateral do tronco, basta multiplicar o valor anterior por 3, pois temos três faces iguais a essa:

$$A_{lateral} = 3 \cdot A_{face_{Tronco}} = 21\sqrt{19}$$

Gabarito: “d”.

35. (EFOMM/2010)

Sejam ABC e BCD dois triângulos retângulo congruentes, contidos em planos perpendiculares, com hipotenusas $\overline{AC} = \overline{BD} = 8m$ e cateto $\overline{AB} = 4m$. O volume, em m^3, do tetraedro $ABCD$ definido pelos vértices desses triângulos é igual a

a) $16\sqrt{3}$

b) $8\sqrt{3}$

c) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{32}{3}$

e) $\frac{32\sqrt{3}}{3}$

Comentários

Lembrando que o volume de um tetraedro é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$$

Em que A_{base} é a área da base dessa pirâmide e h é a altura relativa a essa base. Nesse caso da questão, os triângulos ABC e BCD estão em planos perpendiculares e compartilham um cateto BC.

Se usarmos o triângulo ABC como base, a altura relativa a essa base automaticamente deve ser o cateto DC, pois é perpendicular à BC e está no plano perpendicular à ABC.

No triângulo retângulo ABC:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 64 = 16 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = 48 \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}$$

Assim, a área de ABC:

$$[ABC] = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

Agora, calculando a altura DC do tetraedro com relação à base (ABC):

$$BD^2 = BC^2 + DC^2 \Rightarrow 64 = 48 + DC^2 \Rightarrow DC = 4$$

Assim, o volume desejado é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot [ABC] \cdot DC = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4 = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$

Gabarito: “e”.

36. (EFOMM/2009)

Tem-se um contêiner no formato cúbico, onde o ponto P descreve o centro desse contêiner e o quadrado $ABCD$ a parte superior dele. Considerando-se o ΔAPC, o seno do ângulo $A\widehat{P}C$ vale

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{2}}{2}$

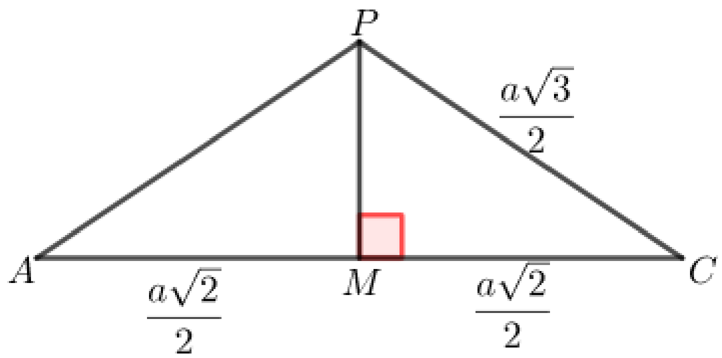
c) $2\sqrt{2}$

d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

e) $3\sqrt{2}$

Comentários

Perceba que o triângulo APC é tal que AP mede a metade da diagonal do cubo, bem como PC, e AC mede a diagonal da base quadrada $ABCD$. Portanto, se a aresta do cubo mede a, temos:



Veja que PC mede a metade da diagonal do cubo $a\sqrt{3}$, e $MC = MA$ medem igual à metade da diagonal da face $a\sqrt{2}$, e PM é mediana, altura e bissetriz do ângulo $\angle APC$, pois $PA = PC$, isto é, o triângulo é isósceles. Assim, queremos o seno de $A\hat{P}C$ Portanto, pela lei dos senos em APC:

$$\frac{AC}{sen\ A\hat{P}C} = \frac{PC}{sen\ P\hat{A}C} = \frac{PC}{sen\ P\hat{C}A} \Rightarrow \boxed{sen\ A\hat{P}C = \frac{AC\ sen\ P\hat{C}A}{PC}}$$

$$sen\ P\hat{C}A = \frac{PM}{PC}$$

Pitágoras no PMC:

$$PC^2 = PM^2 + MC^2 \Rightarrow \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2} + PM^2 \Rightarrow PM = \frac{a}{2}$$

Portanto,

$$sen\ P\hat{C}A = \frac{PM}{PC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow sen\ A\hat{P}C = \frac{AC\ sen\ P\hat{C}A}{PC} = \frac{a\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Gabarito: "a".

37. (Escola Naval/2019)

O volume de um cubo de aresta $2x$ excede em 27 unidades o volume de um paralelepípedo retângulo com 54 unidades de área da base e altura x. Sendo assim o valor de x é

a) $8\cdot\cos(40°)$

b) $3 \cdot \cos(20°)$
c) $8 \cdot \cos(20°)$
d) $9 \cdot \cos(40°)$
e) $2 \cdot \cos(30°)$

Comentários

Escrevendo o que é dito no enunciado numa equação:

$$V_{cubo} = 27 + V_{paralelepípedo}$$
$$V_{cubo} = (2x)^3 = 8x^3$$
$$V_{paralelepípedo} = 54x$$
$$\Rightarrow 8x^3 = 54x + 27$$

As alternativas estão em função de cosseno de arcos, o que nos induz a procurar funções de arcos de terceiro grau. As funções de arco triplo possuem essas características:

$$\cos 3y = \cos(2y + y) = \cos 2y \cos y - \sin 2y \sin y = (2\cos^2 y - 1)\cos y - 2 \sin y \cos y \sin y$$
$$\Rightarrow \cos 3y = 2\cos^3 y - \cos y - 2\sin^2 y \cos y = 2\cos^3 y - \cos y + 2(\cos^2 y - 1)\cos y$$
$$\Rightarrow \cos 3y = 4\cos^3 y - 3\cos y$$

Fazendo a substituição $\boxed{\cos y = \frac{x}{3}}$:

$$8 \cdot 27\cos^3 y - 54 \cdot 3\cos y = 27 \Rightarrow 8\cos^3 y - 6\cos y = 1 \Rightarrow 2(4\cos^3 y - 3\cos y) = 1$$
$$\Rightarrow 2\cos 3y = 1 \Rightarrow \cos 3y = \frac{1}{2} \Rightarrow 3y = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{9} = 20°$$
$$\Rightarrow x = 3\cos y = 3\cos 20°$$

Gabarito: "b".

---

38. (Escola Naval/2017)

Uma pirâmide triangular tem como base um triângulo de lados $13cm$, $14cm$ e $15cm$; as outras arestas medem l.

Sabendo que o volume da pirâmide é de $105\sqrt{22}\ cm^3$, o valor de l, em cm, é igual a:

a) $\frac{155}{8}$
b) $\frac{335}{11}$
c) $\frac{275}{9}$
d) $\frac{205}{8}$
e) $\frac{95}{8}$

Comentários

Podemos calcular a área da base dessa pirâmide pela fórmula de Heron. O semiperímetro é dado por:

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$

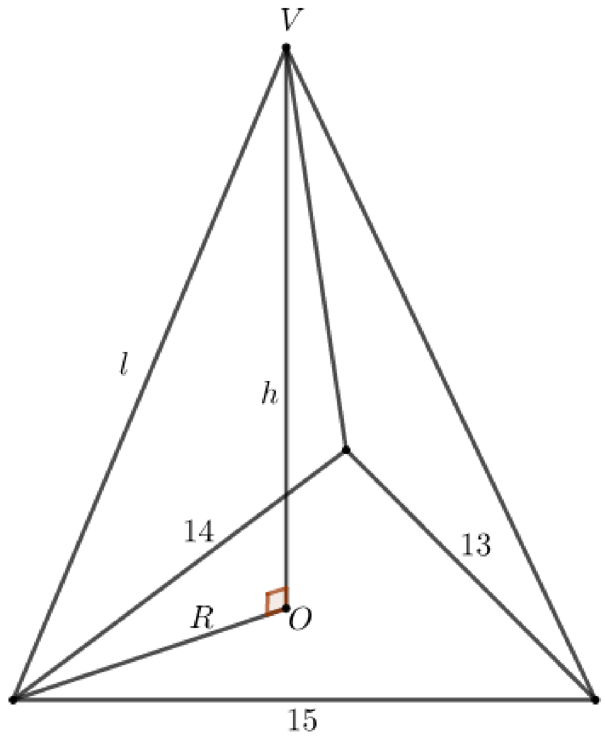
Assim, a área da base é dada por:

$$S = \sqrt{p(p-13)(p-14)(p-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2} = 84$$

Como o volume dessa pirâmide é dada:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = 105\sqrt{22} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot h = 105\sqrt{22} \Rightarrow h = \frac{105\sqrt{22}}{28} = \frac{15\sqrt{22}}{4}$$

Por outro lado, sabemos que, como as arestas que ligam o vértice da pirâmide aos vértices das bases são todas iguais a l, então, por simetria, a projeção do vértice na base deve coincidir com o circuncentro dela.



Podemos achar o valor do raio do circuncentro da base pela outra fórmula de sua área:

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow 84 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{4R} \Rightarrow R = \frac{65}{8}$$

Assim, aplicando Pitágoras no triângulo com ângulo reto marcado acima:

$$l^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow l^2 = \left(\frac{15\sqrt{22}}{4}\right)^2 + \left(\frac{65}{8}\right)^2 = \frac{24025}{64}$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{\frac{24025}{64}} = \frac{155}{8}$$

Gabarito: “a”.

39. (Escola Naval/2016)

A equação

$$\begin{vmatrix} sen^2 x & 1 & \sec^2 x \\ 1 & \cos^2 x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{31}{16},$$

com $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, possui como solução o volume de uma pirâmide com base hexagonal de lado ℓ e altura $h = \sqrt{3}$. Sendo assim, é correto afirmar que o valor de ℓ é igual a:

a) $\sqrt{\frac{2\pi^2}{9}}$

b) $\sqrt{\frac{\pi}{18}}$

c) $\sqrt{\frac{8\pi}{9}}$

d) $\sqrt{\frac{32\pi}{9}}$

e) $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$

Comentários

O volume da pirâmide é:

$$V = \frac{1}{3}A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot A_\Delta \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot h \Rightarrow V = \frac{l^2 h\sqrt{3}}{2} = l^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3l^2}{2}$$

Vamos resolver a equação. Calculando o determinante pela regra de Sarrus:

$$sen^2 x \cdot \cos^2 x \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + \sec^2 x \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot \cos^2 x \cdot \sec^2 x - 0 \cdot 0 \cdot sen^2 x - 1 \cdot 1 \cdot 1$$
$$= \text{sen}^2\, x \cdot \cos^2 x - 2.$$

Logo, a equação fica:

$$\text{sen}^2\, x \cdot \cos^2 x - 2 = -\frac{31}{16} \Rightarrow \text{sen}^2\, x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{16} \Rightarrow 4\,\text{sen}^2\, x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (2\,\text{sen}\, x \cdot \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2(2x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \sin(2x) = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Como $x \in]0, \pi/2[$, concluímos que $x = \frac{\pi}{12}$. Portanto:

$$V = x = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{3l^2}{2} = \frac{\pi}{12} \Rightarrow l = \sqrt{\frac{\pi}{18}}.$$

Gabarito: "b"

---

40. (Escola Naval/2015)

Em um polígono regular, cujos vértices A, B e C são consecutivos, a diagonal $\overline{AC}$ forma com o lado $\overline{BC}$ um ângulo de $30°$. Se o lado do polígono mede ℓ unidades de comprimento, o volume da pirâmide, cuja base é esse polígono e cuja altura vale o triplo da medida do lado, é igual a

a) $\frac{3\ell^3\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$

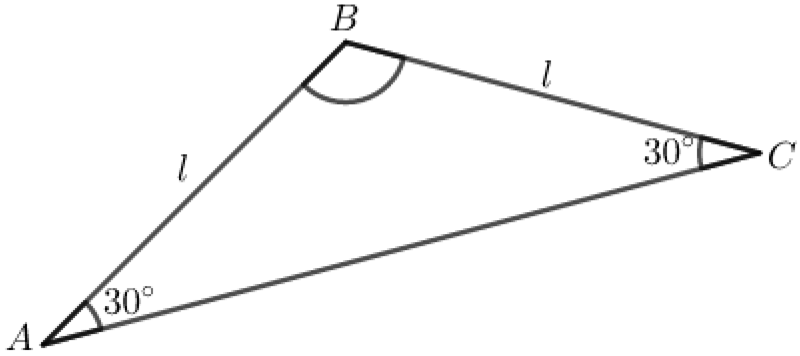
c) $\frac{\ell^3\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{3\ell\sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{3\ell^3\sqrt{3}}{3}$

Comentários

Perceba que, se a diagonal AC forma com o lado BC um ângulo de 30°, podemos achar o valor do ângulo interno desse polígono regular:



Veja que, como o polígono é regular, suas arestas são todas iguais a l e, portanto, o triângulo acima é isósceles. Assim, o ângulo $\angle BAC$ também é 30°. Pela soma dos ângulos internos no triângulo retângulo ser 180°, concluímos que $\angle ABC = 120°$, que é o ângulo interno desse polígono de n lados.

Por outro lado, a fórmula que relaciona a soma dos ângulos internos é:

$$S = 180°(n-2)$$

Mas temos n ângulos iguais a 120°:

$$S = n \cdot 120° = 180° \cdot (n-2) \Rightarrow 2n = 3n - 6 \Rightarrow \boxed{n = 6}$$

Portanto, o polígono desejado é um hexágono de lado l. A área de um hexágono de lado l é igual a seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado l:

$$A_{hex} = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

Assim, o volume da pirâmide desejada, de altura $3l$, é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{hex} \cdot 3l = A_{hex} \cdot l = \frac{3l^3\sqrt{3}}{2}$$

Gabarito: "a".

---

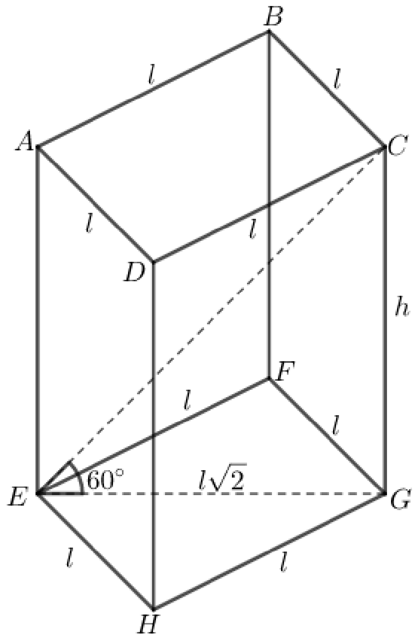
41. (Escola Naval/2015)

Um prisma quadrangular regular tem área lateral $36\sqrt{6}$ unidades de área. Sabendo que suas diagonais formam um ângulo de $60°$ com suas bases, então a razão do volume de uma esfera de raio $24^{\frac{1}{6}}$ unidades de comprimento para o volume do prisma é

a) $\frac{8}{81\pi}$
b) $\frac{81\pi}{8}$
c) $\frac{8\pi}{81}$
d) $\frac{8\pi}{27}$
e) $\frac{81}{8\pi}$

Comentários

Fazendo o desenho do que é dito no enunciado:



Veja que, como as bases são quadrangulares, chamamos seus lados de l e a altura do prisma é h. A diagonal da base quadrada mede $l\sqrt{2}$. Assim, no triângulo ECG:

$$tg\ 60° = \frac{h}{l\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{h = l\sqrt{6}}$$

A área lateral desse prisma é igual à soma das áreas dos quatro retângulos de base l e altura h:

$$A_{lateral} = 36\sqrt{6} = 4 \cdot l \cdot h = 4 \cdot l^2\sqrt{6} \Rightarrow l^2 = \frac{36\sqrt{6}}{4\sqrt{6}} = 9 \Rightarrow \boxed{l = 3}$$

Portanto o volume do prisma é:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = l^2 \cdot h = l^3\sqrt{6} = 27\sqrt{6}$$

O volume da esfera de raio $24^{\frac{1}{6}}$ é:

$$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi\left(24^{\frac{1}{6}}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \sqrt{24} = \frac{8\pi}{3}\sqrt{6}$$

Queremos:

$$\frac{V_{esf}}{V_{prisma}} = \frac{\frac{8\pi}{3}\sqrt{6}}{27\sqrt{6}} = \frac{8\pi}{81}$$

Gabarito: “c”.

42. (Escola Naval/2014)

Um recipiente cúbico de aresta $4cm$ está apoiado em um plano horizontal e contém água até uma altura de $3\ cm$. Inclina-se o cubo, girando de um ângulo α em torno de uma aresta da base, até que o líquido comece a derramar. A tangente do ângulo α é

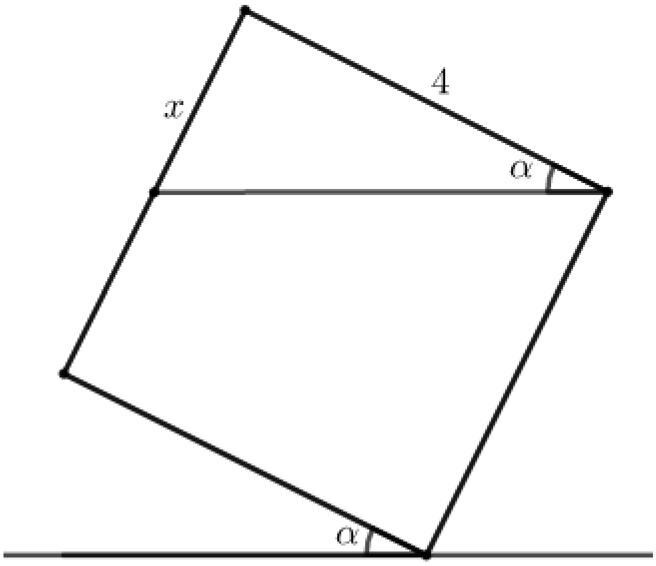
a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{1}{2}$
e) 1

Comentários

Inicialmente, temos um cubo de aresta igual a 4cm cheio de água até a altura de 3cm. Portanto, o volume vazio é:

$$V_{vazio} = Área_{base} \cdot (4-3) = Área_{base} = 4^2 = 16\ cm^3$$

Veja que o cubo é girado em torno de uma das arestas da base tal que, quando o ângulo chega a α não pode mais girar, pois causaria derramamento. Essa configuração em uma das faces laterais do cubo é vista da seguinte maneira:



Veja que, como a água não transbordou, o volume vazio continua o mesmo dentro da caixa cúbica. Mas dessa vez o volume vazio, como se pode ver acima, é um prisma de base triangular, cuja base é um triângulo retângulo de catetos $x\ e\ 4$, e de altura igual à aresta do cubo (4). Assim:

$$V_{vazio} = \frac{4x}{2} \cdot 4 = 8x$$

Assim:

$$8x = 16 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow tg\ \alpha = \frac{x}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Gabarito: "d".

43. (Escola Naval/2013)

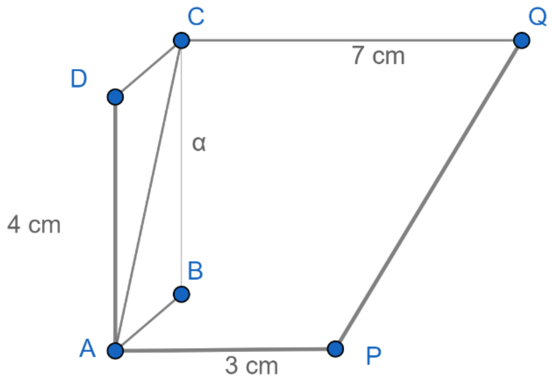
Um quadrado $ABCD$, de lado $4\ cm$, tem os vértices num plano α. Pelos vértices A e C são traçados dois segmentos AP e CQ, perpendiculares a α, medindo respectivamente, $3cm$ e $7\ cm$. A distância PQ tem medida, em cm, igual a

a) $2\sqrt{2}$
b) $2\sqrt{3}$
c) $3\sqrt{2}$
d) $3\sqrt{3}$
e) $4\sqrt{3}$

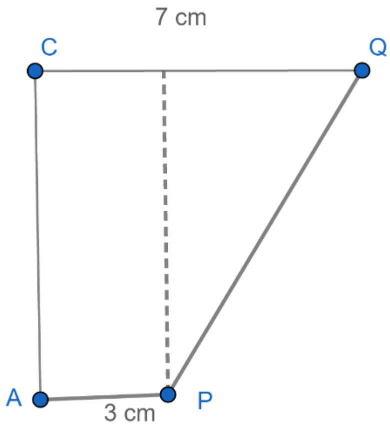
Comentários

Inicialmente, vale comentar que o enunciado deixa pouco claro se P e Q estão ou não no mesmo lado em relação ao plano alfa. Para chegar em um gabarito das alternativas, vamos considerar que P e Q estão no mesmo lado.

Assim, temos a figura do novo plano perpendicular a α e que contém os pontos P e Q:



No plano que contém $APQC$, temos a figura:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo acima:

$$AC^2 + (CQ - AP)^2 = D^2$$

Em que D é distância de P a Q.

$$diagonal\ do\ quadrado\ ABCD \rightarrow AC = 4\sqrt{2}$$

Logo,

$$(4\sqrt{2})^2 + (7 - 3)^2 = D^2$$
$$\Rightarrow D = 4\sqrt{3}cm$$

Gabarito: “e”.

44. (Escola Naval/2013)

Nas proposições abaixo, coloque (V) na coluna à esquerda quando a proposição for verdadeira e (F) quando a proposição for falsa.

(   ) Se uma reta é perpendicular a duas retas distintas de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

(   ) Se uma reta é perpendicular a uma reta perpendicular a um plano, então ela é paralela a uma reta do plano.

(   ) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.

( ) Se dois planos são perpendiculares, todo plano paralelo a um deles é perpendicular ao outro.

(   ) Se três planos são dois a dois perpendiculares, eles têm um único ponto em comum.

Lendo-se a coluna da esquerda, de cima para baixo, encontra-se

a) F-F-V-F-V

b) V-F-V-V-F

c) V-V-F-V-V

d) F-V-V-V-V

e) V-V-V-V-V

Comentários

Analisando cada afirmativa:

I. Falso. Um contra exemplo é uma reta pertencente a um plano que é perpendicular à duas retas paralelas distintas desse mesmo plano.
II. Verdadeiro. Uma reta perpendicular a uma reta normal ao plano é paralela ao plano e, portanto, é paralela a várias retas do plano, em particular, a uma reta do plano.
III. Verdadeiro. Retas perpendiculares a um plano possuem o mesmo vetor normal (vetor normal ao plano) e, portanto, são paralelas.
IV. Verdadeiro. Quaisquer dois planos perpendiculares entre si $s\ e\ r$ possuem vetores normais n_1 e n_2, respectivamente, perpendiculares entre si. Portanto, qualquer plano paralelo a s possui também vetor normal n_1, que continua sendo perpendicular a n_2, e qualquer plano paralelo a r possui normal n_2, que é perpendicular à n_1. Portanto, em ambos os casos, os planos paralelos a $s\ e\ r$, respectivamente, terão vetores normais perpendiculares entre si, o que prova a ortogonalidade entre os planos.
V. Verdadeiro. Se pegarmos os planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, de vetores normais $(1,0,0), (0,1,0)\ e\ (0,0,1)$, respectivamente, vemos que o único ponto em comum entre esses é a origem do sistema de coordenadas cartesianas (essa também é a única forma de representar três planos perpendiculares).

Portanto, a ordem correta é: F-V-V-V-V.

Gabarito: “d”.

