Prof. Rodolfo Pereira Borges

Guia de estudos: Livro 1 – Matemática – Frente 2
Página 132 – Revisando: 5, 6, 7, 8
Página 133 – Propostos: 27,28, 29, 31, 32, 34, 39, 41, 45
Página 143 – Complementares: 35, 36

1. (Uerj 2021) De acordo com o teorema fundamental da aritmética, todo número natural maior do que 1 é primo ou é um produto de números primos. Observe os exemplos:

$$1964 = 2^2 \times 491$$
$$1994 = 2 \times 997$$

O maior número primo obtido na fatoração de 1716 é:
a) 17 b) 13 c) 11 d) 7

2. (Fuvest 2017) Sejam a e b dois números inteiros positivos. Diz-se que a e b são equivalentes se a soma dos divisores positivos de a coincide com a soma dos divisores positivos de b.
Constituem dois inteiros positivos equivalentes:
a) 8 e 9. b) 9 e 11. c) 10 e 12.
d) 15 e 20. e) 16 e 25.

3. (Uerj 2020) A soma de dois números naturais diferentes é 68. Ambos são múltiplos de 17. A diferença entre o maior número e o menor é: a) 35 b) 34 c) 33 d) 32

4. (Fac. Albert Einstein - Medicin 2017) Um torneio de xadrez terá alunos de 3 escolas. Uma das escolas levará 120 alunos; outra, 180 alunos; e outra, 252 alunos. Esses alunos serão divididos em grupos, de modo que cada grupo tenha representantes das três escolas, e o número de alunos de cada escola seja o mesmo em cada grupo. Dessa maneira, o maior número de grupos que podem ser formados é a) 12 b) 23 c) 46 d) 69

5. (Fuvest 2021) Alice quer construir um paralelepípedo reto retângulo de medidas $60\text{ cm} \times 24\text{ cm} \times 18\text{ cm}$, com a menor quantidade possível de cubos idênticos cujas medidas das arestas são números naturais. Quantos cubos serão necessários para construir esse paralelepípedo?
a) 60 b) 72 c) 80 d) 96 e) 120

6. (ifmt 2020) João decide reformar sua casa, mas, como não dispõe de muito dinheiro, decide economizar na reforma contratando o carpinteiro José para reaproveitar as tábuas de madeira retiradas da casa. José tem à sua disposição 40 tábuas de $5{,}4$ metros, 30 tábuas de $8{,}10$ metros e 10 tábuas de $10{,}80$ metros, todas de mesma espessura e largura. Para atender às especificidades da reforma da casa de João, José decide cortar as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças fiquem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 metros. Qual a quantidade de tábuas que José conseguiu produzir?
a) 395 tábuas b) 399 tábuas c) 412 tábuas
d) 420 tábuas e) 429 tábuas

7. (Famema 2020) Sílvia e Márcio moram em cidades diferentes no interior. Sílvia vai à capital uma vez a cada 10 dias, e Márcio vai à capital uma vez a cada 12 dias. A última vez em que eles se encontraram na capital foi um sábado. O próximo encontro dos dois na capital ocorrerá em
a) uma terça-feira. b) uma quarta-feira. c) um domingo.
d) um sábado. e) uma segunda-feira.

8. (Uerj/2022)

Adaptado de jornalistaslivres.org, 23/11/2019.

A Wiphala é uma bandeira com sete cores, símbolo não só dos povos originários da região da Cordilheira dos Andes, como também de sua filosofia. A simetria observada na bandeira representa a igualdade dentro do sistema comunitário andino.

Adaptado de jornalistaslivres.org, 23/11/2019.

