POSIÇÕES ENTRE RETAS

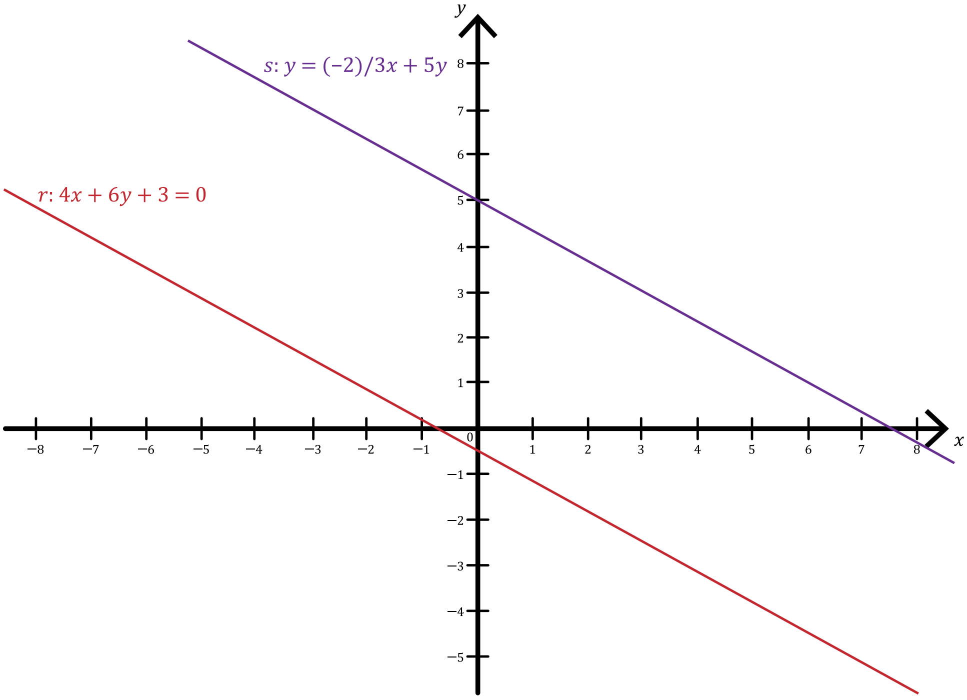
Ao imaginarmos duas retas distintas, podemos imaginá-las no plano ou no espaço. Quando as imaginamos no plano, dizemos que elas são coplanares, ou sejam ambas as retas estão contidas no mesmo plano. No nosso caso, o plano que estamos trabalhando é o plano cartesiano. Estando no mesmo plano, podemos imaginar algumas situações: as retas podem "se cortar", podem não ter nenhum ponto em comum ou até mesmo ter todos os pontos em comum. Você consegue imaginar alguma outra situação? Se a resposta for sim, analise novamente e veja se não se encaixa em nenhuma das opções anteriores pois são as únicas possíveis no plano.

Recorrentemente os matemáticos tem buscado o auxílio da álgebra para estudar a geometria, principalmente no plano cartesiano. Aqui não será diferente. Devemos recordar que toda reta possui uma equação que representa ela no plano cartesiano e será por meio das equações dessas retas que identificaremos a posição de uma reta em relação a outra. Com base nos coeficientes seremos capazes de classificar duas retas em paralelas distintas, paralelas coincidentes, concorrentes perpendiculares ou concorrentes oblíquas. Mas antes de tudo, vamos relembrar os significados destes conceitos:

Duas retas, r e s, são ditas paralelas distintas quando não possuem nenhum ponto em comum, ou seja, se o ponto A pertence a reta r, então ele não pertence a reta s. Em contraponto com isso, as retas paralelas coincidentes são as retas que possuem todos os pontos em comum, ou seja, qualquer que seja o ponto pertencente a reta r ele também pertence a reta s.