45. (Escola Naval/2013)

Qual é o menor ângulo formado por duas diagonais de um cubo aresta L?

a) $\boldsymbol{arcsen\frac{1}{4}}$

b) $\arccos \frac{1}{4}$

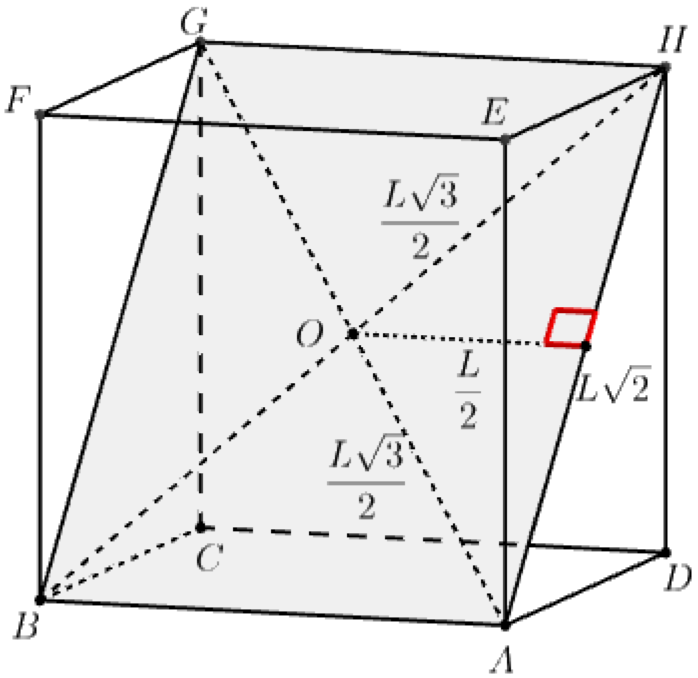
c) $arcsen \frac{1}{3}$

d) $\arccos \frac{1}{3}$

e) $arctg \frac{1}{4}$

Comentários

Vejamos o desenho deste cubo de aresta L, bem como de suas diagonais:



Considerando a simetria num cubo, a interseção das diagonais ocorre exatamente no ponto médio delas. Portanto:

$$H = OA = \frac{Diagonal}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo OHA acima, sendo AH a diagonal do quadrado de lado L (mede $L\sqrt{2}$):

$$AH^2 = OH^2 + OA^2 - 2OH \cdot OA \cos(\angle AOH)$$

$$\Rightarrow 2L^2 = \frac{3L^2}{4} + \frac{3L^2}{4} - 2 \cdot \frac{3L^2}{4} \cos(\angle AOH)$$

$$\Rightarrow \frac{L^2}{2} = -\frac{3L^2}{2} \cos(\angle AOH)$$

$$\Rightarrow \cos(\angle AOH) = -\frac{1}{3}$$

Portanto, $\angle AOH > 90°$ e, portanto, não é o menor ângulo formado pelas diagonais. O menor é o suplemento deste:

$$\theta_{Min} = 180° - \angle AOH \Rightarrow \cos \theta_{Min} = \cos(180° - \angle AOH) = -\cos \angle AOH = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_{Min} = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta_{Min} = \text{arc}\cos\frac{1}{3}$$

Gabarito: "d".

46. (Escola Naval/2013)

Num prisma hexagonal regular a área lateral é 75% da área total. A razão entre a aresta lateral e a aresta da base é

a) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

e) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

Comentários

Seja L a aresta lateral e l a aresta da base. Cada face lateral é um retângulo de base l e altura L, e as bases são hexágonos regulares de lado l. Portanto, a área de uma base é igual à 6 vezes a área de um triângulo equilátero de lado l (que compõem o hexágono regular):

$$A_{base} = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$$

Se considerarmos a contribuição das duas bases:

$$A_{bases} = 2 \cdot A_{base} = 3l^2\sqrt{3}$$

A área lateral nada mais é do que a área de 6 retângulos de base l e altura L:

$$A_{lateral} = 6 \cdot Ll$$

Como a área total é $A = A_{bases} + A_{lateral}$, então se $A_{lateral} = 0{,}75A$, então $A_{bases} = 0{,}25A$. Portanto:

$$\frac{A_{lateral}}{A_{bases}} = \frac{6Ll}{3l^2\sqrt{3}} = \frac{0{,}75A}{0{,}25A} = 3 \Rightarrow \boxed{\frac{L}{l} = \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

Gabarito: "b".

7. QUESTÕES NÍVEL 3

47. (ITA/2020)

Considere as seguintes afirmações:

I. Todo poliedro formado por 16 faces quadrangulares possui exatamente 18 vértices e 32 arestas.

II. Em todo poliedro convexo que possui 10 faces e 16 arestas, a soma dos ângulos de todas as faces é igual a 2160°.

III. Existe um poliedro com 15 faces, 22 arestas e 9 vértices.

É(são) VERDADEIRA (S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) apenas I e II.

e) apenas II e III.

48. (ITA/2020)

Considere as seguintes afirmações:

I. Sejam π_1, π_2 e π_3 três planos distintos, e secantes dois a dois segundo as retas distintas r, s e t. Se $r \cap s \neq \emptyset$ então $r \cap s \cap t \neq \emptyset$.

II. As projeções ortogonais de duas retas paralelas r e s sobre um plano π são duas retas paralelas.

III. Para quaisquer retas r, s e t reversas duas a duas, existe uma reta u paralela à r e concorrente com s e com t.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) nenhuma.

49. (ITA/2018)

Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão -5. Determine o número de vértices do poliedro.

50. (ITA/2018)

Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas 3 cm, 4 cm e 5 cm. Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm^3:

a) 10.

b) 12.

c) 15.

d) 20.

e) 30.

51. (ITA/2018)

Os triângulos equiláteros ABC e ABD têm lado comum $\overline{AB}$. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{CD}$. Se MN = CN = 2 cm, então a altura relativa ao lado $\overline{CD}$ do triângulo ACD mede, em cm,

a) $\frac{\sqrt{60}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{50}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{40}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{30}}{3}$

e) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

52. (ITA/2018)

A aresta lateral de uma pirâmide reta de base quadrada mede 13 cm e a área do círculo inscrito na base mede $\frac{25\pi}{2} cm^2$. Dois planos, π_1 e π_2, paralelos à base, decompõem a pirâmide em três sólidos de mesmo volume. Determine a altura de cada um desses sólidos.

53. (ITA/2017)

Considere o cubo ABCDEFGH de aresta 2 tal que: ABCD é o quadrado da base inferior; EFGH, o quadrado da base superior e $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}$ e $\overline{DH}$ são as arestas verticais. Sejam L, M e N os pontos médios das arestas $\overline{AB}$, $\overline{CG}$ e $\overline{GH}$, respectivamente. Determine a área do triângulo LMN.

54. (ITA/2015)

Na construção de um tetraedro, dobra-se uma folha retangular de papel, com lados de 3 cm e 4 cm, ao longo de uma de suas diagonais, de modo que essas duas partes da folha formem um ângulo reto e constituam duas faces do tetraedro. Numa segunda etapa, de maneira adequada, completa-se com outro papel as faces restantes para formar o tetraedro. Obtenha as medidas das arestas do tetraedro.

55. (ITA/2014)

Uma pirâmide de altura $h = 1\ cm$ e volume $V = 50\ cm^3$ tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se $n-3$ diagonais que o decompõem em $n-2$ triângulos cujas áreas S_i, $i = 1, 2, \dots, n-2$, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \frac{3}{2} cm^2$ e $S_6 = 3\ cm^2$. Então n é igual a

a) 22

b) 24

c) 26

d) 28

e) 32

56. (ITA/2013)

Seja ABCDEFGH um paralelepípedo de bases retangulares ABCD e EFGH, em que A, B, C e D são, respectivamente, as projeções ortogonais de E, F, G e H. As medidas das arestas distintas AB, AD e AE constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm. Sabe-se que o volume da pirâmide ABCF é igual a $10\ cm^3$. Calcule:

a) As medidas das arestas do paralelepípedo.

b) O volume e a área total da superfície do paralelepípedo.

57. (ITA/2013)

Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes;

II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;

III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;

IV. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) III.

b) I e III.

c) II e III.

d) III e IV.

e) I, II e IV.

58. (ITA/2013)

Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm^3, do sólido VABC é

a) 2

b) 4

c) $\sqrt{17}$

d) 6

e) $5\sqrt{10}$

59. (ITA/2011)

Considere as afirmações:

I. Existe um triedro cujas 3 faces tem a mesma medida $\alpha = 120°$.

II. Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respectivamente, $30°, 45°, 50°, 50°$ e $170°$.

III. Um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices.

IV. A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é $2880°$.

Destas, é(são) correta(s) apenas

a) II.

b) IV.

c) II e IV.

d) I, II e IV.

e) II, III e IV.

60. (ITA/2010)

Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1 cm. Se M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, então a área do triângulo MND, em cm^2, é igual a

a) $\sqrt{2}/6$

b) $\sqrt{2}/8$

c) $\sqrt{3}/6$

d) $\sqrt{3}/8$

e) $\sqrt{3}/9$

61. (ITA/2007)

Os quatro vértices de um tetraedro regular, de volume $8/3\text{cm}^3$, encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é centro de uma esfera de 1 cm de raio.

Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

62. (ITA/2007)

Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual a 1 cm^3 e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é $1/\sqrt{2}$, a altura do tronco, em centímetros, é igual a

a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{21}$

d) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}$

e) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{22}$

63. (ITA/2006)

Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja diagonal menor mede $3\sqrt{3}$ cm. As faces laterais desta pirâmide formam diedros de $60°$ com o plano da base. A área total da pirâmide, em cm^2, é

a) $\frac{81\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{81\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{81}{2}$

d) $\frac{27}{\sqrt{3}}$

e) $\frac{27}{\sqrt{2}}$

64. (ITA/2005)

Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é $7200°$. O número de vértices deste prisma é igual a

a) 11.

b) 32.

c) 10.

d) 20.

e) 22.

65. (ITA/2005)

Em relação a um sistema de eixos cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$ e $C = \left(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right)$. O volume do tetraedro é

a) $8/3$.

b) 3.

c) $3\sqrt{3}/2$.

d) $5\sqrt{3}/2$.

e) 8.

66. (ITA/2002)

Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja 1/8 do volume da pirâmide original?

a) 2 m.

b) 4 m.

c) 5 m.

d) 6 m.

e) 8 m.

67. (ITA/2001)

A razão entre a área da base de uma pirâmide regular de base quadrada e a área de uma das faces é 2. Sabendo que o volume da pirâmide é de 12m^3, temos que a altura da pirâmide mede (em metros):

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

68. (ITA/2000)

Considere uma pirâmide regular com altura de $6/\sqrt[3]{9}$ cm. Aplique a esta pirâmide dois cortes planos e paralelos à base de tal maneira que a nova pirâmide e os dois troncos obtidos tenham, os três, o mesmo volume. A altura do tronco cuja base é a base da pirâmide original é igual a

a) $2\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}\right)$ cm.

b) $2\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{2}\right)$ cm.

c) $2\left(\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\right)$ cm.

d) $2\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)$ cm.

e) $2\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}\right)$ cm.

69. (ITA/1999)

Um poliedro convexo de 10 vértices apresenta faces triangulares e quadrangulares. O número de faces quadrangulares, o número de faces triangulares e o número total de faces formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. O número de arestas é:

a) 10

b) 17

c) 20

d) 22

e) 23

70. (ITA/1999)

Um triedro trirretângulo é cortado por um plano que intercepta as três arestas, formando um triângulo com lados medindo 8 m, 10 m e 12 m. O volume, em m^3, do sólido formado é:

a) $15\sqrt{6}$

b) $5\sqrt{30}$

c) $6\sqrt{15}$

d) $30\sqrt{6}$

e) $45\sqrt{6}$

71. (ITA/1998)

Um poliedro convexo de 16 arestas é formado por faces triangulares e quadrangulares. Seccionando-o por um plano convenientemente escolhido, dele se destaca um novo poliedro convexo, que possui apenas faces quadrangulares. Este novo poliedro possui um vértice a menos que o original e uma face a mais que o número de faces quadrangulares do original. Sendo m e n, respectivamente, o número de faces e o número de vértices do poliedro original, então:

a) m = 9, n = 7

b) m = n = 9

c) m = 8, n = 10

d) m = 10, n = 8

e) m = 7, n = 9

72. (ITA/1998)

Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado 2 cm. Sabe-se que as faces formam com a base ângulos de $45°$. Então, a razão entre a área da base e a área lateral é igual a:

a) $\sqrt{2}$

b) $1/3$

c) $\sqrt{6}$

d) $\sqrt{2}/2$

e) $\sqrt{2}/3$

73. (ITA/1997)

Dentro de um tronco de pirâmide quadrangular regular, considera-se uma pirâmide regular cuja base é a base maior do tronco e cujo vértice é o centro da base menor do tronco. As arestas das bases medem a cm e $2a$ cm. As áreas laterais do tronco e da pirâmide são iguais. A altura (em cm) do tronco mede

a) $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{a\sqrt{35}}{10}$

c) $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

d) $\frac{a\sqrt{35}}{\sqrt{10}}$

e) $\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

74. (ITA/1996)

As dimensões x, y, z de um paralelepípedo retângulo estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma dessas medidas é igual a 33 cm e que a área total do paralelepípedo é igual a 694 cm^2, então o volume deste paralelepípedo, em cm^3, é igual:

a) 1.200

b) 936

c) 1.155

d) 728

e) 834

75. (ITA/1996)

A aresta de um cubo mede x cm. A razão entre o volume e a área total do poliedro cujos vértices são os centros das faces do cubo será:

a) $\frac{\sqrt{3}}{9}x$ **cm**

b) $\frac{\sqrt{3}}{18}x$ **cm**

c) $\frac{\sqrt{3}}{6}x$ **cm**

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}x$ **cm**

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ **cm**

76. (ITA/1996)

Numa pirâmide triangular regular, a área da base é igual ao quadrado da altura H. Seja R o raio da esfera inscrita nesta pirâmide. Deste modo, a razão $\frac{H}{R}$ é igual a:

a) $\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)}$

b) $\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)}$

c) $1+\sqrt{\left(3\sqrt{3}+1\right)}$

d) $1+\sqrt{\left(3\sqrt{3}-1\right)}$

e) $\sqrt{3+1}$

77. (ITA/1995)

Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em cm^3, é:

a) $27\sqrt{3}$

b) $13\sqrt{2}$

c) 12

d) $54\sqrt{3}$

e) $17\sqrt{5}$

78. (ITA/1995)

Dada uma pirâmide regular triangular, sabe-se que sua altura mede $3a$ cm, onde "a" é a medida da aresta de sua base. Então, a área total desta pirâmide, em cm^2, vale:

a) $\frac{a^2\sqrt{327}}{4}$

b) $\frac{a^2\sqrt{109}}{2}$

c) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{[a^2\sqrt{3}\cdot(2+\sqrt{33})]}{2}$

e) $\frac{[a^2\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{109})]}{4}$

79. (ITA/1984)

Sejam as afirmações:

I. Por um ponto passa uma única reta;

II. Um ponto e uma reta determinam um plano;

III. Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano então a reta está contida nesse plano;

IV. Por um ponto situado fora de uma reta, existe uma reta paralela à reta dada.

Podemos garantir que:

a) Apenas III é verdadeira.

b) I e II são falsas.

c) Apenas I é falsa.

d) Apenas II e III são verdadeiras.

e) Apenas II e IV são verdadeiras.

80. (ITA/1978)

Quais as sentenças falsas nos itens abaixo?

I. Se dois planos são secantes, todas as retas de um deles sempre interceptam o outro plano;

II. Se em dois planos, num deles existem duas retas distintas paralelas ao outro plano, os planos são sempre paralelos;

III. Em dois planos paralelos, todas as retas de um são paralelas ao outro plano;

IV. Se uma reta é paralela a um plano, em tal plano existe uma infinidade de retas paralelas àquela reta;

V. Se uma reta é paralela a um plano, será paralela a todas as retas do plano.

a) I; II; III

b) I; II; V

c) I; III; IV

d) II; III; IV

e) N.D.A

81. (ITA/1987)

Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) Três pontos, distintos dois a dois, determinam um plano.

b) Um ponto e uma reta determinam um plano.

c) Se dois planos distintos têm um ponto em comum, tal ponto é único.

d) Se uma reta é paralela a um plano e não está contida neste plano, então ela é paralela a qualquer reta desse plano.

e) Se α é o plano determinado por duas retas concorrentes *r* e *s*, então toda reta *m* desse plano, que é paralela a *r*, não será paralela à reta *s*.

82. (ITA/Modificada/2013)

Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes;

II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;

III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;

É (são) verdadeira(s) apenas:

a) III

b) I e III

c) II e III

d) Apenas I

e) Apenas I e II

83. (IME/2021)

Um copo exótico de vidro, em uma festa, era uma pirâmide invertida de base pentagonal regular de 9 cm de altura. Esse copo continha uma bebida que ocupava 8 cm de altura. Um dos convidados fechou a base pentagonal do copo e virou de cabeça para baixo. A nova altura h da bebida, em cm, em relação à base pentagonal satisfaz:

a) $2,9 \leq h \leq 3,0$

b) $3,8 \leq h \leq 4,0$

c) $4,8 \leq h \leq 4,9$

d) $5,8 \leq h \leq 6,0$

e) $6,1 \leq h \leq 6,2$

84. (IME/2021)

Um paralelepípedo oblíquo ABCD - EFGH possui todas as arestas com comprimento a. O plano que contém ABFE forma um ângulo de 60° com o plano que contém ABCD. O ângulo do vértice E da face ABFE é 120°. Se θ for o ângulo do vértice E do paralelogramo contido na base superior EFGH do paralelepípedo, determine o volume do paralelepípedo em função da aresta a e do ângulo θ.

85. (IME/2020)

Um triângulo equilátero é projetado ortogonalmente em um plano, gerando um triângulo isósceles, cujo ângulo desigual mede $30°$. O cosseno do ângulo do plano do triângulo equilátero com o plano de projeção é:

a) $2\sqrt{3} - 3$

b) $4 - 2\sqrt{3}$

c) $2 - \sqrt{3}$

d) $1 - \sqrt{3}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

86. (IME/2020)

Um determinado material radioativo, com volume inicial Q_0, é manipulado numa usina nuclear. A cada dia o resíduo impuro da substância é descartado, através de uma ligação por um pequeno orifício, num invólucro lacrado em formato de paralelepípedo retângulo. No primeiro dia, a quantidade D_1 descartada corresponde a 1/3 do volume inicial do material e, de um modo geral, a quantidade D_n descartada no n-ésimo dia é dada pela relação:

$$D_n = \frac{1}{3}D_{n-1}, \text{ para } n \geq 2.$$

Determine as dimensões do invólucro (altura, largura e profundidade) onde se armazena o material descartado de modo que o custo de fabricação seja mínimo (isto é, a superfície lateral tenha área mínima) e tenha capacidade prevista de armazenamento por tempo indeterminado.

87. (IME/2019)

Considere as afirmações abaixo:

I) se três pontos são colineares, então eles são coplanares;

II) se uma reta tem um ponto sobre um plano, então ela está contida nesse plano;

III) se quatro pontos são não coplanares, então eles determinam 6 (seis) planos;

IV) duas retas não paralelas determinam um plano;

V) se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

Entre essas afirmações:

a apenas uma é verdadeira;

b) apenas duas são verdadeiras;

c) apenas três são verdadeiras;

d) apenas quatro são verdadeiras;

e) todas são verdadeiras.

88. (IME/2019)

Em um tetraedro $ABCD$, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são idênticos e a aresta AD é ortogonal à BC. A área do ΔABC é igual à área do ΔACD, e o ângulo $M\hat{A}D$ é igual ao ângulo $M\hat{D}A$, onde M é ponto médio de BC. Calcule a área total do tetraedro $ABCD$, em cm^2, sabendo que $BC = 2cm$, e que o ângulo $B\hat{A}C$ é igual a $30°$.

a) $\left(2-\sqrt{3}\right)$

b) $\left(2+\sqrt{3}\right)$

c) $4\left(2-\sqrt{3}\right)$

d) $4(2+\sqrt{3})$

e) 4

89. (IME/2018)

Um prisma retangular reto possui três arestas que formam uma progressão geométrica de razão 2. Sua área total é de 28 cm^2. Calcule o valor da diagonal do referido prisma.

a) $\sqrt{17}$ cm

b) $\sqrt{19}$ cm

c) $\sqrt{21}$ cm

d) $2\sqrt{7}$ cm

e) $\sqrt{29}$ cm

90. (IME/2018)

Seja um cubo regular, onde os centros de suas faces são vértices de um octaedro. Por sua vez, os centros das faces deste octaedro formado são vértices de outro cubo. Obtendo consecutivamente octaedros e cubos infinitamente, determine a razão da soma do volume de todos os poliedros inscritos pelo volume do cubo inicial.

91. (IME/2017)

Um tronco de pirâmide regular possui 12 vértices. A soma dos perímetros das bases é 36 cm, a soma das áreas das bases é $30\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$ e sua altura mede 3 cm. Calcule o volume do tronco de pirâmide.

a) $50\ \mathrm{cm}^3$

b) $42\sqrt{3}/3\ \mathrm{cm}^3$

c) $43\sqrt{3}/2\ \mathrm{cm}^3$

d) $43\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$

e) $42\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$

92. (IME/2016)

Sejam dois quadrados de lado a situados em planos distintos que são paralelos entre si e situados a uma distância d, um do outro. A reta que liga os centros dos quadrados é perpendicular a esses planos. Cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro quadrado. Liga-se cada vértice de cada quadrado aos dois vértices mais próximos do outro quadrado. Obtêm-se, assim,

triângulos que, conjuntamente com os quadrados, formam um sólido S. Qual a distância entre estes planos distintos em função de a, de modo que os triângulos descritos acima sejam equiláteros?

a) $\frac{a}{2}$

b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{a\sqrt{10}}{8}$

d) $\frac{a\sqrt[4]{2}}{8}$

e) $\frac{a(4-3\sqrt{2})}{2}$

93. (IME/2015)

Em um prisma oblíquo ABCDEFA’B’C’D’E’F’, cuja base ABCDEF é um hexágono regular de lado a, a face lateral EFF'E' está inclinada 45° em relação à base, e a projeção ortogonal da aresta F'E' sobre a base ABCDEF coincide com a aresta BC. O volume do prisma é:

a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$

b) $\frac{9}{4}a^3$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{3}a^3$

d) $\frac{9}{2}a^3$

e) $\frac{5}{2}a^3$

94. (IME/2015)

Um tetraedro regular, com arestas de comprimento igual a d, é cortado por 2 planos paralelos entre si e a uma das bases, dividindo-o em 3 sólidos de volumes iguais. Determine a altura de cada um destes 3 sólidos em função de d.

95. (IME/2015)

Seja um tetraedro regular ABCD de aresta a e um octaedro inscrito no tetraedro, com seus vértices posicionados nos pontos médios das arestas do tetraedro. Obtenha a área da seção do octaedro formada pelo plano horizontal paralelo à base do tetraedro BCD, distando desta base de um quarto da altura do tetraedro.

a) $\frac{\sqrt{3}}{192}a^2$

b) $\frac{\sqrt{3}}{96}a^2$

c) $\frac{3\sqrt{3}}{32}a^2$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{64}a^2$

e) $\frac{9\sqrt{3}}{64}a^2$

96. (IME/2014)

Seja ABCDA'B'C'D' um prisma reto de base retangular ABCD. Projeta-se o ponto médio M da maior aresta da base sobre a diagonal AC, obtendo-se o ponto P. Em seguida projeta-se o ponto P na face oposta, obtendo-se o ponto N. Sabe-se que $\left|\overline{NA}^2 - \overline{NC}^2\right| = k$. Determine o comprimento da menor aresta da base.

97. (IME/2014)

Seja SABCD uma pirâmide, cuja base é um quadrilátero convexo ABCD. A aresta SD é a altura da pirâmide. Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{5}$, $\overline{AD} = \overline{DC} = \sqrt{2}$, $\overline{AC} = 2$ e $\overline{SA} + \overline{SB} = 7$. O volume da pirâmide é

a) $\sqrt{5}$

b) $\sqrt{7}$

c) $\sqrt{11}$

d) $\sqrt{13}$

e) $\sqrt{17}$

98. (IME/2012)

Uma pirâmide regular triangular apresenta um volume V. Determine o raio da circunferência circunscrita a uma das faces laterais da pirâmide em função de V, sabendo que o ângulo do vértice vale 30°.