Considere uma bandeira retangular, com 272 cm de altura e 416 cm de largura, que também foi confeccionada com pequenos quadrados congruentes, de modo que não ocorre sobreposição ou espaço entre eles.
O número inteiro que representa a medida do maior lado que esses pequenos quadrados podem ter, em centímetros, é:
a) 12 b) 14 c) 16 d) 18

9. (Fgv/2023) Em certa rua, há dois semáforos, um no início e outro no final da rua. O semáforo do início, a cada ciclo de 120 segundos, fica verde nos primeiros 110 segundos e vermelho nos 10 segundos seguintes. O semáforo do final, a cada ciclo de 180 segundos, fica verde nos primeiros 160 segundos e vermelho nos 20 segundos seguintes.
Ambos ficaram verdes ao mesmo tempo, exatamente ao meio-dia. Por quanto tempo, no período de 24 horas até o meio-dia do dia seguinte, os semáforos estarão simultaneamente vermelhos?
a) 30 minutos b) 40minutos c) 1 hora
d) 70 minutos e) 1 hora e meia

10. (Uece 2022) Dados dois números inteiros positivos p e q, diremos que p é um divisor de q se existe um inteiro positivo k, tal que $q = k \cdot p$. Um número inteiro positivo q, maior do que um, é chamado de número primo se seus únicos divisores positivos são o número um e o próprio número q. Note que o número 101101 possui n divisores positivos sendo m deles números primos. Assim, é correto concluir que o valor de n – m é igual a
a) 11. b) 9. c) 12. d) 10.

11. (Uece 2020) Assinale a opção que corresponde à quantidade de números inteiros positivos que são fatores do número 30.030.
a) 32 b) 34 c) 64 d) 66

12. (ifba 2018) O Supermercado "Preço Baixo" deseja fazer uma doação ao Orfanato "Me Adote" e dispõe, para esta ação, 528 kg de açúcar, 240 kg de feijão e 2.016 kg de arroz. Serão montados Kits contendo, cada um, as mesmas quantidades de açúcar, de feijão e de arroz. Quantos quilos de açúcar deve haver em cada um dos kits, se forem arrumados de forma a contemplar um número máximo para cada item?
a) 20 b) 11 c) 31 d) 42 e) 44

13. (Fuvest 2021) Alice quer construir um paralelepípedo reto retângulo de medidas $60\text{ cm} \times 24\text{ cm} \times 18\text{ cm}$, com a menor quantidade possível de cubos idênticos cujas medidas das arestas são números naturais. Quantos cubos serão necessários para construir

esse paralelepípedo?
a) 60 b) 72 c) 80 d) 96 e) 120

14. (Uerj 2020) Uma gerente de loja e seu assistente viajam com frequência para São Paulo e voltam no mesmo dia. A gerente viaja a cada 24 dias e o assistente, a cada 16 dias, regularmente. Em um final de semana, eles viajaram juntos. Depois de x viagens da gerente e y viagens do assistente sozinhos, eles viajaram juntos novamente. O menor valor de $x+y$ é:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

15. (cmrj 2019)

www.brasil.gov.br, julho/2018.

Maria e Paula são amigas de infância e, sempre que podem, saem para pedalar juntas em torno do Estádio do Maracanã. Um dia, empolgadas com a ideia de saberem mais sobre o desempenho da dupla, resolveram cronometrar o tempo que cada uma levava para dar uma volta completa em torno do estádio. Constataram que Maria dava uma volta completa em 6 minutos e 40 segundos, enquanto Paula demorava 8 minutos para fazer o mesmo percurso, ambas com velocidades constantes.

Paula, então, questionou o seguinte: “Se sairmos juntas de um mesmo local, no mesmo momento, mas em sentidos contrários, em quanto tempo voltaremos a nos encontrar, pela primeira vez, no mesmo ponto de partida?” A resposta correta para a pergunta de Paula está presente na alternativa
a) 48 minutos b) 40 minutos c) 32 minutos
d) 26 minutos e 40 segundos e) 33 minutos e 20 segundos

16. (cmrj 2018) Um torneio de xadrez terá alunos de escolas militares. O Colégio Militar de Campo Grande (CMCG) levará 120 alunos; o Colégio Militar do Rio de Janeiro (CMRJ), $180;$ e o Colégio Militar de Brasília (CMB), $252.$ Esses alunos serão divididos em grupos, de modo que cada grupo tenha representantes das três escolas, e que o número de alunos de cada escola seja o mesmo em cada grupo. Dessa maneira, o maior número de grupos que podem ser formados é
a) $10.$ b) $12.$ c) $15.$ d) $21.$ e) $46.$

