GUIA DE SOBREVIVÊNCIA

Fundamentos da Geometria Espacial

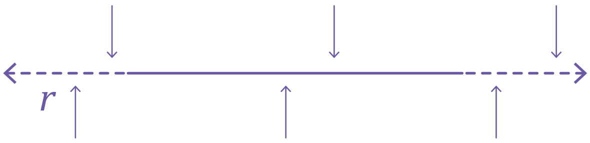
Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT

GUIA DE SOBREVIVÊNCIA

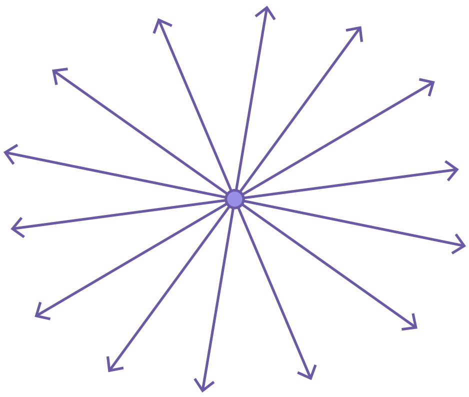
Axiomas de Ponto, Reta e Plano

1. Em uma reta, e fora dela, existem infinitos pontos.

2. A reta é infinita, ou seja, não possui extremidades.

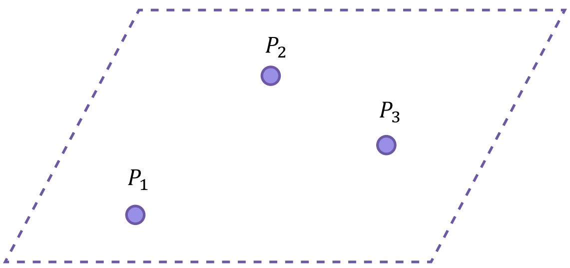


3. Por um ponto passam infinitas retas.

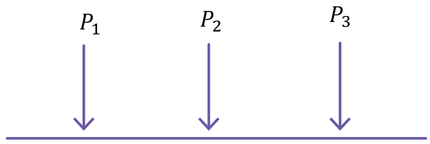


4. Dados dois pontos quaisquer definimos uma única reta.

5. Três pontos não-colineares determinam um único plano.

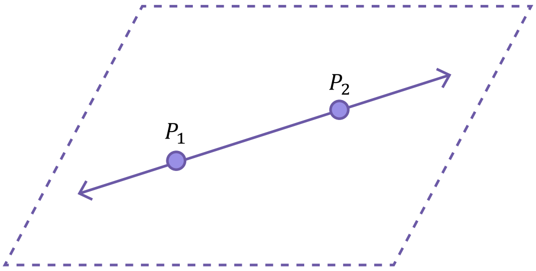


Vista Superior do Plano

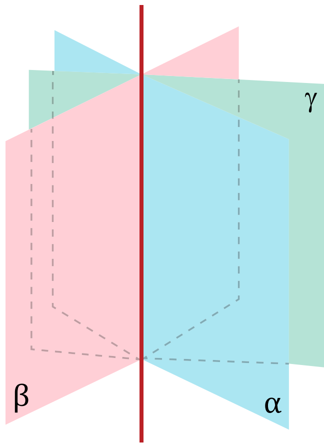


Vista Lateral do Plano

6. Se uma reta possui dois pontos distintos que estão num plano, então a reta está contida no plano.



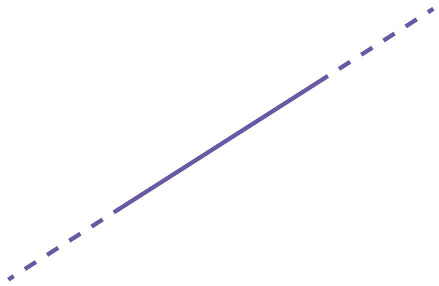
7. Por uma reta passam infinitos planos.