Duas retas, r e s, são ditas concorrentes quando possuem um ponto em comum, ou seja, se o ponto A pertence a reta r, então ele também pertence a reta s e é o único que pertence as duas simultaneamente. Quando o ângulo formado pela interseção de duas retas é igual à 90º, dizemos que elas são perpendiculares. Quando é diferente de 90º, dizemos que elas são oblíquas;

Relembrado os conceitos acima, vamos aprender como podemos identificar a posição relativa de duas retas analisando apenas a sua equação. Vamos esboçar no plano cartesiano as retas cujas equações são r: $4x+6y+3=0$ e s: $y = -\frac{2}{3}x + 5$.



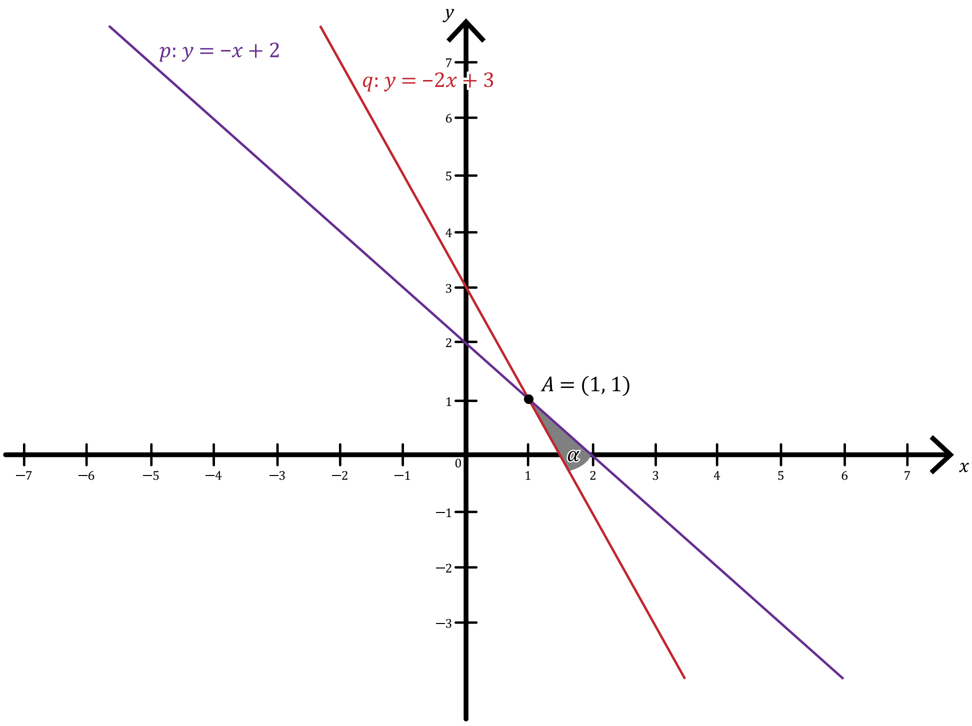
Primeiramente devemos notar que a equação de uma reta está na forma reduzida e a outra na forma geral. Sempre quando quisermos realizar a comparação de dois objetos, devemos sempre os representar do mesmo modo. No caso das retas, devemos utilizar sempre a equação reduzida: $y = ax + b$, uma vez que utilizaremos os coeficientes para estabelecer a posição relativa entre duas retas.

A reta s já se encontra na forma reduzida $y = -\frac{2}{3}x + 5$, ao colocarmos a reta r na forma reduzida teremos $y = -\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}$. Você consegue identificar alguma relação entre as duas equações? Exato! Ambas as retas possuem o valor do coeficiente angular igual à $a = -\frac{2}{3}$. Isso irá definir quando duas retas serão paralelas: o mesmo coeficiente angular. Podemos adotar a seguinte definição para retas paralelas no plano: Dizemos que as retas, r e s, são **paralelas** quando possuem o mesmo coeficiente angular.

OBS: As retas r e s são também chamadas de **paralelas distintas**. Pois os seus coeficiente lineares são diferentes.