17. (Upe-ssa 2017) Rodrigo estava observando o pisca-pisca do enfeite natalino de sua casa. Ele é composto por lâmpadas nas cores amarelo, azul, verde e vermelho. Rodrigo notou que lâmpadas amarelas acendem a cada 45 segundos, as lâmpadas verdes, a cada 60 segundos, as azuis, a cada 27 segundos, e as vermelhas só acendem quando as lâmpadas das outras cores estão acesas ao mesmo tempo. De quantos em quantos minutos, as lâmpadas vermelhas acendem?
a) 6 b) 9 c) 12 d) 15 e) 18

18. (ifsc 2017) Roberto e João são amigos de infância e, sempre que podem, saem para pedalar juntos. Um dia, empolgados com a ideia de saberem mais sobre o desempenho da dupla, resolveram cronometrar o tempo que gastavam andando de bicicleta. Para tanto, decidiram pedalar numa pista circular, próxima à casa deles.

Constataram, então, que Roberto dava uma volta completa em 24 segundos, enquanto João demorava 28 segundos para fazer o mesmo percurso. Diante disso, João questionou:

– Se sairmos juntos de um mesmo local e no mesmo momento, em quanto tempo voltaremos a nos encontrar, pela primeira vez, neste mesmo ponto de largada?

Assinale a alternativa CORRETA.
a) $3\text{ min }8\text{ s}$ b) $2\text{ min }48\text{ s}$ c) $1\text{min }28\text{ s}$
d) $2\text{ min }28\text{ s}$ e) $1\text{min }48\text{ s}$

19. (Uepg 2016) Considerando o número natural a tal que $\text{m.m.c.}(a, 15) = 120$ e $\text{m.d.c.}(a, 15) = 5$ e o número natural $b,$ tal que $\text{m.m.c.}(b, 20) = 140$ e $\text{m.d.c.}(b, 20) = 4,$ assinale o que for correto.
01) $\text{m.m.c.}(a, b) = 280$ 02) $\text{m.d.c}(a, b) = 4$
04) a e b são números pares. 08) $a > b$

20. (ifsul 2017) As corridas com obstáculos são provas de atletismo que fazem parte do programa olímpico e consistem em corridas que têm no percurso barreiras que os atletas têm de saltar. Suponha que uma prova tenha um percurso de 1.000 metros e que a primeira barreira esteja a 25 metros da largada, a segunda a 50 metros, e assim sucessivamente.

Se a última barreira está a 25 metros da linha de chegada, o total de barreiras no percurso é
a) 39 b) 41 c) 43 d) 45

21. (cftmg 2017) Seja x um número inteiro, $0 < x \leq 60$ e o conjunto $A = \left\{K \in \square \mid K = \dfrac{60}{x}\right\}.$ Nessas condições, o número máximo de elementos do conjunto A é
a) $6.$ b) $8.$ c) $12.$ d) $16.$

22. (Unigranrio - Medicina 2017) Uma mulher tem três filhas matriculadas regularmente no ensino fundamental. O produto da sua idade com as idades de suas 3 filhas é $37.037.$ Desta forma, pode-se afirmar que a diferença entre as idades de sua filha mais velha e sua filha mais nova é
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

23. (Fuvest 2020) A função E de Euler determina, para cada número natural $n,$ a quantidade de números naturais menores do que n cujo máximo divisor comum com n é igual a $1.$ Por exemplo, $E(6) = 2$ pois os números menores do que 6 com tal propriedade são 1 e $5.$ Qual o valor máximo de $E(n),$ para n de 20 a $25?$ a) 19 b) 20 c) 22 d) 24 e) 25

Gabarito:

Resposta da questão 1: [B]

Como $1716 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13,$ segue que a resposta é $13.$

Resposta da questão 2: [E]

Calculando os divisores:

$\text{Divisores de } 8 \rightarrow \{1, 2, 4, 8\} \rightarrow \text{Soma} = 15$

$\text{Divisores de } 9 \rightarrow \{1, 3, 9\} \rightarrow \text{Soma} = 13$

$\text{Divisores de } 10 \rightarrow \{1, 2, 5, 10\} \rightarrow \text{Soma} = 18$

$\text{Divisores de } 11 \rightarrow \{1, 11\} \rightarrow \text{Soma} = 12$

$\text{Divisores de } 12 \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \rightarrow \text{Soma} = 28$

$\text{Divisores de } 15 \rightarrow \{1, 3, 5, 15\} \rightarrow \text{Soma} = 24$

$\text{Divisores de } 16 \rightarrow \{1, 2, 4, 8, 16\} \rightarrow \text{Soma} = 31$

$\text{Divisores de } 25 \rightarrow \{1, 5, 25\} \rightarrow \text{Soma} = 31$

Logo, 16 e 25 são dois inteiros positivos equivalentes.

Resposta da questão 3: [B]

Sejam os números naturais 17α e 17β, com $\alpha > \beta > 0$. Tem-se que

$$17\alpha + 17\beta = 68 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 4$$

Portanto, só pode ser $\alpha = 3$ e $\beta = 1$.

A resposta é

$$17\alpha - 17\beta = 17(3-1) = 34.$$

Resposta da questão 4: [A]

O resultado pedido corresponde ao máximo divisor comum dos números $120, 180$ e 252, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{mdc}(120, 180, 252) &= \text{mdc}(2^3 \cdot 3 \cdot 5, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7) \\ &= 2^2 \cdot 3 \\ &= 12. \end{aligned}$$

Resposta da questão 5: [E]

A medida da aresta de cada cubo corresponde ao máximo divisor comum das dimensões do paralelepípedo, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{mdc}(60, 24, 18) &= \text{mdc}(2^2 \cdot 3 \cdot 5, 2^3 \cdot 3, 2 \cdot 3^2) \\ &= 2 \cdot 3 \\ &= 6\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Em consequência, a resposta é

$$\frac{60}{6} \cdot \frac{24}{6} \cdot \frac{18}{6} = 120.$$

Resposta da questão 6: [D]

O maior comprimento possível das tábuas é dado pelo máximo divisor comum (MDC) entre os comprimentos. Calculando o MDC com os comprimentos em decímetro, temos:

$$\text{MDC}(54, 81, 108) = \text{MDC}\left(2 \cdot 3^3, 3^4, 2^2 \cdot 3^3\right) = 3^3 = 27$$

Logo, as tábuas deveriam medir $2{,}7\text{ m}$, porém, como devem ser menores que 2 m, o próximo divisor pode ser obtido como:

$$\frac{2{,}7\text{ m}}{2} = 1{,}35\text{ m}$$

E a quantidade de tábuas que José conseguiu produzir é de:

$$\frac{40 \cdot 5{,}4\text{ m}}{1{,}35\text{ m}} + \frac{30 \cdot 8{,}1\text{ m}}{1{,}35\text{ m}} + \frac{10 \cdot 10{,}8\text{ m}}{1{,}35\text{ m}} = 160 + 180 + 80 = 420$$

Resposta da questão 7: [B]

Os dois se encontrarão novamente após $\text{mmc}(10, 12) = \text{mmc}(2 \cdot 5, 2^2 \cdot 3) = 60$ dias. Assim, como $60 = 8 \cdot 7 + 4$, podemos concluir que o próximo encontro ocorrerá numa quarta-feira.

