

VESTIBULARES
2021



Sumário

| | |
|---|---|
| Apresentação | 3 |
| Instruções Gerais | 3 |
| Análise da aula | 4 |
| <i>Essa Disciplina no Vestibular</i> | 4 |
| <i>Roteiro da Aula</i> | 5 |
| <i>Questões da Aula Separadas por Nível</i> | 7 |
| Bizus | 7 |



Apresentação



Olá, caros alunos!

Sejam bem-vindos à Trilha Estratégica, nosso Bizuário, para as provas do ITA!

Antes de darmos início, vou me apresentar:

Meu nome é Bruno Henrique Almeida da Cunha, sou aluno do ITA, aprovado na AFA, no IME e no ITA por dois anos consecutivos (2018 e 2019).

SOBRE O BIZUÁRIO: Trata-se de uma instrução sobre como otimizar o seu estudo nas disciplinas. Sabemos que, durante a preparação para o ITA, é comum o aluno se deparar com inúmeras listas com muitos exercícios e materiais enormes também. Nesse sentido, esse material foi feito no intuito de instruir o aluno a seguir um caminho mais otimizado para conseguir o conhecimento que ele precisa e acertar as questões da prova. Aqui usarei da minha experiência nos vestibulares ITA/IME, obtida com mais de 4 anos de preparação, para fazer um roteiro de aula em que você poderá acessar as suas dificuldades na matéria de forma rápida e objetiva.

Instruções Gerais

Essa aula de geometria espacial II, que cai cerca de 9% no vestibular do ITA, é a mais importante para a prova. Ela engloba toda a parte de sólidos redondos, inscrição e circunscrição de sólidos, que caem bastante na prova do ITA. É interessante também que você tenha um caderno de anotações para resolver as questões e treinar as construções geométricas. No que tange ao conteúdo da aula, posso dizer que essa aula está muito bizurada para você mandar bem na prova do ITA. O conteúdo de inscrições e circunscrições, que caem bastante e costumam dar dor de cabeça em muitos alunos nunca foi tão bem analisado e destrinchado em um material de turma ITA. Essa é a última aula do curso mas não pense que vai acabar o aqui. Depois dessa aula, você pode resolver as provas antigas e voltar nas aulas das matérias que você sentiu mais dificuldade ao fazer a prova. Dito isso, vamos para a aula!



Quanto à questão de como estudar o Buzuário e as aulas, lembre-se:

- para passar no ITA é preciso bastante disciplina, foco e paciência. O esperado é que o aluno estude entre 10 e 12 horas por dia, em média, principalmente no começo. Pode parecer muita coisa, até fora da realidade. Porém, considerando que o aluno tem afinidade pelas disciplinas de exatas e que ele encontre um ambiente propício para o estudo, é natural que, com o tempo, ele atinja níveis de estudo muito altos sem demandar grandes esforços para isso.
- “Sangue no olho” e “faca nos dentes” são expressões que indicam muito bem o comportamento de um vestibulando de ITA. Sabendo disso, vamos nessa!

Observação: Quando você for indicado a fazer uma questão e encontrar dificuldades, pule-a e continue a resolver outras questões. É interessante que você não olhe a resolução desse exercício logo de primeira, use as outras questões mais fáceis como subsídio para resolver as questões mais complexas. Se mesmo assim você continuar com esse problema, verifique a resolução. Seguir dessa forma irá ajudá-lo a absorver a matéria.

Análise da aula

Essa Disciplina no Vestibular

Essa é uma aula que vai exigir um pouco da sua paciência e da sua memória para decorar algumas fórmulas e relações que vão aparecer, principalmente, no que tange à esfera. Aquelas em que for possível obter uma demonstração rápida da fórmula, irei avisá-lo e pedir para você aprender como deduz. Caso não seja essa a situação, vou pedir pra você decorar mesmo. Mas não se preocupe, pois a maioria dessas fórmulas você absorverá e não correrá o risco de esquecer no vestibular, por serem muito recorrentes. Também é explicado na aula a questão do teorema de Pappus-Guldin. Geralmente esse tema não é abordado em livros do ensino médio, o que pode causar um certo incômodo no aluno. Não se preocupe, pois o que for necessário para a prova do ITA será explicitado aqui na trilha 😊. Em relação ao nível das questões dessa matéria na prova do ITA, pode-se afirmar que não são muito difíceis. As questões são geralmente fáceis e médias, estando com certeza entre aquelas que você deve fazer para mandar bem no vestibular.