99. (IME/2012)

Uma pirâmide regular possui como base um dodecágono de aresta a. As faces laterais fazem um ângulo de $15°$ com o plano da base. Determine o volume desta pirâmide em função de a.

a) $\frac{a^3}{2}\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

b) $\frac{a^3}{2}\frac{\sqrt{\sqrt{3}-2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

c) $a^3\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

d) $a^3 \frac{\sqrt{\sqrt{3}-2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

e) $a^3 \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{3}+2}}$

100.(IME/2011)

A base de um prisma reto $ABCABC$ é um triângulo com o lado AB igual ao lado AC. O valor do segmento CD vale x, onde D é o ponto médio da aresta lateral AA_1. Sabendo que α é o ângulo ACB e β é o ângulo DCA, determine a área lateral do prisma em função de x, α e β.

101.(IME/2011)

A base de uma pirâmide é um retângulo de área S. Sabe-se que duas de suas faces laterais são perpendiculares ao plano da base. As outras duas faces formam ângulos de 30° e 60° com a base. O volume da pirâmide é:

a) $\frac{S\sqrt{S}}{3}$

b) $\frac{S\sqrt{S}}{6}$

c) $\frac{2S\sqrt{S}}{3}$

d) $\frac{2S\sqrt{S}}{5}$

e) $\frac{2S^2}{3}$

102.(IME/2010)

A área da superfície lateral de uma pirâmide quadrangular regular SABCD é duas vezes maior do que a área de sua base ABCD. Nas faces SAD e SDC traçam-se as medianas AQ e DP. Calcule o ângulo entre estas medianas.

GABARITO

47. b
48. a
49. $V = 6$
50. d
51. a
52. $H^1_{sólido} = \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\ cm;\ H^2_{sólido} = \frac{12}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\ cm;\ H^3_{sólido} = \frac{12}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)\ cm$
53. $[LMN] = \sqrt{3}$
54. $AC = \frac{\sqrt{337}}{5} cm$
55. c
56. a) $AB = 3\ cm$ e $AE = 5\ cm$ b) $S' = 94\ cm^2$
57. d
58. a
59. c
60. b
61. $\left(8 - \frac{4\pi}{3}\right)\ cm^3$
62. c
63. a
64. e
65. a
66. c
67. c
68. d
69. c
70. a
71. b
72. d
73. b
74. c
75. b
76. c
77. d
78. e
79. b
80. b
81. e
82. a
83. a
84. $V = \frac{3a^3 sen\theta}{4}$
85. a
86. $a = b = c = \sqrt[3]{\frac{Q_0}{2}}$

87. b
88. d
89. c
90. $\frac{11}{52}$
91. e
92. **d**
93. d
94. $h^1_{sólido} = \frac{\sqrt{6}d}{3\sqrt[3]{3}}$; $h^2_{sólido} = \frac{\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt[3]{2}-1\right)d}{3\sqrt[3]{3}}$; $h^3_{sólido} = \frac{\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)d}{3\sqrt[3]{3}}$
95. c
96. $a = \sqrt{k}$
97. b
98. $R = \sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{5+3\sqrt{3}}}}$
99. a
100. $S_{lateral} = 2x^2 \sin 2\beta \cdot (1 + \cos\beta)$
101. a
102. $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{13}\right)$

RESOLUÇÃO

47. (ITA/2020)

Considere as seguintes afirmações:

I. Todo poliedro formado por 16 faces quadrangulares possui exatamente 18 vértices e 32 arestas.

II. Em todo poliedro convexo que possui 10 faces e 16 arestas, a soma dos ângulos de todas as faces é igual a 2160°.

III. Existe um poliedro com 15 faces, 22 arestas e 9 vértices.

É(são) VERDADEIRA (S)

a) apenas I.

b) apenas II.

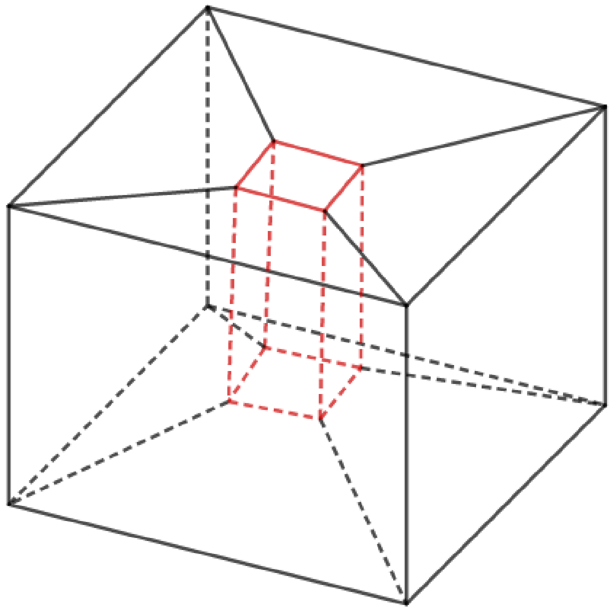
c) apenas III.

d) apenas I e II.

e) apenas II e III.

Comentários

I. Cuidado quando a afirmação diz "todo poliedro", pois podemos ter um poliedro côncavo que não possui esse número de vértices e arestas. Veja o contraexemplo:



Esse poliedro possui 16 faces quadrangulares, 32 arestas e 16 vértices. Portanto, afirmação falsa.

II. A afirmação diz que o poliedro convexo possui 10 faces e 16 arestas, logo $F = 10$ e $A = 16$. Pela relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 2$$

$$V - 16 + 10 = 2 \therefore V = 8$$

A soma dos ângulos internos de um poliedro convexo é dada por:

$$S_i = 360° \cdot (V - 2)$$

$$S_i = 360° \cdot (8 - 2) = 360° \cdot 6 = 2160°$$

Portanto, afirmação verdadeira.

III. Se existe um poliedro com tais características, devemos ter:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$$

Note que

$$3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots \geq 3F_3 + 3F_4 + 3F_5 + \cdots = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \cdots) = 3F$$

$$\Rightarrow 2A \geq 3F$$

Substituindo $A = 22$ e $F = 15$, temos:

$$2 \cdot 22 \geq 3 \cdot 15 \Rightarrow 44 \geq 45 \ (Absurdo!)$$

Portanto, afirmação falsa.

Gabarito: "b".

48. (ITA/2020)

Considere as seguintes afirmações:

I. Sejam π_1, π_2 e π_3 três planos distintos, e secantes dois a dois segundo as retas distintas r, s e t. Se $r \cap s \neq \emptyset$ então $r \cap s \cap t \neq \emptyset$.

II. As projeções ortogonais de duas retas paralelas r e s sobre um plano π são duas retas paralelas.

III. Para quaisquer retas r, s e t reversas duas a duas, existe uma reta u paralela à r e concorrente com s e com t.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) nenhuma.

Comentários

I. Como r, s, t são as retas da interseção dos três planos distintos e secantes dois a dois, temos:

$$r \in \pi_1 \cap \pi_2$$

$$s \in \pi_1 \cap \pi_3$$

$$t \in \pi_2 \cap \pi_3$$

Se $r \cap s \neq \emptyset$ e sabendo que as retas são distintas (não podem ser coincidentes), temos:

$$r \cap s = \{P\}$$

Logo:

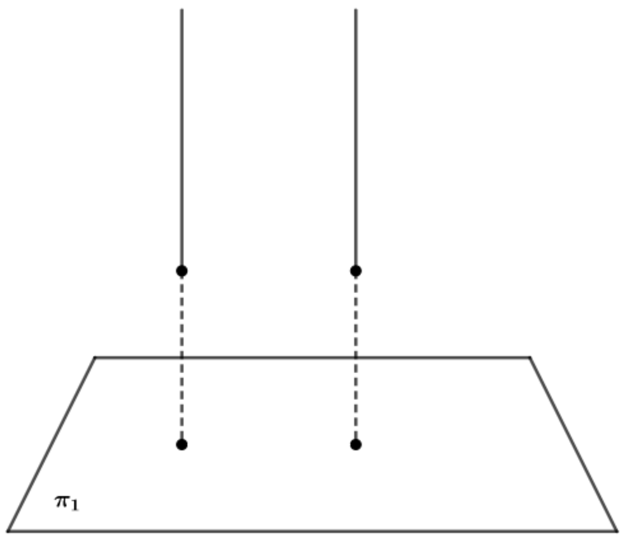
$$P \in r \Rightarrow P \in \pi_1 \; e \; P \in \pi_2$$

$$P \in s \Rightarrow P \in \pi_1 \; e \; P \in \pi_3$$

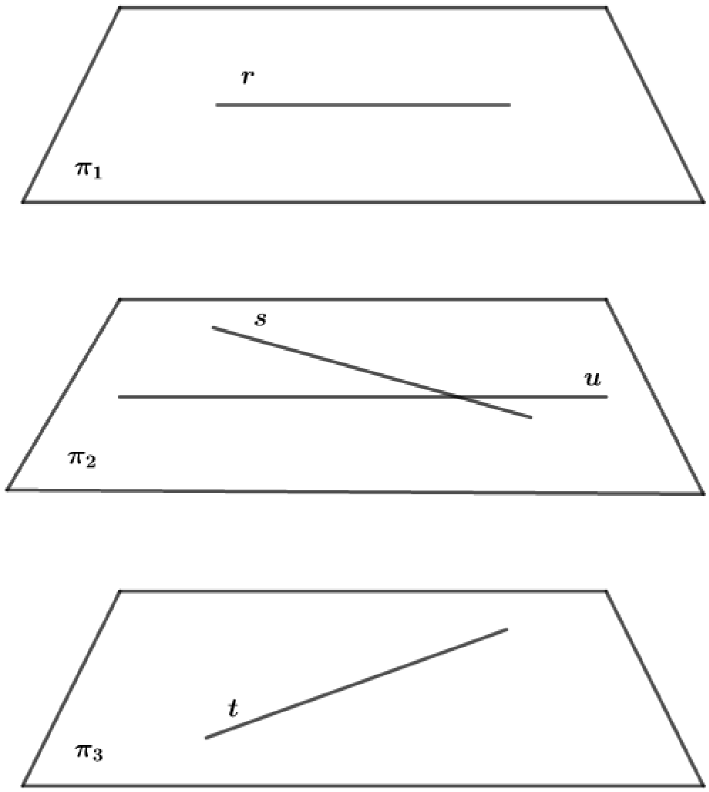
$$P \in \pi_2 \; e \; P \in \pi_3 \Rightarrow P \in t$$

Portanto, $r \cap s \cap t = \{P\} \neq \emptyset$. Verdadeira.

II. Podemos ter duas retas paralelas e perpendiculares a um mesmo plano, a projeção delas no plano será dois pontos. Portanto, falsa.



III. Vejamos o contra-exemplo:



Note que tomando-se os planos $\pi_1//\pi_2//\pi_3$ e as retas $r \in \pi_1, s \in \pi_2$ e $t \in \pi_3$, não paralelas entre elas, temos que a reta u paralela à r não pode ser concorrente simultaneamente à s e à t. Portanto, falsa.

Gabarito: "a".

49. (ITA/2018)

Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão -5. Determine o número de vértices do poliedro.

Comentários

Pela fórmula de Euler, temos:

$$V + F = A + 2\ (1)$$

Dado $A, F_3\ e\ F_4$ estão, nessa ordem, em P.A. de razão -5, então:

$$F_3 = A - 5\ (2)$$

$$F_4 = A - 10\ (3)$$

É sabido também que:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$$

Em que: $F_i = 0, i \geq 5$

Daí,

$$2A = 3F_3 + 4F_4\ (4)$$

Substituindo (2) e (3) em (4), temos:

$$2A = 3(A-5) + 4(A-10) \therefore 5A = 55 \therefore A = 11\ (5)$$

Com isso,

$$F_3 = 6;$$

$$F_4 = 1;$$

$$F = 6 + 1 \therefore \boldsymbol{F = 7}\ (6)$$

Utilizando (5) e (6) em (1), então:

$$\boldsymbol{V = 6}$$

Gabarito: $V = 6$

---

50. (ITA/2018)

Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas 3 cm, 4 cm e 5 cm. Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm^3:

a) 10.

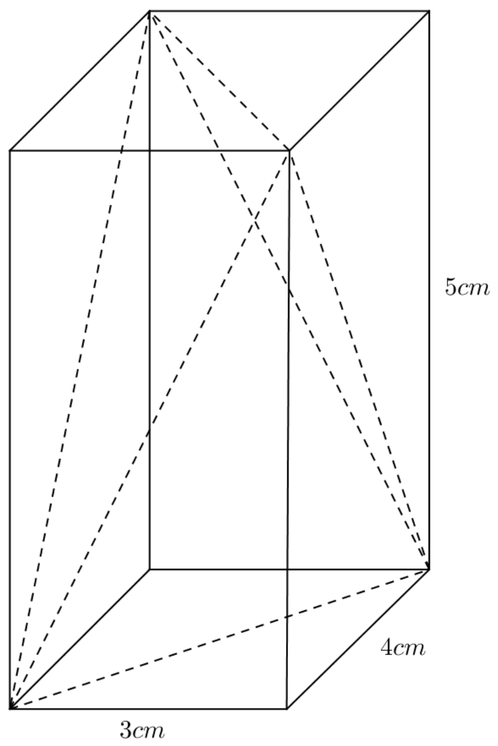
b) 12.

c) 15.

d) 20.

e) 30.

Comentários



O volume do tetraedro formado (acima representado) pode ser dado pela seguinte diferença:

$$V_{tetraedro} = V_{paralelepípedo} - V_{pirâmides}$$

Observe, na figura acima, que há 4 pirâmides idênticas “encaixadas” dentro do paralelepípedo.

Logo,

$$V_{tetraedro} = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 2} \therefore \boldsymbol{V_{tetraedro} = 20\ cm^3}$$

Gabarito: “d”

51. (ITA/2018)

Os triângulos equiláteros ABC e ABD têm lado comum $\overline{AB}$. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{CD}$. Se MN = CN = 2 cm, então a altura relativa ao lado $\overline{CD}$ do triângulo ACD mede, em cm,

a) $\frac{\sqrt{60}}{3}$

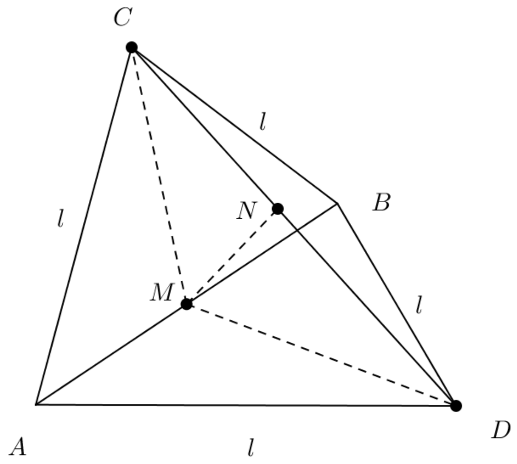
b) $\frac{\sqrt{50}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{40}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{30}}{3}$

e) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Comentários



Sendo o ΔCMD isósceles por M, a mediana MN também é altura relativa ao vértice M, ou seja, por Pitágoras no ΔMNC, temos:

$$MC^2 = CN^2 + MN^2 \therefore MC = 2\sqrt{2}\ cm.$$

Mas MC é altura do triângulo equilátero.

Logo,

$$MC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \therefore l = \frac{4\sqrt{6}}{3}\ cm$$

Finalmente, no ΔANC retângulo por N, já que o segmento AN é altura e mediana do ΔACD, então:

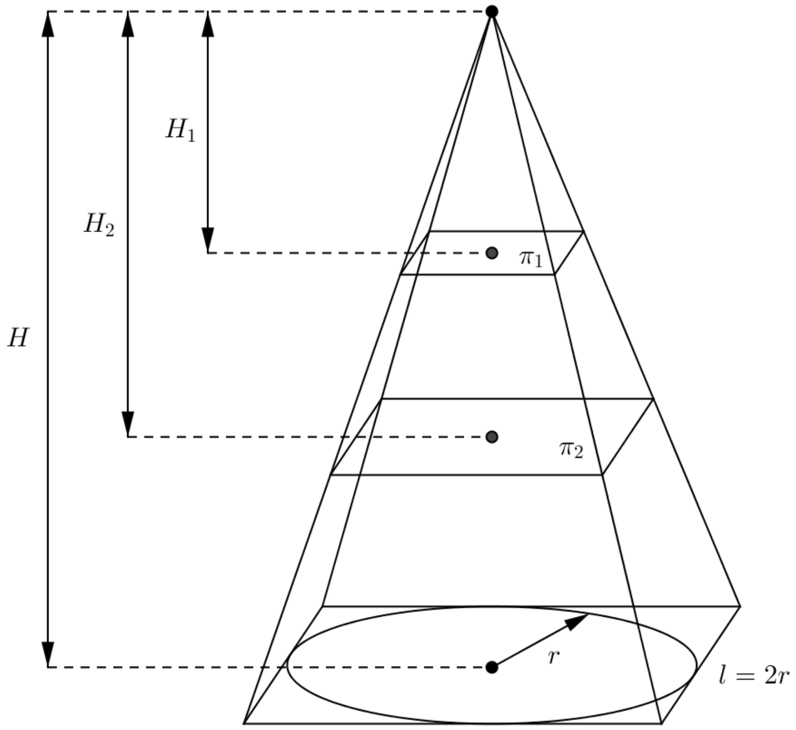
$$AN^2 = l^2 - CN^2 \therefore \boldsymbol{AN = \frac{\sqrt{60}}{3}\ cm}$$

Gabarito: "a"

52. (ITA/2018)

A aresta lateral de uma pirâmide reta de base quadrada mede 13 cm e a área do círculo inscrito na base mede $\frac{25\pi}{2} cm^2$. Dois planos, π_1 e π_2, paralelos à base, decompõem a pirâmide em três sólidos de mesmo volume. Determine a altura de cada um desses sólidos.

Comentários



Note que as três pirâmides cujas alturas são H, H_1 e H_2 são semelhantes entre si. Com isso, sejam k_1 e k_2 a razão de semelhança entre as pirâmides de altura H_1 e H e entre as de altura H_2 e H, respectivamente.

Logo,

$$H_1 = k_1 \cdot H \text{ e } l_1 = k_1 \cdot l \Rightarrow S_1 = {k_1}^2 \cdot S \Rightarrow V_1 = {k_1}^3 \cdot V\ ;$$

$$H_2 = k_2 \cdot H \text{ e } l_2 = k_2 \cdot l \Rightarrow\ S_2 = {k_2}^2 \cdot S \Rightarrow V_2 = {k_2}^3 \cdot V\ ;$$

Dado que $V_2 - V_1 = V_1 = V - V_2$, então:

$$ {k_2}^3 \cdot V - {k_1}^3 \cdot V = {k_1}^3 \cdot V = V - {k_2}^3 \cdot V \therefore \begin{cases} k_1 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ k_2 = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} \end{cases}$$

Por Pitágoras, temos:

$$H^2 + \left(\sqrt{2}r\right)^2 = 13^2 (\text{Como } \pi r^2 = \tfrac{25\pi}{2} \therefore H = 12\ cm).$$

Daí,

$$H_1 = \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\ cm;$$

$$H_2 = \frac{12\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}\ cm;$$

Finalmente, as alturas dos sólidos formados serão dadas por:

$$\boldsymbol{H^1_{sólido} = H_1 = \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\ cm}$$

$$H_{sólido}^{2} = H_2 - H_1 = \frac{12}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{2} - 1\right) cm$$

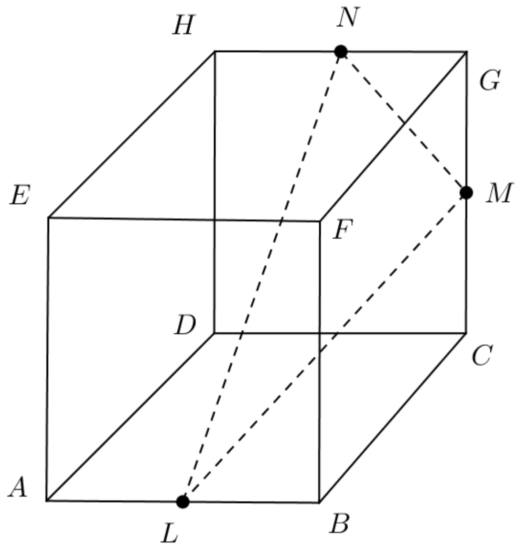
$$H_{sólido}^{3} = H - H_2 = \frac{12}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right) cm$$

Gabarito: $H_{sólido}^{1} = \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\ cm;\ H_{sólido}^{2} = \frac{12}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{2} - 1\right) cm;\ H_{sólido}^{3} = \frac{12}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right) cm$

53. (ITA/2017)

Considere o cubo ABCDEFGH de aresta 2 tal que: ABCD é o quadrado da base inferior; EFGH, o quadrado da base superior e $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}$ e $\overline{DH}$ são as arestas verticais. Sejam L, M e N os pontos médios das arestas $\overline{AB}$, $\overline{CG}$ e $\overline{GH}$, respectivamente. Determine a área do triângulo LMN.

Comentários



Por Pitágoras no ΔNGM, temos:

$$MN^2 = 1^2 + 1^2 \therefore MN = \sqrt{2}$$

Por Pitágoras, novamente no ΔMLC, temos:

$$ML^2 = LC^2 + 1^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 \therefore ML = \sqrt{6}$$

$$LN = BG = 2\sqrt{2}$$

Finalmente, note que $LN^2 = ML^2 + MN^2$, ou seja, o ΔLMN é retângulo por M.

Logo,

$$[LMN] = \frac{MN \cdot ML}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2} \therefore [\boldsymbol{LMN}] = \sqrt{\mathbf{3}}$$

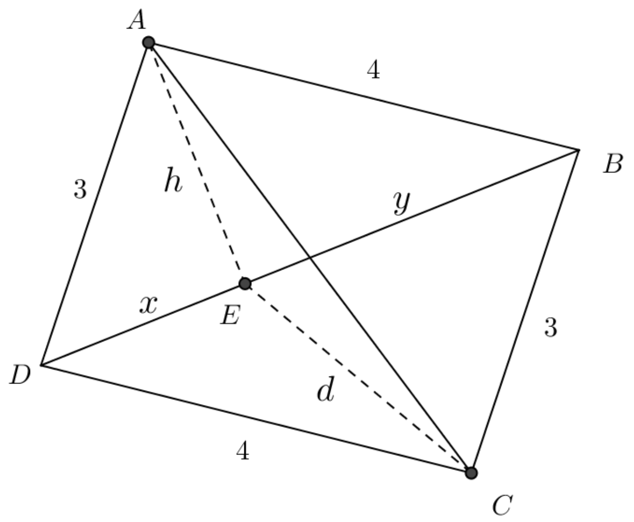
Gabarito: $[LMN] = \sqrt{3}$

54. (ITA/2015)

Na construção de um tetraedro, dobra-se uma folha retangular de papel, com lados de 3 cm e 4 cm, ao longo de uma de suas diagonais, de modo que essas duas partes da folha formem um ângulo reto e constituam duas faces do tetraedro. Numa segunda etapa, de maneira adequada, completa-se

com outro papel as faces restantes para formar o tetraedro. Obtenha as medidas das arestas do tetraedro.

Comentários



As arestas do tetraedro são $AD = 3cm, BC = 3cm, AB = 4cm, CD = 4cm, BD\ e\ AC$.