Posições Absolutas Entre Retas

Horizontal

Vertical



Oblíqua ou inclinada

Posições Entre Retas

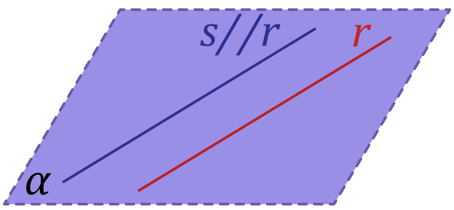
Paralelas coincidentes

Duas retas são paralelas coincidentes quando possuem todos os pontos em comum.

$$r \cap s = r = s$$

Paralelas distintas

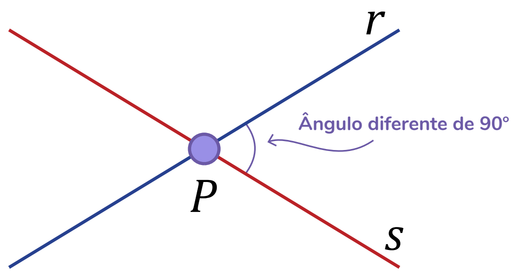
Duas retas são paralelas distintas quando são coplanares e não possuem pontos em comum.



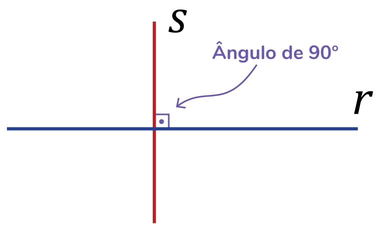
$$r \cap s = \varnothing$$

Concorrentes

Duas retas são concorrentes quando elas possuem um único ponto em comum.



Retas Concorrentes

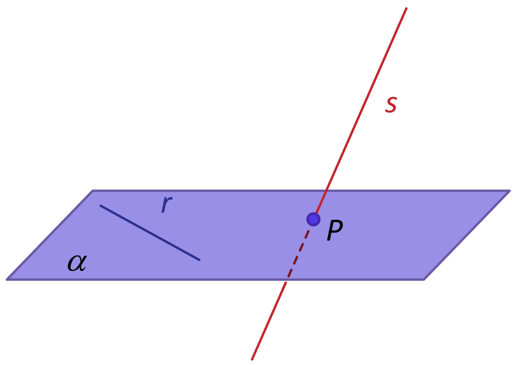


Retas Concorrentes Perpendiculares

$$r \cap s = \{P\}$$

Reversas

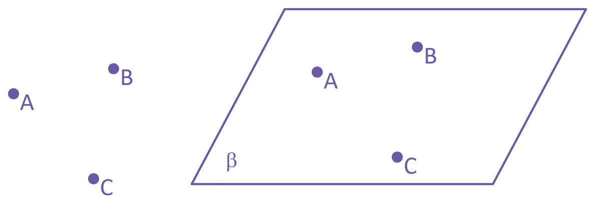
Duas retas são reversas quando não são coplanares ou seja quando não existe um plano que as contém.



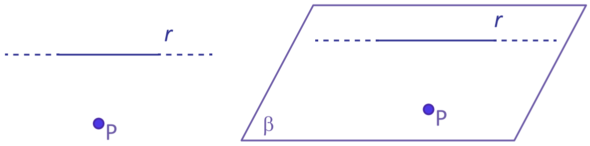
Determinação de planos

Existem 4 maneiras de determinar um plano

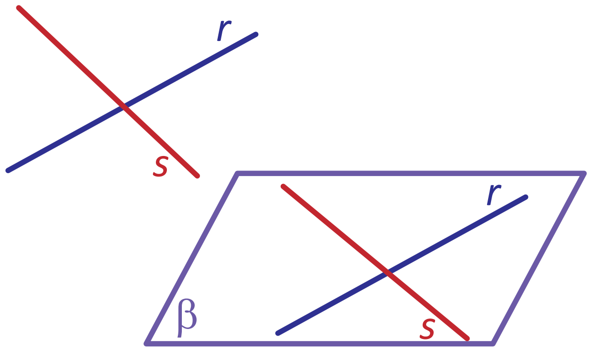
1°. Três pontos não colineares determinam um único plano que os contém.



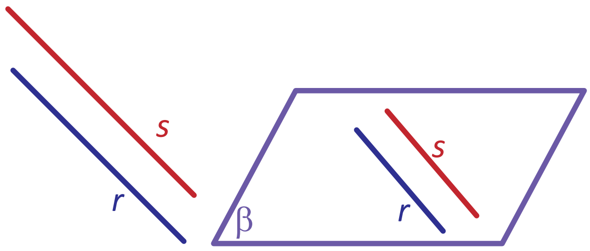
2º. Uma reta e um ponto não pertencente a reta, determinam um único plano que os contém.



3º. Duas retas concorrentes determinam um único plano que as contém.

