XLI Olimpíada Internacional e XV Olimpíada Iberoamericana
Primeiro Teste de Seleção
25 de março de 2000

Instruções:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4 horas e 30 minutos

▸ PROBLEMA 1
Prove que se a, b, c são as medidas dos lados de um triângulo e

$$2(ab^2 + bc^2 + ca^2) = a^2b + b^2c + c^2a + 3abc,$$

então o triângulo eqüilátero.

▸ PROBLEMA 2
Para n inteiro positivo, seja A_n o conjunto dos inteiros positivos maiores que 1 e primos com n. Encontre todos os n para os quais todos os elementos de A_n são números primos.

▸ PROBLEMA 3
Sejam BB', CC' alturas do triângulo ABC; suponha $AB \neq AC$. Sejam M o ponto médio de BC, H o ortocentro de ABC, e D a interseção de BC e $B'C'$. Mostre que DH é perpendicular a AM.

▸ PROBLEMA 4
Para inteiros positivos n e b, seja $V(n, b)$ a quantidade de decomposições de n como produto de inteiros maiores do que b: por exemplo

$$36 = 6 \times 6 = 4 \times 9 = 3 \times 3 \times 4 = 3 \times 12,$$

mostra que $V(36, 2) = 5$. Prove que $V(n, b) < n/b$ para quaisquer n e b inteiros positivos.