Potencial elétrico e energia potencial eletrostática

Superfícies equipotenciais e método das imagens

Prof. Toni Burgatto

Aula 07

SUMÁRIO

Introdução

Nesta aula, faremos uma breve revisão da mecânica, quanto aos conceitos de trabalho e energia, quantidade de movimento e sua conservação. Todos esses temas serão bem abordados mais adiante nas suas respectivas aulas.

Além da revisão na mecânica, abordaremos o conceito de potencial elétrico, energia potencial elétrica e o potencial elétrico aplicado na resolução de problemas de corpos em equilíbrio eletrostático.

Ainda não temos muitas questões do IME isoladamente sobre esta aula. Por isso, nos apoiaremos em questões de outras instituições, que possuem similaridade e grau de complexidade próximo as do IME.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

1. Uma breve revisão da mecânica

Antes de iniciarmos nossa aula de Potencial Elétrico, vamos fazer uma breve revisão de alguns conceitos da Mecânica que ainda não foram vistos, mas serão detalhados futuramente. O entendimento dessas definições é fundamental para melhor compreender o significado de potencial elétrico.

1.1. Trabalho de uma força

Define-se trabalho de uma força ao longo de um deslocamento $\vec{d}$ como sendo o produto escalar de $\vec{F}$ com $\vec{d}$, ou matematicamente:

$$\boxed{\tau = \vec{F} \cdot \vec{d} = F.d.cos\alpha}$$

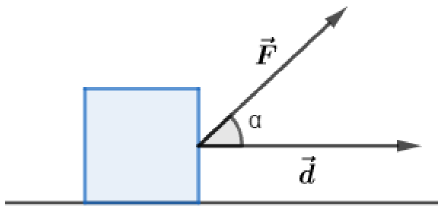


Figura 1: Definição de trabalho de uma força.

Note que o trabalho é definido a partir de um produto escalar, logo ele é uma grandeza escalar. Sua unidade no SI é o joule (J) e existem duas possibilidades quanto ao sinal do trabalho:

- $\tau > 0$: dizemos que é um trabalho motor.
- $\tau < 0$: dizemos que é um trabalho resistente.

Para o caso da força variável ao longo de um deslocamento de A para B, devemos calcular o trabalho em cada elemento de deslocamento e somar todos eles no intervalo desejado. Matematicamente, temos que:

$$\boxed{\tau_{A \to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}}$$

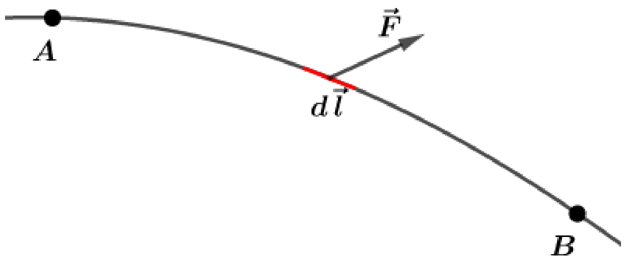


Figura 2: Definição de trabalho de uma força utilizando Cálculo.

1.2. Trabalho da força peso

Uma partícula indo de A para B, está sobre a influência de diversas forças inclusive da força peso, de tal forma que seu deslocamento é $\vec{d}$.

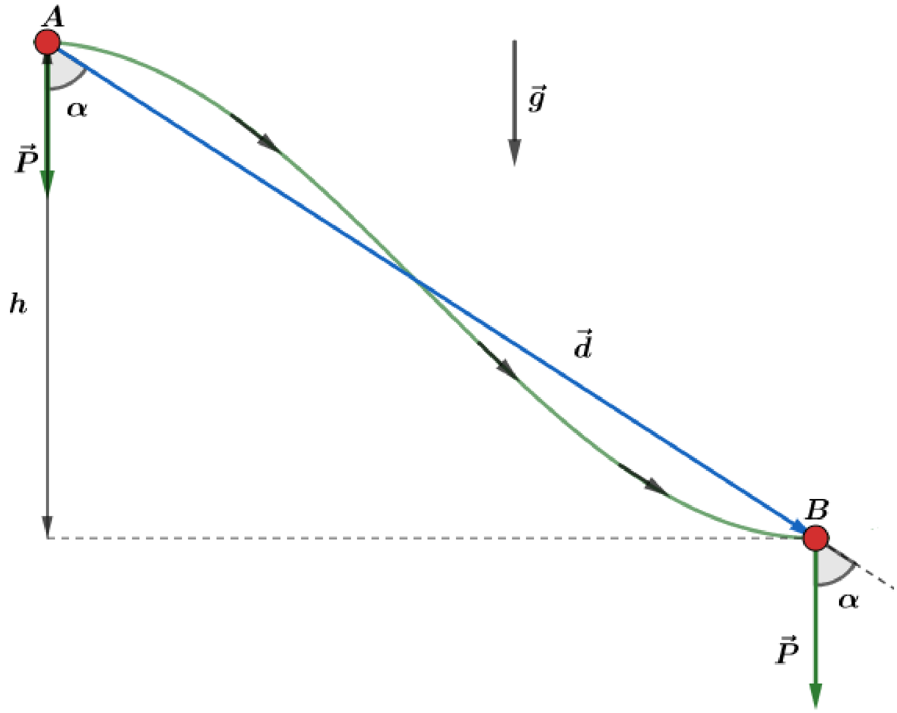


Figura 3: Corpo descendo sob ação de diversas forças, inclusive a força peso.

Considerando que a gravidade ($\vec{g}$) seja constante, ou seja, a força peso não varia no intervalo estudado. Podemos calcular o trabalho da força peço como sendo:

$$(\tau_{\vec{P}})_{A\to B} = \vec{P} \cdot \vec{d} = |\vec{P}|.|\vec{d}|.cos\alpha$$

Entretanto, pela geometria da figura 1, temos que:

$$|\vec{d}|.cos\alpha = h$$

Em que h é a diferença de níveis dos pontos A e B, podendo ser expresso pela diferença de níveis, isto é:

$$h = h_A - h_B$$

Com isso, reescrevemos a expressão do trabalho da força peso do nível A para o nível B da seguinte forma:

$$\boxed{(\tau_{\vec{P}})_{A\to B} = P.h = m.g.h}$$

Se quiséssemos levar a carga de B para A, o trabalho da força peso seria dado por:

$$(\tau'_{\vec{P}})_{A\to B} = P.d.\cos(180° - \alpha) = -P.d.cos\alpha$$

Ou ainda:

$$\boxed{(\tau'_{\vec{P}})_{A\to B} = -m.g.h}$$

Notamos então que:

O trabalho da força peso é **positivo** na **descida** e **negativo** na **subida**.

Dizemos que uma força é conservativa quando o trabalho por ela realizado ao longo de um percurso fechado é nulo. Ou ainda, o trabalho de uma força conservativa não depende da trajetória.

Podemos ver o caráter conservativo da força peso analisando o seguinte caso:

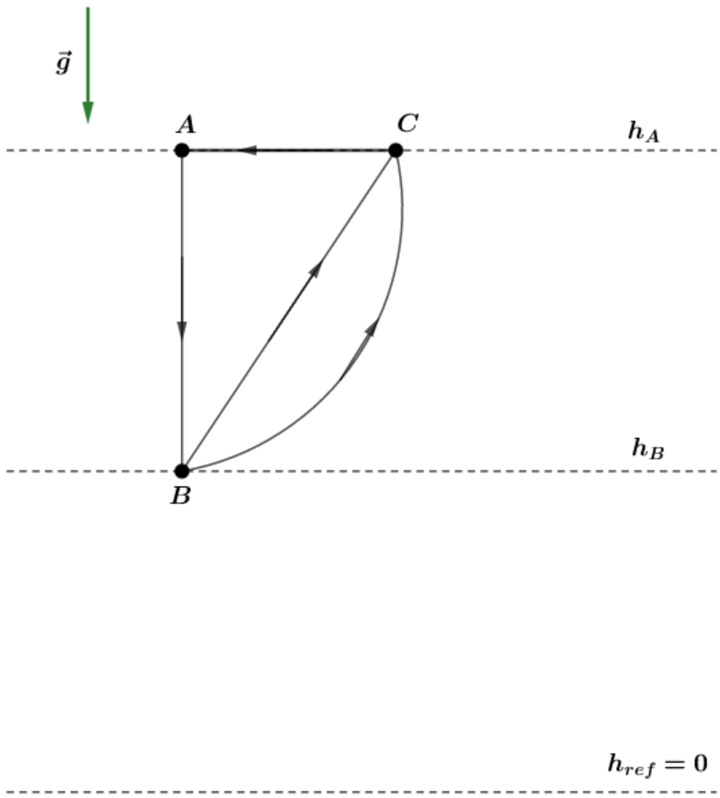


Figura 4: Trabalho da força peso.

Calculando o trabalho da força peso no percurso fechado ABCA, temos que:

$$\tau_{\vec{P}} = \left(\tau_{\vec{P}}\right)_{A \to B} + \left(\tau_{\vec{P}}\right)_{B \to C} + \left(\tau_{\vec{P}}\right)_{C \to A}$$

$$\tau_{\vec{P}} = m.g.(h_A - h_B) + m.g.(h_B - h_A) + m.g.(h_A - h_A) = 0$$

Se tivéssemos tomado outro caminho o resultado seria o mesmo, evidenciando o caráter conservativo da força peso.

Dessa forma, como a força peso é uma **força conservativa**, podemos associar a cada ponto do campo gravitacional (no nosso caso campo gravitacional terrestre) uma grandeza escalar auxiliar chamada potencial gravitacional (V_g), de tal forma que quando $\vec{g}$ for uniforme, temos:

$$V_g = g.h$$

A unidade de V_g é o J/kg.

Sendo assim, podemos reescrever o trabalho da força peso em função dos potenciais:

$$\left(\tau_{\vec{P}}\right)_{A \to B} = m.(g.h_A - g.h_B)$$

$$\boxed{\left(\tau_{\vec{P}}\right)_{A \to B} = m(V_A - V_B)}$$

Convencionando que o potencial gravitacional no infinito e nulo, isto é, $\left(V_g\right)_\infty = 0$, podemos calcular o potencial gravitacional como sendo a área do gráfico $g \times x$:

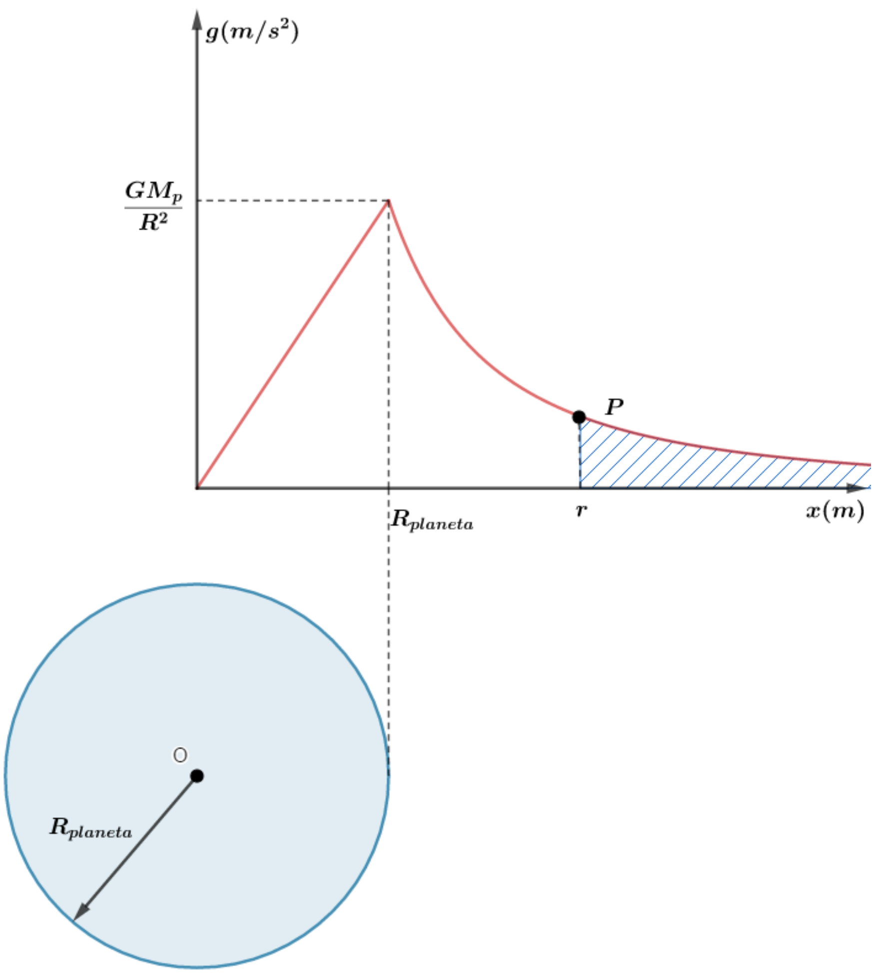


Figura 5: Gráfico do campo gravitacional em função da distância x.

Matematicamente, temos:

$$\boxed{V_g = -\int_{\infty}^{P} g.dx}$$

Para pontos externos, temos que o campo gravitacional é dado por:

$$g = \frac{GM}{x^2}$$

Portanto, o potencial gravitacional no ponto P é dado por:

$$V_{g_P} = -\int_{P}^{\infty} \frac{GM}{x^2}.dx = \left(\frac{GM}{x}\right)_r^{\infty} = -\frac{GM}{r}$$

Note que como nosso referencial está no infinito ($\left(V_g\right)_\infty = 0$), quando fazemos $-\int_P^\infty \frac{GM}{x^2}.dx$ estamos calculando a área do infinito até o ponto de interesse (no nosso caso, até o ponto P).

Fique tranquilo, todo detalhamento da Mecânica será dado mais adiante, nesse momento estamos apenas fazendo uma revisão para aplicar os conceitos na eletricidade.

1.3. Trabalho da força elástica

Como vimos na aula 04, a força elástica é dada pela Lei de Hooke:

$$F = k \cdot x$$

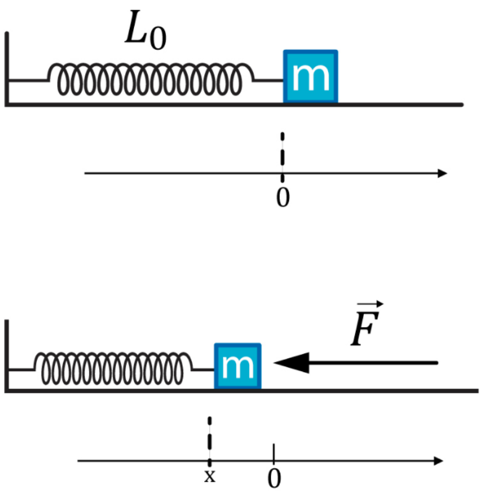


Figura 6: Exemplo de aplicação da lei de Hooke em uma mola sendo comprimida

Quando fazemos o gráfico da força elástica em função da deformação, temos:

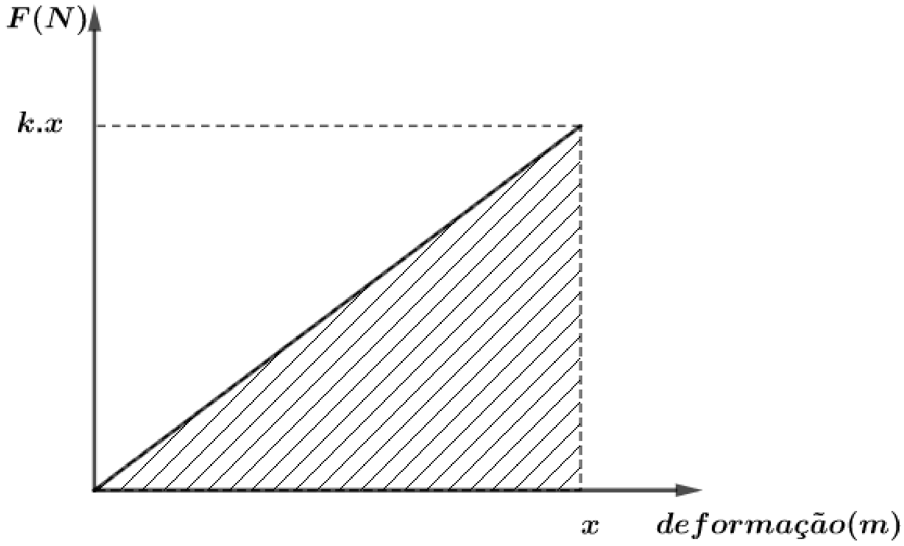


Figura 7: Gráfico da força em função da deformação.

$$\boxed{\left|\tau_{\vec{F}_{elast}}\right| \overset{N}{=} área}$$

$$\boxed{\tau_{\vec{F}_{elast}} = \pm\frac{kx^2}{2}}$$

1.4 Energia

Energia é a capacidade que um corpo tem de realizar trabalho.