Por Pitágoras no ΔABD, temos:

$$BD^2 = 3^2 + 4^2 \therefore BD = 5cm$$

Por Pitágoras no ΔACE, temos:

$$AC^2 = h^2 + d^2$$

Sendo h a altura por A do ΔABD, então:

$$h = \frac{3 \cdot 4}{5} \therefore h = \frac{12}{5}cm$$

Por Pitágoras no ΔADE, temos:

$$x^2 = 3^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2 \therefore x = \frac{9}{5}cm \Rightarrow y = \frac{16}{5}cm$$

Utilizando a relação de Stewart no ΔBCD para obter d, chega-se a:

$$3^2 \cdot \left(\frac{9}{5}\right) + 4^2 \cdot \left(\frac{16}{5}\right) = 5 \cdot \left(d^2 + \left(\frac{9}{5}\right) \cdot \left(\frac{16}{5}\right)\right) \therefore$$

$$d^2 = \frac{9^2 + 16^2 - 9 \cdot 16}{25} \therefore d = \frac{\sqrt{193}}{5}cm$$

Finalmente,

$$AC^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{193}}{5}\right)^2 \therefore \boldsymbol{AC = \frac{\sqrt{337}}{5}cm}$$

Gabarito: $AC = \frac{\sqrt{337}}{5}cm$

55. (ITA/2014)

Uma pirâmide de altura $h = 1\ cm$ e volume $V = 50\ cm^3$ tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se $n-3$ diagonais que o decompõem em $n-2$ triângulos cujas áreas S_i, $i = 1, 2, \ldots, n-2$, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \frac{3}{2} cm^2$ e $S_6 = 3\ cm^2$. Então n é igual a

a) 22

b) 24

c) 26

d) 28

e) 32

Comentários

A razão da P.A. e o termo inicial são dados por:

$$r = \frac{S_6 - S_3}{3} = \frac{3 - \frac{3}{2}}{3} \therefore r = \frac{1}{2}\ cm^2;$$

$$\boldsymbol{S_1 = S_3 - 2r \therefore S_1 = \frac{1}{2}\ cm^2;}$$

Com isso, a área total do polígono é dada por:

$$\boldsymbol{S_{total} = S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-2} \therefore}$$

$$\boldsymbol{S_{total} = (S_1 + S_{n-2}) \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right) \therefore S_{total} = \left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{(n-3)}{2}\right)\right) \cdot \left(\frac{n-2}{2}\right) \therefore}$$

$$\boldsymbol{S_{total} = (n-1) \cdot \left(\frac{n-2}{4}\right)}$$

Logo,

$$\boldsymbol{V_{pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{n-2}{4}\right) \cdot 1}$$

Dado que $\boldsymbol{V_{pirâmide} = 50\ cm^3}$, temos:

$$\boldsymbol{(n-2) \cdot (n-1) = 12 \cdot 50 = 24 \cdot 25}$$

$$\boldsymbol{n = 26}$$

Gabarito: "c"

---

56. (ITA/2013)

Seja ABCDEFGH um paralelepípedo de bases retangulares ABCD e EFGH, em que A, B, C e D são, respectivamente, as projeções ortogonais de E, F, G e H. As medidas das arestas distintas AB, AD e AE constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm. Sabe-se que o volume da pirâmide ABCF é igual a $10\ cm^3$. Calcule:

a) As medidas das arestas do paralelepípedo.

b) O volume e a área total da superfície do paralelepípedo.

Comentários

a) Dado que AB, AD e AE estão em P.A. designe $AB = AD - r$ e $AE = AD + r$, em que r é a razão da P.A.

Com isso,

$$(AD - r) + AD + (AD + r) = 12\ cm \therefore AD = 4\ cm$$

O volume da pirâmide $ABCF$ é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{AB \cdot AD}{2}\right) \cdot AE \therefore (4 - r) \cdot 4 \cdot (4 + r) = 6 \cdot V = 6 \cdot 10 = 60 \therefore (16 - r^2) \cdot 4 = 60 \therefore$$

$$r = 1\ cm \therefore AB = 3\ cm \text{ e } AE = 5\ cm$$

b) O volume do paralelepípedo é dado por:

$$V' = AB \cdot AD \cdot AE = 6 \cdot V = 60 \therefore V' = 60\ cm^3$$

Logo, a área total do paralelepípedo é dada por:

$$S' = 2 \cdot (AB \cdot AD + AB \cdot AE + AD \cdot AE) = 2 \cdot (4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5) \therefore \boldsymbol{S' = 94\ cm^2}$$

Gabarito: a) $AB = 3\ cm$ e $AE = 5\ cm$ b) $S' = 94\ cm^2$

---

57. (ITA/2013)

Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes;

II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;

III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;

IV. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) III.

b) I e III.

c) II e III.

d) III e IV.

e) I, II e IV.

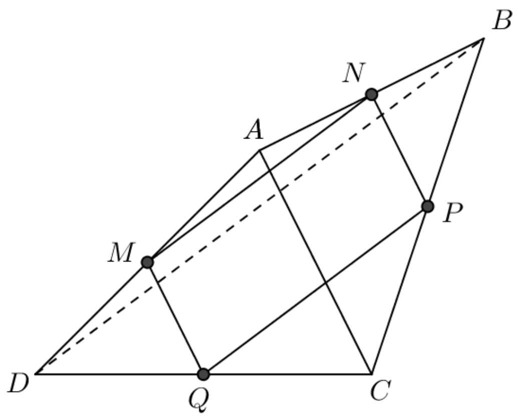
Comentários

I. **Falsa**, duas retas paralelas e coplanares não são concorrentes.

II. **Falsa**, na verdade, duas retas não coplanares são reversas, duas retas paralelas e coplanares não têm ponto em comum e não são reversas.

III. **Verdadeira,** pois existe só um plano passando por umas das duas retas que é paralelo à outra reta, ou seja, 2 planos no total, sendo cada reta pertencente a um deles.

IV. **Verdadeira**, seja a figura abaixo:



No quadrilátero $ABCD$ reverso, seus quatro vértices não pertencem a um mesmo plano, os lados NP e MQ são paralelos ao segmento AC, já que são bases médias para os ΔABC e ΔACD, respectivamente. Com isso: $NP \parallel MQ$. Analogamente, $MN \parallel QP$. Em outras palavras, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

Gabarito: "d"

58. (ITA/2013)

Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm^3, do sólido VABC é

a) 2

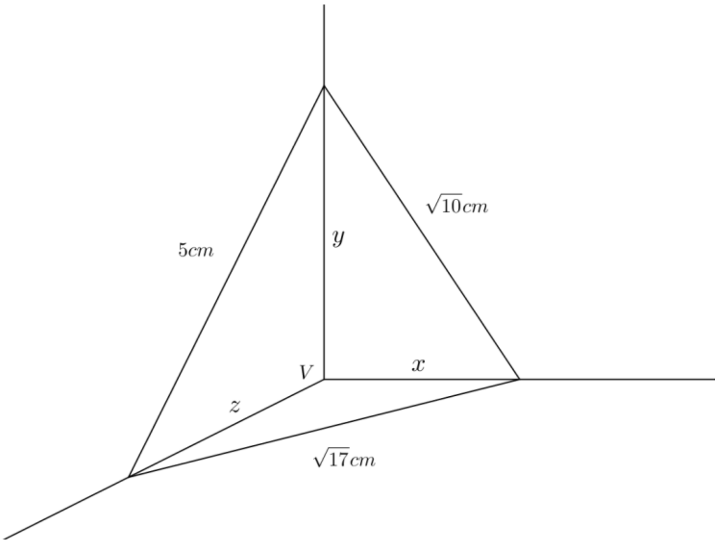
b) 4

c) $\sqrt{17}$

d) 6

e) $5\sqrt{10}$

Comentários



Por Pitágoras, nas três faces contendo o vértice V, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10(I) \\ x^2 + z^2 = 17(II) \\ y^2 + z^2 = 25(III) \end{cases}$$

Fazendo $(II) - (I)$ e somando esse resultado à (III), chega-se a:

$$2z^2 = 32 \therefore z = 4\ cm \Rightarrow x = 1\ cm \text{ e } y = 3\ cm.$$

Logo,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 1}{2} \therefore \boldsymbol{V = 2\ cm^3}$$

Gabarito: "a"

59. (ITA/2011)

Considere as afirmações:

I. Existe um triedro cujas 3 faces tem a mesma medida $\alpha = 120°$.

II. Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respectivamente, $30°, 45°, 50°, 50°$ e $170°$.

III. Um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices.

IV. A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é $2880°$.

Destas, é(são) correta(s) apenas

a) II.

b) IV.

c) II e IV.

d) I, II e IV.

e) II, III e IV.

Comentários

I. **Falsa**, pois um triedro deve ter $\alpha < 360°$.

II. **Verdadeira**, pois $30° + 45° + 50° + 50° + 170° = 345° < 360°$.

III. **Falsa**, resolução segue abaixo:

$$V + F = A + 2$$

Onde:

$2A = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \therefore A = 15$ e $F = 3 + 1 + 1 + 2 \therefore F = 7 \Rightarrow \boldsymbol{V = 10}$

IV. **Verdadeira**, um poliedro convexo de 10 vértices é o da afirmação III., ou seja, basta calcularmos a soma das medidas dos ângulos de todas as faces para esse poliedro.

Logo,

$$S = 3 \cdot 180° + 1 \cdot 360° + 1 \cdot 540° + 2 \cdot 720° \therefore \boldsymbol{S = 2880°}$$

Gabarito: "c"

---

60. (ITA/2010)

Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1 cm. Se M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, então a área do triângulo MND, em cm^2, é igual a

a) $\sqrt{2}/6$

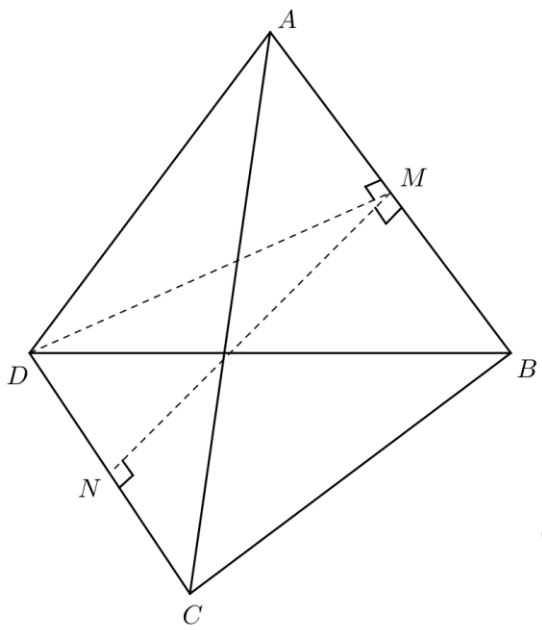
b) $\sqrt{2}/8$

c) $\sqrt{3}/6$

d) $\sqrt{3}/8$

e) $\sqrt{3}/9$

Comentários



Como o segmento NM é mediana para o triângulo isósceles ΔABN, ele também o será altura.

Por Pitágoras no ΔAMN, temos:

$$AN^2 = NM^2 + AM^2 \therefore NM^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \therefore NM = \frac{1}{\sqrt{2}}\ cm$$

O segmento NM é perpendicular ao segmento ND, implicando o ΔMND ser retângulo por N.

Logo,

$$[MND] = \frac{1}{2} \cdot ND \cdot NM = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \therefore \boldsymbol{[MND] = \frac{\sqrt{2}}{8}\ cm^2}$$

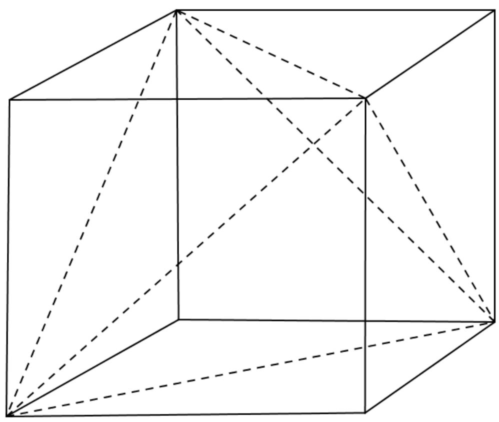
Gabarito: "b"

61. (ITA/2007)

Os quatro vértices de um tetraedro regular, de volume $8/3\text{cm}^3$, encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é centro de uma esfera de 1 cm de raio.

Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

Comentários



O tetraedro está dentro do cubo como de acordo à figura acima, sendo assim:

$V_{tetraedro} = V_{cubo} \cdot \left(1 - 4 \cdot \frac{1}{6}\right) \therefore V_{tetraedro} = \frac{V_{cubo}}{3}$, pois cada volume de pirâmide formada pela região vazia dentro do cubo corresponde a $\frac{1}{6}$ do volume total do cubo, sendo no total 4 dessas pirâmides.

Logo,

$$V_{cubo} = 3 \cdot \frac{8}{3} = 8\ cm^3$$

Quanto às esferas com centro nos vértices do cubo, o volume de cada esfera que fica interno ao cubo é de $\frac{1}{8}$ do volume da esfera, sendo 8 dessas esferas no total.

Com isso,

$$V_{cubo}^{exterior\text{ às }esferas} = V_{cubo} - 8 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot V_{esfera}\right) \therefore$$

$$V_{cubo}^{exterior\text{ às }esferas} = 8 - \frac{4\pi 1^3}{3} \therefore$$

$$\boldsymbol{V_{cubo}^{exterior\text{ às }esferas} = \left(8 - \frac{4\pi}{3}\right) cm^3}$$

Gabarito: $\left(8 - \frac{4\pi}{3}\right) cm^3$

62. (ITA/2007)

Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual a 1 cm^3 e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é $1/\sqrt{2}$, a altura do tronco, em centímetros, é igual a

a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

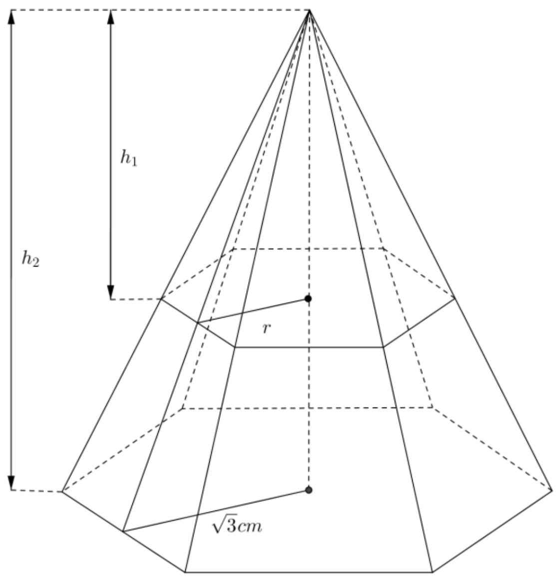
b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{21}$

d) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}$

e) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{22}$

Comentários



As duas pirâmides acima representadas são semelhantes, então:

$$\frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{h_2}{h_1}$$

Mas é dado que $\frac{h_2}{h_1} = \sqrt{2}$.

Com isso,

$$r = \frac{\sqrt{6}}{2}\ cm$$

Sabendo que:

$$V_{tronco} = \frac{h}{3} \cdot \left(S_{base}^{inferior} + S_{base}^{superior} + \sqrt{S_{base}^{inferior} S_{base}^{superior}} \right)$$

Onde:

$$S_{base}^{inferior} = S_{hexágono\ a=\sqrt{3}} \text{ e } S_{base}^{superior} = S_{hexágono\ a=\sqrt{6}/2}$$

Calculando o V_{tronco}, então:

$$V_{tronco} = 1\ cm^3 = \frac{h}{3} \cdot \left(2\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \sqrt{2\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} \right) \therefore$$

Após certo algebrismo, obtém-se que:

$$\boldsymbol{h = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{6}}{21}\ cm}$$

Gabarito: "c"

---

63. (ITA/2006)

Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja diagonal menor mede $3\sqrt{3}$ cm. As faces laterais desta pirâmide formam diedros de $60°$ com o plano da base. A área total da pirâmide, em cm^2, é

a) $\frac{81\sqrt{3}}{2}$

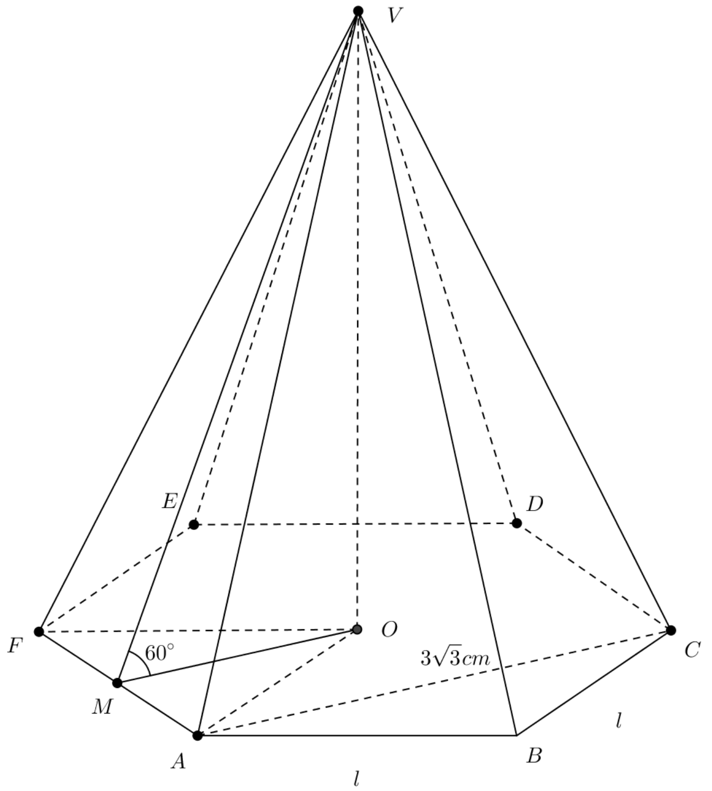
b) $\frac{81\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{81}{2}$

d) $\frac{27}{\sqrt{3}}$

e) $\frac{27}{\sqrt{2}}$

Comentários



Sabendo que $AC = 3\sqrt{3}$, temos:

$$3\sqrt{3} = 2 \cdot l \cdot \cos 30° \therefore l = 3\ cm$$

Dado que as faces da pirâmide formam um ângulo de 60° com a base no ΔOMV, então:

$$MO = MV \cdot \cos 60° \therefore MV = \frac{MO}{\cos 60°} = \frac{\sqrt{3} \cdot l}{2 \cdot \cos 60°} = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{2 \cdot \frac{1}{2}} \therefore MV = 3\sqrt{3}\ cm$$

Logo,

$$S_{total} = S_{base} + S_{faces} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2} \therefore \boldsymbol{S_{total} = \frac{81\sqrt{3}}{2}\ cm^2}$$

Gabarito: “a”

64. (ITA/2005)

Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é $7200°$. O número de vértices deste prisma é igual a

a) 11.

b) 32.

c) 10.

d) 20.

e) 22.

Comentários

Um prisma regular é um poliedro convexo, assim, podemos usar a fórmula da soma dos seus ângulos internos:

$$S = (V - 2) \cdot 360°$$

Em que V é o número de vértices.

$$\Rightarrow 7200° = (V - 2) \cdot 360°$$

$$V - 2 = 20$$

$$\therefore V = 22$$

Gabarito: "e"

---

65. (ITA/2005)

Em relação a um sistema de eixos cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$ e $C = \left(1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\right)$. O volume do tetraedro é

a) $8/3$.

b) 3.

c) $3\sqrt{3}/2$.

d) $5\sqrt{3}/2$.

e) 8.

Comentários

A partir dos valores de A, B e C acima fornecidos, sabe-se que a aresta do tetraedro regular é de $l = 2\sqrt{2}$. Sabendo que o volume de um tetraedro regular em função da aresta é dado por $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot l^2$, chega-se a:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^3 \therefore \boldsymbol{V = \frac{8}{3}}$$

Gabarito: "a"

---

66. (ITA/2002)

Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. A que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que o volume da pirâmide obtida seja 1/8 do volume da pirâmide original?

a) 2 m.

b) 4 m.

c) 5 m.

d) 6 m.

e) 8 m.

Comentários

Como as 2 pirâmides são semelhantes, sendo k a razão de semelhança entre elas, temos:

$$\frac{h_2}{h_1} = k; \frac{S_{base2}}{S_{base1}} = k^2; \frac{V_2}{V_1} = k^3$$

Com isso,

$$\frac{V_2}{V_1} = k^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Logo,

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}$$

Dado que $h_1 = 10\ m$, portanto:

$$\boldsymbol{h_2 = 5\ m}$$

Gabarito: "c"

---

67. (ITA/2001)

A razão entre a área da base de uma pirâmide regular de base quadrada e a área de uma das faces é 2. Sabendo que o volume da pirâmide é de 12m^3, temos que a altura da pirâmide mede (em metros):

a) 1

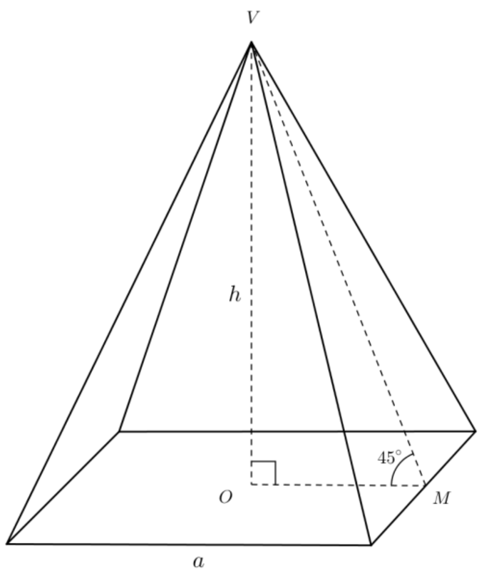
b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Comentários



Sendo a a aresta da base quadrada e h a altura de uma das faces triangulares da pirâmide, chega-se a:

$$\frac{S_{base}}{S_{face}} = \frac{a^2}{\left(\frac{a \cdot h}{2}\right)} = 2 \Rightarrow h = a$$

Por Pitágoras no ΔOMV, temos:

$$MV^2 = OM^2 + OV^2 \therefore h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + OV^2 \therefore OV = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} \therefore OV = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$$

Dado que $V = 12\ m^3$, então:

$$V = 12 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot OV \therefore 36 = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \therefore a^3 = 24\sqrt{3} = 3^{3/2} \cdot 2^3 \Rightarrow a = 2\sqrt{3}\ m$$

Finalmente,

$$OV = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} \therefore \boldsymbol{OV = 3\ m}$$

Gabarito: "c"

---

68. (ITA/2000)

Considere uma pirâmide regular com altura de $6/\sqrt[3]{9}$ cm. Aplique a esta pirâmide dois cortes planos e paralelos à base de tal maneira que a nova pirâmide e os dois troncos obtidos tenham, os três, o mesmo volume. A altura do tronco cuja base é a base da pirâmide original é igual a

a) $2(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6})$ cm.

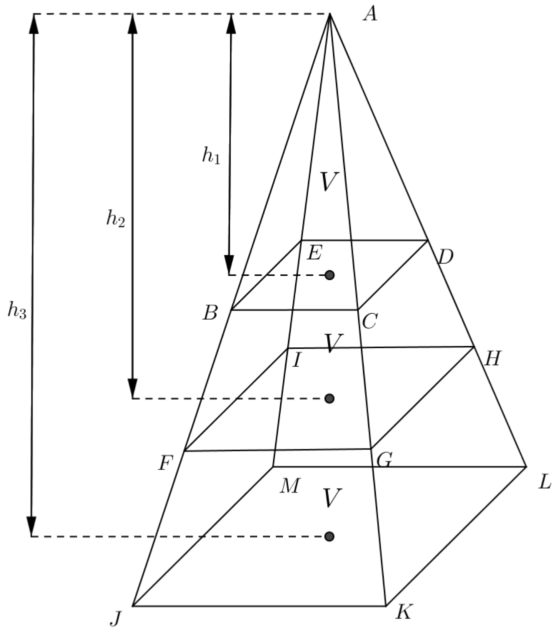
b) $2(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2})$ cm.

c) $2(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3})$ cm.

d) $2(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$ cm.

e) $2(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3})$ cm.

Comentários



As pirâmides $ABCDE$, $AFGHI$ e $AJKLM$ são semelhantes entre si, logo, sejam k e k' as razões de semelhança entre as pirâmides $AFGHI$ e $ABCDE$ e entre $AJKLM$ e $ABCDE$, respectivamente.