Roteiro da Aula

- ❖ Começamos a aula com o cilindro. Esse é um sólido bem tranquilo e não costuma dar muito problema nas questões do vestibular. Na hora de calcular a área total do cilindro, é importante que você não decore a fórmula $A_T = 2\pi R(h + R)$. Aprenda a lógica por trás dessa expressão, é relativamente simples.
- ❖ Ainda no capítulo de cilindros, são estudadas as seções paralelas ao eixo e ao tronco de cilindro. Essa ideia de completar o volume com um outro volume para chegar em algo simétrico é bastante usada em algumas áreas da física também, como em algumas questões de hidrostática e até de resistores.
- ❖ Na parte de cones (**1.2**), destacamos logo o tópico **1.2.2** que pode causar alguma dúvida no aluno iniciante. Para achar a área total do cone, você “faz um rasgo” desde a base do cone até o vértice e abre como se fosse uma folha de papel. Com isso você pode calcular o ângulo de abertura da seção que será formada usando regra de três, e com isso você calcula a área, e depois é só somar com a área da base do cone. Não precisa decorar a fórmula, mas é bom que você entenda o processo por trás da fórmula e faça na hora da prova, é bem rápido e diminui razoavelmente as chances de você errar.
- ❖ Volume do cone, assim como volume do tronco de cone, são extremamente importantes e você não pode ir para a prova sem saber a fórmula deles. Você pode decorar as fórmulas dos volumes desses sólidos. O volume de cone vai ser absorvido facilmente pelo fato de aparecer frequentemente nas questões. Já o volume do tronco de cone não aparece tanto, podendo gerar uma certa dificuldade. O bizu é que tanto para o tronco de cone quanto para o tronco de pirâmide é a mesma fórmula para o volume. Sempre decore a fórmula $V_{tronco} = \frac{H_t(A + \sqrt{AB} + B)}{3}$, em que A e B são as áreas das bases e H_t é a altura do tronco. Ela serve perfeitamente para o tronco de pirâmide e, caso seja tronco de cone, basta você fazer $A = \pi R^2$ e $B = \pi r^2$.
- ❖ Ainda no tópico **1.2.4**, o professor demonstrou a fórmula para calcular a área lateral de um tronco de cone. Não aconselho decorar essa fórmula. O bizu para saber a área rapidamente é pensar na figura determinada ao “desenrolar” o tronco de cone como um “trapézio”. Assim, temos que a área de um trapézio é $A = \frac{h(a+b)}{2}$, no caso do tronco de cone, o $a = 2\pi R$ e $b = 2\pi r$ e $h = g_t$, sendo que o g_t você pode calcular pelo método que o professor passou na aula. Nesse caso, a fórmula da área lateral do tronco de cone ficaria $A = \frac{g_t(2\pi R + 2\pi r)}{2} = \pi g_t(R + r)$, o mesmo encontrado na aula 😊. Pensar assim vai economizar um bom tempo na hora da prova, diminuindo também as chances de você errar.



- ❖ Chegamos na parte de circunferência, aquela com mais fórmulas para você decorar. Mas não se preocupe que também tem bastante bizu pra essa parte. Nesse capítulo de esferas, até o tópico **1.3.4**, são apresentados os cálculos da área e do volume de uma esfera. Para essas relações, você vai decorar as fórmulas! Também são relações que caem bastante e você não terá dificuldade em memorizá-las.
- ❖ Para o volume da cunha esférica e para a área do fuso esférico, você não precisa decorar a fórmula. Basta fazer uma regra de três, como ilustrado na aula.
- ❖ Em **1.3.5** temos o segmento esférico. Para o volume do segmento esférico, que é bem importante na prova do ITA, é interessante que você decore a fórmula:

$$V_{\text{segmento esférico}} = \frac{\pi h[3(r_1^2 + r_2^2) + h^2]}{6}$$

Essa fórmula é importante não só para a matemática no ITA, mas também para a física.