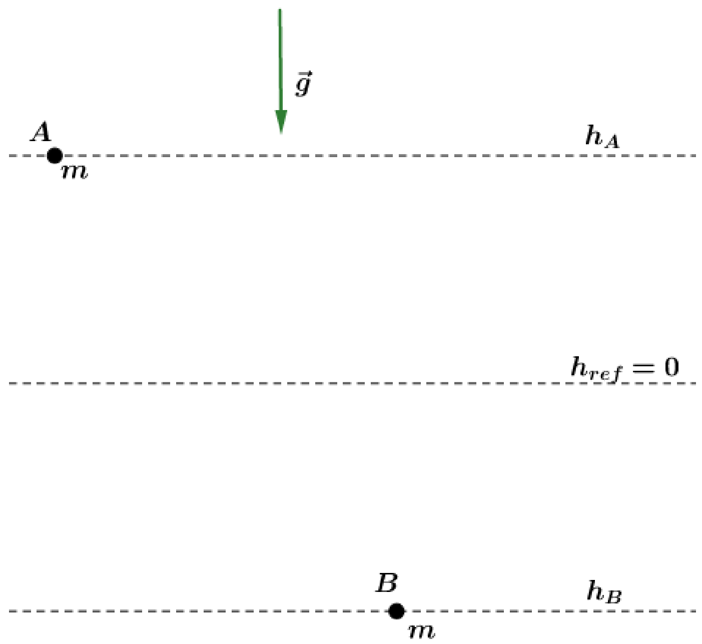
Vamos relembrar as diversas formas como a energia é manifesta na natureza:

- Energia luminosa;
- Energia química;
- Energia elétrica;
- Energia eólica;
- Energia térmica;
- Energia acústica;
- Energia nuclear;
- Energia mecânica.

Nesse momento, vamos relembrar os conceitos de energia mecânica.

1.4.1. Energia potencial gravitacional

É a energia potencial associada a um campo gravitacional. Ela depende da intensidade do peso de um corpo no local onde se encontra, já que o campo gravitacional é função da posição do corpo e da altura do corpo em relação a um plano de referência.



A energia potencial gravitacional é dada por:

$$\begin{cases} (E_{\vec{P}})_A = m.g.h_A = m.V_A \\ (E_{\vec{P}})_B = m.g.(-h_B) = -m.V_B \end{cases} \Rightarrow E_{\vec{P}} = m.V_g$$

O trabalho da força peso de A para B pode ser dado por:

$$(\tau_{\vec{P}})_{A\to B} = m.g(h_A - h_B) = m.(V_{g_A} - V_{g_B}) = (E_{\vec{P}})_A - (E_{\vec{P}})_B = -\left[(E_{\vec{P}})_B - (E_{\vec{P}})_A\right] = -\Delta E_{\vec{P}}$$

$$\boxed{(\tau_{\vec{P}})_{A\to B} = (-\Delta E_{\vec{P}})_{A\to B}}$$

Este conceito é valido para forças conservativas: o trabalho da força é igual a menos a variação da energia potencial.

1.4.2. Energia potencial elástica (E_{elas})

É a energia que é armazenada em sistemas elásticos deformados, por exemplo, uma mola comprimida.

Podemos calcular a energia elástica pela expressão:

$$\boxed{E_{elas} = \frac{k(\Delta x)^2}{2}}$$

1.4.3. Energia cinética

É a energia associada ao estado de movimento de um corpo. Se um objeto de massa m possui uma velocidade v (v muito menor que a velocidade da luz), a energia cinética desse corpo é dada por:

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

Observação: trata-se de uma grandeza escalar relativa, já que a velocidade de um corpo depende do referencial adotado. Dessa forma, uma partícula pode ter energia cinética nula em um referencial e não-nula em outro. Para não confundir, sempre buscaremos referenciais inerciais para a resolução dos nossos problemas.

O gráfico da energia cinética (E_c) em função da velocidade do corpo será um arco de parábola:

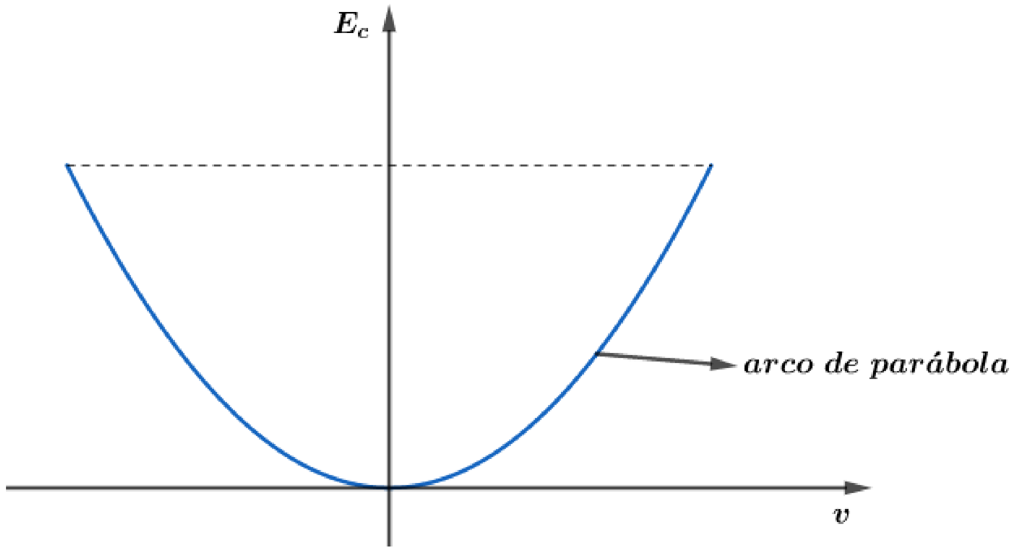


Figura 8: Gráfico da energia cinética em função da velocidade.

1.4.4. Teorema da energia cinética

Considere um corpo sofrendo a ação de diversas forças durante seu deslocamento:

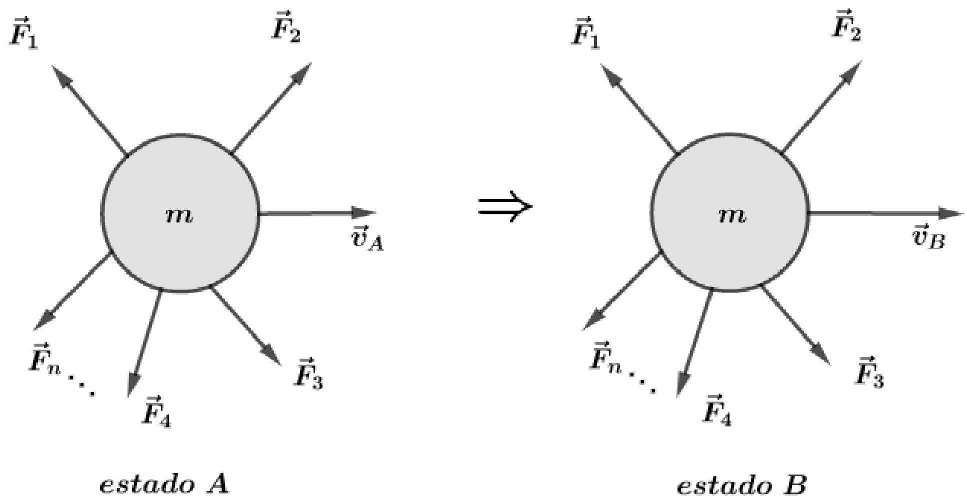


Figura 9: Corpo sofrendo a ação de diversas forças em dois momentos diferentes.

A força resultante no corpo é dada pela soma vetorial das forças e pela 2ª Lei de Newton podemos calcular o módulo da força:

$$F_R = m.a \; ou \; F_R = m.\frac{dv}{dt}$$

Assim, podemos calcular o trabalho da força resultante pela definição:

$$\left(\tau_{\vec{F}_R}\right)_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B m.\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{l}$$

Na cinemática vetorial, aprendemos que:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

Logo, temos que:

$$\left(\tau_{\vec{F}_R}\right)_{A\to B} = \int_A^B m.\vec{v}\cdot d\vec{v} = \left[\frac{1}{2}m.v^2\right]_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2}m.v_B^2 - \frac{1}{2}m.v_A^2 = (E_c)_B - (E_c)_A = \Delta(E_c)$$

Portanto:

$$\boxed{\left(\tau_{\vec{F}_R}\right)_{A\to B} = \Delta(E_c)_{A\to B}}$$

Este resultado mostra o trabalho da força resultante é igual à variação da energia cinética por ela produzida.

Podemos ainda reescrever o teorema e enxergar da seguinte forma:

$$\left(\tau_{\vec{F}_R}\right)_{A\to B} = \Delta(E_c)_{A\to B}$$

$$\left(\tau_{\vec{F}_R}\right)_{A\to B} = (E_c)_B - (E_c)_A$$

$$\boxed{(E_c)_B = (E_c)_A + \left(\tau_{\vec{F}_R}\right)_{A\to B}}$$

A energia cinética de um corpo no estado B é igual a energia cinética do estado A mais o trabalho realizado pela força resultante para ir de A até B.

1.4.5. Cálculo da energia mecânica

A energia mecânica de um corpo é dada pela soma da energia cinética à energia potencial:

$$\boxed{E_{Mec} = E_c + E_P}$$

A energia potencial (E_P) pode ser a elástica ($E_{\vec{F}_{elas}}$), a gravitacional ($E_{\vec{P}}$) ou as duas, dependendo do sistema mecânica que estamos estudando.

Exemplo:

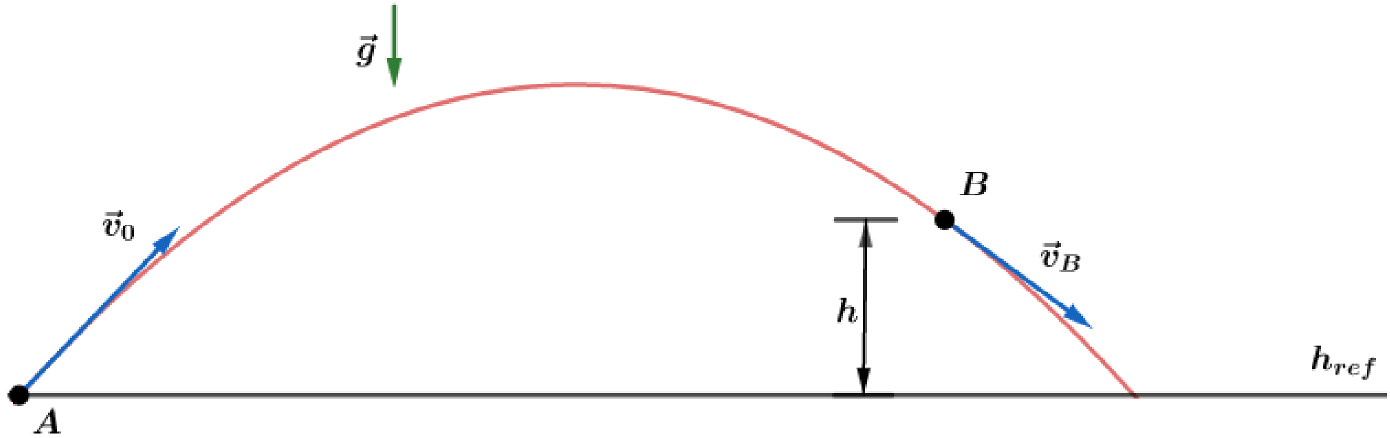


Figura 10: Lançamento oblíquo de um corpo.

Desprezando a resistência do ar, podemos escrever a energia mecânica em cada momento:

$$(E_M)_A = (E_c)_A + (E_P)_A$$

$$(E_M)_A = \frac{1}{2}m.v_0^2 + 0$$

$$\boxed{(E_M)_A = \frac{1}{2}m.v_0^2}$$

Em B existe energia potencial gravitacional, além da energia cinética:

$$(E_M)_B = (E_c)_B + (E_P)_B$$

$$\boxed{(E_M)_B = \frac{1}{2}m.v_B^2 + m.g.h}$$

1.4.6. Sistema mecânico conservativo

Dizemos que um ***sistema mecânico*** é ***conservativo*** quando todos os trabalhos são realizados exclusivamente por ***forças conservativas***.

As forças conservativas são assim chamadas, pois os trabalhos realizados contra elas são armazenados ("conservados") como energia potencial. São **conservativas** as forças elásticas, as forças gravitacionais e as **forças elétricas**.

Um dos grandes princípios da Mecânica Clássica é o da conservação da energia mecânica, que diz:

Em um sistema mecânico conservativo, a energia mecânica se conserva.

Matematicamente, em um sistema conservativo, temos que:

$$\boxed{E_{Mecânica} = E_{cinética} + E_{potencial} = constante}$$

Ou ainda:

$$sistema\ conservativo \Rightarrow \Delta E_{Mecânica} = 0$$

Por exemplo, um corpo caindo em queda livre próximo a superfície da Terra. Como temos um sistema conservativo nesse exemplo, a energia mecânica total do sistema deve permanecer constante. Inicialmente, quando objeto está na sua altura máxima (adotando o solo como referencial de energia potencial nula), apenas existe a energia potencial gravitacional.

Quando o objeto é solto, ele começa a perder energia potencial gravitacional e ganha energia cinética, isto é, vai perdendo altura e ganhando velocidade. Até que o corpo atinge o solo e nesse momento possui energia cinética máxima e energia potencial gravitacional mínima. Graficamente, temos que:

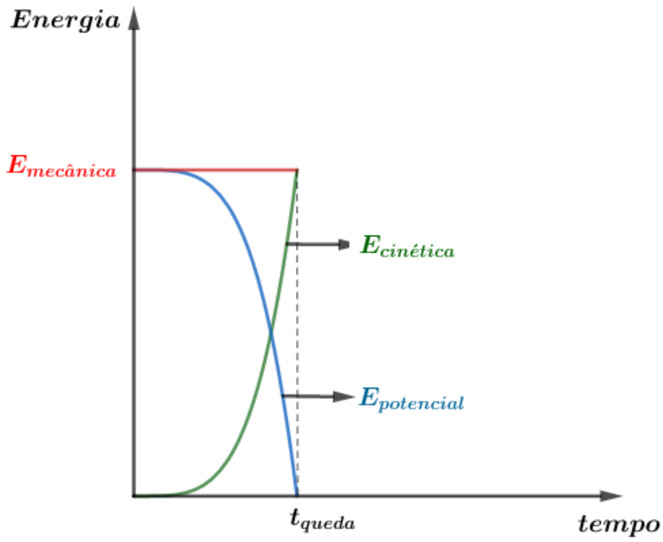


Figura 11: Gráfico da energia mecânica em um sistema mecânico conservativo.

Este princípio de conservação vai além de sistemas mecânicos. O Princípio da Conservação da Energia propõe que:

A energia em um sistema não se perde e não se cria, ela apenas se transforma nas suas mais variadas modalidades. Sempre que uma certa forma de energia aumenta, outra forma de energia diminui em mesma quantidade, de forma que a energia total do sistema seja a mesma.

1.4.7. Sistemas mecânicos não-conservativos

Forças não-conservativas são aquelas nas quais o trabalho depende da trajetória, isto é, não é função exclusiva das posições inicial e final do corpo. Um exemplo de força não conservativa é o atrito.

O atrito pode aparecer em um escorregamento de um corpo, na resistência viscosa de um fluido. Em todos estes casos, as forças de atrito são não-conservativas e contribuem para a dissipação da energia mecânica, que converte em maior parte em energia térmica.

Isso é justificado pelo fato de o trabalho das forças não-conservativas contribuírem com a energia cinética, mas não sendo capaz de compensar o armazenamento na energia potencial, já que essas forças não têm energia potencial associada.

Este fato pode ser traduzido matematicamente pelo teorema das forças não-conservativas. Para sistemas não-conservativos, temos que:

$$\boxed{\tau_{fnc} = E_{M_{final}} - E_{M_{inicial}}}$$

Lembrando que tratando-se de forças não conservativas, devemos notar se o trabalho é motor ($\tau > 0$) ou é resistente ($\tau < 0$).

1.5. Quantidade de movimento

Por definição, a quantidade de movimento de um corpo num instante com velocidade $\vec{v}$, é dada por:

$$\boxed{\vec{Q} = m.\vec{v}}$$

Sua unidade de medida é:

$$u(Q) = u(m).u(v)$$

$$\boxed{u(Q) = kg \cdot \frac{m}{s}}$$

Observações:

1) Trata-se de uma grandeza instantânea, pois a definição envolve a velocidade vetorial instantânea do corpo.
2) Como a massa é um escalar positivo, $\vec{Q}$ e $\vec{v}$ possuem a mesma direção e sentido, orientando-se no sentido do movimento.