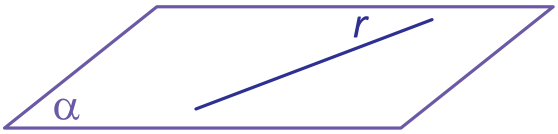


4º. Duas retas paralelas distintas determinam um único plano que as contém.

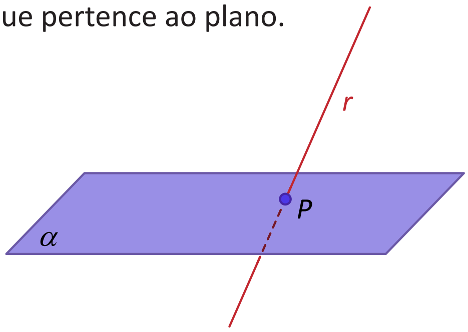


Posições relativas entre reta e plano

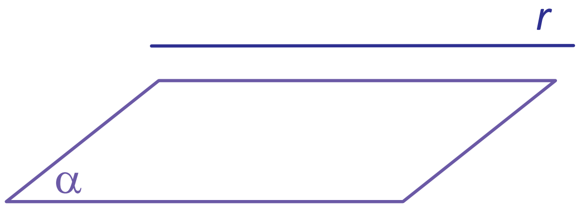
1. Pertencente – Se dois pontos da reta r pertencem ao plano α, então a reta r também pertence ao plano.



2. Incidente – Reta r incide no plano α no caso da reta possuir um único ponto que pertence ao plano.



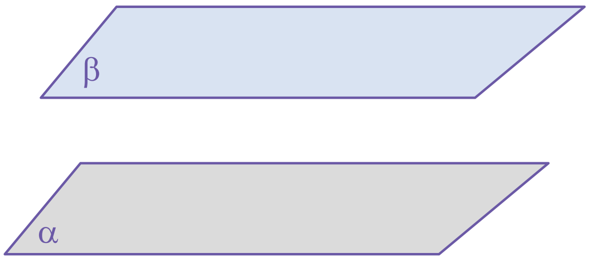
3. Paralela – Reta r é paralela ao plano α, se a reta não possui nenhum ponto em comum com o plano.



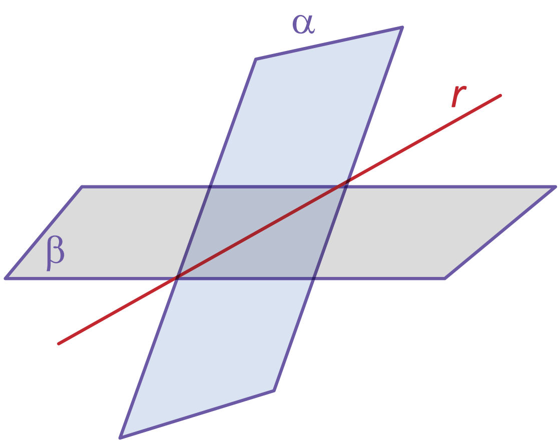
Posições relativas entre dois planos

1. Coincidentes – Dois planos α e β são coincidentes quando a interseção deles é igual a α e igual a β , ou seja, $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$.

2. Paralelos – Dois planos α e β são paralelos quando a interseção deles é igual ao conjunto vazio, ou seja, $\alpha \cap \beta = \emptyset$.