- ❖ Outra relação importantíssima para a geometria espacial no vestibular do ITA é a área do segmento esférico. Outra fórmula que você terá que decorar é $A = 2\pi Rh$. Apenas lembre-se que o h indicado nessa fórmula é a altura compreendida entre os planos que determinam o segmento esférico! Sendo que um desses planos pode tangenciar a esfera, caindo no caso conhecido da área da calota esférica.
- ❖ Se você já estudou essa matéria antes e já sabe fazer algumas questões do ITA, pular as questões de **1** a **8**. Caso contrário, fazer essas questões antes de prosseguir para o próximo capítulo.
- ❖ Sobre o capítulo **2**, temos que a ideia de inscrição de sólidos é você sempre encontrar uma medida que coincida para ambos os sólidos. O professor explicitou alguns exemplos clássicos na aula, os quais é interessante você anotar e tentar seguir os mesmos passos que o professor seguiu para demonstrar as relações desses sólidos.
- ❖ Todos os casos de inscrição de cubo em esfera (**2.1**) são bastante conhecidos e igualmente importantes. Não é bizu decorar fórmula de inscrição alguma, o interessante é sempre saber o que está acontecendo e tentar equacionar a partir daí.
- ❖ Dentre os exemplos que o professor mostrou, o **2.4** e **2.5** são os que mais caem no vestibular. Preste bastante atenção no **2.4**, pois se você não tiver esse caso bem esclarecido na cabeça, você pode se confundir na hora da prova. De todos os exemplos, considero o **2.6** o mais complicado de se perceber. Então, dê uma atenção a mais no caso **2.6** para você chegar afiado na hora da prova. O **2.2** e **2.3** são mais tranquilos, mas também de grande importância.
- ❖ No capítulo **3**, temos o teorema de Pappus-Guldin. Já caiu no IME uma questão que se você soubesse as relações desse teorema, que são $A = 2\pi\bar{x}L$ e $V = 2\pi\bar{x}A$, ajudaria bastante. Se você observar, para alguns cálculos, a aplicação da fórmula é bem útil, como o cálculo da área lateral de um tronco de cone. Porém, geralmente, para as questões do ITA sobre sólidos de revolução, que caem bastante, é possível resolver se você conseguir visualizar o que está acontecendo ao girar a figura em relação ao eixo que a questão pede, como na questão **39**. Sendo assim, no ITA, tenha como primeira ideia a rotação da figura na mão e veja se a questão



sai por subtração de sólidos conhecidos. Você pode tentar usar esse teorema se for fácil de calcular a posição do centro de gravidade da figura, o que acontece geralmente nas questões quando envolvem triângulo equilátero.

- ❖ Chegamos ao fim da aula, está na hora de praticar com exercícios. Caso essa seja sua primeira vez estudando essa matéria, siga as questões na ordem de dificuldade. Caso não seja essa a situação, faça as questões, inclusive as fáceis, porém numa velocidade maior que a usual. Tente fazer de forma ligeira, sem pensar muito. Vá fazendo dessa forma aos poucos e veja sua margem de erro. Assim você simula a correria do vestibular. Lembre-se de fazer tudo o mais organizadamente possível. Você que já é mais experiente pode seguir as questões na ordem que aparecerem.

Questões da Aula Separadas por Nível

Aqui separei as questões da aula por nível de dificuldade. Não se preocupe se você não conseguiu ou não entendeu uma questão difícil logo de primeira, a maior parte das questões de Geometria Espacial que caem no ITA são fáceis e médias. Porém, no longo prazo, é importante que você domine todas as questões da aula e as ideias que foram descritas ali, para que aprofunde seus conhecimentos na matéria e minimize, assim, as chances de cair alguma questão desse assunto que você não saiba resolver na hora da prova.