Se derivarmos a quantidade de movimento do centro de massa em relação ao tempo, chegaremos a um resultado interessante:

$$\left(\frac{d(\vec{Q})}{dt}\right)_{cm} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Se a massa do corpo é constante, $\frac{dm}{dt} = 0$ e como $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, então:

$$\left(\frac{d(\vec{Q})}{dt}\right)_{cm} = m \cdot \vec{a}$$

$$\left(\frac{d(\vec{Q})}{dt}\right)_{cm} = \vec{F}_{res}$$

Se $\vec{F}_{res} = \vec{0}$, então $\vec{Q}_{cm}$ é constante.

1.5.1. Sistema isolado

Um sistema mecânico é dito isolado quando a resultante das forças externas que agem nele é nula. Em tais sistemas, apenas agem forças internas.

Agora podemos enunciar um dos principais Princípios de Conservação da Mecânica Clássica:

O Princípio da conservação da quantidade de movimento garante que em um mecânico isolado, a quantidade de movimento total é conservada:

$$\boxed{\Delta\vec{Q} = \vec{0} \ \ ou \ \ \vec{Q}_{final} = \vec{Q}_{inicial}}$$

2. Potencial elétrico

Já vimos os conceitos de força elétrica e campo elétrico, definições de grandezas vetoriais. Neste momento, vamos introduzir o conceito de potencial elétrico, semelhante ao que foi feito na nossa revisão da mecânica. Tudo para que fique o mais claro possível o conceito de potencial elétrico.

Para isso, vamos estudar o trabalho da força elétrica no campo elétrico uniforme.

2.1. O Trabalho no campo elétrico uniforme

Seja E a intensidade de um campo elétrico uniforme. Inicialmente, vamos tomar dois pontos quaisquer A e B, numa mesma linha de força, separados pela distância d.

Devido ao fato de a força ser constante, já que p campo elétrico é uniforme ($E = cte$), o trabalho da força elétrica $\vec{F}_{ele}$ nesse deslocamento é dado por:

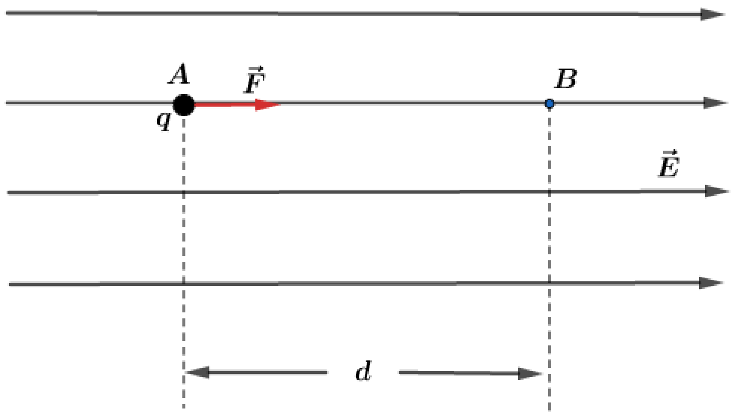


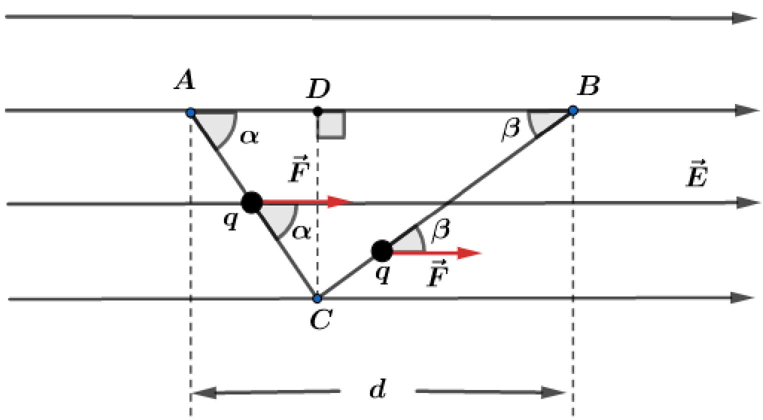
Figura 12: Carga se locomovendo ao longo de um campo elétrico uniforme.

$$\left(\tau_{\vec{F}_{ele}}\right)_{A\to B} = F.d$$

Mas, como $F = q.E$, temos:

$$\boxed{\left(\tau_{\vec{F}_{ele}}\right)_{A\to B} = q.E.d}$$

Agora, vamos tomar um terceiro ponto C, que pertence a outra linha de força, como mostra a figura abaixo:



Quando a carga q desloca-se de A para C e, depois, de C para B, temos os seguintes trabalhos em cada trecho:

$$\left(\tau_{\vec{F}_{ele}}\right)_{A\to C} = F.\overline{AC}.\cos(\alpha)$$

$$\left(\tau_{\vec{F}_{ele}}\right)_{C\to B} = F.\overline{CB}.\cos(\beta)$$

O trabalho total no deslocamento ACB é a soma dos trabalhos:

$$\left(\tau_{\vec{F}_{ele}}\right)_{A\to C\to B} = \left(\tau_{\vec{F}_{ele}}\right)_{A\to C} + \left(\tau_{\vec{F}_{ele}}\right)_{C\to B}$$

$$\left(\tau_{\vec{F}_{ele}}\right)_{A\to C\to B} = F.\overline{AC}.\cos(\alpha) + F.\overline{CB}.\cos(\beta) = F(\overline{AC}.\cos(\alpha) + \overline{CB}.\cos(\beta))$$

Pela geometria do problema, vemos que:

$$\overline{AC}\cos(\alpha) = \overline{AD} \;\; e \; \overline{CB}\cos(\beta) = \overline{DB}$$

$$\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AB}$$

Portanto:

$$\overline{AC}.\cos(\alpha) + \overline{CB}.\cos(\beta) = \overline{AB} = d$$

$$\boxed{\left(\tau_{\vec{F}_{ele}}\right)_{A\to C\to B} = F.d}$$

Dessa forma, o trabalho da força elétrica tomando o deslocamento ACB é o mesmo que o trabalho no deslocamento AB.

$$\boxed{\left(\tau_{\vec{F}_{ele}}\right)_{A\to C\to B} = F.d = \left(\tau_{\vec{F}_{ele}}\right)_{A\to B}}$$

Este resultado pode ser generalizado, pois para qualquer trajetória que tomássemos entre A e B, o trabalho da força elétrica seria dado por:

$$\left(\tau_{\vec{F}_{ele}}\right)_{A\to B} = F.d = q.E.d$$

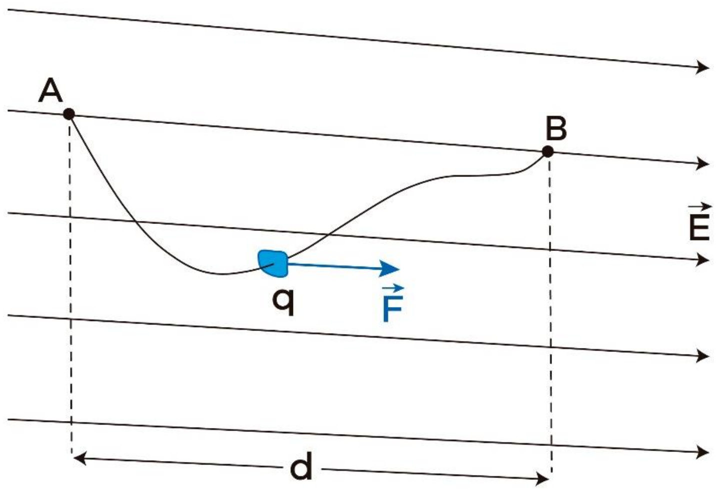


Figura 13: Carga elétrica se movendo em uma região onde o campo elétrico é uniforme.

Desse resultado, concluímos que o trabalho da força elétrica independe da trajetória, apenas da carga elétrica e da posição dos pontos A e B na região do campo elétrico. Ainda que mostremos esse fato para uma situação particular (trabalho realizado no campo elétrico uniforme), podemos generalizar esse resultado da seguinte forma:

O trabalho realizado por uma força elétrica para ir de A até B não depende da trajetória.

Como vimos, forças conservativas possuem como propriedade o fato do trabalho por ela realizado não depender da trajetória. Por isso, dizemos que a força elétrica é uma força conservativa.

Se o campo não for eletrostático, ele não será conservativo, mas isso é um assunto que foge do nosso escopo de curso. Sempre consideraremos campos eletrostáticos, gerados por cargas elétricas em repouso.

2.2. A energia potencial no campo eletrostático

Sempre que trabalhamos com campo de força conservativo, associamos os conceitos de energia potencial e de potencial. Aplicamos essa ideia na mecânica, quando estudamos a formulação da energia potencial associada ao campo gravitacional, já que se trata de um campo de forças conservativo.

Analogamente, faremos um tratamento semelhante, pois o campo eletrostático também é conservativo. Para isso, considere uma carga elétrica positiva puntiforme solta com velocidade nula num ponto A em uma região que existe um campo eletrostático qualquer.

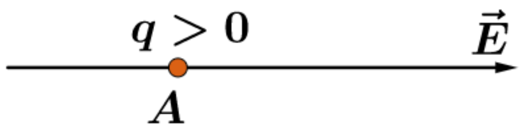


Figura 14: Carga elétrica positiva com velocidade nula em uma região do campo elétrico $\vec{E}$.

Nessas condições, a força elétrica tende a deslocar a carga na própria orientação do campo, promovendo um trabalho positivo. Dessa forma, a partícula ganha energia cinética. Diante disso, podemos dizer que a partícula possuía uma certa energia que se transformou em energia cinética. Essa outra forma de energia chamamos de energia potencial elétrica.

Assim como na mecânica, quando fomos definir a energia potencial, foi necessário atribuir um referencial para que pudéssemos determinar a energia potencial. Na elétrica não é diferente.

Define-se energia potencial de uma carga elétrica puntiforme q, em um dado ponto A, como o trabalho que a força elétrica realiza quando é levada do ponto A até o ponto de referência R. Em outras palavras:

$$\boxed{\left(E_{pot}\right)_A = \tau_{A \to R}}$$

2.3. O Potencial elétrico

Definimos potencial elétrico associado ao ponto A, denotado por V_A, a razão entre a energia potencial elétrica da carga em A ($\left(E_{pot}\right)_A$) e o valor da carga (q), ou seja:

$$\boxed{V_A = \frac{\left(E_{pot}\right)_A}{q}}$$

Observações:

1) Essa razão já é bem determinada em cada ponto do campo elétrico e independe do valor de q, isto é, independe da carga que abandonamos no campo eletrostático apenas para estudarmos o problema. Nesse momento, parece um pouco contraditório, já que estamos vendo a carga q no denominador de V_A. Este fato ficará mais claro logo a frente.
2) Definimos o potencial elétrico em A como o quociente de duas grandezas escalares, notoriamente, o potencial também será um ***escalar.***
3) Sua unidade no SI é o volt, indicado pela letra V.
   Assim, temos que:
   $$\frac{1\,J}{1\,C} = 1\,J/C = 1\,V$$

A unidade volt é dada em homenagem ao físico italiano Alessandro Volta (1745-1827).

2.4. Determinação do trabalho em função da diferença de potencial (DDP)

Dada uma carga elétrica q que se desloca de A para B, em uma região onde existe um campo elétrico qualquer. Como o campo é conservativo, vimos anteriormente que o trabalho não depende da trajetória. Dessa forma, podemos escrever que:

$$\tau_{A\to B} = \tau_{A\to R} + \tau_{R\to B}$$

Da mesma maneira que vimos na mecânica, quando o campo é conservativo, podemos escrever que:

$$\tau_{R-B} = -\tau_{B\to R}$$

Assim, reescrevemos nossa equação do trabalho de A até B.

$$\tau_{A\to B} = \tau_{A\to R} - \tau_{B\to R}$$

Por outro lado, a definição de energia potencial nos permite escrever que:

$$\tau_{A\to R} = \left(E_{pot}\right)_A$$

$$\tau_{B\to R} = \left(E_{pot}\right)_B$$

Portanto, o trabalho da força elétrica para a carga ir de A até B é dado pela diferença das energias potenciais de cada ponto:

$$\boxed{\tau_{A\to B} = \left(E_{pot}\right)_A - \left(E_{pot}\right)_B}$$

Em outras palavras, o trabalho ($\tau_{A\to B}$) é a diferença da energia potencial inicial e a energia potencial final.

Agora, podemos usar a definição de potencial elétrico de um ponto e escrever o trabalho em função da diferença de potenciais:

$$V_A = \frac{\left(E_{pot}\right)_A}{q} \Rightarrow \left(E_{pot}\right)_A = q.V_A$$

$$V_B = \frac{\left(E_{pot}\right)_B}{q} \Rightarrow \left(E_{pot}\right)_B = q.V_B$$

Sendo assim, chegamos que:

$$\tau_{A\to B} = q.V_A - q.V_B$$

$$\boxed{\tau_{A\to B} = q.(V_A - V_B)}$$

Diante desse resultado, concluímos que o trabalho é igual ao produto da carga elétrica deslocada pela diferença de potencial (d.d.p.) $V_A - V_B$ entre os pontos inicial e final. Note que novamente o trabalho independe da trajetória realizada pela carga e não depende da existência de outras forças que podem ou não agirem sobre a partícula.

Para o caso de um campo elétrico uniforme, vimos anteriormente no item 2.1 desse capítulo que o trabalho era calculado da seguinte forma:

$$\tau_{A\to B} = q.E.d$$

Onde d é a distância de A até B, em uma mesma linha de força. Portanto, chegamos a seguinte relação entre o campo elétrico e os potenciais:

$$q.E.d = q.(V_A - V_B)$$

$$\boxed{E.d = V_A - V_B}$$

Com base nessa última expressão, temos a unidade oficial de campo elétrico justificada no SI como sendo:

$$E = \frac{(V_A - V_B)}{d}$$

Se tomarmos $d = 1\ m$ e $V_A - V_B = 1V$, concluímos que:

$$\boxed{E = 1\ V/m}$$

A partir de agora usaremos V/m como unidade do campo elétrico.

2.5. Determinação do potencial elétrico caso geral

Como vimos, o potencial elétrico em um ponto A é dado por:

$$V_A = \frac{(E_{pot})_A}{q}$$

Mas, $(E_{pot})_A = \tau_{A\to R} = -\tau_{R\to A}$, logo:

$$V_A = \frac{-\tau_{R\to A}}{q}$$

Sendo assim, precisamos definir um referencial que irá facilitar nossa vida no cálculo do potencial. Adota-se como ponto de referência o infinito e dizemos que o potencial no infinito é nulo:

$$\boxed{V_\infty = 0}$$

Além disso, o trabalho realizado pela força elétrica pode ser dado pela definição de trabalho de uma força, trazendo a carga do infinito (nosso referencial) até o ponto A:

$$\tau_{\infty\to A} = \int_\infty^A q.\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Portanto, o potencial é dado por:

$$V_A = -\frac{\left(\int_\infty^A q.\vec{E}\cdot d\vec{l}\right)}{q}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_A = -\int_\infty^A \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

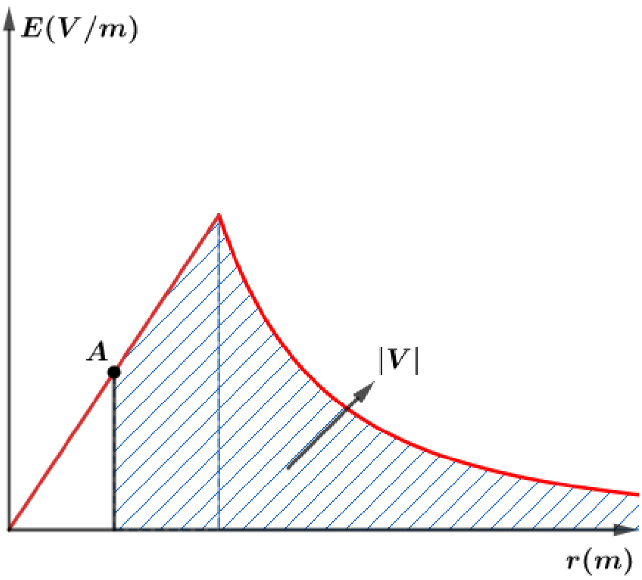


Figura 15: Gráfico auxiliar do campo elétrico em função da distância para o cálculo do potencial.