Com isso,

$$k = \frac{h_2}{h_1};\ k^3 = \frac{V_2}{V_1};$$

$$k' = \frac{h_3}{h_1};\ k'^3 = \frac{V_3}{V_1};$$

Mas, é dado que:

$$V_1 = V;\ V_2 = 2V;\ V_3 = 3V$$

Daí,

$$k^3 = \frac{2V}{V} \therefore k = \sqrt[3]{2}$$

$$k'^3 = \frac{3V}{V} \therefore k' = \sqrt[3]{3}$$

$$h_2 = \sqrt[3]{2} \cdot h_1$$

$$h_3 = \sqrt[3]{3} \cdot h_1$$

Como $h_3 = \frac{6}{\sqrt[3]{9}}\ cm \Rightarrow h_1 = \frac{6}{\sqrt[3]{27}} = 2\ cm \Rightarrow h_2 = 2 \cdot \sqrt[3]{2}\ cm.$

Finalmente,

$$(h_3 - h_2) = \left(\frac{6}{\sqrt[3]{9}} - 2 \cdot \sqrt[3]{2}\right); \boldsymbol{(h_3 - h_2) = 2\left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right)\ cm}$$

Gabarito: "d"

69. (ITA/1999)

Um poliedro convexo de 10 vértices apresenta faces triangulares e quadrangulares. O número de faces quadrangulares, o número de faces triangulares e o número total de faces formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. O número de arestas é:

a) 10

b) 17

c) 20

d) 22

e) 23

Comentários

Sejam F_3 e F_4 o número de faces triangulares e faces quadrangulares, respectivamente.

Como F_4, F_3 e $(F_3 + F_4)$ estão em P.A., temos:

$$2F_3 = F_4 + (F_3 + F_4) \therefore F_3 = 2F_4$$

Dado que o número de vértices é 10, pelo teorema de Euler, então:

$$A + 2 = 10 + (F_3 + F_4) \therefore A + 2 = 10 + 3F_4 \therefore A = 8 + 3F_4 (I)$$

Mas, $2A = 3F_3 + 4F_4 \therefore 2A = 3 \cdot (2F_4) + 4F_4 = 10F_4 \therefore A = 5F_4 \therefore$

$$F_4 = \frac{A}{5} (II)$$

Finalmente, por $(I)\ e\ (II)$:

$$A = 8 + 3 \cdot \left(\frac{A}{5}\right) \therefore \boldsymbol{A = 20}$$

Gabarito: "c"

---

70. (ITA/1999)

Um triedro trirretângulo é cortado por um plano que intercepta as três arestas, formando um triângulo com lados medindo 8 m, 10 m e 12 m. O volume, em m^3, do sólido formado é:

a) $15\sqrt{6}$

b) $5\sqrt{30}$

c) $6\sqrt{15}$

d) $30\sqrt{6}$

e) $45\sqrt{6}$

Comentários

Sendo x, y e z as medidas das arestas do triedro, por Pitágoras nas faces do triedro, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8^2 = 64 (I) \\ x^2 + z^2 = 10^2 = 100 (II) \\ y^2 + z^2 = 12^2 = 144 (III) \end{cases}$$

Fazendo $(II)-(I)$ e somando o resultado com (III), obtém-se:

$$2z^2 = 100 - 64 + 144 = 180 \therefore z^2 = 90 \therefore z = 3\sqrt{10}\,m$$

$$y^2 = 144 - 90 = 54 \therefore y = 3\sqrt{6}\,m$$

$$x^2 = 64 - 54 = 10 \therefore x = \sqrt{10}\,m$$

Logo,

$$V = \frac{xyz}{6} = \frac{\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{10}}{6} = 15\sqrt{6} \therefore \boldsymbol{V = 15\sqrt{6}\,m}$$

Gabarito: "a"

71. (ITA/1998)

Um poliedro convexo de 16 arestas é formado por faces triangulares e quadrangulares. Seccionando-o por um plano convenientemente escolhido, dele se destaca um novo poliedro convexo, que possui apenas faces quadrangulares. Este novo poliedro possui um vértice a menos que o original e uma face a mais que o número de faces quadrangulares do original. Sendo m e n, respectivamente, o número de faces e o número de vértices do poliedro original, então:

a) m = 9, n = 7

b) m = n = 9

c) m = 8, n = 10

d) m = 10, n = 8

e) m = 7, n = 9

Comentários

Para o poliedro original, temos:

$$A + 2 = V + F \therefore 16 + 2 = m + n \therefore m + n = 18(1)$$

$$2A = 3F_3 + 4F_4 \therefore 32 = 3F_3 + 4F_4(2)$$

Para o poliedro formado pela intersecção do plano, temos:

$$A' + 2 = (V') + (F') \therefore A' + 2 = (n-1) + (F_4 + 1) \therefore A' = n + F_4 - 2(3)$$

$$2A' = 4F'_4 \therefore A' = 2(F_4 + 1)(4)$$

Por $(I)\ e\ (II)$, então:

$$n + F_4 - 2 = 2F_4 + 2 \therefore F_4 = n - 4$$

Sabendo-se que $F_3 = m - F_4$ e $F_4 = n - 4$, então:

$$32 = 3(m - F_4) + 4\,F_4 = 3m + \ F_4 = 3m + n - 4 \therefore 3m + n = 36(5)$$

Finalmente, por $(5)-(1)$:

$$2m = 18 \therefore \boldsymbol{m = 9} \Rightarrow \boldsymbol{n = 9}$$

Gabarito: "b"

72. (ITA/1998)

Uma pirâmide regular tem por base um quadrado de lado 2 cm. Sabe-se que as faces formam com a base ângulos de $45°$. Então, a razão entre a área da base e a área lateral é igual a:

a) $\sqrt{2}$

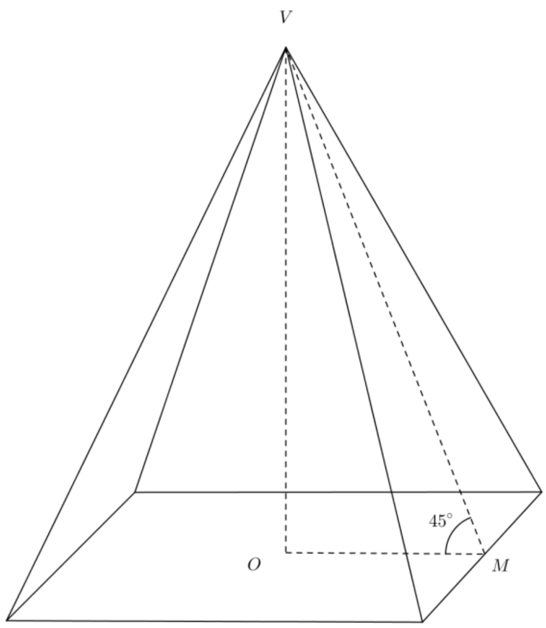
b) $1/3$

c) $\sqrt{6}$

d) $\sqrt{2}/2$

e) $\sqrt{2}/3$

Comentários



No ΔOMC, temos:

$$\cos 45° = \frac{OM}{MV} = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)}{h_{face}} \therefore h_{face} = \left(\frac{l}{2}\right) \cdot \cos 45° \therefore h_{face} = \left(\frac{2}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore h_{face} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ cm;$$

Sendo $S_{face} = \frac{base \cdot altura}{2}$, então:

$$\boldsymbol{S_{face} = \frac{l \cdot h_{face}}{2} \therefore S_{face} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \therefore S_{face} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ cm^2;}$$

Logo,

$$\boldsymbol{S_{lateral} = 4 \cdot S_{face} = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore S_{lateral} = 2\sqrt{2}\ cm^2;}$$

Como $\boldsymbol{S_{base} = l^2 \therefore S_{lateral} = 4\ cm^2}$, conclui-se que:

$$\boldsymbol{\frac{S_{base}}{S_{lateral}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} \therefore \frac{S_{base}}{S_{lateral}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Gabarito: "d"

73. (ITA/1997)

Dentro de um tronco de pirâmide quadrangular regular, considera-se uma pirâmide regular cuja base é a base maior do tronco e cujo vértice é o centro da base menor do tronco. As arestas das bases medem a cm e $2a$ cm. As áreas laterais do tronco e da pirâmide são iguais. A altura (em cm) do tronco mede

a) $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

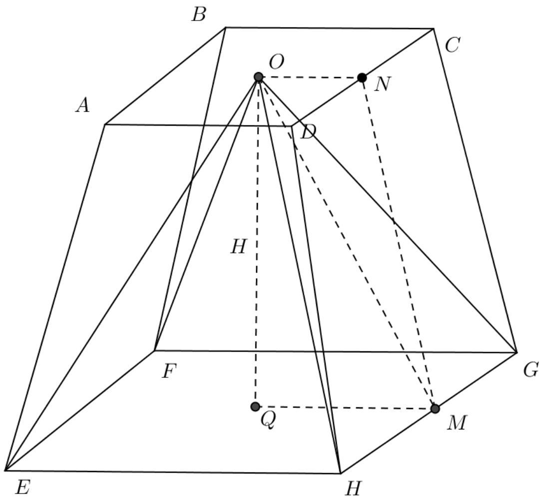
b) $\frac{a\sqrt{35}}{10}$

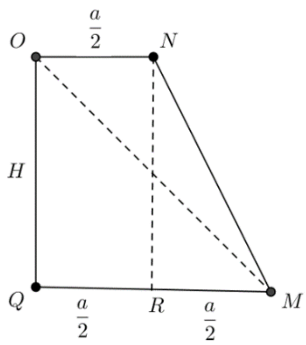
c) $\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$

d) $\frac{a\sqrt{35}}{\sqrt{10}}$

e) $\frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

Comentários





Dado que $S_{lateral}^{pirâmide} = S_{lateral}^{tronco}$, temos:

$$4 \cdot \frac{2a \cdot MO}{2} = 4 \cdot \frac{(2a + a) \cdot MN}{2}$$

Mas por Pitágoras no ΔMOQ e no ΔMNR, chega-se a:

$$MO^2 = MQ^2 + QO^2 = a^2 + H^2 \therefore MO = \sqrt{a^2 + H^2};$$

$$MN^2 = MR^2 + RN^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2 \therefore MN = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2};$$

Com isso,

$$4 \cdot \frac{2a \cdot \sqrt{a^2 + H^2}}{2} = 4 \cdot \frac{(2a + a) \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2}}{2} \therefore 2\sqrt{a^2 + H^2} = 3\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2} \therefore$$

$$4 \cdot (a^2 + H^2) = 9 \cdot \left(\frac{a^2}{4} + H^2\right) \therefore 4a^2 + 4H^2 = \frac{9a^2}{4} + 9H^2 \therefore 5H^2 = \frac{7a^2}{4} \therefore$$

$$25H^2 = \frac{35a^2}{4} \therefore \boldsymbol{H} = \frac{\sqrt{\mathbf{35}\boldsymbol{a}}}{\mathbf{10}}$$

Gabarito: "b"

---

74. (ITA/1996)

As dimensões x, y, z de um paralelepípedo retângulo estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma dessas medidas é igual a 33 cm e que a área total do paralelepípedo é igual a 694 cm^2, então o volume deste paralelepípedo, em cm^3, é igual:

a) 1.200

b) 936

c) 1.155

d) 728

e) 834

Comentários

Dado que x, y, z estão em P.A., chame $x = y - r$ e $z = y + r$, sendo r a razão dessa P.A.

Daí,

$$(y - r) + y + (y + r) = 33\ cm \therefore 3y = 33\ cm \therefore y = 11\ cm$$

$$S_{total} = 2(xy + xz + yz) \therefore 694 = 2(xy + xz + yz) \therefore$$

$$347 = (y - r) \cdot y + (y - r) \cdot (y + r) + y \cdot (y + r) \therefore$$

$$347 = (11 - r) \cdot 11 + (11 - r) \cdot (11 + r) + 11 \cdot (11 + r) \therefore$$

$$347 = 121 - 11r + 121 - r^2 + 121 + 11r \therefore 347 = 363 - r^2 \therefore r^2 = 16 \therefore$$

$$r = 4\ cm$$

Logo,

$$x = 11 - 4 \therefore x = 7\ cm$$

$$z = 11 + 4 \therefore z = 15\ cm$$

$$V = xyz \therefore V = 15 \cdot 11 \cdot 7 \therefore \boldsymbol{V} = \mathbf{1155}\ \boldsymbol{cm}^{\mathbf{3}}$$

Gabarito: "c"

---

75. (ITA/1996)

A aresta de um cubo mede x cm. A razão entre o volume e a área total do poliedro cujos vértices são os centros das faces do cubo será:

a) $\frac{\sqrt{3}}{9}x$ cm

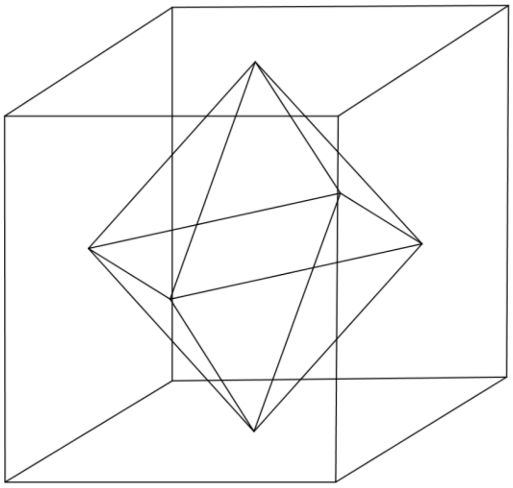
b) $\frac{\sqrt{3}}{18}x$ cm

c) $\frac{\sqrt{3}}{6}x$ cm

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}x$ cm

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ cm

Comentários



O poliedro formado se trata de um octógono regular de lado l, dado por:

$$l^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \therefore l^2 = \frac{x^2}{2} \therefore l = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Com isso,

$$S = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2 \therefore S = \sqrt{3}x^2$$

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \therefore V = \frac{x^3}{6}$$

Finalmente,

$$\frac{V}{S} = \frac{x^3}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}x^2} \therefore \boldsymbol{\frac{V}{S} = \frac{\sqrt{3}x^2}{18}\ cm}$$

Gabarito: "b"

76. (ITA/1996)

Numa pirâmide triangular regular, a área da base é igual ao quadrado da altura H. Seja R o raio da esfera inscrita nesta pirâmide. Deste modo, a razão $\frac{H}{R}$ é igual a:

a) $\sqrt{(\sqrt{3}+1)}$

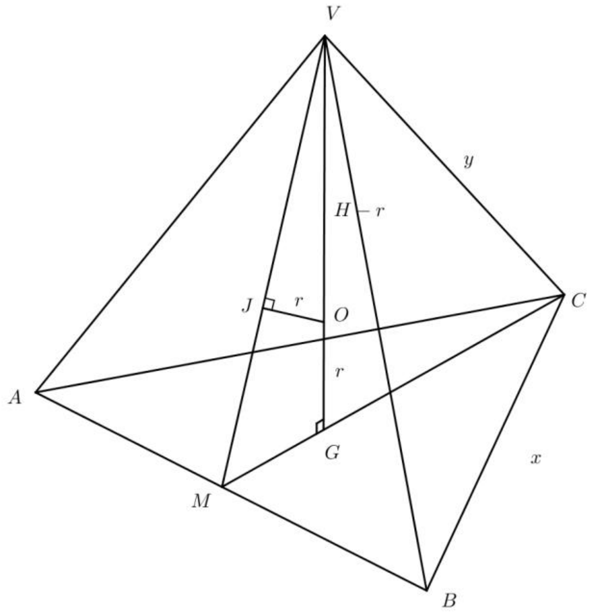
b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)}$

c) $1+\sqrt{(3\sqrt{3}+1)}$

d) $\mathbf{1+\sqrt{(3\sqrt{3}-1)}}$

e) $\mathbf{\sqrt{3}+1}$

Comentários



Sendo x a aresta da base e y a aresta lateral da pirâmide.

Por Pitágoras no ΔMGV, temos:

$$MV^2 = MG^2 + GV^2 \therefore GV^2 = MV^2 - MG^2 (*)$$

Como G é o baricentro do ΔABC equilátero, chega-se a:

$$MG = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2} \therefore MG = \frac{\sqrt{3}x}{6}$$

Por Pitágoras no ΔBMV, chega-se a:

$$BV^2 = MB^2 + MV^2 \therefore MV^2 = BV^2 - MB^2 \therefore MV^2 = y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

Com isso, voltemos a $(*)$ como segue abaixo:

$$GV^2 = y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}x}{6}\right)^2 \therefore GV^2 = y^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{12} \therefore GV^2 = H^2 = y^2 - \frac{x^2}{3}$$

Sabendo que $S_{base} = H^2$, então:

$$S_{base} = H^2 = \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$$

Daí,

$$\frac{\sqrt{3}x^2}{4} = y^2 - \frac{x^2}{3} \therefore \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3} (I)$$

Além disso, note que $\Delta VGM \sim \Delta VOJ$, sendo O o centro da esfera inscrita.

Portanto,

$$\frac{OV}{OJ} = \frac{MV}{MG} \therefore$$

$$\frac{H-R}{R} = \frac{\sqrt{y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{\sqrt{3}x}{6}} = \sqrt{\left(y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{36}{3x^2}\right)} = \sqrt{12 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3} \therefore$$

$$\frac{H-R}{R} = \frac{H}{R} - 1 = \sqrt{12 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3}\ (II)$$

Finalmente, substituindo (I) em (II), temos:

$$\frac{H}{R} - 1 = \sqrt{12 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3}\right) - 3} = \sqrt{3\sqrt{3} + 1} \therefore$$

$$\boldsymbol{\frac{H}{R} = 1 + \sqrt{3\sqrt{3} + 1}}$$

Gabarito: "c"

77. (ITA/1995)

Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em cm^3, é:

a) $27\sqrt{3}$

b) $13\sqrt{2}$

c) 12

d) $54\sqrt{3}$

e) $17\sqrt{5}$

Comentários

Sendo a a aresta da base hexagonal, temos:

$$S_{lateral} = 2S_{base} \therefore 6 \cdot (a \cdot 3) = 2\left(\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}\right) \therefore 6 = \sqrt{3}a \therefore a = \frac{6}{\sqrt{3}} \therefore a = 2\sqrt{3}\ cm$$

Logo,

$$V = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} \cdot 3 \therefore V = \frac{3\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}\right)^2}{2} \cdot 3 \therefore \boldsymbol{V = 54\sqrt{3}\ cm^3}$$

Gabarito: "d"

78. (ITA/1995)

Dada uma pirâmide regular triangular, sabe-se que sua altura mede $3a$ cm, onde "a" é a medida da aresta de sua base. Então, a área total desta pirâmide, em cm^2, vale:

a) $\frac{a^2\sqrt{327}}{4}$

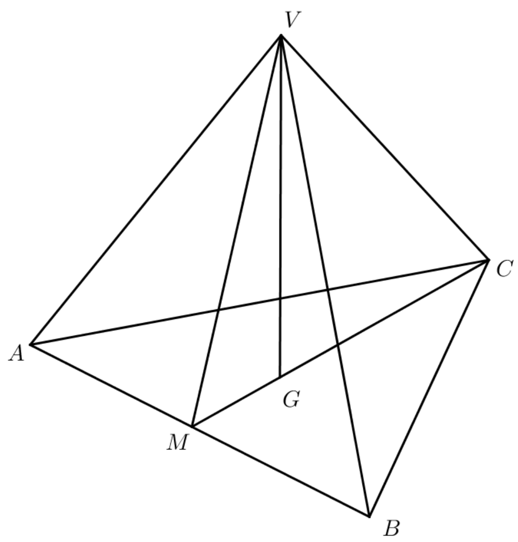
b) $\frac{a^2\sqrt{109}}{2}$

c) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{[a^2\sqrt{3}\cdot(2+\sqrt{33})]}{2}$

e) $\frac{[a^2\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{109})]}{4}$

Comentários



Na figura acima, representada por Pitágoras no ΔGVH, chega-se a:

$$MV^2 = MG^2 + GV^2 \therefore MV = \sqrt{MG^2 + GV^2}$$

Sendo G o baricentro do ΔABC equilátero e G o baricentro desse triângulo, temos:

$$MV = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}a}{6}\right)^2 + (3a)^2} \therefore MV = \sqrt{\frac{a^2}{12} + 9a^2} \therefore MV = \sqrt{\frac{109}{3}} \cdot \frac{a}{2}\ cm$$

Como MV é altura da face da pirâmide, então:

$$S_{lateral} = 3 \cdot \frac{\left(a \cdot \sqrt{\frac{109}{3}}\right) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)}{2} = \sqrt{\frac{109}{3}} \cdot \frac{3a^2}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{109} \cdot a^2}{4}$$

Logo,

$$S_{total} = S_{lateral} + S_{base} \therefore S_{total} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{109} \cdot a^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \therefore \boldsymbol{S_{total}} = \frac{\boldsymbol{[a^2\sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{109})]}}{\boldsymbol{4}}$$

Gabarito: "e"

79. (ITA/1984)

Sejam as afirmações:

I. Por um ponto passa uma única reta;

II. Um ponto e uma reta determinam um plano;

III. Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano então a reta está contida nesse plano;

IV. Por um ponto situado fora de uma reta, existe uma reta paralela à reta dada.

Podemos garantir que:

a) Apenas III é verdadeira.

b) I e II são falsas.

c) Apenas I é falsa.

d) Apenas II e III são verdadeiras.

e) Apenas II e IV são verdadeiras.

Comentários

I. Falso. Por um ponto passam infinitas retas.

II. Falso. Podemos pensar no postulado da determinação, em que três pontos não colineares determinam um plano. Se tomarmos dois pontos, os quais determinam uma reta, teremos uma reta e um ponto determinando um único plano. Porém na questão não fica claro se são três pontos colineares ou não, o que torna o item falso.

III. Verdadeiro. Pelo postulado da inclusão.

IV. Verdadeiro. Pelo postulado das paralelas, temos que, por um ponto P externo à uma reta *r* dada, existe uma única reta *s,* paralela à r, passando por P.

Gabarito: "b".

---

80. (ITA/1978)

Quais as sentenças falsas nos itens abaixo?

I. Se dois planos são secantes, todas as retas de um deles sempre interceptam o outro plano;

II. Se em dois planos, num deles existem duas retas distintas paralelas ao outro plano, os planos são sempre paralelos;

III. Em dois planos paralelos, todas as retas de um são paralelas ao outro plano;

IV. Se uma reta é paralela a um plano, em tal plano existe uma infinidade de retas paralelas àquela reta;

V. Se uma reta é paralela a um plano, será paralela a todas as retas do plano.

a) I; II; III

b) I; II; V

c) I; III; IV

d) II; III; IV

e) N.D.A

Comentários

I. Falso. Existem retas em um plano que são paralelas ao outro plano. Podemos escolher uma reta de um plano paralela à reta formada pela intersecção dos planos dados e garantir que essa reta será paralela ao outro plano, pois é paralela a uma reta contida nesse outro plano. Sendo assim, nem todas as retas de um plano intersectam o outro.

II. Falso. Vamos supor que existam dois planos secantes S_1 e S_2. Podemos pegar duas retas, r e s, paralelas e distintas do plano S_1, que são paralelas à reta gerada pela intersecção desses planos. Nesse caso, as retas r e s serão paralelas ao plano S_2, o que torna a afirmação falsa.

III. Verdadeiro. No caso de dois planos paralelos e distintos, temos que toda reta de um será paralela ao outro, uma vez que não existirá intersecção entre essas retas e o plano.

IV. Verdadeiro. Existem infinitas retas paralelas e distintas em um plano. Escolhendo-se essas retas de forma que sejam paralelas à reta externa ao plano dado, temos que, se uma reta é paralela a um plano, ela será paralela a uma infinidade de retas desse plano.

V. Falso. Podemos tomar retas do plano que são perpendiculares à reta.

Gabarito: “b”.

---

81. (ITA/1987)

Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) Três pontos, distintos dois a dois, determinam um plano.

b) Um ponto e uma reta determinam um plano.

c) Se dois planos distintos têm um ponto em comum, tal ponto é único.

d) Se uma reta é paralela a um plano e não está contida neste plano, então ela é paralela a qualquer reta desse plano.

e) Se α é o plano determinado por duas retas concorrentes *r* e *s*, então toda reta *m* desse plano, que é paralela a *r*, não será paralela à reta *s.*

Comentários

a) Falso. Pegadinha! Três pontos não colineares determinam um plano.

b) Falso. De novo, pegadinha! Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.

c) Falso. Dois planos distintos com um ponto em comum são secantes e, portanto, a intersecção entre eles será uma reta.

d) Falso. A reta fora e a reta no plano podem ser reversas.

e) Verdadeiro. Tomemos o ponto de intersecção das retas r e s. Tomemos agora uma reta m paralela à r. Pelo postulado das paralelas, só existe uma reta passando pelo ponto de intersecção das retas que é paralela à m que, por definição, é a reta r. Logo, o item é verdadeiro.