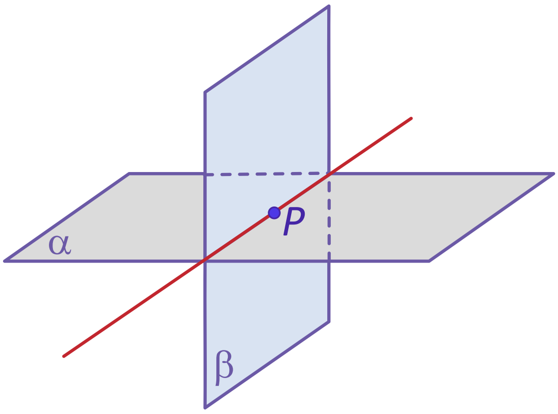


3. Secantes – Dois planos α e β são secantes se a interseção deles é uma reta.



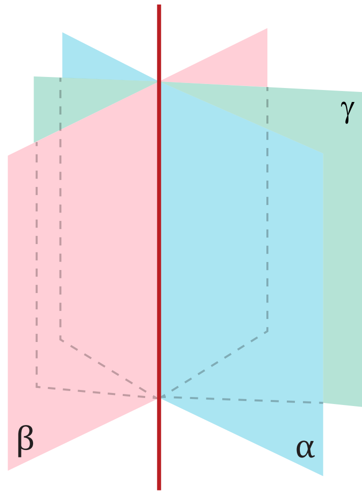
Intersecção entre planos

1. Se dois planos distintos possuem um ponto em comum, então eles se interceptam numa reta

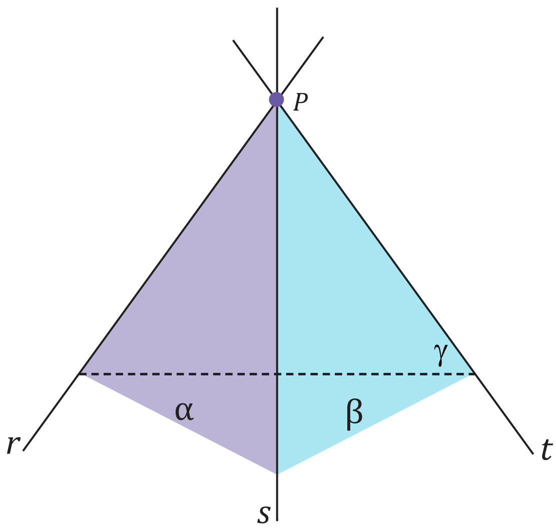


2. Se três planos se distintos interceptam-se dois a dois em três retas, então elas são concorrentes num mesmo ponto ou são paralelas.

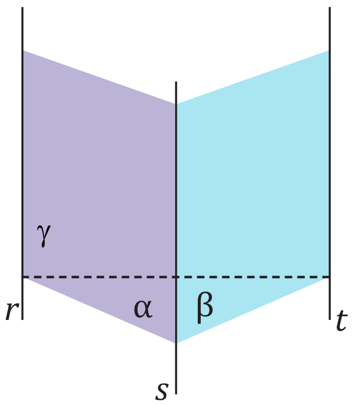
r = s = t



r, s e t são paralelas coincidentes



r, s e t são concorrentes no ponto P

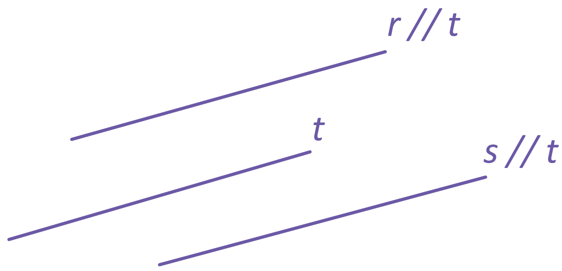


r, s e t são paralelas distintas

Paralelismo

Se duas retas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si.

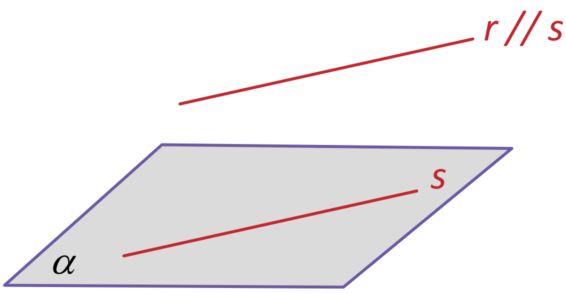
$$\left.\begin{matrix} r\,//\,t \\ s\,//\,t \end{matrix}\right\} \Rightarrow r\,//\,s$$



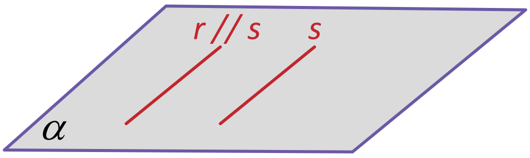
Teorema Fundamental do Paralelismo

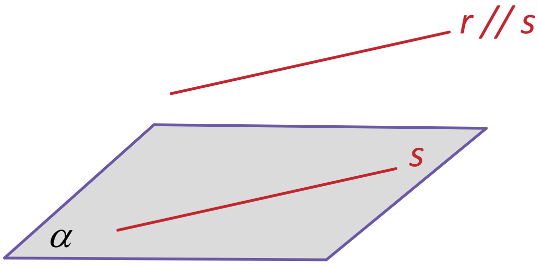
A condição necessária e suficiente para que uma reta seja paralela a um plano é que não esteja contida nele e seja paralela uma reta desse plano.