2.6. Cálculo do campo elétrico a partir do potencial

Se conhecemos o potencial, podemos utilizá-lo para determinar o campo elétrico. Para isso, vamos considerar um pequeno deslocamento $d\vec{l}$ em um campo elétrico qualquer $\vec{E}$. Dado que:

$$V_A = -\int_{\infty}^{A} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

A variação do potencial nesse deslocamento pode ser expressa como:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = E.cos\theta.dl = E_t.dl$$

Se tomarmos $E_t = E.cos\theta$ como a componente de $\vec{E}$ na direção de $d\vec{l}$, teremos que:

$$dV = -E_t.dl$$

Pulando as formalidades matemáticas, o campo pode expresso por:

$$\boxed{E_t = -\frac{dV}{dl}}$$

Observe que:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Se o deslocamento $d\vec{l}$ for perpendicular ao campo $\vec{E}$, dV é nulo. Assim, o maior aumento em V só ocorrerá quando $d\vec{l}$ estiver na mesma direção de $\vec{E}$. Dessa forma, as linhas do campo elétrico são orientadas na direção da maior taxa de decréscimo da função potencial.

De forma análoga, para distribuições de cargas com simetria esférica, como por exemplo uma carga puntiforme, o potencial é função apenas da distância radial r. Deslocamentos perpendiculares à direção radial não provocam qualquer variação em $V(r)$, já que o campo elétrico é radial.

Para um dado deslocamento radial $d\vec{r} = d\vec{l} = dr.\hat{r}$. Dessa maneira, temos que:

$$dV(r) = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{E}.dr.\hat{r} = -E_t.dr$$

$$\therefore \boxed{E_t = -\frac{dV(r)}{dr}}$$

Geralmente, calcular o potencial é sempre mais fácil, já que ele é uma função escalar e o campo elétrico é uma função vetorial. Observe que para calcular o campo elétrico, é necessário conhecer o potencial não apenas em um ponto, mas conhecer V em uma região do espaço, saber como é a função $V(x)$.

1)

Encontre o campo elétrico para a função potencial elétrico V dada por $V = 50V - (20V/m)x$.

Comentários:

De acordo com a direção de $V(x)$, podemos dizer que o campo será dado na direção x, pela seguinte relação:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}\hat{\imath} = -\frac{d(50-20x)}{dx}\hat{\imath} = +(20V/m)\hat{\imath}$$

2.7. O Potencial elétrico de carga elétrica puntiforme

Considere uma carga Q , fixa em um certo ponto do espaço, gerando um campo elétrico à sua volta. Seja a carga q trazida do infinito até um ponto P. Vimos que o trabalho para trazer a carga q do infinito até o ponto P pode ser calculado por:

$$\tau_{\infty \to P} = q(V_\infty - V_P)$$

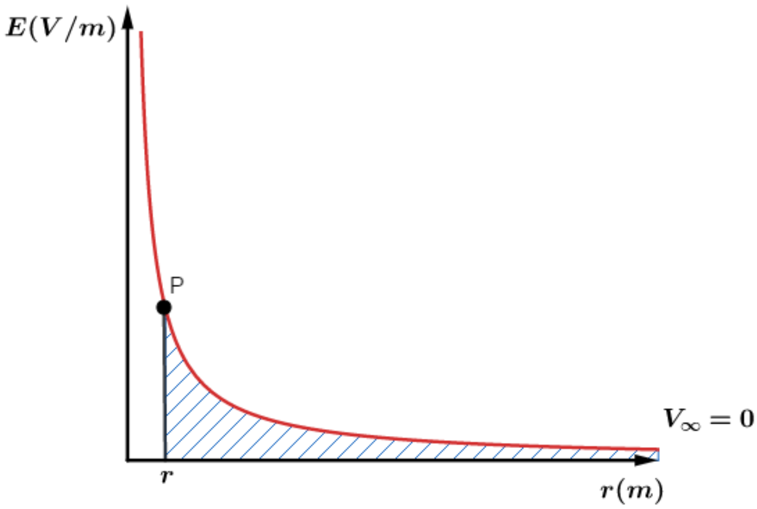
Como $V_\infty = 0$, temos:

$$V_P = -\frac{\tau_{\infty \to P}}{q} = -\int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Sabemos que o campo elétrico de uma carga puntiforme é radial e o módulo dado por:

$$E = \frac{KQ}{r^2}$$

Portanto, podemos determinar o potencial por:



$$V_P = -\int_\infty^P \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_\infty^P K.Q.r^{-2} \cdot dr = \left[\frac{KQ}{r}\right]_\infty^P = \frac{KQ}{r}$$

Isto é, o potencial elétrico de uma carga puntiforme Q em um ponto P que dista r da carga fonte é dado por:

$$\boxed{V_P(r) = \frac{KQ}{r}}$$

Observações:

1) $V_P(r)$ é uma grandeza escalar.
2) O potencial é função de ponto, já que se trata de uma grandeza associada a cada um dos pontos da região do campo elétrico.
3) $V_P(r)$ não depende de eventual carga elétrica que esteja em P.
4) $V_P(r)$ depende da carga fonte Q, geradora do campo elétrico no ponto P.
5) O valor de $V_P(r)$ gerado pela carga puntiforme Q possui o mesmo sinal que a carga:

$$\begin{cases} Q > 0 \Rightarrow V > 0 \\ Q < 0 \Rightarrow V < 0 \end{cases}$$

Se plotarmos o gráfico do potencial elétrico em função da distância, obteremos um arco de hipérbole equilátera:

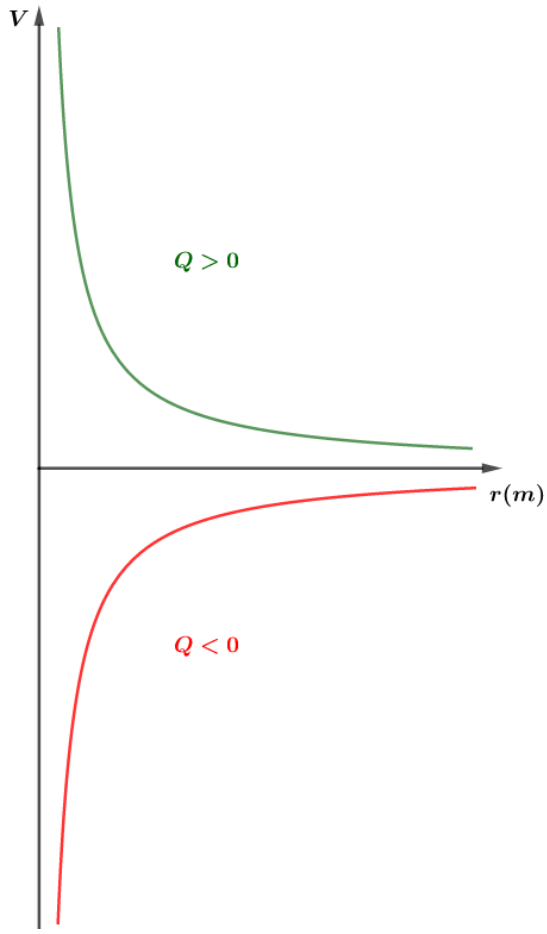


Figura 16: Gráfico do potencial elétrico gerado por uma carga puntiforme em função da distância, para os dois possíveis valores de Q.

2.8. Potencial elétrico gerado por várias cargas puntiformes

Sejam n cargas elétricas gerando um campo elétrico em um dado ponto P do espaço.

Cada uma das cargas gera um potencial em P dado por:

$$V_1 = K\frac{Q_1}{r_1}, V_2 = K\frac{Q_2}{r_2}, \dots, V_i = K\frac{Q_i}{r_i}, \dots, V_n = K\frac{Q_n}{r_n}$$

Pelo Princípio da Superposição, temos que o potencial elétrico resultante é dado pela soma algébrica dos potenciais parciais:

$$V_{res} = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$$

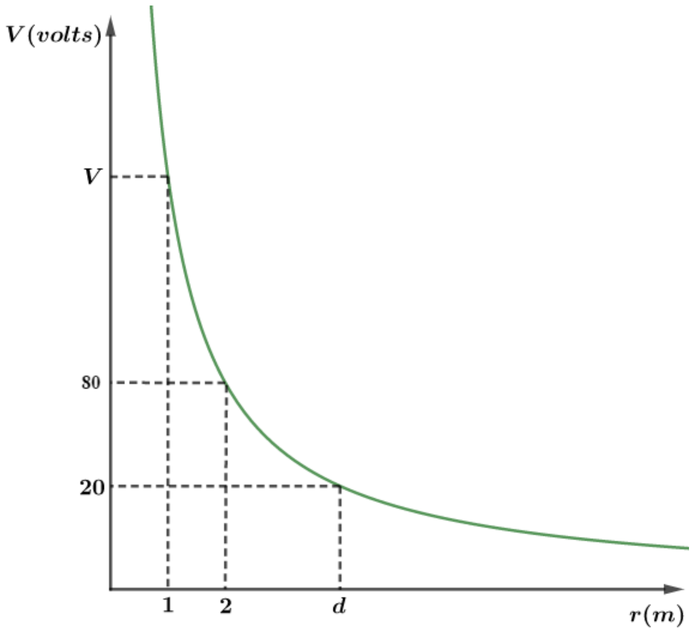
$$V_{res} = K\frac{Q_1}{r_1} + K\frac{Q_2}{r_2} + \cdots + K\frac{Q_n}{r_n}$$

$$\boxed{V_{res} = K\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \cdots + \frac{Q_n}{r_n}\right)}$$

$$\boxed{V_{res} = k\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{r_i}}$$

2)

O gráfico abaixo mostra o potencial gerado por uma carga elétrica puntiforme, em função da distância.



Calcule:

a) o potencial elétrico V.

b) a distância d.

Comentários:

a)

Vamos pegar dois pontos do gráfico de forma estratégica:

$$V(2) = \frac{KQ}{2} = 80$$

$$V(1) = \frac{KQ}{1} = V$$

Portanto:

$$\frac{V}{80} = \frac{\frac{KQ}{1}}{\frac{KQ}{2}} \Rightarrow \boxed{V = 160V}$$

b)

Novamente, podemos repetir a ideia e pegar dois pontos estratégicos:

$$V(2) = \frac{KQ}{2} = 80$$

$$V(d) = \frac{KQ}{d} = 20$$

Logo:

$$\frac{\frac{KQ}{2}}{\frac{KQ}{d}} = \frac{80}{20} \Rightarrow d = 8\,m$$

3)

Determine a razão $\frac{a}{b}$ para que o potencial resultante seja nulo no ponto P.

Comentários:

$$V_P = V_A + V_B$$

Mas queremos $V_P = 0$, então:

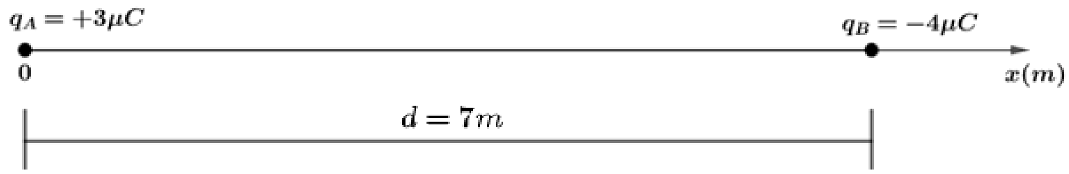
$$0 = K\frac{Q_A}{r_A} + K\frac{(-Q_B)}{r_B}$$

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{Q_A}{Q_B}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{3}{4}}$$

4)

Considere duas cargas elétricas puntiformes fixas em A e B sobre um segmento orientado x, como na figura:



Determine as abscissas onde o potencial é nulo.

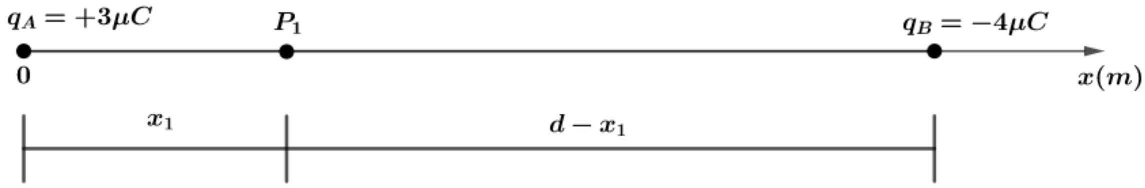
Comentários:

Podemos escrever os potenciais para cada carga da seguinte forma:

$$V_A = K\frac{Q_A}{r_A} \; e \; V_B = K\frac{Q_B}{r_B}$$

$$V_A = K.\frac{3\mu C}{r_A} \; e \; V_B = K.\frac{(-4\mu C)}{r_B}$$

Repare que em módulo, o numerador de $V_B > V_A$, portanto, devem existir pontos próximos de Q_A, onde a distância r_A é menor, para que $V_A + V_B = 0$. Vamos supor um ponto P_1 a direita de A onde o potencial é nulo, então:



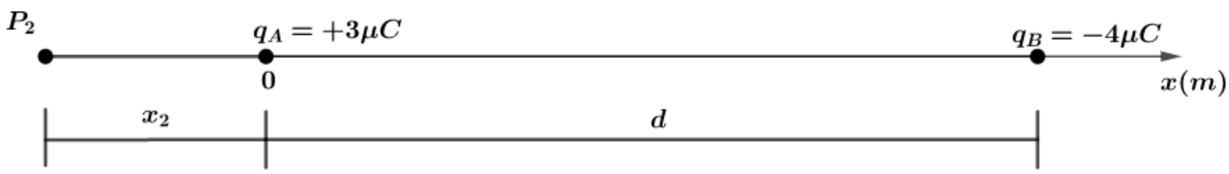
Para que o potencial elétrico no ponto P_1 seja nulo, temos:

$$V_{P_1} = 0 \Rightarrow K.\frac{3\mu C}{x_1} + K\frac{(-4\mu C)}{d - x_1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x_1} = \frac{4}{d - x_1}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{3d}{7} = \frac{3}{7} \cdot 7 = 3m$$

Agora, vamos procurar um ponto P_2 a esquerda de A, onde o potencial elétrico também é nulo:



Então, para que o potencial elétrico no ponto P_1 seja nulo, devemos ter:

$$V_{P_2} = 0 \Rightarrow \; K.\frac{3\mu C}{|x_2|} + K\frac{(-4\mu C)}{d + |x_2|} = 0$$

$$\Rightarrow 3d + 3|x_2| = 4|x_2|$$

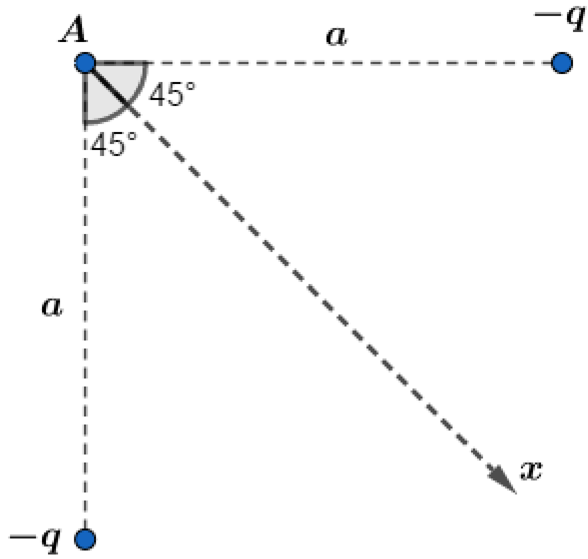
$$\Rightarrow |x_2| = 3d = 21m$$

Como a abscissa x_2 está à esquerda da origem do segmento orientado, sabemos $x_2 < 0$. Portanto:

$$\boxed{x_2 = -21m}$$

5) (FUVEST-SP)

Duas cargas $-q$ distam a do ponto A, como indicado na figura.



a) A que distância de A, sobre a reta Ax, devemos colocar uma carga $+q$ para que o potencial eletrostático em A seja nulo?

b) É este o único ponto do plano da figura em que a carga $+q$ pode ser colocada para anular o potencial em A? Justifique a resposta.

Comentários:

a)

O potencial elétrico gerado pelas cargas $-q$ em A são dados por:

$$V_1 = K\frac{(-q)}{a} \; e \; V_2 = K\frac{(-q)}{a}$$

$$V_1 + V_2 = -2K\frac{q}{a}$$

Assim, devemos colocar uma carga $+q$ a uma distância d igual a:

$$V_A = 0$$

$$K\frac{q}{d} - 2K\frac{q}{a} = 0$$

$$\boxed{d = \frac{a}{2}}$$

b)

Quando fomos encontrar a distância d sobre a reta Ax onde o potencial é nulo, nós não restringimos apenas para pontos na reta Ax. Apenas colocamos a carga $+q$ a uma distância d, pois dessa forma garantimos que o potencial em A será nulo.

Dessa forma, basta que a carga $+q$ esteja a uma distância d do ponto A que o potencial em A será nulo. Em outras palavras, qualquer ponto da circunferência, com centro em A e raio $d = \frac{a}{2}$, fará com que a carga $+q$ anule o potencial elétrico em A.

Portanto, o ponto encontrado no item a) não é único. O lugar geométrico dos pontos onde podemos colocar a carga $+q$ para zerar o potencial em A é uma circunferência centrada em A e raio $d = \frac{a}{2}$.