Resposta da questão 8: [C]

Para que os quadrados se encaixem perfeitamente na bandeira sem sobreposição entre eles, o valor de seu lado deve ser divisor dos lados da bandeira. E o maior valor possível é dado pelo máximo divisor comum entre esses lados. Logo:

$$\text{MDC}(272, 416) = \text{MDC}\left(2^4 \cdot 17, 2^5 \cdot 13\right) = 2^4 = 16$$

Resposta da questão 9: [B]

Como os ciclos dos semáforos são distintos, podemos obter um ciclo comum entre ambos através do mmc entre os ciclos:

$$\text{mmc}(120, 180) = \text{mmc}\left(2^3 \cdot 3 \cdot 5, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5\right) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$$

Em um dia, a quantidade de vezes em que os ciclos entrarão em sincronia é de:

$$\frac{24 \cdot 60 \cdot 60\text{ s}}{360\text{ s}} = 240$$

Resposta da questão 10: [C]

Fatorando o número 101101, obtemos:

$$\begin{array}{r|l} 101101 & 7 \\ 14443 & 11 \\ 1313 & 13 \\ 101 & 101 \\ 1 & \end{array}$$

Logo:

$$101101 = 7^1 \cdot 11^1 \cdot 13^1 \cdot 101^1$$
$$n = (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 16$$
$$m = 4$$
$$\therefore n - m = 12$$

Resposta da questão 11: [C]

Sendo $30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, podemos concluir que a resposta é

$$\underbrace{(1+1) \cdot (1+1) \cdot \ldots \cdot (1+1)}_{6\text{ vezes}} = 64.$$

Resposta da questão 12: [B]

Decompondo os valores em fatores primos, temos:

$$\begin{array}{ccc|c} 528, & 240, & 2016 & 2 \\ 264, & 120, & 1008 & 2 \\ 132, & 60, & 504 & 2 \\ 66, & 30, & 252 & 2 \\ 33, & 15, & 126 & 3 \\ 11, & 5, & 42 & \end{array}$$

Logo, o total de açúcar por kit é de 11 quilos.

Resposta da questão 13: [E]

A medida da aresta de cada cubo corresponde ao máximo divisor comum das dimensões do paralelepípedo, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{mdc}(60, 24, 18) &= \text{mdc}(2^2 \cdot 3 \cdot 5, 2^3 \cdot 3, 2 \cdot 3^2) \\ &= 2 \cdot 3 \\ &= 6\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Em consequência, a resposta é

$$\frac{60}{6} \cdot \frac{24}{6} \cdot \frac{18}{6} = 120.$$

Resposta da questão 14: [C]

Tem-se que

$$\begin{aligned} \text{mmc}(24, 16) &= \text{mmc}(2^3 \cdot 3, 2^4) \\ &= 2^4 \cdot 3 \\ &= 48. \end{aligned}$$

Desse modo, a gerente e o assistente viajam juntos a cada 48 dias.

Ao fim de quarenta e oito dias, a gerente realizou uma viagem sozinha e outra acompanhada pelo assistente, enquanto que o assistente realizou duas viagens sozinho e uma acompanhado da gerente.

A resposta é $x + y = 1 + 2 = 3.$

Resposta da questão 15: [B]

Desde que Maria leva $6\,\text{min}\ 40\ \text{s} = 6 \cdot 60 + 40 = 400\ \text{s}$ para dar uma volta completa e Paula demora $8\,\text{min} = 8 \cdot 60 = 480\ \text{s}$ para percorrer o mesmo percurso, podemos concluir que elas se encontrarão após

$$\begin{aligned} \text{mmc}(400, 480) &= \text{mmc}(2^4 \cdot 5^2, 2^5 \cdot 3 \cdot 5) \\ &= 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \\ &= 2400\ \text{s} \\ &= 40\,\text{min}. \end{aligned}$$

Resposta da questão 16: [B]

Seja x o maior número de grupos que podem ser formados.