Gabarito: “e”.

---

82. (ITA/Modificada/2013)

Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes;

II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;

III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;

É (são) verdadeira(s) apenas:

a) III

b) I e III

c) II e III

d) Apenas I

e) Apenas I e II

Comentários

I. Falso. Elas podem ser paralelas.

II. Falso. Retas paralelas também não possuem ponto em comum.

III. Verdadeiro. Sejam r e s retas reversas. Da definição de retas reversas, não existe um plano que contenha essas duas retas e, portanto, elas não podem ser coplanares. Seja s' a reta que passa por s e é paralela à r; e r' a reta que passa por r e é paralela a s. s e s' são concorrentes e, portanto, determinam um plano S. Como s' é paralela à r, o plano S também será paralelo a r. Analogamente, para r e r', essas retas determinam um plano R que é paralelo à s. Assim, sendo R o plano que contém r; e S o plano que contém s, então R e S são paralelos entre si e são únicos.

Gabarito: "a".

---

83. (IME/2021)

Um copo exótico de vidro, em uma festa, era uma pirâmide invertida de base pentagonal regular de 9 cm de altura. Esse copo continha uma bebida que ocupava 8 cm de altura. Um dos convidados fechou a base pentagonal do copo e virou de cabeça para baixo. A nova altura h da bebida, em cm, em relação à base pentagonal satisfaz:

a) $2,9 \leq h \leq 3,0$

b) $3,8 \leq h \leq 4,0$

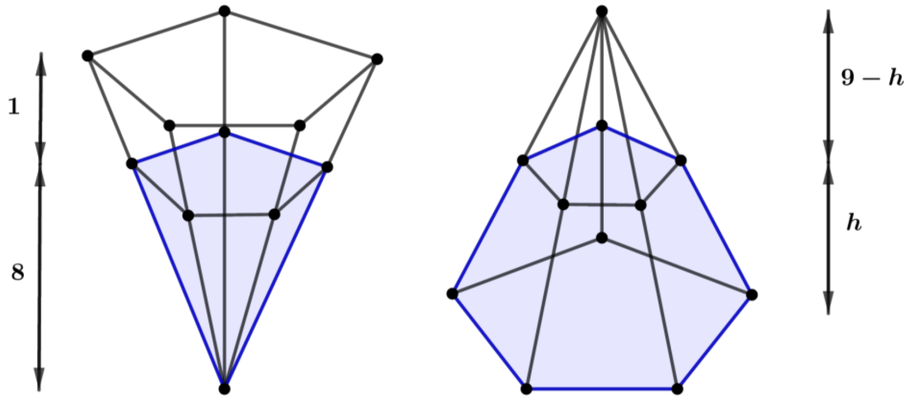
c) $4,8 \leq h \leq 4,9$

d) $5,8 \leq h \leq 6,0$

e) $6,1 \leq h \leq 6,2$

Comentários

Temos duas situações:



Da primeira, usando a relação entre volumes de sólidos semelhantes, temos:

$$\frac{V_{líquido}}{V_{total}}=\left(\frac{8}{9}\right)^3$$

Da segunda:

$$\frac{V_{vazio}}{V_{total}}=\frac{V_{total}-V_{líquido}}{V_{total}}=\left(\frac{9-h}{9}\right)^3$$

$$1-\frac{V_{líquido}}{V_{total}}=\left(\frac{9-h}{9}\right)^3$$

Assim, temos:

$$1-\left(\frac{8}{9}\right)^3=\left(\frac{9-h}{9}\right)^3$$

$$\frac{9^3-8^3}{9^3}=\left(\frac{9-h}{9}\right)^3$$

$$\frac{(9-8)(9^2+9\cdot 8+8^2)}{9^3}=\left(\frac{9-h}{9}\right)^3$$

$$\frac{9-h}{9}=\frac{\sqrt[3]{81+72+64}}{9}$$

$$\Rightarrow h=9-\sqrt[3]{217}<9-\sqrt[3]{216}=9-6=3$$

Portanto, temos que $h<3$, logo o gabarito é a letra A.

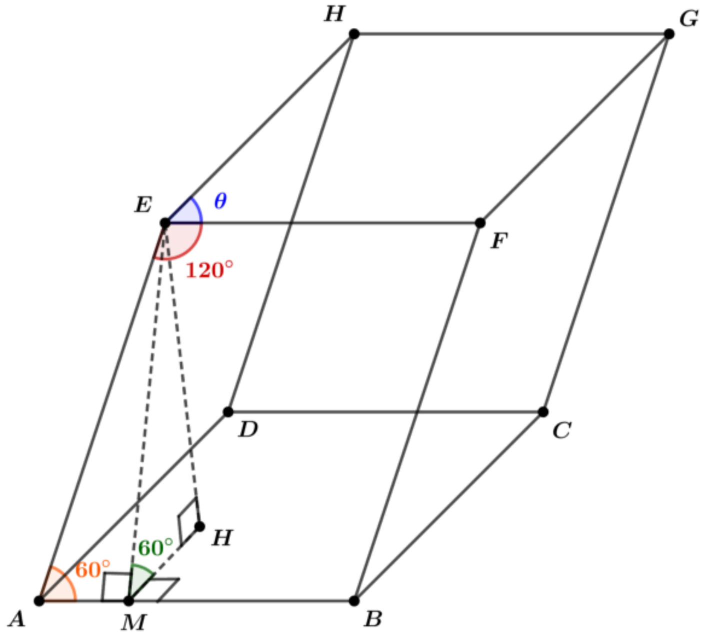
Gabarito: A

84. (IME/2021)

Um paralelepípedo oblíquo ABCD - EFGH possui todas as arestas com comprimento a. O plano que contém ABFE forma um ângulo de 60° com o plano que contém ABCD. O ângulo do vértice E da face ABFE é 120°. Se θ for o ângulo do vértice E do paralelogramo contido na base superior EFGH do paralelepípedo, determine o volume do paralelepípedo em função da aresta a e do ângulo θ.

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Como as arestas possuem a mesma medida, temos para a área da base do paralelepípedo:

$$S = [EFGH] = a \cdot a sen\theta = a^2 sen\theta$$

Sabemos que EH forma ângulo reto com a face ABCD, logo $MH \perp AB$. Pelo teorema das três perpendiculares, temos que $EM \perp AB$. Da face ABFE, temos um ângulo de $120°$ no vértice E, logo o ângulo em A é seu suplementar, ou seja, $60°$. Vamos calcular a altura do paralelepípedo:

$$EM = AE\ sen60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$h = EH = EM\ sen60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$$

Portanto, o volume é dado por:

$$V = S \cdot h = a^2 sen\theta \cdot \frac{3a}{4}$$

$$\therefore V = \frac{3a^3 sen\theta}{4}$$

Gabarito: $V = \frac{3a^3 sen\theta}{4}$

---

85. (IME/2020)

Um triângulo equilátero é projetado ortogonalmente em um plano, gerando um triângulo isósceles, cujo ângulo desigual mede $30°$. O cosseno do ângulo do plano do triângulo equilátero com o plano de projeção é:

a) $2\sqrt{3} - 3$

b) $4 - 2\sqrt{3}$

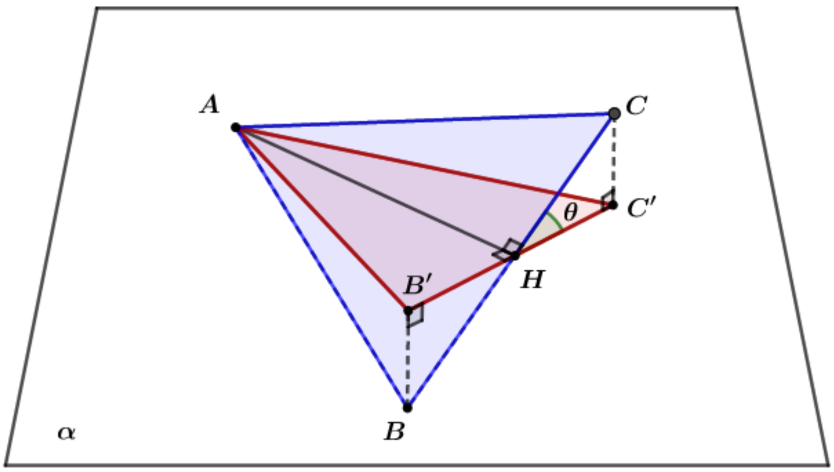
c) $2-\sqrt{3}$

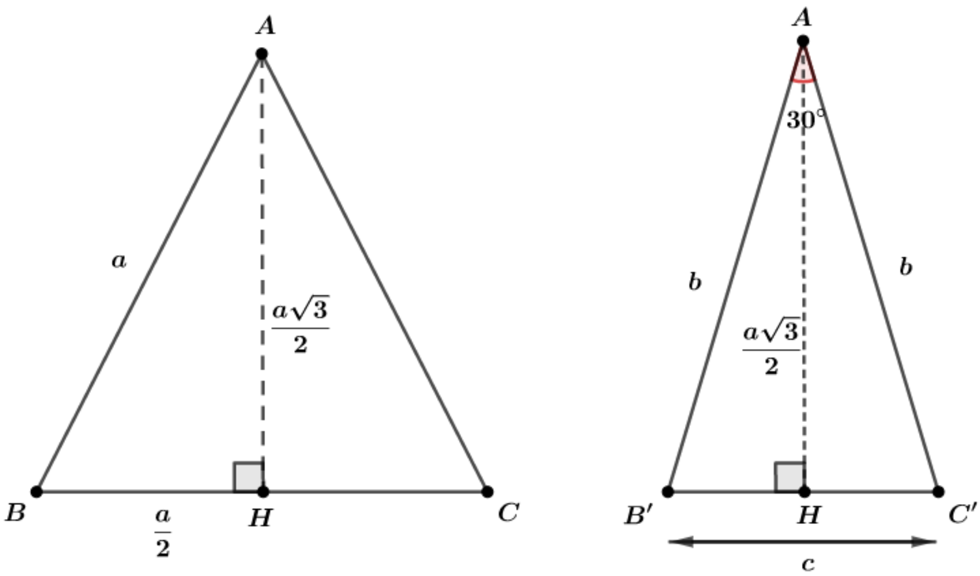
d) $1-\sqrt{3}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}-1$

Comentários

Muita atenção nessa questão! Ao ler o enunciado, pensaríamos que para gerar um triângulo isósceles através da projeção ortogonal de um triângulo equilátero, deveríamos ter um lado do triângulo equilátero paralelo ao plano de projeção. Mas a questão diz que o ângulo desigual do triângulo isósceles mede $\mathbf{30}$°, ou seja, esse ângulo é menor que o ângulo do vértice correspondente do triângulo que o gerou. Desse modo, para a projeção ortogonal desse triângulo equilátero ser um triângulo isósceles que satisfaz as condições do enunciado, a altura do triângulo equilátero deve ser paralela ao plano de projeção. Assim, do enunciado, podemos desenhar as seguintes figuras:





ABC é o triângulo equilátero e $AB'C'$ é sua projeção ortogonal ao plano α. Note que as alturas desses triângulos são congruentes. Aplicando a lei dos cossenos no $\Delta AB'C'$, temos:

$$c^2 = b^2 + b^2 - 2b^2\cos 30° = 2b^2 - b^2\sqrt{3} = b^2\left(2-\sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{c^2}{2-\sqrt{3}} = c^2\left(2+\sqrt{3}\right)$$

$$\therefore \boxed{b = c\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $AB'H$:

$$b^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(c\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\frac{c^2\left(7+4\sqrt{3}\right)}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow c^2\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 3a^2 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{3}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}-3$$

A questão pede o cosseno do ângulo do plano do triângulo equilátero com o plano de projeção. Perceba que esse valor é a razão $\frac{B'C'}{BC}$, logo:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{c}{a} = 2\sqrt{3}-3}$$

Gabarito: "a".

---

86. (IME/2020)

Um determinado material radioativo, com volume inicial Q_0, é manipulado numa usina nuclear. A cada dia o resíduo impuro da substância é descartado, através de uma ligação por um pequeno orifício, num invólucro lacrado em formato de paralelepípedo retângulo. No primeiro dia, a quantidade D_1 descartada corresponde a 1/3 do volume inicial do material e, de um modo geral, a quantidade D_n descartada no n-ésimo dia é dada pela relação:

$$\boldsymbol{D_n = \frac{1}{3}D_{n-1}, \text{para } n \geq 2.}$$

Determine as dimensões do invólucro (altura, largura e profundidade) onde se armazena o material descartado de modo que o custo de fabricação seja mínimo (isto é, a superfície lateral tenha área mínima) e tenha capacidade prevista de armazenamento por tempo indeterminado.

Comentários

Note que pela relação dada, temos que a quantidade descartada é uma progressão geométrica decrescente de razão $q = 1/3$ cujo primeiro termo é $D_1 = Q_0/3$.

$$\left(\frac{Q_0}{3}, \frac{Q_0}{3^2}, \dots, \frac{Q_0}{3^n}, \dots\right)\ P.G.$$

Aplicando a fórmula da soma para a P.G. infinita temos que o volume total descartado é:

$$V = D_1 + D_2 + D_3 + \cdots = \frac{D_1}{1-q} = \frac{\left(\frac{Q_0}{3}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} \therefore V = \frac{Q_0}{2}$$

Sejam a, b, c as dimensões do invólucro que armazenarão o volume descartado. Para guardar todo o lixo radioativo, devemos ter:

$$V_{invólucro} = abc = \frac{Q_0}{2}$$

Como queremos que o custo de fabricação seja mínimo, a área da superfície lateral do invólucro deve ser mínima. A área da superfície lateral é dada por:

$$S_{superfície} = 2(ab + ac + bc)$$

Para minimizar esse valor, basta encontrar o mínimo da expressão $ab + ac + bc$. Podemos usar a desigualdade das médias $MA \geq MG$:

$$\frac{ab + ac + bc}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot bc}$$

$$ab + ac + bc \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

Substituindo abc pelo volume descartado:

$$ab + ac + bc \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2}$$

O mínimo valor ocorre quando $MA = MG$, logo:

$$ab + ac + bc = 3\sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2}$$

A desigualdade das médias ocorre se, e somente se, os termos envolvidos são iguais, logo:

$$ab = ac = bc = \sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2}$$

Dessa forma, temos $a = b = c$, ou seja, as dimensões do invólucro pedido são:

$$\boxed{a = b = c = \sqrt[3]{\frac{Q_0}{2}}}$$

Gabarito: $a = b = c = \sqrt[3]{\frac{Q_0}{2}}$

87. (IME/2019)

Considere as afirmações abaixo:

I) se três pontos são colineares, então eles são coplanares;

II) se uma reta tem um ponto sobre um plano, então ela está contida nesse plano;

III) se quatro pontos são não coplanares, então eles determinam 6 (seis) planos;

IV) duas retas não paralelas determinam um plano;

V) se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

Entre essas afirmações:

a apenas uma é verdadeira;

b) apenas duas são verdadeiras;

c) apenas três são verdadeiras;

d) apenas quatro são verdadeiras;

e) todas são verdadeiras.

Comentários

I) Verdadeiro.

Como os três pontos são colineares, eles estão numa mesma reta. Toda reta está contida em um plano.

II) Falso.

A reta pode ser secante ao plano.

III) Falso.

Três pontos determinam um plano. Sendo os quatro pontos não coplanares, podemos calcular o número de planos que podemos formar com esses pontos usando a combinação simples:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

IV) Falso.

Podemos ter retas reversas e, nesse caso, não é possível determinar um plano que contenha ambas.

V) Verdadeiro.

Sendo os dois planos distintos, eles não são coincidentes. Como eles possuem um ponto em comum, eles também não podem ser paralelos. Logo, a interseção desses planos forma uma reta.

Gabarito: "b".

---

88. (IME/2019)

Em um tetraedro $ABCD$, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são idênticos e a aresta AD é ortogonal à BC. A área do ΔABC é igual à área do ΔACD, e o ângulo $M\hat{A}D$ é igual ao ângulo $M\hat{D}A$, onde M é ponto médio de BC. Calcule a área total do tetraedro $ABCD$, em cm^2, sabendo que $BC = 2cm$, e que o ângulo $B\hat{A}C$ é igual a $30°$.

a) $\left(2 - \sqrt{3}\right)$

b) $\left(2+\sqrt{3}\right)$

c) $4\left(2-\sqrt{3}\right)$

d) $4\left(2+\sqrt{3}\right)$

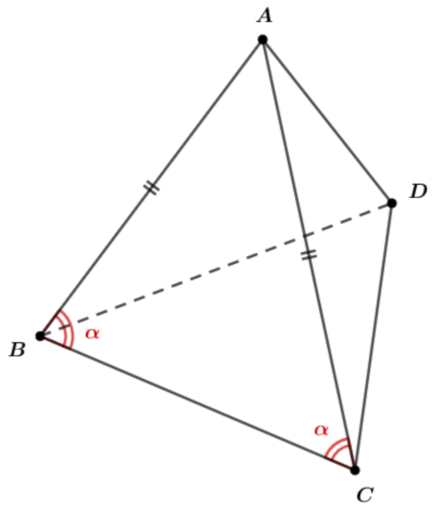
e) 4

Comentários

O segredo para resolver esse tipo de problema é saber interpretar as informações do enunciado.

Vamos por partes.

"Em um tetraedro $ABCD$, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são idênticos e a aresta AD é ortogonal à BC." Nessa informação, como $A\hat{B}C = A\hat{C}B$, podemos afirmar que a face ABC é um triângulo isósceles com $AB = AC$. Sendo a aresta AD ortogonal à BC, temos que AD é reversa e forma um ângulo reto com BC.



"A área do ΔABC é igual à área do ΔACD"

Aqui, temos:

$$\boxed{S_{ABC} = S_{ACD}\ (I)}$$

Vamos guardar essa informação.

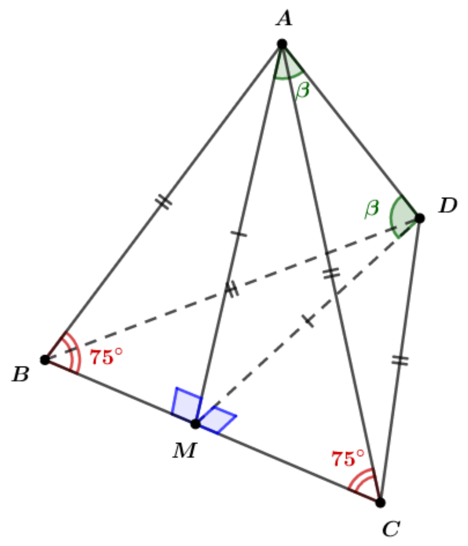
"...ângulo $M\hat{A}D$ é igual ao ângulo $M\widehat{D}A$, onde M é ponto médio de BC."

$M\hat{A}D = M\widehat{D}A$ implica que ΔAMD é isósceles com $MA = MD$.

Como $AB = AC, MA = MD$ e AD é ortogonal a BC, temos $BD = CD$. Logo, ΔBCD é isósceles.

Sendo M o ponto médio do segmento BC, e sendo ΔABC e ΔBCD isósceles, temos que MA e MD são perpendiculares a BC.

Ainda, $MD \perp BC$ e $MA = MD$ implica que $AB = AC = BD = CD$. Logo, $\Delta ABC \equiv \Delta BCD$.



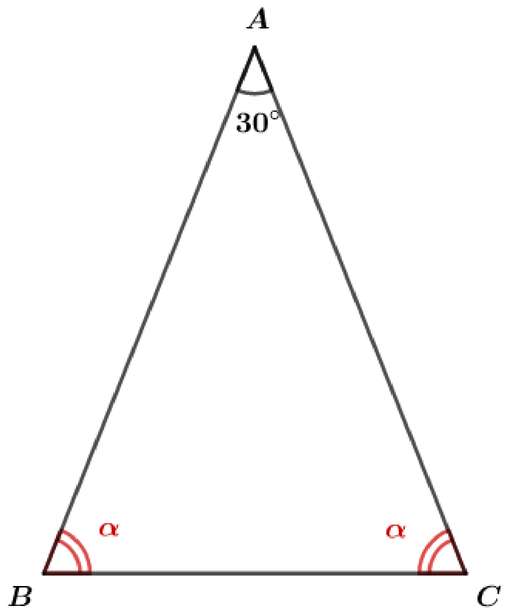
"Calcule a área total do tetraedro $ABCD$, em cm^2..."

Queremos saber o valor da área total do tetraedro, então, devemos calcular a soma da área das quatro faces dessa figura:

$$\boxed{S_T = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ABD} + S_{BCD}}$$

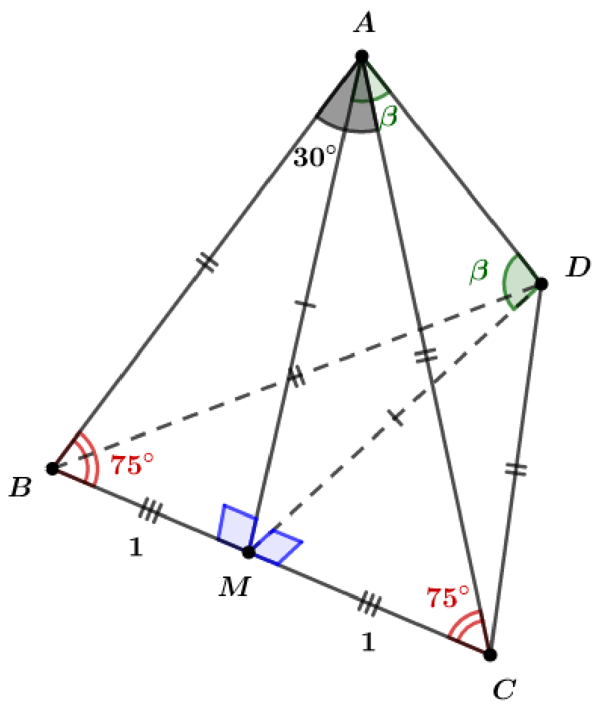
"...sabendo que $BC = 2cm$, e que o ângulo $B\hat{A}C$ é igual a 30°."

Se $BC = 2cm$, temos $BM = MC = 1cm$. Como $B\hat{A}C = 30°$, podemos calcular o valor de α do ΔABC:



$$30° + \alpha + \alpha = 180° \Rightarrow 2\alpha = 150° \Rightarrow \alpha = 75°$$

Assim, temos a seguinte figura:



Dado que temos o valor da aresta BC e os ângulos internos do ΔABC, podemos calcular a medida de AB, AC e AM. Usando as relações trigonométricas, temos:

$$tg(75°) = \frac{AM}{1} \Rightarrow AM = tg(45° + 35°) = \frac{tg(45°) + tg(30°)}{1 - tg(45°)tg(30°)} = \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$AM = MD = 2 + \sqrt{3}\ cm$$

Podemos calcular o valor da área do ΔABC:

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AM}{2} = \frac{2 \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

Da relação (I), temos:

$$\boxed{S_{ABC} = S_{ACD} = 2 + \sqrt{3}\ cm^2}$$

Como $\Delta ABC \equiv \Delta BCD$, temos:

$$\boxed{S_{ABC} = S_{BCD}}$$

Os triângulos ABD e ACD são isósceles com a mesma base AD, portanto:

$$\boxed{S_{ABD} = S_{ACD}}$$

Desse modo, podemos concluir:

$$S_{ABC} = S_{ACD} = S_{ABD} = S_{BCD} = 2 + \sqrt{3}\ cm^2$$

Assim, a área total é:

$$\boxed{S_T = 4\left(2 + \sqrt{3}\right) cm^2}$$

Gabarito: "d".