2.9. As propriedades do potencial elétrico

Propriedade 1)

As linhas de força do campo elétrico orientam-se do maior para o menor potencial.

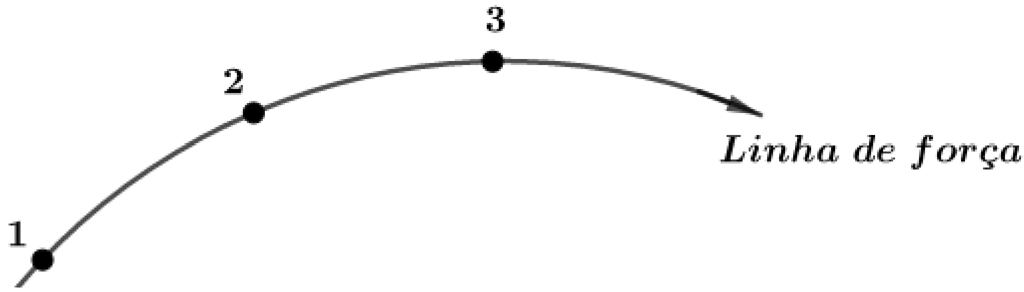


Figura 17: Linha de força de um campo elétrico qualquer.

Se desejarmos levar uma carga elétrica positiva $q > 0$ de 1 para 2, sabemos que o trabalho realizado pela força elétrica é positivo, pois a força elétrica tem a mesma direção do deslocamento:

$$\tau_{1\to 2} = q.(V_1 - V_2)$$

Como $\tau_{1\to 2} > 0$ e $q > 0$, então $V_1 - V_2 > 0$, logo:

$$\boxed{V_1 > V_2}$$

Tal fato é evidenciado claramente quando analisamos o potencial elétrico de uma carga puntiforme $Q > 0$ que gera um campo elétrico:

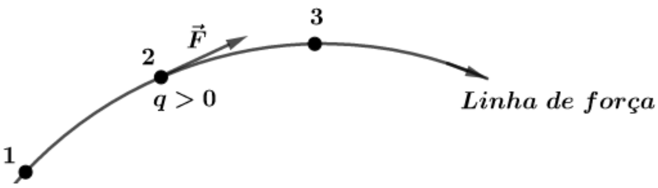


Figura 18: Direção da força elétrica em uma carga positiva em uma linha de força.

Em cada ponto, sabemos que o potencial elétrico é dado por:

$$V = K\frac{Q}{r}$$

Se pegarmos dois pontos (P_1 e P_2), onde as distâncias à carga Q são d_1 e d_2, com $d_1 < d_2$, os potenciais serão:

$$V_1 = K\frac{Q}{d_1} \ e \ V_2 = K\frac{Q}{d_2}$$

Dado que $d_1 < d_2$ e $Q > 0$, portanto $V_1 > V_2$.

Propriedade 2)

As linhas de força de um campo elétrico não podem sair e retornar ao mesmo ponto, isto é, as linhas de campo gerado por uma carga elétrica em repouso não podem ser linhas fechadas.

Podemos verificar essa propriedade utilizando a propriedade 1. Vamos provar por absurdo. Imagine que exista uma linha de força fechada num campo eletrostático, ou seja, gerado por cargas elétricas em repouso. Se tomarmos um ponto P e percorrer no sentido da linha de força, de acordo com a propriedade 1, os potenciais seriam cada vez menor que os anteriores.

Desse modo, quando retornamos ao ponto P (a linha de força é fechada), o potencial em P seria menor que o inicial. Claramente, chegamos a um absurdo. Como o campo é eletrostático, ele é invariável no tempo para aquele ponto, portanto, o potencial deveria ser o mesmo.

2.10. Superfícies equipotenciais

Chamamos de superfícies equipotenciais o lugar geométrico dos pontos que apresentam um mesmo potencial elétrico.

Exemplo: seja a carga puntiforme $q > 0$, em repouso, criando um campo elétrico, onde as linhas de força são representadas na figura abaixo:

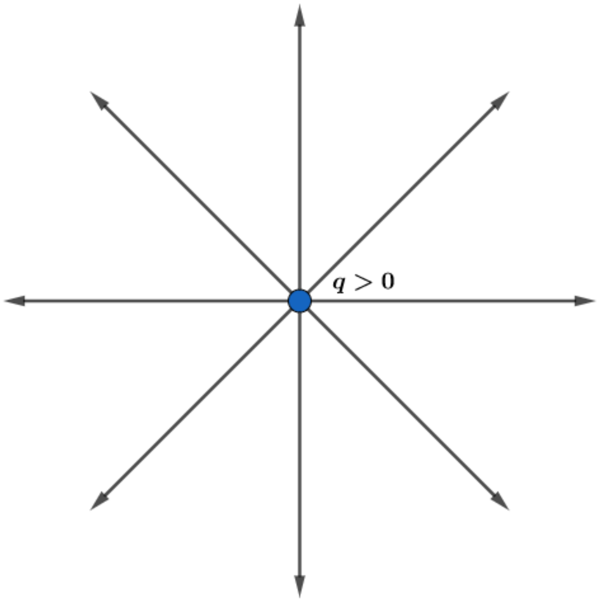


Figura 19: Campo elétrico de uma carga positiva tem direção radial, "saindo" da carga.

Dado que o potencial de uma carga puntiforme é dado por:

$$V = K\frac{q}{r}$$

Quando ponto do espaço a uma distância r_1 bem definida terá o mesmo potencial. Em outras palavras, criamos uma superfície esférica de centro em q e raio r_1. Nessa superfície, teremos o mesmo potencial em todos os pontos.

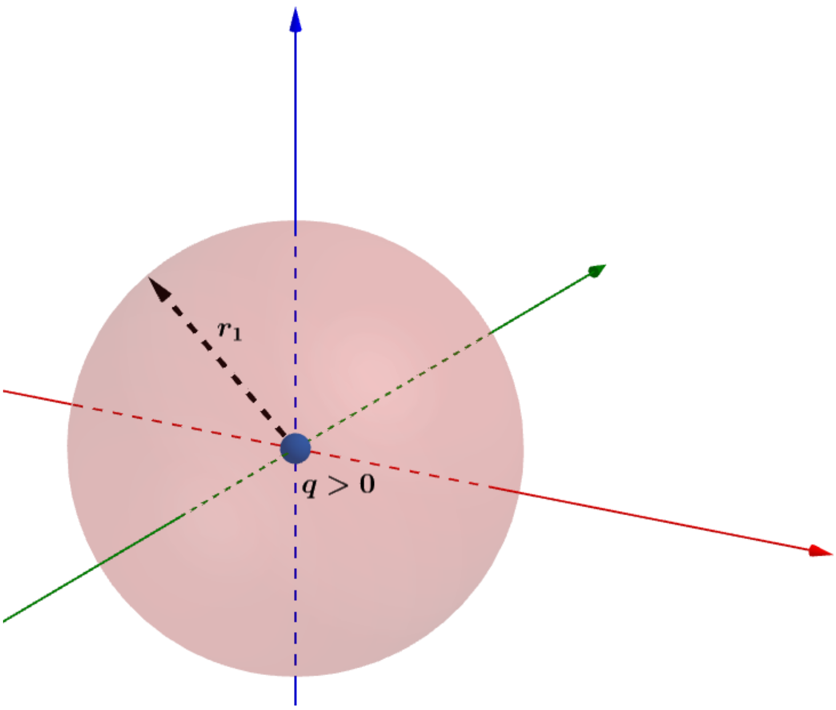


Figura 20: Superfície esférica equipotencial a uma distância $\boldsymbol{r_1}$.

Quando variamos a distância r em relação à carga q, estamos criando várias superfícies esféricas equipotenciais. Dizemos que geramos uma família de superfícies equipotenciais.

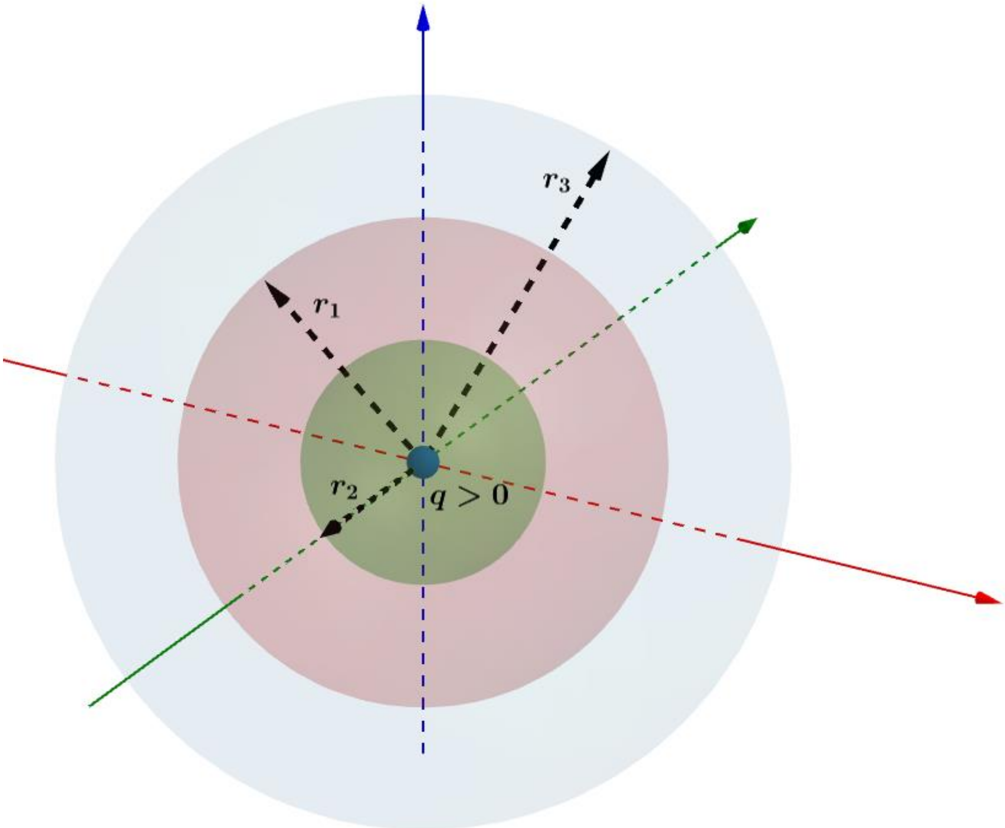


Figura 21: Família de superfícies equipotenciais.

2.10.1. As propriedades das superfícies equipotenciais

Propriedade 1)

Em uma superfície equipotencial, o trabalho da força elétrica ao longo de um deslocamento é nulo.

Podemos verificar essa propriedade através da equação do trabalho da força elétrica:

$$\tau_{A \to B} = q.(V_A - V_B)$$

Como estamos em uma superfície equipotencial, temos que $V_A = V_B$, portanto:

$$\boxed{\tau_{A \to B} = 0}$$

Propriedade 2)

As superfícies equipotenciais são ortogonais ao vetor $\vec{E}$.

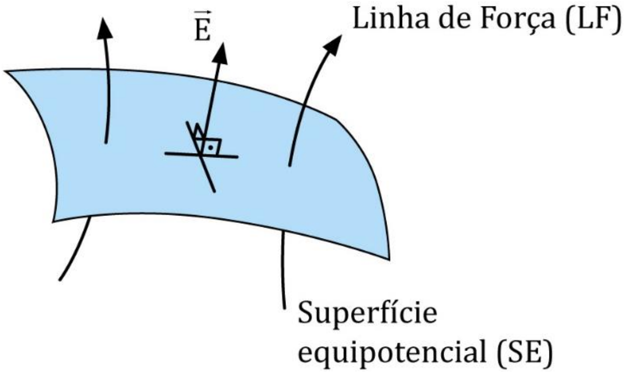


Figura 22: Superfície equipotencial ortogonal ao vetor $\vec{E}$.

Também podemos verificar essa propriedade por redução ao absurdo. Vamos supor que existe um $\vec{E}_1$ que não seja ortogonal à superfície equipotencial. Dessa forma, ele admitiria uma componente tangencial na superfície equipotencial.

Então, quando uma carga elétrica se deslocar nessa superfície, haverá trabalho elétrico realizado não-nulo. Tal fato é um absurdo, pois contraria a propriedade 1.

Exemplos de aplicações de superfícies equipotenciais perpendiculares as linhas de campo:

1) **Campo elétrico uniforme**:

   Nesse caso, sabemos que as linhas de força constituem um feixe de retas paralelas e, portanto, as superfícies equipotenciais são planos perpendiculares as retas.

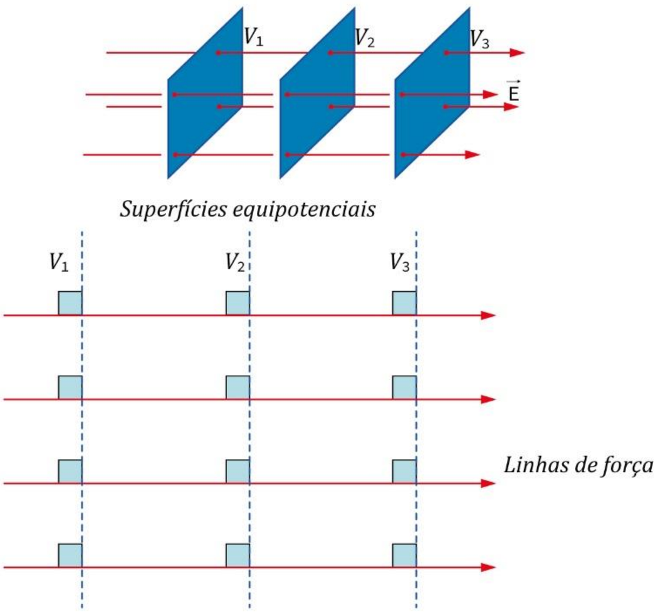


Figura 23: Linhas de campo perpendiculares às superfícies equipotenciais.

2) **Campo gerado por carga puntiforme**:

   Como visto, as linhas de força nesse caso são radiais para fora ($q > 0$), portanto, as superfícies equipotenciais são superfícies esféricas centradas na carga geradora do campo.

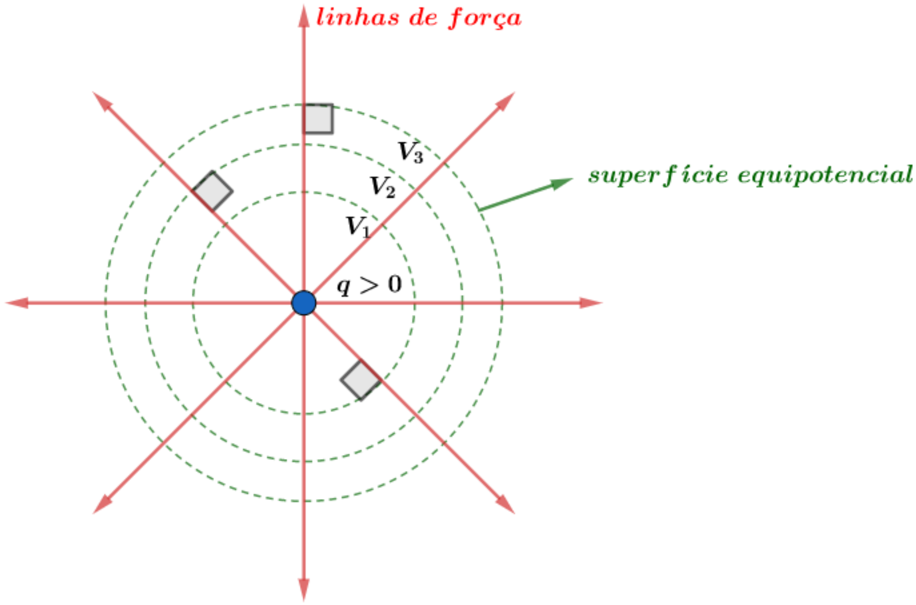


Figura 24: Superfícies equipotenciais geradas por uma carga puntiforme positiva.

3) **Dipolo elétrico**:

Considere um conjunto formado por duas cargas elétricas de valores simétricos ($+q$ e $-q$), formando um dipolo elétrico.

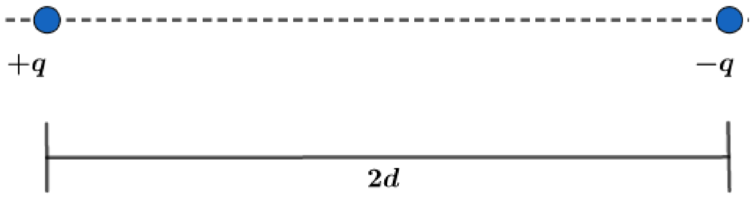


Figura 25: Dipolo elétrico a uma distância 2d.