$$\left.\begin{matrix} r\,//\,s \\ s \subset \alpha \\ r \not\subset \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow r\,//\,\alpha$$



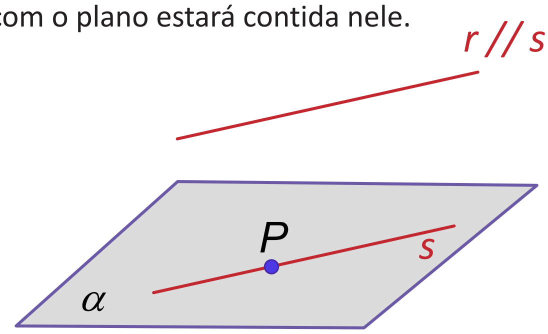
Dadas duas retas paralelas distintas, todo plano que contém uma é paralelo ou contém a outra.





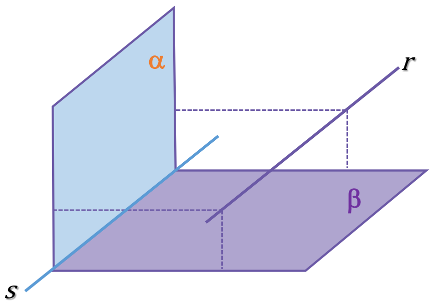
$$\left.\begin{array}{l} r//s \\ s\subset\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow r\subset\alpha \ ou\ r//\alpha$$

Se uma reta é paralela a um plano, toda reta paralela a ela e tendo um ponto em comum com o plano estará contida nele.



$$\left.\begin{array}{l} r//\alpha \\ s//r \\ \exists P\in s \mid P\in\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow s\subset\alpha$$

Se uma reta é paralela a dois planos secantes, então ela é paralela à intersecção dos dois planos.

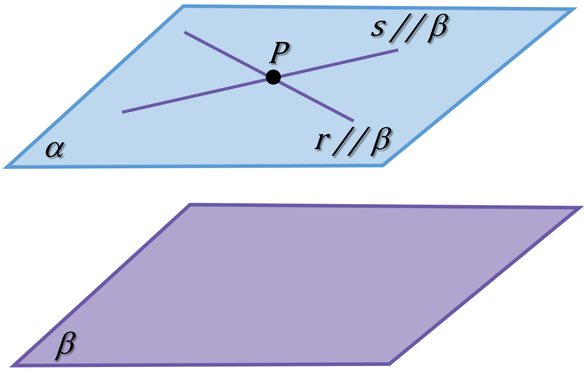


Observe que o recíproco não é verdadeiro, pois ela pode estar contida nos planos.

$$\left.\begin{array}{l} r//\alpha \\ r//\beta \\ \alpha\cap\beta=s \end{array}\right\} \Rightarrow r//s$$

Teorema Fundamental do Paralelismo de Planos

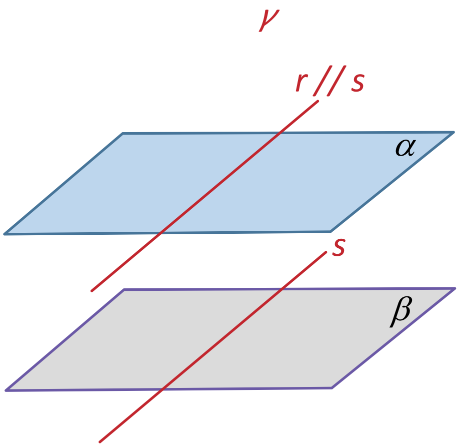
A condição necessária e suficiente para que dois planos distintos sejam paralelos é um deles conter duas retas concorrentes entre si e paralelas ao outro.



$$\left.\begin{array}{l} r\subset\alpha \ e\ r//\beta \\ s\subset\alpha \ e\ s//\beta \\ r\cap s=\{P\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \alpha//\beta$$

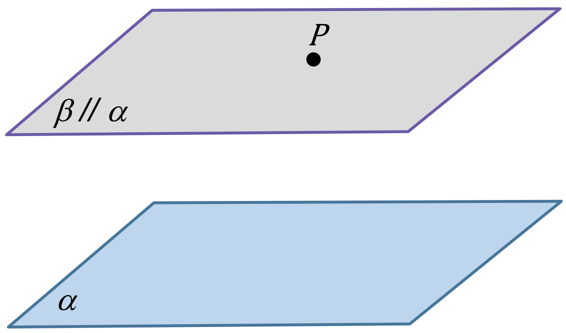
Propriedades do Paralelismo de Planos

a. Dois planos paralelos interceptados por um terceiro têm intersecções paralelas.