Já as retas paralelas coincidentes não há tanto segredo. Vamos considerar as retas m: $-4x+2y-8=0$ e n: $y=2x+4$. Ao esboçarmos essas retas no plano cartesiano, perceberemos que teremos apenas uma reta, uma vez que estas equações geram a mesma reta. As retas coincidentes podem também ser chamadas de **paralelas coincidentes**. Isso ocorre pois tanto o coeficiente angular e o coeficiente linear das retas são iguais.

Por outro lado, temos também as retas concorrentes, que terá relação com a distinção entre os coeficientes angulares de duas retas. Neste caso, elas têm um ponto em comum. Vamos esboçar as retas p: $y=-x+2$ e q: $y=-2x+3$. Por terem coeficientes angulares distintos, as retas não serão paralelas e se interceptarão em um determinado ponto, aqui chamado A. Diremos então que as retas r e s são concorrentes quando possuem coeficientes angulares distintos.



Neste momento, o objetivo será apenas o ponto de interseção. Em outro momento buscaremos analisar o ângulo formado entre as retas. Por enquanto, além de identificarmos que as retas p e q são concorrentes, queremos determinar o ponto em que elas se interceptam, para isso não tem muito segredo, basta igualar as equações das duas retas em questão, resultando:

$$-x + 2 = -2x + 3$$

Você deve estar se perguntando: Por quê? Vamos lá! Para um ponto $P = (x, y)$ do plano, podemos verificar se ele satisfaz a equação de uma determinada reta. Para isso, ao substituirmos o valor de x do ponto P na equação da reta, o valor de y obtido deve coincidir com a segunda coordenada do ponto P. No caso de retas concorrentes, existe um único ponto que satisfaz ambas as equações simultaneamente, ou seja, existe um ponto $I = (x_0, y_0)$ que ao substituirmos x_0 nas duas equações resultará no mesmo y_0. Contudo, esse ponto não nos é dado, então, ao igualarmos as duas equações, estamos buscando o valor de x_0 que quando substituído nas duas equações resulta no mesmo y_0.

Para o exemplo anterior, vamos resolver a expressão obtida ao igualar as duas equações para encontrarmos o valor de x:

$$-x + 2 = -2x + 3$$

$$-x + 2x = 3 - 2$$

$$x = 1$$

Agora que encontramos o valor de x, voltamos em uma das equações da reta para encontrar y e assim obtermos o ponto de interseção.

$$y = -x + 2$$

$$y = -1 + 2$$

$$y = 1$$

Portanto, o ponto de interseção será $A = (1, 1)$, que coincide com o ponto representado no plano cartesiano. Anteriormente classificamos as retas concorrentes em oblíquas e perpendiculares. Neste caso, podemos observar que o ângulo α é menor que 90º, logo será obliquo. Por outro lado, para saber se duas retas r e s são concorrentes e perpendiculares, temos que a relação dos seus coeficientes angulares (a_r e a_s) deve ser:

$$a_r = -\frac{1}{a_s}$$

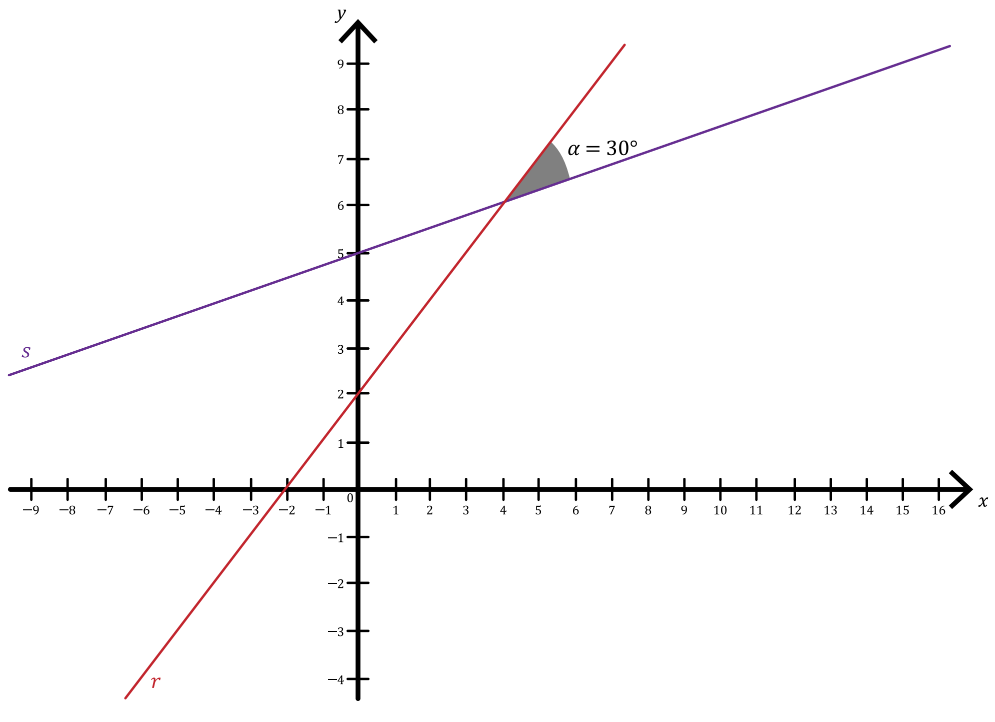
Mas será que precisamos ficar refém apenas da representação geométrica? A resposta é não.

ÂNGULO ENTRE RETAS

Nosso foco agora é no ângulo formado entre duas retas. Para iniciarmos a discussão, utilizaremos as retas r: $x - y + 2 = 0$ e s: $(2-\sqrt{3})x - y + 5 = 0$. O primeiro passo é sempre passarmos as retas para suas respectivas equações reduzidas, pois nesta temos claramente quem são os coeficientes. r: $y = x + 2$ e s: $y = (2-\sqrt{3})x + 5$. Existe uma fórmula que permite calcular o valor da tangente do ângulo gerado pela interseção de duas retas, dado por:

Sejam p: $y = m_1x + b$ e q: $y = m_2x + c$ duas retas. O valor da tangente do ângulo formado entre elas será:

$$tg(\theta) = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|.$$



Agora que temos a fórmula, podemos utilizá-la para as retas r e s, tendo $m_1 = 1$ e $m_2 = 2-\sqrt{3}$. Substituindo os valores na fórmula, temos:

$$tg(\theta) = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|.$$

$$tg(\theta) = \left|\frac{1-(2-\sqrt{3})}{1+1\cdot(2-\sqrt{3})}\right|$$

$$tg(\theta) = \left|\frac{-1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right|$$

Podemos tirar o módulo, pois o resultado da fração dá positivo. Em seguida, vamos racionalizar a fração obtida e simplificar, resultando em:

$$tg(\theta) = \frac{-1+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{-3-\sqrt{3}+3\sqrt{3}+3}{3^2-\sqrt{3}^2}$$

$$tg(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{9-3} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, temos que o ângulo θ é tal que a sua tangente é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Se formos procurar numa tabela de ângulos notáveis, encontraremos que o valor de tal ângulo é 30°, ou seja, θ=30°, pois $tg(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