Se tomarmos qualquer ponto do espaço que equidista das cargas $+q$ e $-q$, ou seja, $d_{+q} = d_{-q} = r$, teremos um potencial nulo, pois:

$$V_{+q} = K\frac{q}{r} \text{ e } V_{-q} = -K\frac{q}{r} \Rightarrow \boxed{V_{+q} + V_{-q} = 0}$$

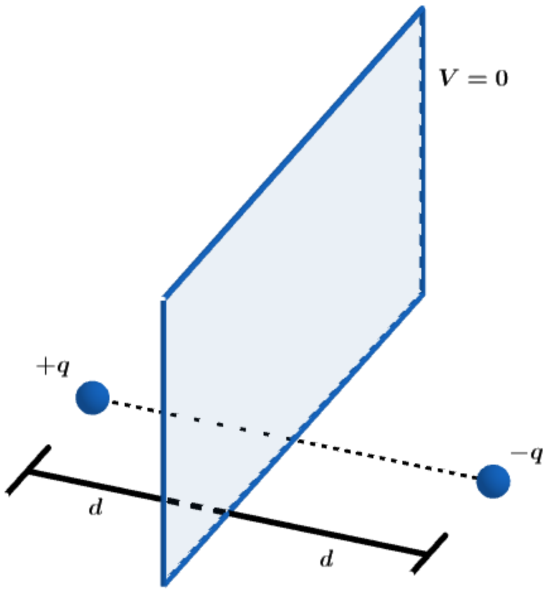


Figura 26: Plano onde o potencial elétrico das cargas é nulo.

Sabendo que as superfícies equipotenciais são ortogonais as linhas de campo, temos a seguinte representação das equipotenciais para o dipolo elétrico.

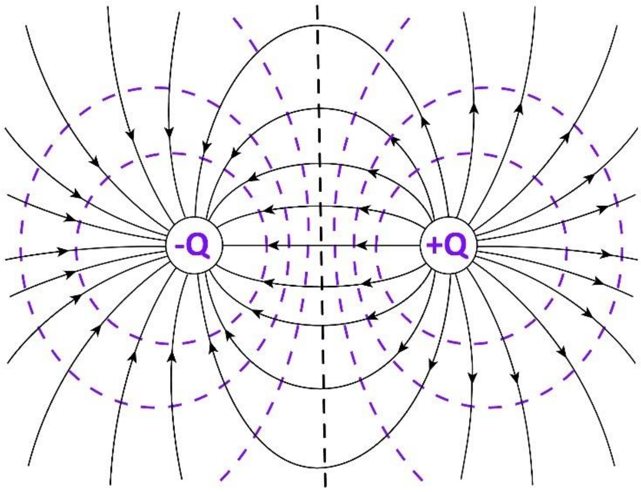


Figura 27: Representação das equipotenciais e linhas de campo para o dipolo elétrico.

O potencial gerado pelas cargas, quando deslocamos ao longo da reta que une as cargas, temos que:

$$V(x) = V_1 + V_2 = \frac{Kq}{x} - \frac{Kq}{2d - x}$$

Se plotarmos o gráfico do potencial elétrico entre as cargas em função da distância, teríamos o seguinte gráfico:

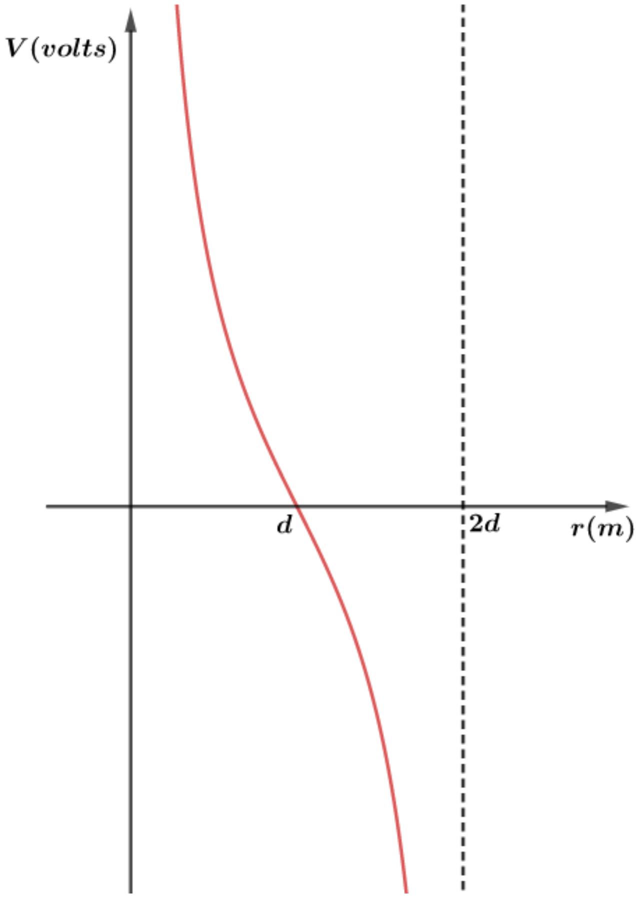
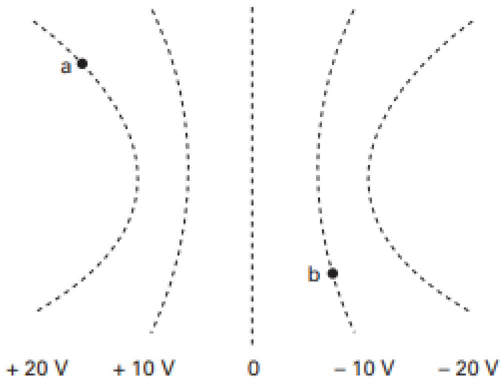


Figura 28: Potencial elétrico em função da distância para o dipolo elétrico.

6) (FUVEST-SP)

A figura representa algumas superfícies equipotenciais de um campo eletrostático e os valores dos potenciais correspondentes.



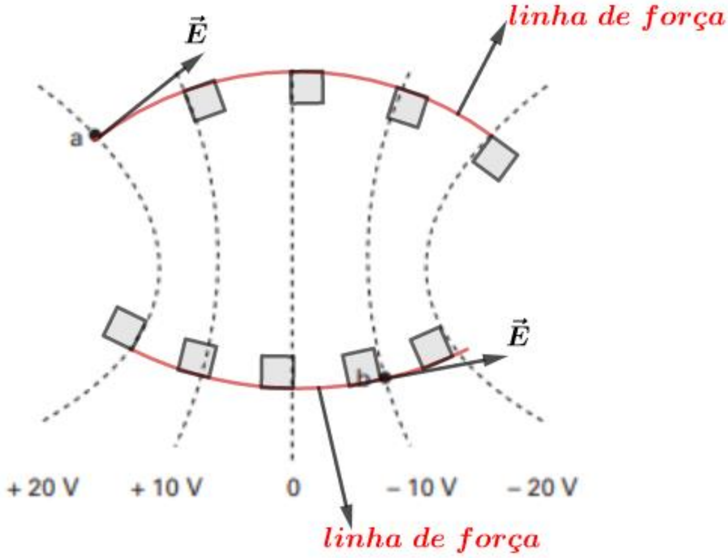
a) Copie a figura, representando o vetor campo elétrico nos pontos a e b.

b) Qual é o trabalho realizado pela força elétrica para levar uma carga q, de $2 \times 10^{-6} C$, do ponto a ao ponto b?

Comentários:

a)

Sabemos que em cada ponto da superfície equipotencial, o vetor campo elétrico é perpendicular ao plano tangente à superfície no ponto. Além disso, como visto em teoria orientamos o campo no sentido decrescentes dos potenciais. Logo, a representação é dada por:



b)

O trabalho realizado pela carga elétrica $q = 2 \times 10^{-6} C$, conhecendo os potenciais nos pontos desejado é dado por:

$$\tau_{a \to b} = q.(V_a - V_b) = 2 \times 10^{-6} C.\big(20 - (-10)\big) = 6 \times 10^{-5} J$$

7) (UnB-75)

Qualquer que seja a situação física envolvendo campo elétrico e potencial elétrico, podemos afirmar que:

a) quando o campo elétrico for nulo num ponto, o potencial necessariamente também o será;

b) quando o campo elétrico for diferente de zero num ponto, o potencial necessariamente também o será;

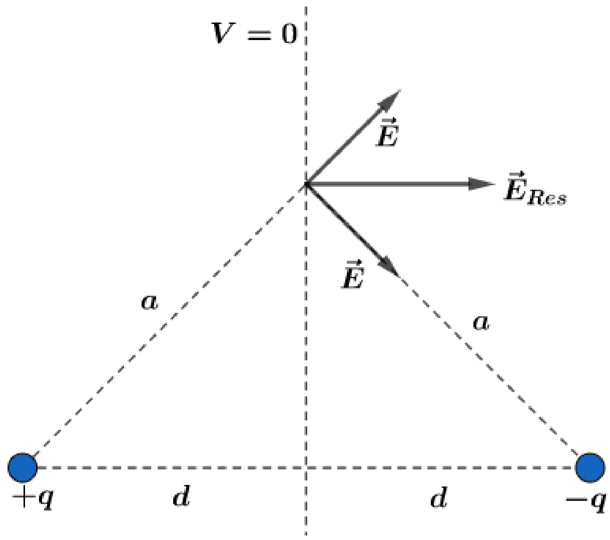
c) quando o campo elétrico for constante numa região, o potencial necessariamente também o será;

d) quando o campo elétrico for nulo numa região, o potencial será necessariamente constante nessa região.

Comentários:

a) Incorreta. Se o campo elétrico é nulo, quer dizer que o potencial é constante, basta lembrarmos que $E = -\frac{dV}{dr}$. O potencial é constante, mas não necessariamente nulo.

b) Incorreta. Basta pegarmos o exemplo do dipolo elétrico:

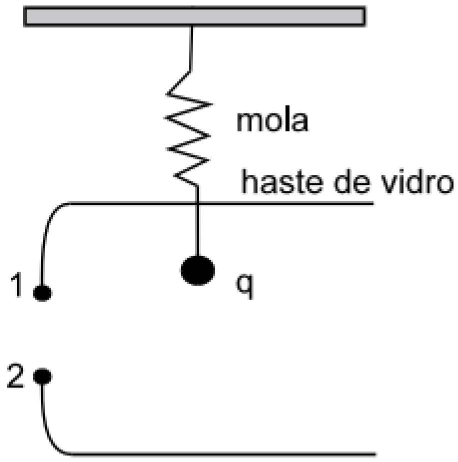


c) Incorreta. Basta lembrarmos do campo elétrico uniforme. O campo é invariante, mas os potenciais são cada vez menores à medida que caminhamos no sentido das linhas de campo.

d) Correta. Essa alternativa corrige o texto escrito na alternativa a. Quando o campo é nulo, o potencial é constante podendo ser nulo ou não.

8) (UnB-75)

Na figura ao lado vemos uma pequena esfera metálica de carga q, presa à extremidade inferior de uma haste de vidro e situada entre duas placas condutoras. A extremidade superior da haste está presa a uma mola e todo o sistema pode oscilar verticalmente. A diferença de potencial entre as placas é V_{12}. A mola fica:



a) comprimida quando q < 0 e V1 2 < 0;

b) comprimida quando q = 0 e V1 2 > 0;

c) distendida quando q > 0 e V1 2 < 0;

d) nenhuma dessas.

Comentários:

a) Incorreta. Se $V_{12} = V_1 - V_2 < 0$, então $V_1 < V_2$ ou $V_2 > V_1$. Portanto, o campo elétrico está orientado da placa 2 para a placa 1. Por isso, a força elétrica na carga $q < 0$, estará orientada para baixo, portanto, a mola está sendo alongada e não comprimida.

b) Incorreta. Se $q = 0$, não existe força elétrica atuando na carga. Como é desconsiderado o efeito da força peso, a mola não sofrerá ação de mais nenhuma força.

c) Incorreta. Semelhante ao item a, $V_2 > V_1$, campo orientado da placa 2 para a placa 1. Assim, quando colocamos uma carga positiva entre as placas, a força elétrica está orientada para cima. Portanto, a mola está sendo comprimida.

d) Correta. Nenhuma das anteriores estão corretas.

2.11. Espontaneidade e trabalho

Vamos analisar o trabalho e a espontaneidade para os dois tipos de cargas:

1) $\boldsymbol{q > 0}$:

Podemos calcular o trabalho realizado pela força elétrica para ir de A até B da seguinte forma:

$$\tau_{A\to B} = q.(V_A - V_B)$$

Se $q > 0$, ao abandonarmos uma carga em A e as linhas de força se orientam de A para B, então nosso $\tau_{A \to B} > 0$. Portanto, $V_A - V_B > 0$, isto é, $V_A > V_B$.

Podemos dizer que:

Cargas positivas tendem espontaneamente potenciais menores

Se analisarmos em relação a energia potencial elétrica, lembramos que:

$$\tau_{A \to B} = \left(E_{pot}\right)_A - \left(E_{pot}\right)_B > 0$$

Portanto:

$$\left(E_{pot}\right)_A > \left(E_{pot}\right)_B$$

Podemos afirmar que:

Cargas positivas procuram minimizar a sua energia potencial.

Para onde vai essa energia, já que a energia apenas se transforma? Dado que o campo eletrostático é conservativo, essa energia foi transformada em energia cinética. Assim, a carga sempre terá módulo crescente e se movimento espontâneo é acelerado.

2) $\boldsymbol{q < 0}$:
Se $q < 0$ e $\tau_{A \to B} > 0$, então $V_A < V_B$. Em outras palavras:

Cargas elétricas negativas espontaneamente procuram potencial maiores.

3. Energia potencial eletrostática

Vimos que uma carga puntiforme q_A, em um ponto A, o potencial no ponto B a uma distância $r_{A,B}$ é dado por:

$$V_B = K\frac{q_A}{r_{A,B}}$$

Se desejamos trazer uma carga puntiforme q_B em repouso no infinito para o repouso no ponto B, é necessário realizar um trabalho calculado por:

$$\tau_{\infty\to B} = q_B(V_\infty - V_B) = -q_B.V_B$$

O trabalho realizado pela força elétrica é menos o trabalho realizado pelo operador para trazer a carga do infinito e colocar no ponto B em repouso. Então:

$$\tau_B = q_B.V_B = K\frac{q_A.q_B}{r_{A,B}}$$

Se desejarmos trazer uma terceira carga q_C, semelhante ao processo feito pela carga q_B, temos que o trabalho para trazer a carga será:

$$\tau_C = q_C.V_C$$

Mas o potencial em C é definido pelas cargas q_A e q_B:

$$V_C = K\frac{q_A}{r_{A,C}} + K\frac{q_B}{r_{B,C}}$$

Portanto:

$$\tau_C = K\frac{q_A.q_C}{r_{A,C}} + K\frac{q_B.q_C}{r_{B,C}}$$

Assim, o trabalho total para definir a configuração das três cargas conforme fizemos é dado pela soma dos trabalhos e isso corresponde a energia potencial eletrostática E_T do sistema de três cargas puntiformes:

$$\boxed{E_T = K\frac{q_A.q_B}{r_{A,B}} + K\frac{q_A.q_C}{r_{A,C}} + K\frac{q_B.q_C}{r_{B,C}}}$$

Note que o trabalho não depende da ordem com que trazemos as cargas do infinito para suas respectivas posições finais. De um modo geral:

A energia potencial eletrostática de um sistema de cargas elétricas puntiformes é igual ao trabalho para trazer as cargas do infinito para suas respectivas posições finais.

Podemos manipular algebricamente a equação de E_T da seguinte forma:

$$E_T = K\frac{q_A.q_B}{r_{A,B}} + K\frac{q_A.q_C}{r_{A,C}} + K\frac{q_B.q_C}{r_{B,C}}$$

$$E_T = \frac{1}{2}\left[K\frac{q_A.q_B}{r_{A,B}} + K\frac{q_A.q_C}{r_{A,C}} + K\frac{q_B.q_C}{r_{B,C}} + K\frac{q_A.q_B}{r_{A,B}} + K\frac{q_A.q_C}{r_{A,C}} + K\frac{q_B.q_C}{r_{B,C}}\right]$$

$$E_T = \frac{1}{2}\left[q_A\left(K\frac{q_B}{r_{A,B}} + K\frac{q_C}{r_{A,C}}\right) + q_B\left(K\frac{q_C}{r_{B,C}} + K\frac{q_A}{r_{A,B}}\right) + q_C\left(K\frac{q_A}{r_{A,C}} + K\frac{q_B}{r_{B,C}}\right)\right]$$

$$E_T = \frac{1}{2}[q_A.V_A + q_B.V_B + q_C.V_C]$$

Este resultado mostra que para o caso de n cargas, a energia potencial eletrostática é dada por:

$$\boxed{E_T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i.V_i}$$

ESCLARECENDO!