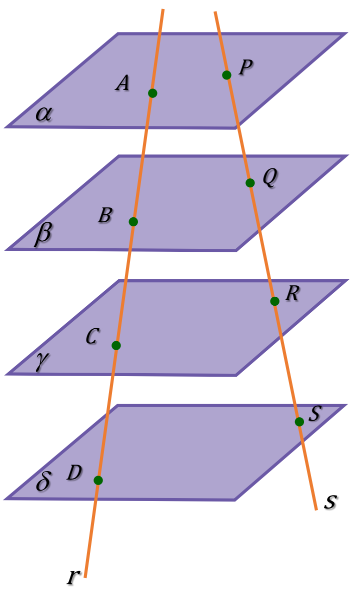
$$\left.\begin{array}{l} \alpha//\beta \\ \gamma\cap\alpha=r \\ \gamma\cap\beta=s \end{array}\right\} \Leftrightarrow r//s$$

b. Por um ponto não pertencente a um plano existe e é único o plano paralelo a ele (extensão do postulado de Euclides da Geometria Plana).



$$\text{Existe um único plano } \beta \text{ tal que: } \begin{cases} P \in \beta \\ P \notin \alpha \\ \beta // \alpha \end{cases}$$

c. Teorema de Tales – Um feixe de planos paralelos determina sobre duas transversais segmentos correspondentes respectivamente proporcionais.

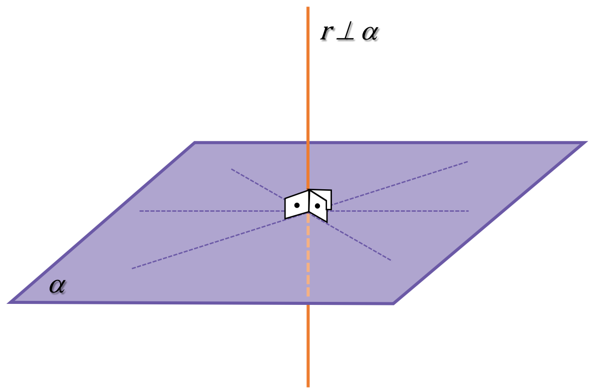


$$\alpha // \beta // \gamma // \delta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{AC}{PR}$$

Perpendicularismo

Reta perpendicular a plano

Dizemos que uma reta é perpendicular "a um plano se, e somente se, ela é perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto onde ela intercepta o plano. O ponto onde ela intercepta o plano é chamado "pé da perpendicular ".

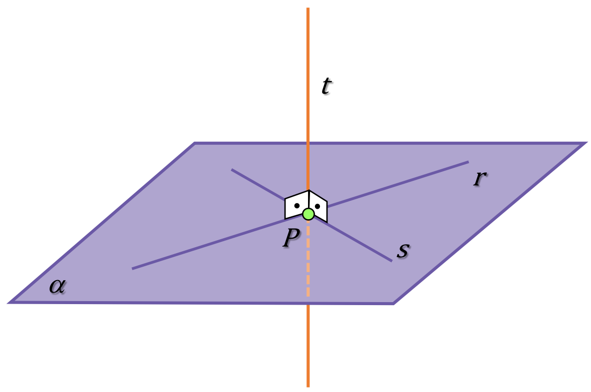


Teorema fundamental do perpendicularismo

A condição necessária e suficiente para que uma reta seja perpendicular a um plano é que forme ângulo reto com duas concorrentes do plano.

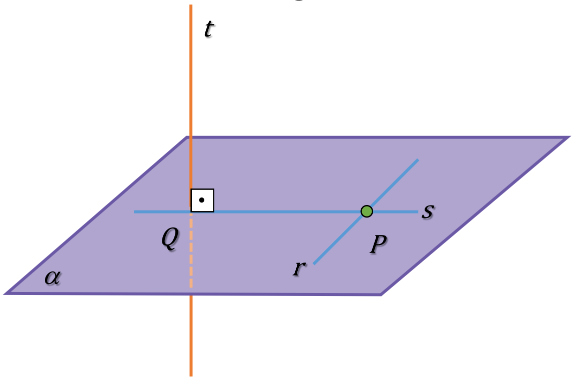
Para as condições deste teorema temos três casos possíveis:

a. A reta t é perpendicular às duas retas concorrentes do plano.