Do enunciado, x divide $120, 180$ e $252.$ Como queremos o maior x possível, x é o máximo divisor dos números $120, 180$ e $252.$

Como $\text{mdc}\ (120, 180, 252) = 12,$ o maior número de grupos que podem ser formados é $12.$

Resposta da questão 17: [B]

Transformando os tempos dados para minutos e calculando-se o mínimo múltiplo comum entre eles, tem-se:

$$\left.\begin{array}{l} 45\ \text{s} = 0,75\ \text{min} \\ 60\ \text{s} = 1\,\text{min} \\ 27\ \text{s} = 0,45\,\text{min} \end{array}\right\rangle \Rightarrow \text{MMC}(0,75;\ 1;\ 0,45) = 9$$

Assim, a cada 9 minutos as lâmpadas vermelhas estarão acesas (pois todas as outras estarão acesas ao mesmo tempo). Lembrando que para encontrar o MMC deve-se fatorar os números (dividir sucessivamente por números primos em ordem crescente). Ou seja:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 0,75 & 1 & 0,45 & 2 \\ 0,75 & 0,50 & 0,45 & 2 \\ 0,75 & 0,25 & 0,45 & 3 \\ 0,25 & 0,25 & 0,15 & 3 \\ 0,25 & 0,25 & 0,05 & 5 \\ 0,05 & 0,05 & 0,01 & 5 \\ 0,01 & 0,01 & 0,01 & \end{array}\right\} 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 900 \Rightarrow \frac{900}{100} = 9$$

Resposta da questão 18: [B]

Para obter após quanto tempo os dois amigos se encontram na linha de chegada, basta obter o mínimo múltiplo comum (MMC) entre dos dois tempos. Ou seja:

$$\begin{array}{l|l} 28\ 24 & 2 \\ 14, 12 & 2 \\ 7, 6 & 2 \\ 7, 3 & 3 \\ 7, 1 & 7 \\ 1, 1 & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{MMC}(28, 24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1 = 168$$

Dividindo 168 segundos por 60 para obter o tempo em minutos temos:

$\frac{168}{60} = 2{,}8 = 2\ \text{min}$ e 48 segundos.

Resposta da questão 20: 01 + 02 + 04 + 08 = 15.

Sabendo que $\text{m.m.c.}(p, q)\text{m.d.c.}(p, q) = p \cdot q,$ com $p, q \in \mathbb{N}^*,$ temos

$$\begin{aligned} \text{m.m.c.}(a, 15) \cdot \text{m.d.c.}(a, 15) = a \cdot 15 &\Leftrightarrow a \cdot 15 = 120 \cdot 5 \\ &\Leftrightarrow a = 40. \end{aligned}$$

Analogamente, vem

$$\begin{aligned} \text{m.m.c.}(b, 20) \cdot \text{m.d.c.}(b, 20) = b \cdot 20 &\Leftrightarrow b \cdot 20 = 140 \cdot 4 \\ &\Leftrightarrow b = 28. \end{aligned}$$

[01] Verdadeira, pois

$\text{m.m.c.}(40, 28) = \text{m.m.c.}(2^3 \cdot 5, 2^2 \cdot 7) = 2^3 \cdot 5 \cdot 7 = 280.$

[02] Verdadeira. De fato, pois
$\text{m.d.c.}(40, 28) = \text{m.d.c.}(2^3 \cdot 5, 2^2 \cdot 7) = 2^2 = 4.$

[04] Verdadeira. É imediato que $a = 40$ e $b = 28$ são números pares.

[08] Verdadeira. Com efeito, pois $40 > 28.$

Resposta da questão 21: [C]

De acordo com a lei de formação do conjunto $A,$ concluímos que k é um divisor positivo de $60.$ Utilizando o processo de Euclides para determinar o número n de divisores positivos de $60,$ obtemos:

A decomposição do 60 em fatores primos será dada por $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$ portanto, o número de divisores de 60 será dado por:
$n = (2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 12.$

Resposta da questão 22: [C]

Fatorando-se o produto das idades, tem-se:

$$\begin{array}{r|l} 37037 & 7 \\ 5291 & 11 \\ 481 & 13 \\ 37 & 37 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, a idade da mãe será 37 anos e das filhas $7, 11$ e 13 anos. A diferença de idade entre a filha mais velha e a mais nova será de 6 anos.

Resposta da questão 23: [C]

Sendo 23 o único primo entre 20 e $25,$ segue que $E(23) = 23 - 1 = 22$ é o valor máximo de $E(n)$ quando n varia de 20 a $25.$