9) (FUVEST – 95)

Um sistema formado por três cargas puntiformes iguais, colocadas em repouso nos vértices de um triangulo equilátero, tem energia potencial eletrostática igual a U. Substitui-se uma das cargas por outra, na mesma posição, mas com o dobro do valor. A energia potencial eletrostática do novo sistema será igual a:

a) $\frac{4}{3}U$

b) $\frac{3}{2}U$

c) $\frac{5}{3}U$

d) $2U$

e)$3U$

Comentários:

Podemos calcular a energia potencial eletrostática para o sistema, fazendo a soma de todas as energias tomando as cargas em combinações 2 a 2, da seguinte forma:

$$U = \frac{K.q_1.q_2}{a} + \frac{K.q_1.q_3}{a} + \frac{K.q_2.q_3}{a}$$

Em que a é o lado do triângulo equilátero.

Como as cargas são iguais, a energia U pode ser escrita como:

$$U = \frac{3kq^2}{a}$$

Se uma das cargas dobra de valor, por exemplo a carga q_1 passa a ser $2q$, então temos a nova energia potencial eletrostática dada por:

$$U' = \frac{K.q'_1.q_2}{a} + \frac{K.q'_1.q_3}{a} + \frac{K.q_2.q_3}{a}$$

$$U' = \frac{K.2q.q}{a} + \frac{K.2q.q}{a} + \frac{K.q.q}{a}$$

$$U' = \frac{5Kq^2}{a}$$

Fazendo $\frac{U'}{U}$, vem:

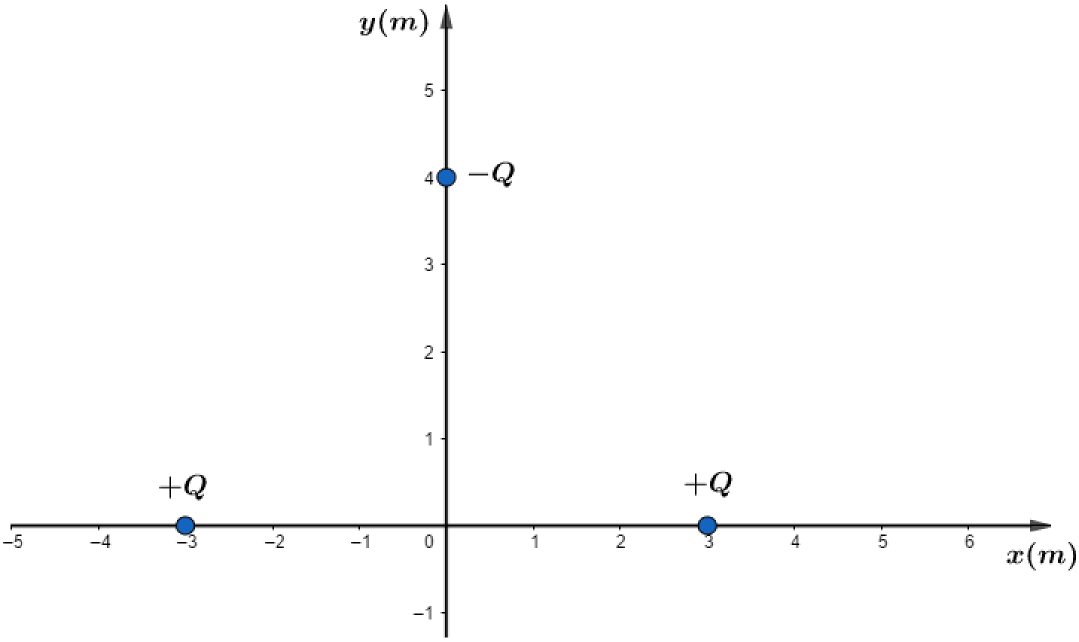
$$\frac{U'}{U} = \frac{\frac{5Kq^2}{a}}{\frac{3Kq^2}{a}}$$

$$\therefore \boxed{U' = \frac{5}{3}U}$$

Gabarito: C

10) (UFCE)

Considere três partículas de mesma massa M, eletricamente carregadas e dispostas no plano $X - Y$, como mostra a figura.



Duas delas, ambas com carga positiva $+Q$, estão fixadas, uma na posição $(-3,0)$ e a outra na posição $(3,0)$. A terceira, de carga negativa $-Q$ e originalmente na posição $(0,4)$, quando abandonada desloca-se ao longo do eixo Y devido à ação das partículas fixas, positivamente carregadas. Sabendo que $|+Q| = |-Q| = 5 \times 10^{-6} C$, $M = 1{,}2 \times 10^{-3} kg$ e $K_0 = 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$, determine o módulo da velocidade, em m/s, com a qual a partícula de carga $-Q$ passa pela origem $(0,0)$. Despreze atritos e efeitos de forças gravitacionais.

Comentários:

Devido ao fato de somente agir no corpo a força elétrica e sabendo que essa força e conservativa, podemos utilizar o teorema da enérgica cinética.

$$\tau_{F_{Res}} = \Delta E_c$$

Como a resultante é a força elétrica, temos que:

$$\tau_{F_{ele}} = (-Q).\left(V_{(0,4)} - V_{(0,0)}\right)$$

Os potenciais nos pontos $(0,4)$ e $(0,0)$ são dados por:

$$V_{(0,4)} = K_0 \frac{Q}{\sqrt{(-3-0)^2 + (0-4)^2}} + K_0 \frac{Q}{\sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2}}$$

$$V_{(0,4)} = 2.9 \times 10^9 . \frac{5 \times 10^{-6}}{5} = 18 \times 10^3 V$$

$$V_{(0,0)} = 2.9 \times 10^9 . \frac{5 \times 10^{-6}}{3} = 30 \times 10^3 V$$

Portanto, utilizando o teorema, lembrando que a carga é abandonada no ponto $(0,4)$, temos:

$$(-5 \times 10^{-6}).(18 \times 10^3 - 30 \times 10^3) = \frac{1}{2}. 1{,}2 \times 10^{-3}. v^2$$

$$v^2 = 100$$

$$\therefore \boxed{v = 10\ m/s}$$

11) (E. Naval)

A, B e C são os vértices de um triângulo equilátero de 3 metros de lado e D é o ponto médio do lado BC. Em cada um dos vértices B e C há uma carga elétrica puntiforme, positiva, fixa, de 1,0 nanocoulomb ($1\ nano = 10^{-9}$). Uma terceira carga, puntiforme, positiva, de 1,0 nanocoulomb é lançada, com energia cinética de 10 nanojoules, do vértice A em direção ao ponto D. Considerando que a constante eletrostática do meio (vácuo) seja 9×10^9 uSI e que as únicas forças atuantes na carga móvel sejam as decorrentes da interação elétrica com as duas cargas fixas mencionadas, a energia cinética da carga móvel, em nanojoules, ao passar pelo ponto D é:

a) 0

b) 4

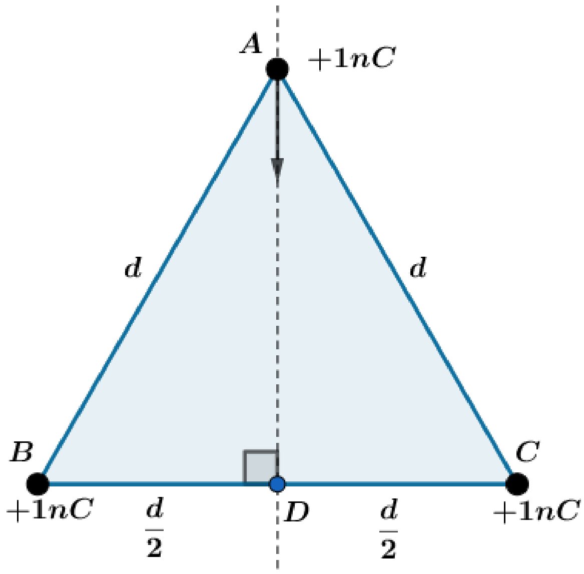
c) 6

d) 8

e) 16

Comentários:

Vamos construir uma figura que representa a disposição física das cargas:



Novamente, devido ao fato de as forças atuantes serem apenas da interação elétrica, podemos utilizar o teorema da energia cinética:

$$\tau_{F_{res}} = \Delta E_c$$

$$\tau_{F_{ele}} = (E_c)_D - (E_c)_A$$

$$q.(V_A - V_D) = (E_c)_D - (E_c)_A$$

Calculamos os potenciais em A e em D pela expressão:

$$V_A = K_0 \frac{q_B}{d} + K_0 \frac{q_C}{d} = \frac{9 \times 10^9 . 2 \times 10^{-9}}{3} = 6\ V$$

$$V_D = K_0 \frac{q_B}{\frac{d}{2}} + K_0 \frac{q_C}{\frac{d}{2}} = 2\left(K_0 \frac{q_B}{d} + K_0 \frac{q_C}{d}\right) = 2V_A = 12\ V$$

Logo, a energia cinética no ponto D, em nanojoules (nJ), é de:

$$(E_c)_D = q.(V_A - V_D) + (E_c)_A$$

$$(E_c)_D = 1 \times 10^{-9}(6 - 12) + 10 \times 10^{-9} = 4 \times 10^{-9} = 4\ nJ$$

Gabarito: b.

4. Potencial elétrico de condutor carregado e em equilíbrio eletrostático

Devido ao fato de não haver movimento de cargas no condutor em equilíbrio eletrostático, podemos afirmar que não existe diferença de potencial em quaisquer dois pontos. De outra forma, dizemos que o potencial elétrico é o mesmo em todos os seus pontos internos ou da superfície.

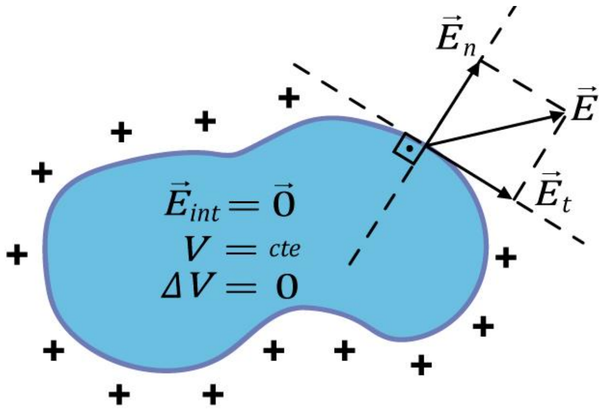
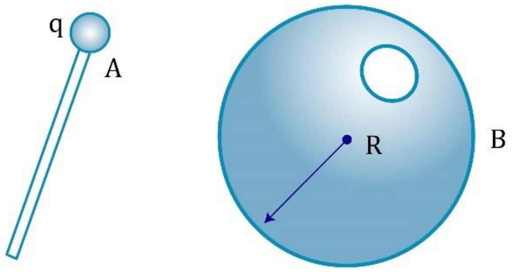


Figura 29: Propriedades de um condutor em equilíbrio eletrostático.

Além disso, quando todos os pontos da superfície do condutor possuem o mesmo potencial, dizemos que ela é uma superfície equipotencial e, conforme vimos, o campo elétrico é ortogonal a equipotencial.

12)

Considere uma pequena esfera metálica de raio r carregado com carga $+q$. Uma outra esfera metálica de raio R, tal que $R > r$, inicialmente neutra. Coloca-se a esfera menor no interior da esfera maior por um orifício, sem que ache contato entre as esferas. Em seguida, faz-se o contato da esfera menor com o interior da casca da esfera maior. Em seguida, retira-se a esfera menor de dentro da outra, sem haver qualquer outro contato. Determine as cargas finais de cada esfera.



Comentários:

Quando colocamos a esfera menor em contato com o interior da esfera maior, os dois corpos passam a ser apenas um. Dessa forma, a carga tende a se distribuir na superfície da esfera maior, que envolve todo o conjunto. Após a retirada da esfera menor, temos que a esfera menor se tornará neutra, já que seu excesso de cargas foi transferido para a superfície externa da esfera maior.

Portanto:

$$\boxed{q_{menor} = 0} \text{ e } \boxed{q_{maior} = +q}$$

Notamos aqui um processo para neutralização de cargas.

4.1. Potencial de um condutor esférico

Vimos anteriormente que o campo elétrico de um condutor esférico para regiões externas, isto é, pontos fora da esfera, tudo se passa como se o campo fosse gerado por uma carga puntiforme colocada no centro da esfera. Dessa forma, para pontos exteriores da esfera ocorrerá o mesmo para o potencial, ou seja:

$$\boxed{V_P = K\frac{q}{r}}$$

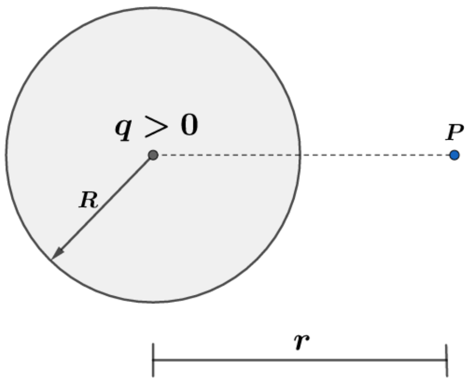


Figura 30: Potencial elétrico de um condutor esférico em função da distância ao centro dela.

Pode-se demonstrar que para pontos na superfície do condutor, o potencial é dado por:

$$\boxed{V_{superficie} = K\frac{q}{R}}$$

Como vimos agora a pouco, o potencial é o mesmo em qualquer ponto da esfera, portanto:

$$\boxed{V_{esf} = V_{superficie} = K\frac{q}{R}}$$

Assim, temos os seguintes gráficos para os potenciais das esferas condutoras em função da distância:

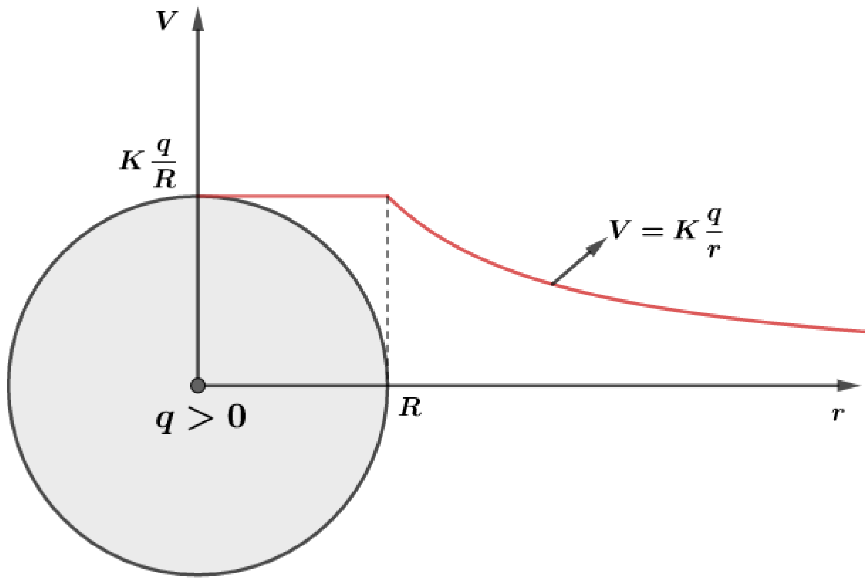


Figura 31: Potencial elétrico de um condutor esférico carregado com carga elétrica positiva em função da distância.

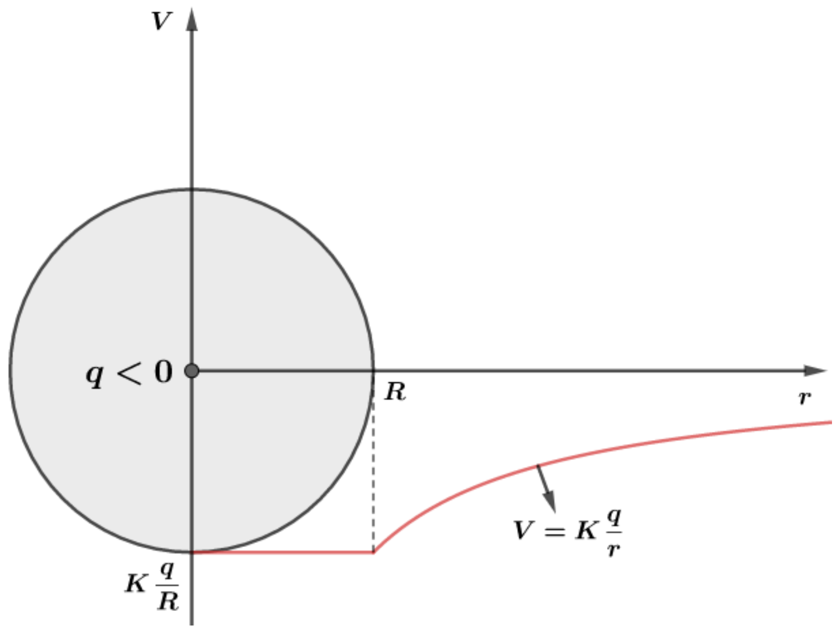


Figura 32: Potencial elétrico de um condutor esférico carregado com carga elétrica negativa em função da distância.