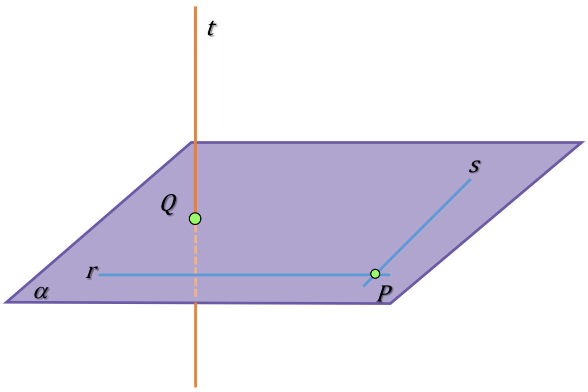
$$\left.\begin{matrix} t \perp r,\ r \subset \alpha \\ t \perp s,\ s \subset \alpha \\ r \cap s = \{P\} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow t \perp \alpha$$

b. A reta t é perpendicular a uma das retas concorrentes e ortogonal à outra.



$$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha,\ s \subset \alpha \\ t \perp s \\ t \text{ ortogonal a } r \\ r \cap s = \{P\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow t \perp \alpha$$

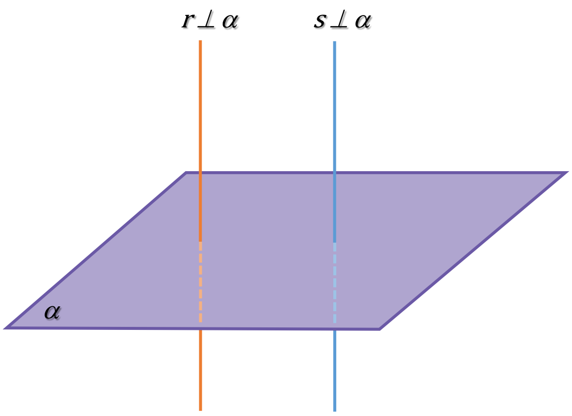
c. A reta t é ortogonal às duas retas concorrentes.



$$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha,\ s \subset \alpha \\ t \text{ ortogonal a } r \\ t \text{ ortogonal a } s \\ r \cap s = \{P\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow t \perp \alpha$$

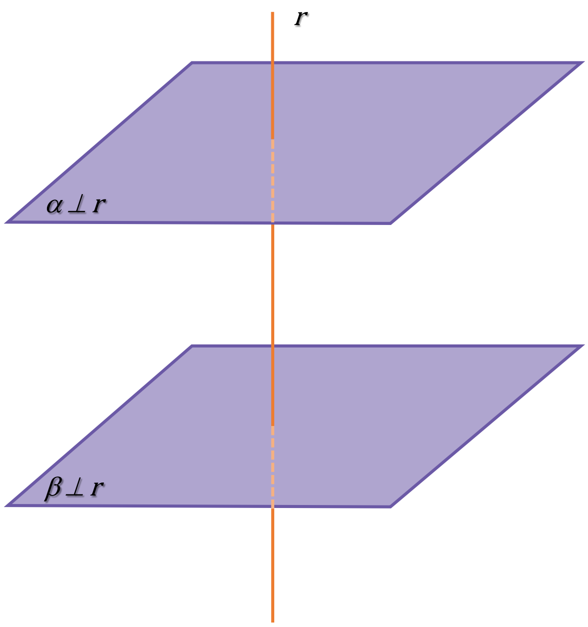
Propriedades do perpendicularismo de reta com plano

a. Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas.



$$\left.\begin{array}{l} r \perp \alpha \\ s \perp \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow r // s$$

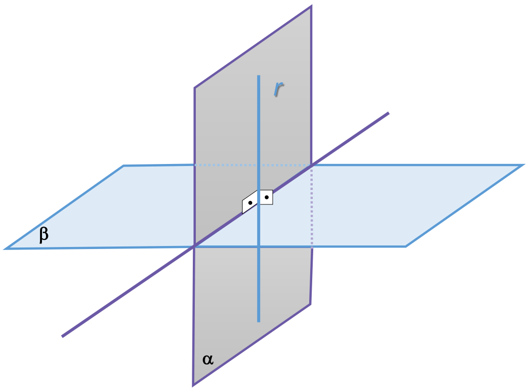
b. Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos.