Não se preocupe caso você tenha encontrado dificuldade em alguma questão considerada fácil, pois você pode estar destreinado na matéria. Verá que, com um pouco mais de prática, você, provavelmente, vai concordar comigo!

| Fáceis | Médias | Difíceis |
|---|--|--------------------|
| 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 36, 42, 44, 45, 46, 49, 51, 52, 55, 56, 58, 59, 61, 62, 67, 68, 73 | 12, 17, 23, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 47, 48, 53, 54, 57, 60, 63, 64, 65, 66, 69 | 27, 50, 70, 71, 72 |

- ❖ A questão 23 envolve cálculo e esse tipo de questão não cai no ITA. Se você teve dificuldade em fazê-la, pode ficar tranquilo.
- ❖ Na questão 26 temos uma questão que é a aplicação direta da fórmula de Pappus-Guldin. Porém, caso você não lembre da fórmula, você poderia fazer a revolução do sólido e calcular as áreas separadamente. A área total seria a área da coroa circular que seria formada pela base do triângulo somada à área lateral do tronco de cone interno e à área lateral do tronco de cone externo que seria formado.
- ❖ Para a questão 27 foi necessário o conceito de ângulo sólido, que não é cobrado no ITA. Faça essa questão, mas não se atente muito ao conteúdo dela, apenas encare como mais um teste para você treinar.
- ❖ Na questão 31 temos uma ideia de encontrar o valor de uma variável que depende de uma sequência infinita de multiplicações e radiciações. Na maioria dos casos, o jeito como o professor resolve é o jeito que deve ser usado para resolver esse tipo de problema. Tirando isso, o resto da questão fica simples, apenas aplicação de fórmula.
- ❖ O tipo da questão 34, inscrição de esferas em cones, é bastante comum no ITA. É muito bom você aprender todas as estratégias de resolução dessa inscrição, o equacionamento e etc.
- ❖ Na questão 38 não há segredo. Basta calcular os lados do triângulo, usar fórmula de Heron e depois calcular o volume de um sólido gerado por rotação. Questão com a cara do ITA, em que você usa conceitos clássicos de geometria plana para resolver o problema.
- ❖ Nessa questão 39 um pouco de visão espacial ajudaria a resolver, mas nada muito exigente. O interessante nesse tipo de questão, caso você não tenha enxergado um método de resolução é sempre olhar para os centros e para os pontos de tangência.
- ❖ Questão 40 é mais uma questão clássica de rotação de cônicas ao redor de eixos. Cai demais esse tipo de questão.
- ❖ A questão 45 pode assustar um pouco pelo modo como foi escrita, mas ela é uma questão tranquila. Nesse tipo de teste você deve ter calma e analisar friamente a situação. Desenhar o que está acontecendo é uma boa saída.



- ❖ Questão 48 também a cara do ITA, questão boa para treinar semelhança de triângulo em inscrições.
- ❖ 50 é uma questão difícil, pois envolve o volume do tronco de cone e da calota esférica. Além da dificuldade de visualizar a situação. É uma questão que deve ser feita com bastante cuidado e quem sabe até pulá-la na hora da prova. Porém, apesar de ser uma questão difícil, é totalmente viável de fazer na hora da prova se você chegar com as fórmulas de geometria espacial frescas na memória, indicadas nesse bizuário.
- ❖ Está se tornando cada vez mais frequente nos vestibulares a cobrança questões sobre a área da elipse, que é dada por

$$A = \pi ab$$

- ❖ O fato da questão 71, que o plano secante ao cone que tangencia as duas esferas inscritas no cone determina uma elipse com focos nos pontos de tangencia com as esferas, já foi abordado na trilha de geometria analítica. Essa questão é praticamente uma aplicação desse conceito.