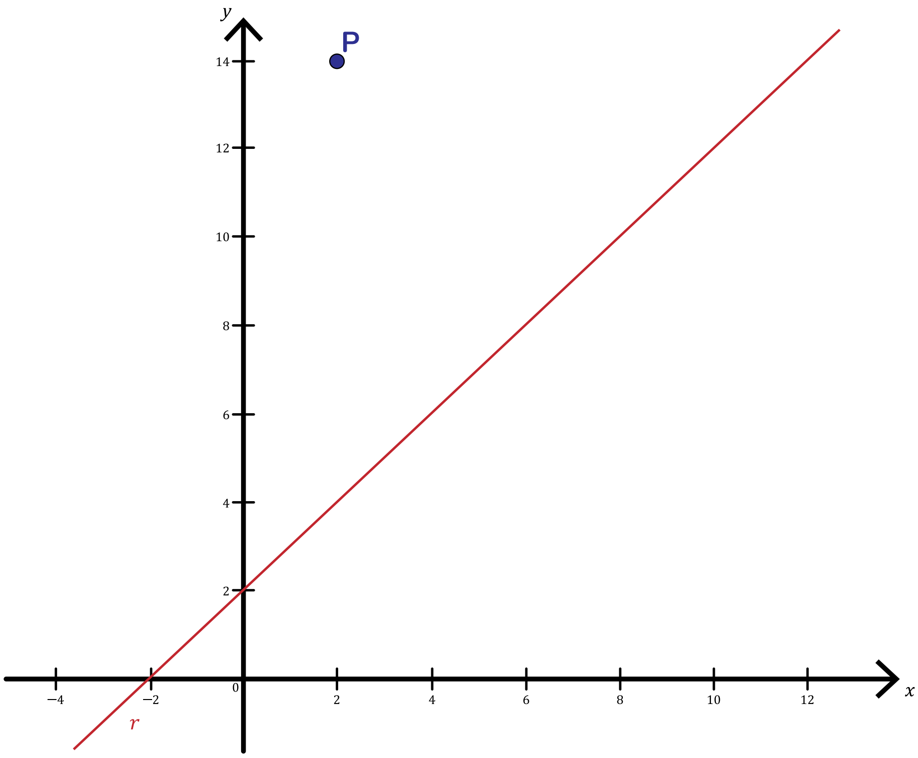
Façamos algumas observações: O encontro de duas retas gera dois ângulos distintos. Utilizaremos o ângulo que $0° < \theta < 90°$, sempre. Por este motivo, o valor final obtido será sempre positivo e será possível identificar na tabela de ângulos notáveis qual o ângulo correspondente aquele valor.

Temos dois casos particulares a serem considerados, quando as retas tem equação $y=k$ ou $x=k$. No primeiro caso, temos uma reta constante paralela ao eixo x e o ângulo formado entre ela e o eixo x é $\theta=0°$. No segundo caso, temos uma reta constante paralela ao eixo y e o ângulo formado entre ela e o eixo x é $\theta=90°$.

DISTÂNCIA DE PONTO À RETA

Quando estávamos trabalhando apenas com pontos no plano cartesiano, introduzimos um conceito muito importante que era a distância entre dois pontos. Na sequência, trabalhamos o conceito de retas em variadas formas. O próximo passo será mensurar a distância de uma reta a um ponto fora dela.

A ideia por trás da fórmula que será apresentada vem da construção de uma reta que passe pelo ponto P e que seja perpendicular a reta r e a intersecciona em um determinado ponto I. Esse ponto I contido na reta r é o ponto que está a uma menor distância do ponto P do que qualquer outro ponto de r.



Dados uma reta r: $Ax+By+C=0$ e um ponto $P=(x_0, y_0)$, que não está em r, podemos encontrar a distância do ponto A até a reta r pela fórmula:

$$d(P,r) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Seja $P=(6\,,14)$ e r: $4y-3x+2=0$. Determine a distância do ponto P até r.

Resolução:

Para obtermos a distância de P à r, devemos utilizar a fórmula de distância de um ponto à reta:

$$d(P,r) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

Perceba que a equação da reta deve estar na forma geral, então:

$r: 4y - 3x + 2 = 0 \Rightarrow -3x + 4y + 2 = 0.$

Dessa maneira basta substituirmos as informações na fórmula e calcular:

$$d(P, r) = \left| \frac{(-3) \cdot 6 + 4 \cdot 14 + 2}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} \right|$$

$$d(P, r) = \left| \frac{-18 + 56 + 2}{\sqrt{9 + 16}} \right|$$

$$d(P, r) = \left| \frac{40}{5} \right| = \frac{40}{5} = 8$$

Logo, a distância do ponto $P = (6, 14)$ à reta $r: 4y - 3x + 2 = 0$ é $8\ u.m.$.

ANOTAÇÕES