$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp r \\ \beta \perp r \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha // \beta$$

Plano perpendicular a plano

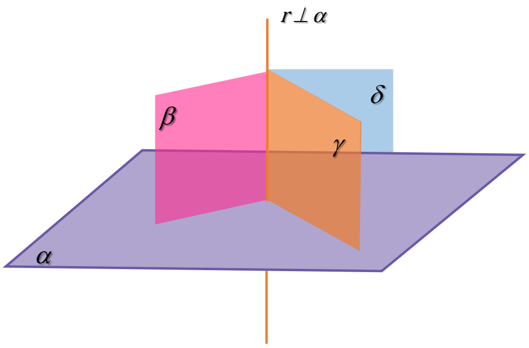
Dizemos que dois planos são perpendiculares se, e somente se, um deles contém uma reta perpendicular ao outro.



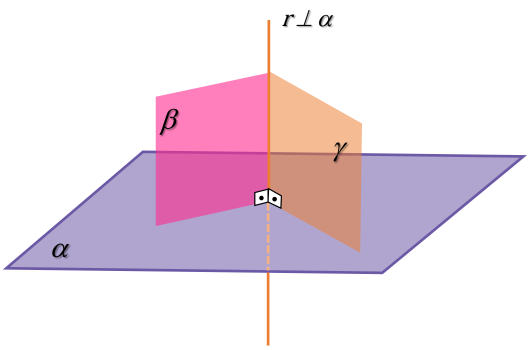
$$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha \\ r \perp \beta \end{array}\right\} \alpha \perp \beta$$

Propriedades do perpendicularismo de planos

a. Se uma reta é perpendicular a um plano, qualquer plano que a contenha é perpendicular ao primeiro.

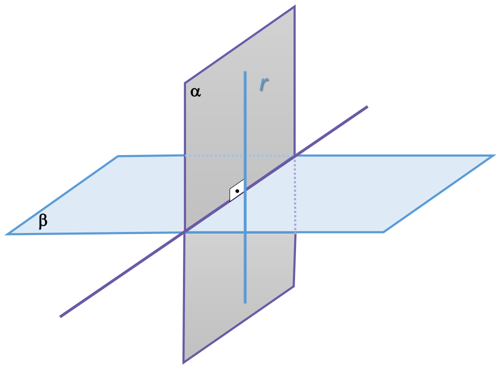


b. Se dois planos secantes são perpendiculares a um terceiro plano, a sua intersecção também será perpendicular a este terceiro plano.



$$\left.\begin{array}{l} \beta \perp \alpha \\ \gamma \perp \alpha \\ \beta \cap \gamma = r \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp \alpha$$

c. Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um, perpendicular à intersecção é perpendicular ao outro.

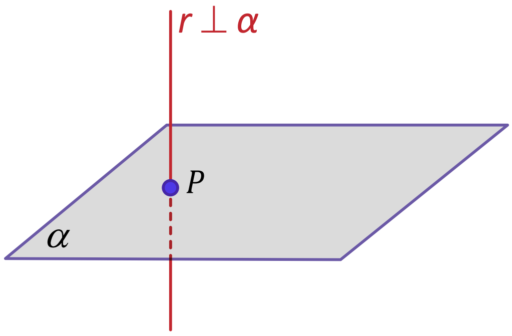


$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = s \\ r \subset \alpha \\ r \perp s \end{array}\right\} \Leftrightarrow r \perp \beta$$

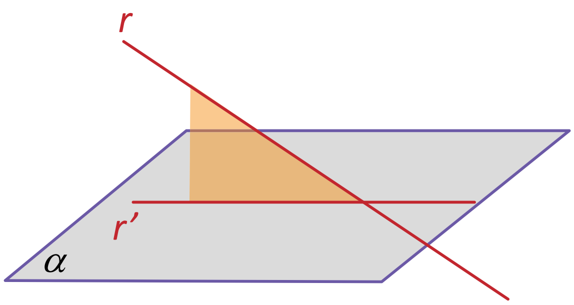
Projeção de uma reta

A projeção ortogonal de uma reta num plano é o conjunto das projeções ortogonais dos pontos da reta neste plano.

a. Se a reta for perpendicular ao plano, a sua projeção será um ponto.



b. Se a reta não for perpendicular ao plano, a sua projeção ortogonal será outra reta.



contato@biologiatotal.com.br
/biologiajubilut
Biologia Total com Prof. Jubilut
@paulojubilut
@Prof_jubilut
biologiajubilut
+biologiatotalbrjubilut