89. (IME/2018)

Um prisma retangular reto possui três arestas que formam uma progressão geométrica de razão 2. Sua área total é de 28 cm^2. Calcule o valor da diagonal do referido prisma.

a) $\sqrt{17}$ **cm**

b) $\sqrt{19}$ **cm**

c) $\sqrt{21}$ **cm**

d) $2\sqrt{7}$ **cm**

e) $\sqrt{29}$ **cm**

Comentários

Sejam x, y e z as arestas em P.G. de razão 2 do prisma. Sendo assim, é possível escrever o seguinte:

$$x = \frac{y}{2};$$

$$z = 2y;$$

Com isso,

$$S_{total} = 2(xy + xz + yz) = 2\left(y \cdot \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \cdot 2y + y \cdot 2y\right) = 2y^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 + 2\right) = 7y^2$$

Dado que $S_{total} = 28\ cm^2$, então:

$$7y^2 = 28 \therefore y = 2\ cm$$

Com isso,

$$x = 1\ cm;$$

$$z = 4\ cm;$$

Finalmente,

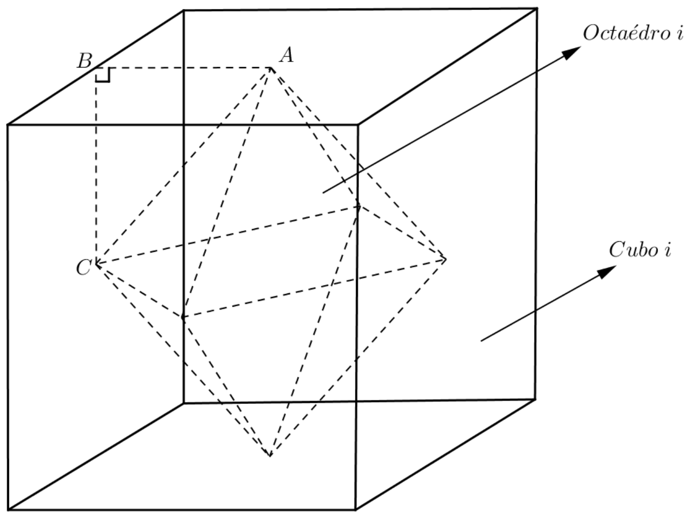
$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \therefore D = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} \therefore \boldsymbol{D = \sqrt{21}\ cm}$$

Gabarito: "c"

90. (IME/2018)

Seja um cubo regular, onde os centros de suas faces são vértices de um octaedro. Por sua vez, os centros das faces deste octaedro formado são vértices de outro cubo. Obtendo consecutivamente octaedros e cubos infinitamente, determine a razão da soma do volume de todos os poliedros inscritos pelo volume do cubo inicial.

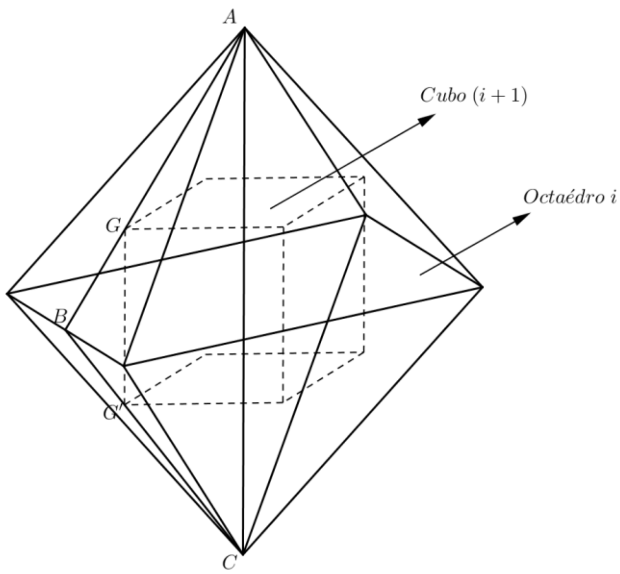
Comentários



Defina a aresta do cubo i como sendo a_i, com $a_i < a_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$ e a aresta do octaédro i como sendo a'_i, com $a'_i < a'_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$.

Na figura acima, por Pitágoras no ΔABC, temos:

$$\left(\frac{a_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_i}{2}\right)^2 = {a'_i}^2 \therefore a'_i = \frac{a_i}{\sqrt{2}}\ (I)$$



Agora, na figura acima, note que $\Delta ABC \sim \Delta GBG'$.

Com isso,

$$\frac{GG'}{AC} = \frac{GB}{AB}$$

Como G e G' são os baricentros das suas respectivas faces triangulares, chega-se a:

$$GB = \frac{AB}{3}$$

Daí,

$$GG' = \frac{AC}{3} \therefore a_{i+1} = \frac{2 \cdot \left(\frac{a'_i}{\sqrt{2}}\right)}{3} \therefore a_{i+1} = \frac{\sqrt{2}a'_1}{3}$$

Mas por (I) $a'_i = \frac{a_i}{\sqrt{2}}$, temos:

$$a_{i+1} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{a_i}{\sqrt{2}}}{3} \therefore a_{i+1} = \frac{a_i}{3} \therefore a_i = a_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \quad (II)$$

Daí,

$$a'_i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot a_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \quad (III)$$

Sendo V_i e V'_i os volumes do cubo e do octaédro i, respectivamente, temos:

$$V_i = a_i^3$$

$$V'_i = \frac{\sqrt{2}a'^3_i}{3} \therefore V'_i = \frac{a_i^3}{6}$$

Assim, $\sum_{i=2}^{\infty} V_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} V'_i$ correspondem à soma dos volumes de todos os cubos inscritos ao cubo maior e à soma de todos os octaedros inscritos ao cubo maior.

Agora, por (II) e (III), chega-se a:

$$\sum_{i=2}^{\infty} V_i = V_2 + V_3 + \cdots = {a_2}^3 + {a_3}^3 + \cdots = \left(\frac{a_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{a_1}{3^2}\right)^3 + \cdots = {a_1}^3 \cdot \left\{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right] + \left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^2 + \cdots\right\}$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} V_i = {a_1}^3 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3}\right] \therefore \sum_{i=2}^{\infty} V_i = \frac{{a_1}^3}{26} \quad (IV)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} V'_i = V'_1 + V'_2 + \cdots = \frac{{a_1}^3}{6} + \frac{{a_2}^3}{6} + \cdots = \frac{1}{6} \cdot ({a_1}^3 + {a_2}^3 + \cdots)$$

Note que no cálculo de (IV), foi obtido o valor da soma $({a_2}^3 + {a_3}^3 + \cdots)$. Como $({a_1}^3 + {a_2}^3 + \cdots) = {a_1}^3 + ({a_2}^3 + {a_3}^3 + \cdots) \therefore ({a_1}^3 + {a_2}^3 + \cdots) = {a_1}^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{26}\right) = \frac{27{a_1}^3}{26}$.

Logo,

$$\sum_{i=1}^{\infty} V'_i = \frac{1}{6} \cdot \frac{27{a_1}^3}{26} \therefore \sum_{i=1}^{\infty} V'_i = \frac{9{a_1}^3}{52} \quad (V)$$

Finalmente, por (IV) e (V), chega-se a:

$$\boldsymbol{\frac{\sum_{i=2}^{\infty} V_i + \sum_{i=1}^{\infty} V'_i}{V_1} = \frac{\frac{{a_1}^3}{26} + \frac{9{a_1}^3}{52}}{{a_1}^3} = \frac{1}{26} + \frac{9}{52} = \frac{11}{52}}$$

Gabarito: $\frac{11}{52}$

91. (IME/2017)

Um tronco de pirâmide regular possui 12 vértices. A soma dos perímetros das bases é 36 cm, a soma das áreas das bases é $30\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$ e sua altura mede 3 cm. Calcule o volume do tronco de pirâmide.

a) $50\ \mathrm{cm}^3$

b) $42\sqrt{3}/3\ \mathrm{cm}^3$

c) $43\sqrt{3}/2\ \mathrm{cm}^3$

d) $43\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$

e) $42\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$

Comentários

Sabendo que as bases desse tronco possuem o mesmo número de vértices, é possível inferir que se trata de um tronco de pirâmide de base hexagonal, como segue abaixo:

$$N_{vértices\ tronco} = 2N_{vértices\ base} = 12 \therefore N_{vértices\ base} = 6$$

Defina como sendo l_1 e l_2 as medidas das arestas hexagonais da base inferior e superior do tronco, respectivamente.

Dado que $S_{base}^{inferior} + S_{base}^{superior} = 30\sqrt{3}\ cm^2$ e $(2p)_{base}^{inferior} + (2p)_{base}^{superior} = 36\ cm$, temos:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot {l_1}^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot {l_2}^2 = 30\sqrt{3} \therefore {l_1}^2 + {l_2}^2 = 20\ cm^2 (I)$$

$$6l_1 + 6l_2 = 36 \therefore l_1 + l_2 = 6\ cm (II)$$

Elevando (II) ao quadrado e substituíndo (I) nesse resultado, então:

$$(l_1 + l_2)^2 = {l_1}^2 + {l_2}^2 + 2l_1 l_2 = 6^2 = 36 \therefore 20 + 2l_1 l_2 = 36 \therefore l_1 l_2 = 8\ cm^2 (III)$$

Finalmente, calculemos o volume do tronco de pirâmide hexagonal:

$$V = \frac{3}{3}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot {l_1}^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot {l_2}^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot l_1 l_2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\left[\left({l_1}^2 + {l_2}^2\right) + l_1 l_2\right]$$

Utilizando as equações (I) e (III), chega-se a:

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot[(20) + 8] = \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot 28 \therefore \boldsymbol{V = 42\sqrt{3}\ cm^3}$$

Gabarito: "e"

---

92. (IME/2016)

Sejam dois quadrados de lado a situados em planos distintos que são paralelos entre si e situados a uma distância d, um do outro. A reta que liga os centros dos quadrados é perpendicular a esses planos. Cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro quadrado. Liga-se cada vértice de cada quadrado aos dois vértices mais próximos do outro quadrado. Obtêm-se, assim, triângulos que, conjuntamente com os quadrados, formam um sólido S. Qual a distância entre estes planos distintos em função de a, de modo que os triângulos descritos acima sejam equiláteros?

a) $\frac{a}{2}$

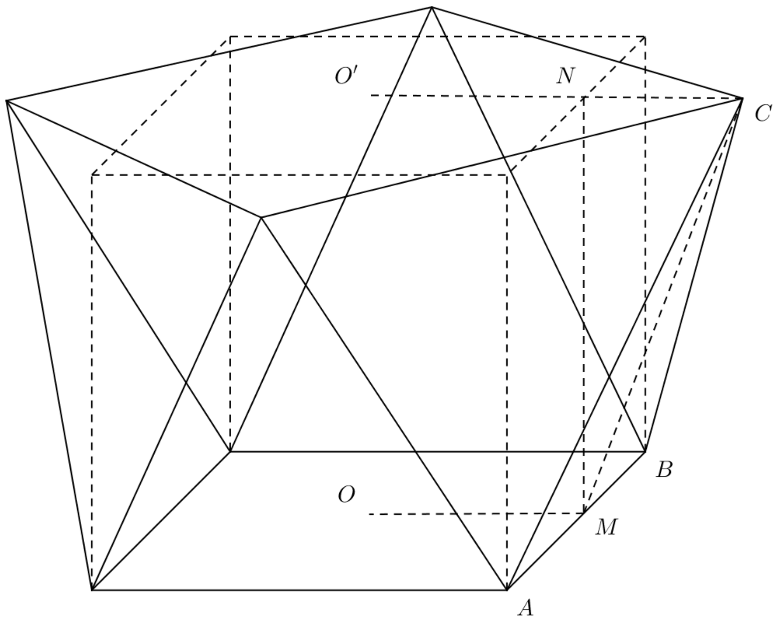
b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{a\sqrt{10}}{8}$

d) $\frac{a\sqrt[4]{8}}{2}$

e) $\frac{a(4-3\sqrt{2})}{2}$

Comentários



Dado que os planos dos dois quadrados de lado a são paralelos, temos:

$$NC = O'C - O'N = O'C - OM = \frac{\sqrt{2}a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Por Pitágoras no ΔMNC, chega-se a:

$$MC^2 = MN^2 + NC^2 \therefore MN = \sqrt{MC^2 - NC^2}$$

Como o ΔABC é equilátero de lado a, o segmento MC é a altura desse triângulo.

Assim,

$$MC = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Finalmente,

$$MN = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 - \left[\frac{a}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\right]^2} \therefore MN = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4}} \therefore MN = \sqrt{a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} \therefore$$

$$\boldsymbol{MN = \frac{a}{\sqrt[4]{2}} = \frac{a\sqrt[4]{8}}{2}}$$

Gabarito: "d"

93. (IME/2015)

Em um prisma oblíquo ABCDEFA'B'C'D'E'F', cuja base ABCDEF é um hexágono regular de lado a, a face lateral EFF'E' está inclinada 45° em relação à base, e a projeção ortogonal da aresta F'E' sobre a base ABCDEF coincide com a aresta BC. O volume do prisma é:

a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$

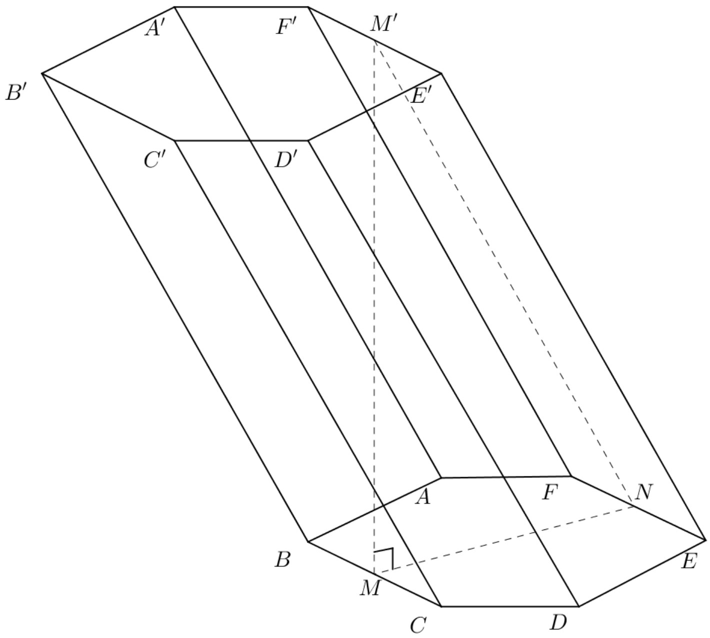
b) $\frac{9}{4}a^3$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{3}a^3$

d) $\frac{9}{2}a^3$

e) $\frac{5}{2}a^3$

Comentários



Sejam M e M' os pontos médios dos segmentos CB e $E'F'$, respectivamente, onde M é a projeção de M' sobre a base do prisma e N o ponto médio do segmento EF.

Dado que o ângulo entre o plano $EFF'E'$ e a base do prisma é $45°$, então:

$$\angle MNM' = 45°$$

No $\Delta MNM'$, temos:

$$\tan \angle MNM' = \tan 45° = \frac{MM'}{MN} \therefore MM' = H = MN$$

Mas pela figura, note que:

$$MN = CE = 2 \cdot (a \cos 30°) = \sqrt{3}a$$

Daí,

$$H = \sqrt{3}a$$

Finalmente,

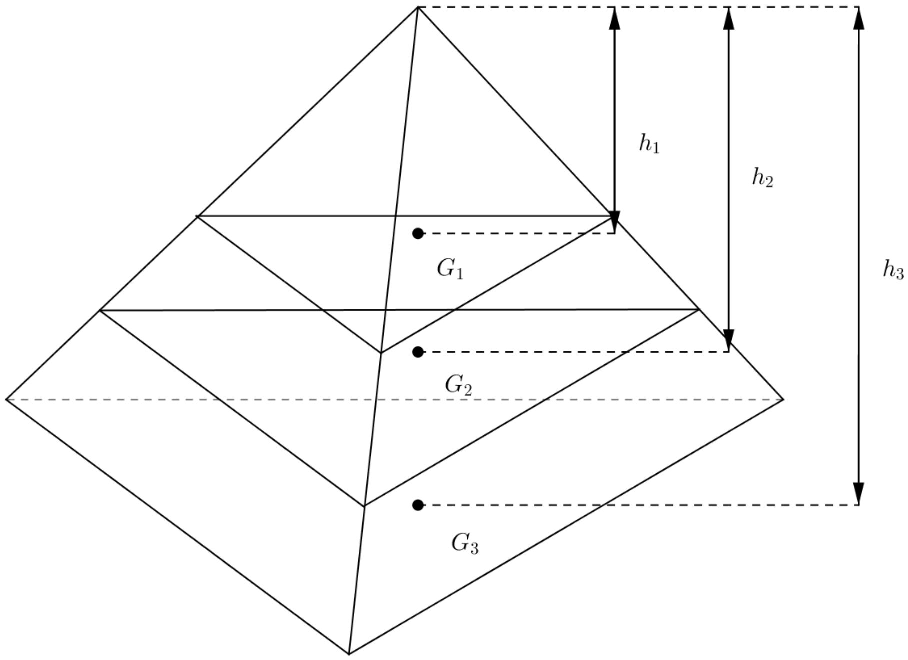
$$V = S_{base\ hexagonal} \cdot H \therefore V = \left(\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3}a\right) \therefore \boldsymbol{V} = \frac{\mathbf{9}\boldsymbol{a}^{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$$

Gabarito: “d”

94. (IME/2015)

Um tetraedro regular, com arestas de comprimento igual a d, é cortado por 2 planos paralelos entre si e a uma das bases, dividindo-o em 3 sólidos de volumes iguais. Determine a altura de cada um destes 3 sólidos em função de d.

Comentários



Note que as três pirâmides cujas alturas são $h = (h_1 + h_2), h_1\ e\ h_2$ são semelhantes entre si. Com isso, sejam $k_1\ e\ k_2$ a razão de semelhança entre as pirâmides de altura h_1 e h e entre as de altura h_2 e h, respectivamente.

Com isso,

$$h_1 = k_1 \cdot h \text{ e } d_1 = k_1 \cdot d \Rightarrow S_1 = {k_1}^2 \cdot S \Rightarrow V_1 = {k_1}^3 \cdot V\ ;$$

$$h_2 = k_2 \cdot h \text{ e } d_2 = k_2 \cdot d \Rightarrow\ S_2 = {k_2}^2 \cdot S \Rightarrow V_2 = {k_2}^3 \cdot V\ ;$$

Dado que $V_2 - V_1 = V_1 = V - V_2$, então:

$${k_2}^3 \cdot V - {k_1}^3 \cdot V = {k_1}^3 \cdot V = V - {k_2}^3 \cdot V \therefore \begin{cases} k_1 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ k_2 = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} \end{cases}$$

Como h é a altura de um tetraedro regular de aresta d, chega-se a:

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot d$$

Finalmente, as alturas dos sólidos formados serão dadas por:

$$h_{sólido}^{1} = h_1 = k_1 \cdot h = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} d \therefore \boldsymbol{h_{sólido}^{1}} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{6}d}}{\boldsymbol{3\sqrt[3]{3}}}$$

$$h_{sólido}^{2} = h_2 - h_1 = (k_2 - k_1) \cdot h = \left(\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{3}}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} d \therefore \boldsymbol{h_{sólido}^{2}} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{6} \cdot (\sqrt[3]{2} - 1)d}}{\boldsymbol{3\sqrt[3]{3}}}$$

$$h_{sólido}^{3} = h - h_2 = (1 - k_2) \cdot h = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} d \therefore \boldsymbol{h_{sólido}^{3}} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{6} \cdot (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})d}}{\boldsymbol{3\sqrt[3]{3}}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{h_{sólido}^{1} = \frac{\sqrt{6}d}{3\sqrt[3]{3}}; h_{sólido}^{2} = \frac{\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt[3]{2}-1\right)d}{3\sqrt[3]{3}}; h_{sólido}^{3} = \frac{\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)d}{3\sqrt[3]{3}}}$

---

95. (IME/2015)

Seja um tetraedro regular ABCD de aresta a e um octaedro inscrito no tetraedro, com seus vértices posicionados nos pontos médios das arestas do tetraedro. Obtenha a área da seção do octaedro formada pelo plano horizontal paralelo à base do tetraedro BCD, distando desta base de um quarto da altura do tetraedro.

a) $\frac{\sqrt{3}}{192}a^2$

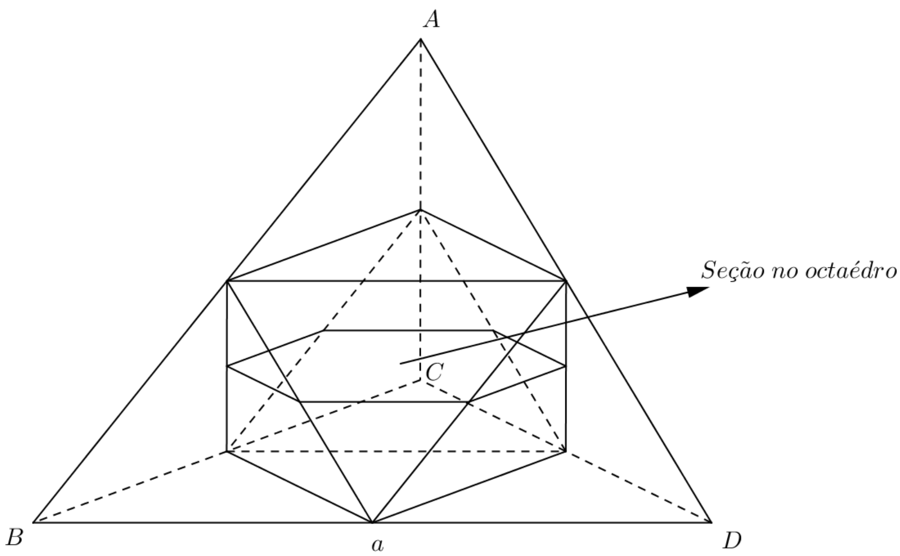
b) $\frac{\sqrt{3}}{96}a^2$

c) $\frac{3\sqrt{3}}{32}a^2$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{64}a^2$

e) $\frac{9\sqrt{3}}{64}a^2$

Comentários



Na figura acima, note que cada aresta do octaedro inscrito ao tetraedro é a metade da aresta do tetraedro.

Da mesma maneira, cada aresta da seção hexagonal é a metade da aresta do octaedro.

Daí, sendo x a medida da aresta da secção hexagonal regular, temos:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \therefore x = \frac{a}{4}$$

Portanto,

$$S_{seção} = \frac{3\sqrt{3} \cdot x^2}{2} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \left(\frac{a}{4}\right)^2}{2} \therefore \boldsymbol{S_{seção} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{32}}$$

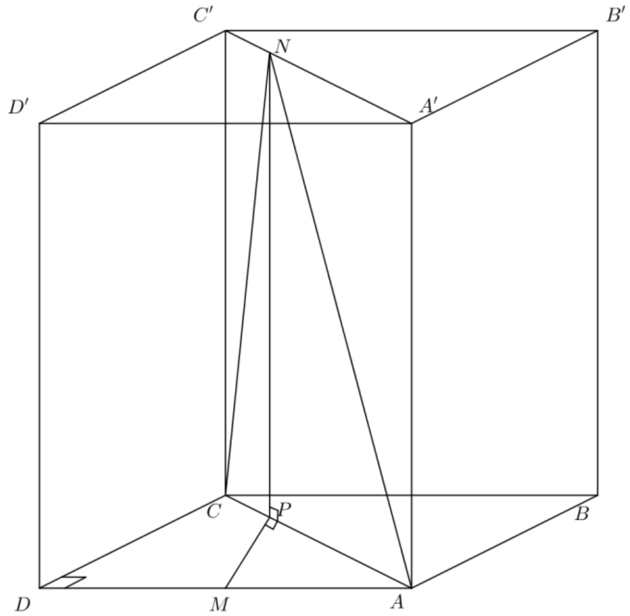
Gabarito: “c”

---

96. (IME/2014)

Seja ABCDA'B'C'D' um prisma reto de base retangular ABCD. Projeta-se o ponto médio M da maior aresta da base sobre a diagonal AC, obtendo-se o ponto P. Em seguida projeta-se o ponto P na face oposta, obtendo-se o ponto N. Sabe-se que $\left|\overline{NA}^2 - \overline{NC}^2\right| = \boldsymbol{k}$. Determine o comprimento da menor aresta da base.

Comentários



Sejam a e b os lados da base retangular do prisma, com $b = AD > a = AB$.

Por Pitágoras no ΔNPA e no ΔNPC, temos:

$$NA^2 = PA^2 + PN^2 \therefore PN^2 = NA^2 - PA^2;$$

$$NC^2 = PC^2 + PN^2 \therefore PN^2 = NC^2 - PC^2;$$

Daí,

$$NA^2 - PA^2 = NC^2 - PC^2 \therefore NA^2 - NC^2 = PA^2 - PC^2$$

Pela figura, note que o $\Delta ABC \sim \Delta AMP$.

Com isso,

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AM}{PA} \therefore \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)}{PA} \therefore PA = \frac{b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

Logo,

$$PC = AC - PA \therefore PC = \sqrt{a^2+b^2} - \frac{b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} \therefore PC = \frac{2(a^2+b^2)-b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} \therefore PC = \frac{2a^2+b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

Finalmente,

$$NA^2 - NC^2 = \left(\frac{b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 - \left(\frac{2a^2+b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{b^4-(2a^2+b^2)^2}{4(a^2+b^2)} = -\frac{4a^4+4a^2b^2}{4(a^2+b^2)} \therefore$$

$$NA^2 - NC^2 = -\frac{4a^2\cdot(a^2+b^2)}{4(a^2+b^2)} = -a^2 \therefore$$

$$|NA^2 - NC^2| = a^2 \therefore a = \sqrt{|NA^2-NC^2|} \therefore \boldsymbol{a} = \sqrt{\boldsymbol{k}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{a = \sqrt{k}}$

97. (IME/2014)

Seja SABCD uma pirâmide, cuja base é um quadrilátero convexo ABCD. A aresta SD é a altura da pirâmide. Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{5}$, $\overline{AD} = \overline{DC} = \sqrt{2}$, $\overline{AC} = 2$ e $\overline{SA} + \overline{SB} = 7$. O volume da pirâmide é

a) $\sqrt{5}$

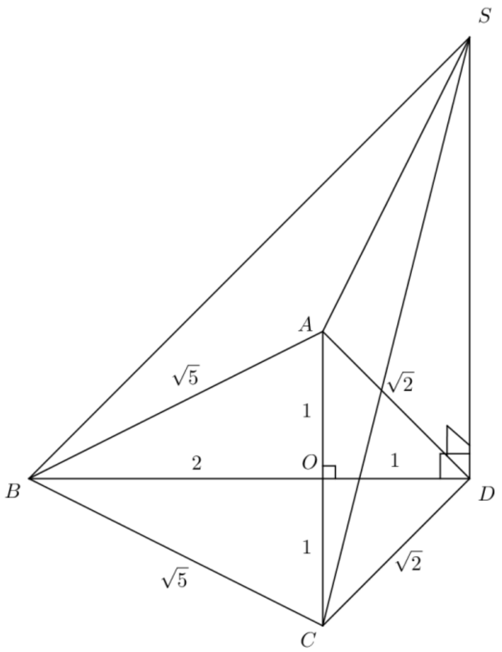
b) $\sqrt{7}$

c) $\sqrt{11}$

d) $\sqrt{13}$

e) $\sqrt{17}$

Comentários



No ΔABO e no ΔADO, por Pitágoras, chega-se a:

$$AB^2 = BO^2 + AO^2 \therefore BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1} = 2 \therefore BO = 2$$

$$AD^2 = DO^2 + AO^2 \therefore DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1} = 1 \therefore DO = 1$$

Com isso,

$$S_{base} = S_{ACD} + S_{ABC} = \frac{AC \cdot DO}{2} + \frac{AC \cdot BO}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} = 1 + 2 = 3 \therefore S_{base} = 3$$

Agora, por Pitágoras no ΔSAD e no ΔSBD, temos:

$$SA^2 = AD^2 + DS^2 \therefore DS^2 = SA^2 - 2$$
$$SB^2 = BD^2 + DS^2 \therefore DS^2 = SB^2 - 9$$

Igualando ambos os termos, chega-se a:

$$SA^2 - 2 = SB^2 - 9 \therefore SB^2 - SA^2 = 7 \therefore (SB - SA) \cdot (SB + SA) = 7$$

Mas é dado que $SB + SA = 7\ (I)$.

Daí,

$$SB - SA = 1\ (II)$$

Por (I) e (II), então:

$$SB = 4 \therefore DS^2 = 4^2 - 9 = 7 \therefore DS = \sqrt{7}$$

Finalmente,

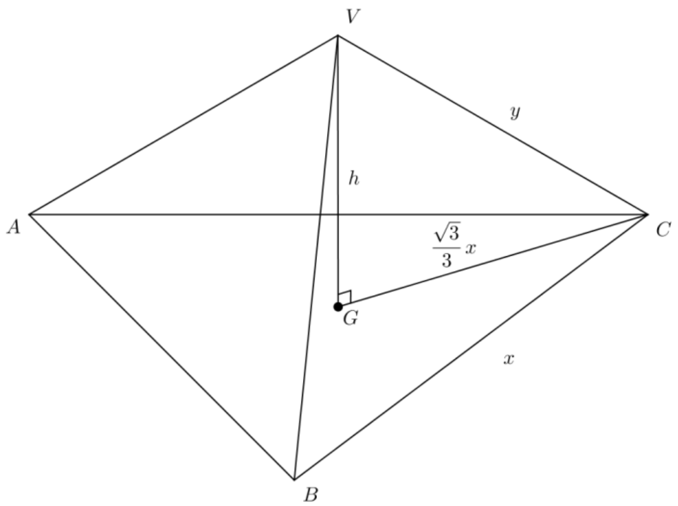
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{base} \cdot SD = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{7} \therefore \boldsymbol{V = \sqrt{7}}$$

Gabarito: "b"

98. (IME/2012)

Uma pirâmide regular triangular apresenta um volume V. Determine o raio da circunferência circunscrita a uma das faces laterais da pirâmide em função de V, sabendo que o ângulo do vértice vale 30°.

Comentários



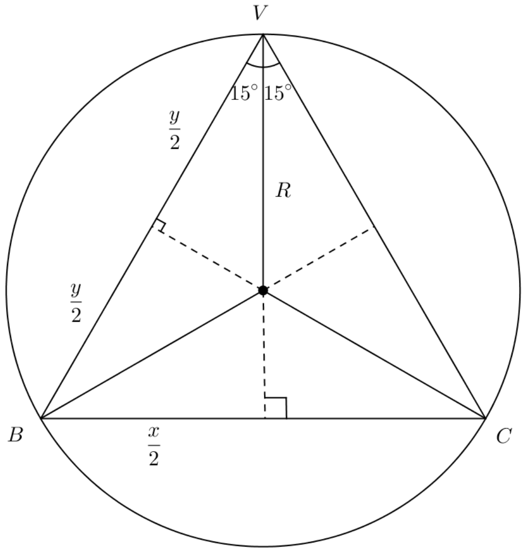
Sejam x , y e h as arestas da base e laterais e a altura da pirâmide, respectivamente.

Pela figura acima, sendo G o baricentro do ΔABC, temos:

$$GC = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x;$$

Por Pitágoras no ΔVGC, então:

$$y^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x\right)^2\ (I)$$



Agora, observe a figura acima, representativa de uma das faces da pirâmide com sua respectiva circunferência circunscrita.

Pelas relações trigonométricas aplicadas à figura, chega-se a:

$$\frac{y}{2} = R\cos 15° \therefore y = 2R\cos 15°$$

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)\csc 15° \ (II)$$

Igualando ambas as equações, temos:

$$2R\cos 15° = \left(\frac{x}{2}\right)\csc 15° \therefore x = 2R \cdot (2\text{sen } 15° \cdot \cos 15°) \therefore x = 2R \text{ sen } 30° \therefore x = R \ (III)$$

Substituindo (II) e (III) em (I), chega-se a:

$$\left[\left(\frac{x}{2}\right)\csc 15°\right]^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x\right)^2 \therefore h^2 = x^2 \cdot \left(\frac{\csc^2 15°}{4} - \frac{1}{3}\right) = R^2 \cdot \left(\frac{\csc^2 15°}{4} - \frac{1}{3}\right) \therefore$$

$$h^2 = R^2 \cdot \left(\frac{\csc^2 15°}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{R^2}{4\text{ sen}^2 15°} - \frac{R^2}{3} \therefore$$

Mas,

$$\text{sen}^2 15° = \frac{1 - \cos 30°}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \therefore \text{sen}^2 15° = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

Daí,

$$h^2 = \frac{R^2}{4 \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{4}} - \frac{R^2}{3} = R^2 \cdot \left(2 + \sqrt{3} - \frac{1}{3}\right) \therefore h^2 = R^2 \cdot \left(\frac{5 + 3\sqrt{3}}{3}\right) \therefore h = R \cdot \sqrt{\frac{5+3\sqrt{3}}{3}}$$

Finalmente,

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{base}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}x^2}{4}\right)\cdot\left(R\cdot\sqrt{\frac{5+3\sqrt{3}}{3}}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}\cdot R^2}{4}\right)\cdot R\cdot\sqrt{\frac{5+3\sqrt{3}}{3}}\therefore$$

$$V=\frac{R^3}{3\cdot 4}\cdot\left(\sqrt{5+3\sqrt{3}}\right)=\frac{R^3\cdot\sqrt{5+3\sqrt{3}}}{12}\therefore \boldsymbol{R}=\sqrt[3]{\frac{\mathbf{12}\boldsymbol{V}}{\sqrt{\mathbf{5}+\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}}}}}$$

Gabarito: $R=\sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{5+3\sqrt{3}}}}$

---

99. (IME/2012)

Uma pirâmide regular possui como base um dodecágono de aresta a. As faces laterais fazem um ângulo de $15°$ com o plano da base. Determine o volume desta pirâmide em função de a.

a) $\frac{a^3}{2}\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

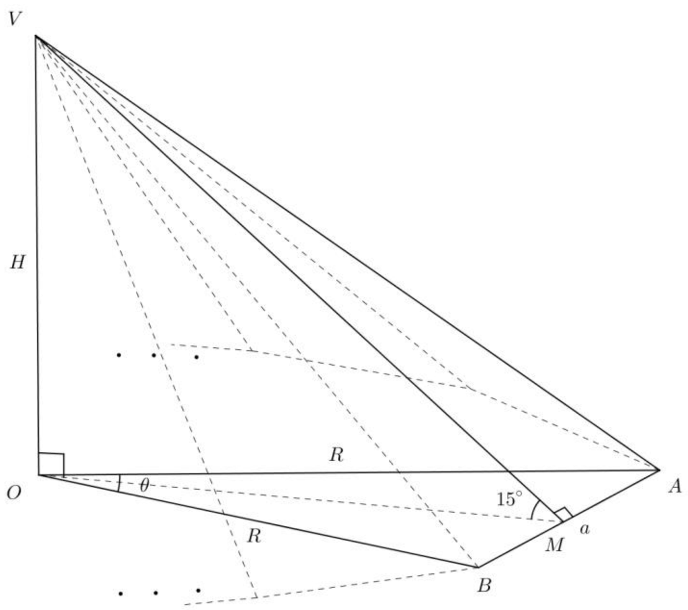
b) $\frac{a^3}{2}\frac{\sqrt{\sqrt{3}-2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

c) $a^3\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

d) $a^3\frac{\sqrt{\sqrt{3}-2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

e) $a^3\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{3}+2}}$

Comentários



Para cada aresta do dodecágono, tem-se um ângulo θ.

Logo,

$$12\theta=360°\therefore\theta=30°$$

Utilizando a lei dos cossenos no ΔOAB, chega-se a:

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 30° \therefore 2R^2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a^2 \therefore R = \frac{a}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

Com isso, sendo M o ponto médio do lado AB, temos:

$$H = OM \cdot \tan 15°$$

Mas note que:

$$S_{OAB} = \frac{R^2 \cdot \text{sen } 30°}{2} = \frac{a \cdot OM}{2} \therefore OM = \frac{R^2}{2a} = \frac{a^2}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2a} \therefore OM = \frac{a}{2} \cdot (2 + \sqrt{3})$$

Daí,

$$H = \frac{a}{2} \cdot (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) \therefore H = \frac{a}{2}$$

Agora, calculemos a área da base dodecagonal:

$$S_{base} = 12 S_{OAB} = 12 \cdot \frac{R^2 \cdot \text{sen } 30°}{2} = 3R^2 = 3 \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}\right)^2 \therefore S_{base} = \frac{3a^2}{(2 - \sqrt{3})}$$

Finalmente,

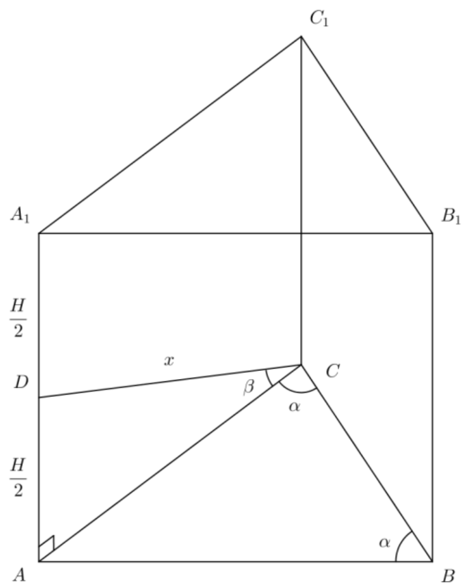
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{base} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{(2 - \sqrt{3})} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right) \therefore \boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{a^3}}{\boldsymbol{2}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{\boldsymbol{3}} + \boldsymbol{2}}}{\sqrt{\boldsymbol{2} - \sqrt{\boldsymbol{3}}}}$$

Gabarito: “a”

100.(IME/2011)

A base de um prisma reto $ABCA_1B_1C_1$ é um triângulo com o lado AB igual ao lado AC. O valor do segmento CD vale x, onde D é o ponto médio da aresta lateral AA_1. Sabendo que α é o ângulo $A\hat{C}B$ e β é o ângulo $D\hat{C}A$, determine a área lateral do prisma em função de x, α e β.

Comentários



No ΔACD, note que:

$$AC = AB = x\cos\beta \ \ (I)$$

Com isso, utilizando a lei dos cossenos no ΔABC pelo vético A, chega-se a:

$$BC^2 = 2(x\cos\beta)^2 \cdot (1 - \cos(180° - 2\alpha)) \therefore BC^2 = 2(x\cos\beta)^2 \cdot (1 + \cos 2\alpha) \therefore$$

$$BC^2 = 2(x\cos\beta)^2 \cdot (2\cos^2\alpha) \therefore BC = 2x\cos\alpha\cos\beta \ \ (II)$$

Além disso, novamente no ΔACD, temos:

$$\frac{H}{2} = x \operatorname{sen}\beta \therefore H = 2x \operatorname{sen}\beta \ \ (III)$$

Daí, por (I), (II) e (III), então:

$$S_{lateral} = (AC + BC + AB) \cdot H$$

$$S_{lateral} = (x\cos\beta + 2x\cos\alpha\cos\beta + x\cos\beta) \cdot (2x \operatorname{sen}\beta)$$

$$S_{lateral} = 2x^2 \cdot 2\operatorname{sen}\beta\cos\beta \cdot (1 + \cos\alpha)$$

$$\therefore \boldsymbol{S_{lateral} = 2x^2 \sin 2\beta \cdot (1 + \cos\beta)}$$

Gabarito: $S_{lateral} = 2x^2 \sin 2\beta \cdot (1 + \cos\beta)$

101.(IME/2011)

A base de uma pirâmide é um retângulo de área S. Sabe-se que duas de suas faces laterais são perpendiculares ao plano da base. As outras duas faces formam ângulos de 30° e 60° com a base. O volume da pirâmide é:

a) $\frac{S\sqrt{S}}{3}$

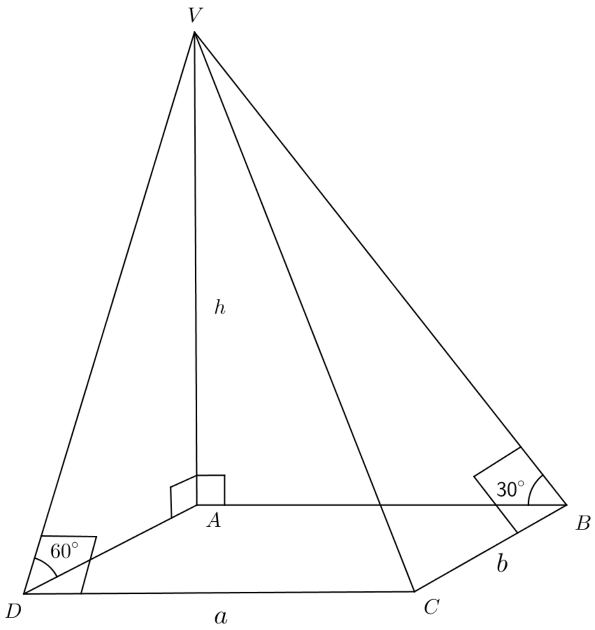
b) $\frac{S\sqrt{S}}{6}$

c) $\frac{2S\sqrt{S}}{3}$

d) $\frac{2S\sqrt{S}}{5}$

e) $\frac{2S^2}{3}$

Comentários



Sabendo que $\overrightarrow{VA} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, temos:

$$(A - V) \cdot (C - D) = (D - A) \cdot (C - D) \therefore (C - D) \cdot (V - D) = 0 \therefore \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{VD} = 0$$

E, analogamente:

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{VB} = 0$$

Com isso, o ângulo entre a face VCD e a base é o mesmo entre as retas VD e DA, que é 60°. E, de forma análoga, o ângulo entre a face VBC e a base é o mesmo entre as retas VB e BA, que é 30°.

Agora, chame de h a altura dessa pirâmide e de a e b as medidas dos lados da base retangular, como representado na figura acima.

Note que

$$h = a \tan 30° = b \tan 60° \therefore a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = b \cdot \sqrt{3} \therefore a = 3b\ (I)$$

$$S = ab\ (II)$$

Substituindo (I) em (II), chega-se a:

$$S = (3b) \cdot b \therefore S = 3b^2 \therefore b = \sqrt{\frac{S}{3}}$$

Daí,

$$h = \sqrt{\frac{S}{3}} \cdot \sqrt{3} \therefore h = \sqrt{S}$$

Finalmente,

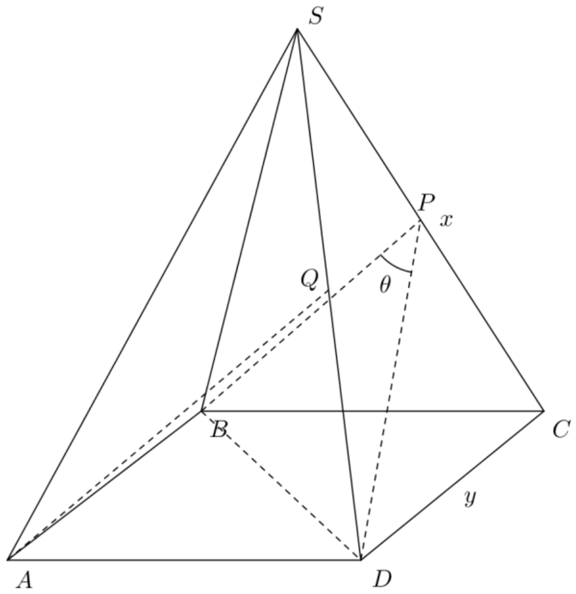
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \sqrt{S} \therefore \boldsymbol{V = \frac{S\sqrt{S}}{3}}$$

Gabarito: “a”

102.(IME/2010)

A área da superfície lateral de uma pirâmide quadrangular regular SABCD é duas vezes maior do que a área de sua base ABCD. Nas faces SAD e SDC traçam-se as medianas AQ e DP. Calcule o ângulo entre estas medianas.

Comentários



Sejam x e y as arestas lateral e da base, respectivamente, da pirâmide em questão.

Dado que $S_{lateral} = 2S_{base}$, então:

$$4 \cdot \frac{y \cdot h}{2} = 2 \cdot y^2 \therefore h = y$$

Onde h é a altura em relação ao vértice S da face triangular.

Como $h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}$, chega-se a:

$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} = y \therefore x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = y^2 \therefore x^2 = \frac{5y^2}{4} \therefore x = \frac{\sqrt{5}y}{2}\ (I)$$

Agora, note que o segmento BP é a projeção do segmento AQ na face BCS, ou seja, AQ e BP paralelas entre si.

Sendo assim, o ângulo entre os segmentos AQ e DP é mesmo entre os segmentos BP e DP, aqui designado por θ, como representado na figura acima.

Com isso, utilizando a lei dos cossenos no ΔBPD em relação ao vértice P, temos:

$$BD^2 = BP^2 + DP^2 - 2 \cdot BP \cdot DP \cdot \cos\theta\ \ (II)$$

Pela figura, note que $BP = DP = m$, que é a mediana da face por um vértice da base, pode ser obtida pela fórmula da mediana de um Δ qualquer, como segue abaixo:

$$4m^2 = 2x^2 + 2y^2 - x^2 = x^2 + 2y^2$$

Substituindo y por (I) acima, chega-se a:

$$4m^2 = \left(\frac{\sqrt{5}y}{2}\right)^2 + 2y^2 = \frac{5y^2}{4} + 2y^2 = \frac{13y^2}{4} \therefore m = \frac{\sqrt{13}y}{4} \ (III)$$

Finalmente, substituindo (III) em (II) e sabendo que $BD = \sqrt{2}y$, temos:

$$\left(\sqrt{2}y\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{13}y}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}y}{4}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{13}y}{4}\right)^2 \cdot \cos\theta \therefore 2 = \frac{13}{16} + \frac{13}{16} - \frac{13}{8} \cdot \cos\theta \therefore$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{13}{8} - 2}{\frac{13}{8}} \therefore \boldsymbol{\cos\theta = -\frac{3}{13}}$$

Logo, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{13}\right)$, já que θ é o menor ângulo entre as retas.

Gabarito: $\boldsymbol{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{13}\right)}$

---

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final da aula. Vimos os conceitos de Geometria de Posição, que será a base para o nosso estudo de Geometria Espacial. Com ela, podemos analisar todos os assuntos que podem ser cobrados nas provas sobre esse tema, tais como ângulo entre planos, ângulo entre faces, distância entre planos etc. Também estudamos as propriedades e características dos poliedros.

Para aprender Geometria Espacial, é importante que você consiga desenhar os sólidos e saiba como extrair as informações a partir da figura. Isso, normalmente, você adquire com a prática. Então, tente resolver a maior quantidade de questões possível!

Na próxima aula, daremos continuidade a esse tema e estudaremos os sólidos redondos e os sólidos de revolução.

Quaisquer dúvidas, você pode entrar em contato conosco pelo fórum de dúvidas ou caso prefira:

FALE COMIGO

/profvictorso

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Iezzi, Gelson. Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial. 7. ed. Atual, 2013. 472p.

[2] Netto, Sergio. A Matemática no Vestibular do IME. 1 ed. Vestseller, 2011. 696p.

[3] Lidski, V.B.; Ovsianikov, L.V.; Tulaikov, A.N.; Shabunin, M.I. Problemas de Matemática Elementar. 1 ed. Vestseller, 2014. 477p.

[4] Carvalho, Paulo. Introdução à Geometria Espacial. 4 ed. SBM, 2005. 93p.

[5] A. V. Pogorelov, Geometría elemental, trad. para o espanhol por Carlos Vega, Ed. Mir, Moscou, 1974.

[6] Machado, Paulo. Fundamentos de Geometria Espacial. CAED-UFMG, 2012. 119p.