Embora tenhamos tirados conclusões para um condutor carregado, isolado e em equilíbrio eletrostático, podemos tomar como validas para cargas uniformemente distribuídas em uma superfície esférica qualquer, ainda que a superfície externa seja de um material isolante.

Não podemos esquecer que o campo elétrico de condutor carregado e em equilíbrio eletrostático é dado por:

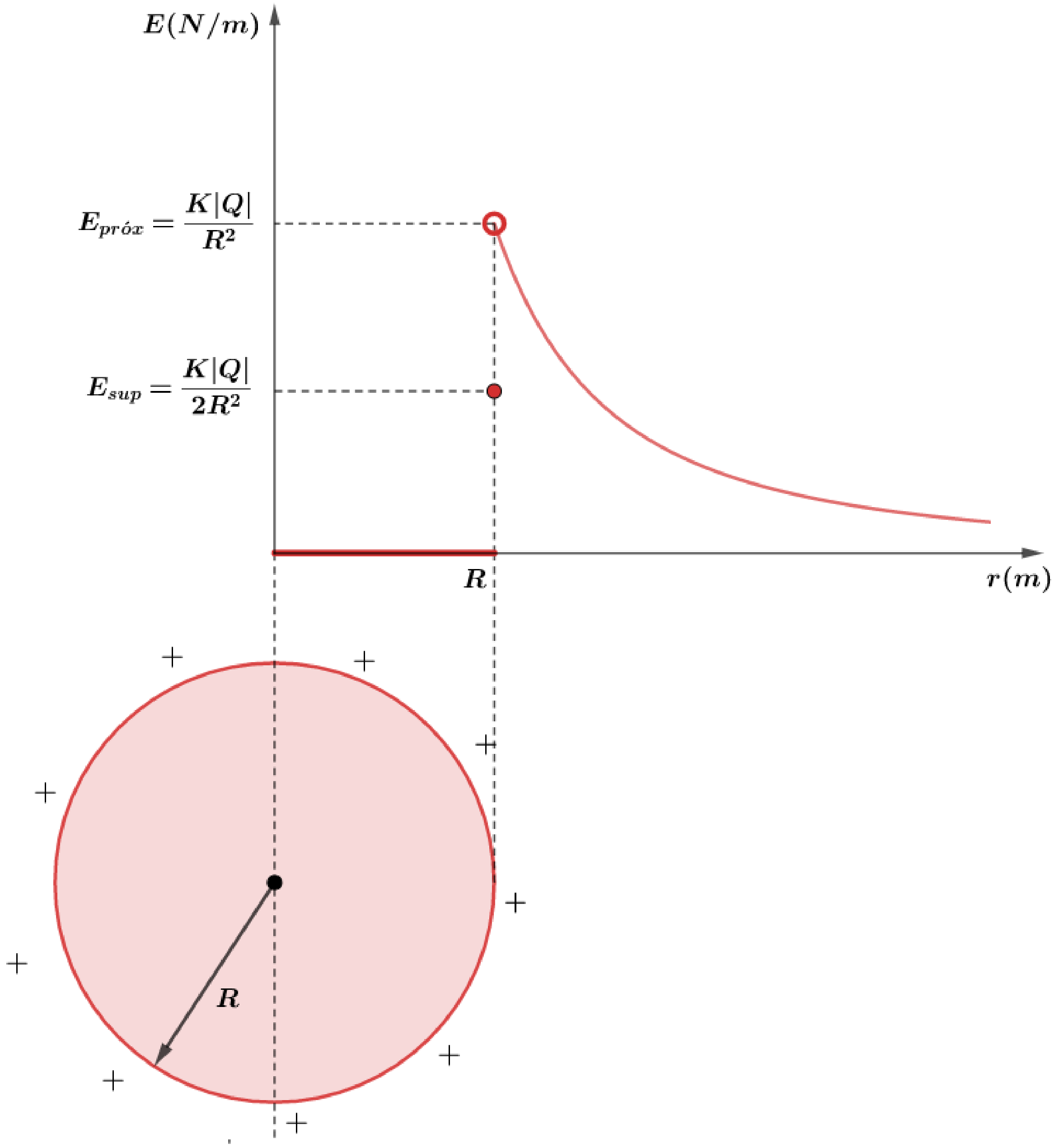


Figura 33: Campo elétrico em função da distância de um condutor carregado e em equilíbrio eletrostático.

CURIOSIDADE

4.2. O potencial da Terra

A Terra pode ser considerada um grande condutor esférico negativamente eletrizada com carga próxima de -580 000 C. Como seu raio é em torno de 6400 km, se considerada isolada no universo, o potencial elétrico da Terra é próximo de:

$$V_{Terra} = 9 \times \frac{10^9(-580 \times 10^3)}{6400 \times 10^3} \cong -8 \times 10^8\ V$$

Valor este calculado tomando como referencial o infinito.

Contudo, outros corpos celestes vizinhos influenciam no potencial elétrico resultante na Terra. Com isso, os efeitos nas cargas elétricas devido a fatores humanos são praticamente desprezíveis sobre o potencial da Terra.

Dessa forma, podemos considerar a Terra com um potencial invariável e, assim, comporta-se como um referencial de potencial para o homem. Por exemplo, em um laboratório, se dizermos que um corpo tem potencial de +5000 V em relação à Terra, estamos falando que ele tem 5000 V a mais que a Terra.

Quando ligamos à Terra um condutor carregado negativamente, notamos que haverá fluxo de elétrons do condutor para a Terra, até o momento em que se anule a carga elétrica do corpo. Como visto anteriormente, os elétrons procuram, espontaneamente, potenciais maiores.

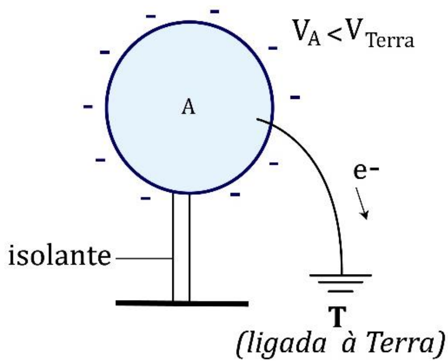


Figura 34: Carga negativa ligada à Terra.

No momento em que o condutor se neutralizar, seu potencial será o mesmo que o da Terra.

Em contrapartida, quando ligamos à Terra um condutor carregado positivamente, notamos que haverá fluxo de elétrons da Terra para o condutor, até o momento em que se anule a carga elétrica do corpo. Novamente, os elétrons (cargas negativas) procuram, espontaneamente, potenciais maiores.

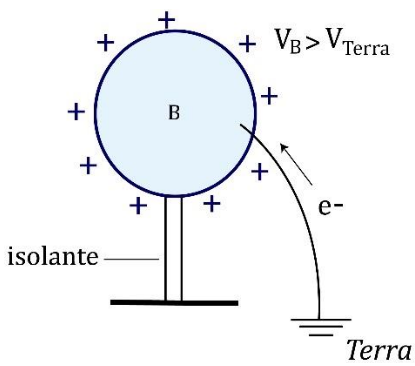


Figura 35: Carga positiva ligada à Terra.

Da mesma forma, quando o condutor se neutralizar, seu potencial será o mesmo que o da Terra.

Sendo assim, é muito importante para o homem usar ligações à Terra para descarregar os corpos. Utilizamos esse artificio para descarregar corpos que foram atingidos por raios, por exemplo. Em vias de regra, sempre que ligamos um corpo metálico à Terra, asseguramos que o seu potencial elétrico se anule.

4.3. Aplicação do uso de Potenciais para Condutores em Equilíbrio Eletrostático

Vamos considerar dois corpos A e B isolados, eletrizados com cargas Q_A e Q_B, com os potenciais V_A e V_B, bem distantes uma da outra.

Figura 36: Corpos com formatos quaisquer com suas respectivas cargas e potenciais elétricos.

Se considerarmos $V_A > V_B$, e conectarmos os dois corpos, por causa da diferença de potencial, haverá um fluxo de elétrons de B para A (elétrons, que são cargas negativas, procuram potenciais maiores).

Dessa forma, o corpo B vai perdendo seus elétrons e sua carga está aumentando, logo seu potencial está aumentando. Em contrapartida, ao receber elétrons, o corpo A tem sua carga diminuída e, portanto, seu potencial está diminuindo.

Essa movimentação de cargas ocorre até que ambos tenham o mesmo potencial V_{eq}.

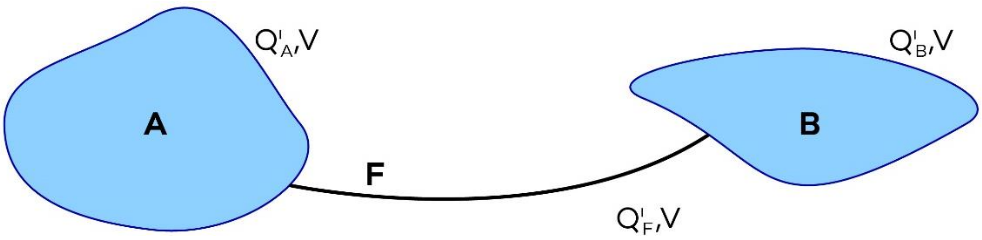


Figura 37: Contato elétrico entre as duas cargas.

De acordo com o Princípio da Conservação das Cargas, podemos escrever que:

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B + Q_{fio}$$

Quando utilizamos um fio muito fino, a quantidade de cargas armazenadas nele é praticamente nula (estudaremos o conceito de capacitância mais para frente), isto é, $Q_{fio} \cong 0$ e chegamos que:

$$\boxed{Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B}$$

Vamos particularizar nosso estudo para o caso de condutores esféricos. Sejam A e B dois condutores esféricos de raios r_A e r_B. Se ambos estão inicialmente carregados com cargas Q_A e Q_B, respectivamente, quando colocados em contato por um fio muito fino, podemos determinar o potencial equivalente e as cargas finais de cada corpo da seguinte forma:

$$\boxed{V_A = K\frac{Q_A}{r_A}} \; e \; \boxed{V_B = K\frac{Q_B}{r_B}}$$

Pelo Princípio da Conservação das Cargas, temos que:

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B \Rightarrow Q_A + Q_B = \frac{V_{eq}.r_A}{K} + \frac{V_{eq}.r_B}{K}$$

$$\boxed{V_{eq} = K\left(\frac{Q_A + Q_B}{r_A + r_B}\right)}$$

Ou ainda em função dos potenciais V_A e V_B:

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B \Rightarrow \frac{V_A.r_A}{K} + \frac{V_B.r_B}{K} = \frac{V_{eq}.r_A}{K} + \frac{V_{eq}.r_B}{K}$$

$$\boxed{V_{eq} = \frac{V_A.r_A + V_B.r_B}{r_A + r_B}}$$

Notamos que o potencial no equilíbrio eletrostático é a média ponderada dos potenciais, tendo como peso os raios dos condutores esféricos.

As novas cargas são dadas em função das iniciais da seguinte forma:

$$Q'_A = \frac{V_{eq}.r_A}{K} = \frac{K\frac{(Q_A + Q_B)}{(r_A + r_B)}r_A}{K}$$

$$\boxed{Q'_A = r_A\left(\frac{Q_A + Q_B}{r_A + r_B}\right)}$$

Analogamente, a carga final de B será:

$$\boxed{Q'_B = r_B\left(\frac{Q_A + Q_B}{r_A + r_B}\right)}$$

Observe que se considerarmos $\left(\frac{Q_A+Q_B}{r_A+r_B}\right) = c$, podemos dizer que as cargas são proporcionais aos seus raios.

Caso tenhamos n esferas, teremos que:

$$\boxed{V_{eq} = \frac{V_1 r_1 + V_2 r_2 + \cdots + V_n r_n}{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}}$$

$$\boxed{Q'_i = r_i\left(\frac{Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n}{r_1 + r_2 + \cdots + r_n}\right)}$$

ESCLARECENDO!

13) (Unicamp – SP)

Duas esferas condutoras A e B distantes possuem o mesmo raio R e estão carregadas com cargas $Q_A = -q$ e $Q_B = +2q$, respectivamente. Uma terceira esfera condutora C, de mesmo raio R porém descarregada, é trazida desde longe e é levada a tocar primeiramente a esfera A, depois a esfera B e em seguida é levada novamente para longe.

a) qual é a diferença de potencial entre as esferas A e B antes de a esfera C tocá-las?

b) qual é a carga final da esfera C?

Comentários:

a) antes do contato, os potenciais são:

$$V_A = K\frac{q_A}{r_A} = -K\frac{q}{R} \text{ e } V_B = K\frac{q_B}{r_B} = +2K\frac{q}{R}$$

Portanto, a diferença de potencial $V_A - V_B$ é de:

$$V_A - V_B = -K\frac{q}{R} - 2K\frac{q}{R} = -3K\frac{q}{R}$$

b) carga da esfera C quando entra em contato com a esfera A:

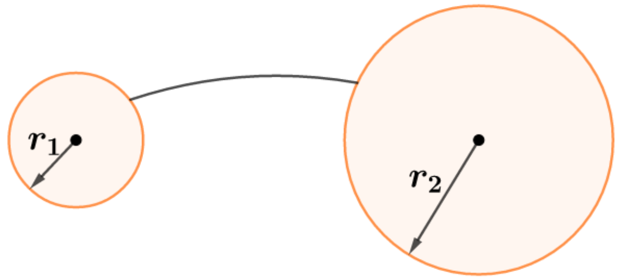
$$Q'_C = R_C\left(\frac{Q_A + Q_C}{R_A + R_C}\right) = R\left(\frac{-q+0}{R+R}\right) = -\frac{q}{2}$$

Esfera C carregada com carga $-\frac{q}{2}$, colocada em contato com B:

$$(Q_C)_{final} = R_C\left(\frac{Q'_C + Q_B}{R_C + R_B}\right) = R\left(\frac{-\frac{q}{2} + 2q}{R+R}\right) = \frac{3}{4}q$$

14) (PUC – SP)

O sistema de condutores perfeitos da figura consta de duas esferas de raios $r_1 = a$ e $r_2 = 2a$, interligados por um fio condutor de capacidade nula. Quando o sistema é eletrizado com carga positiva Q, após o equilíbrio eletrostático ser alcançado, o condutor de raio r_1 apresenta densidade superficial de carga σ_1 e o de raio r_2 apresenta densidade superficial de carga σ_2. Nessa situação, a relação σ_1/σ_2 vale:



a) zero

b) 0,5

c) 1,0

d) 1,5

e) 2,0

Comentários:

Os dois condutores possuem o mesmo potencial após o equilíbrio eletrostático:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow K\frac{Q_1}{r_1} = K\frac{Q_2}{r_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2}}$$

As densidades superficiais de carga são dadas por:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi r_1^2} \; e \; \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi r_2^2}$$

Portanto:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{Q_1}{4\pi r_1^2}}{\frac{Q_2}{4\pi r_2^2}} = \frac{Q_1 \cdot r_2^2}{Q_2 \cdot r_1^2}$$

Mas como $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2}$, então:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_1 \cdot r_2^2}{r_2 \cdot r_1^2}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}}$$

Com isso, vemos que se $r_2 > r_1$, a esfera de raio menor possui maior densidade de cargas.

Este fato evidencia nosso resultado acerca do poder das pontas:

Se tomarmos um condutor não esférico, as cargas em excesso concentram-se mais nas regiões de menores raios de curvatura.

Para o nosso caso, $r_1 = a$ e $r_2 = 2a$, logo:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{2a}{a} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2}$$

Gabarito: E

14) (IME – RJ)

Uma esfera de plástico, maciça, é eletrizada, ficando com uma densidade de carga superficial igual a $+0{,}05\ C/m^2$. Em consequência, se uma carga puntiforme $q = +1\mu C$ fosse colocada exteriormente a 3 metros do centro da esfera, sofreria repulsão de intensidade $F = 0{,}02\pi\ newtons$. A esfera é descarregada e cai livremente de uma altura de 750 m, adquirindo, ao fim da queda, uma energia cinética de $0{,}009\ \pi\ joules$. Sabendo que $g = 10\ m/s^2$, calcule a massa específica do plástico da esfera.

Comentários:

Dado que a densidade superficial da esfera é dada por:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

A carga é expressa por:

$$Q = 4\pi R^2 \cdot \sigma$$

A força entre a carga e a esfera é dada por:

$$F = K\frac{Qq}{d^2}$$

Com isso, podemos calcular o raio da esfera:

$$0{,}02\pi = 9 \times 10^9 \frac{(4\pi R^2 \cdot 0{,}05)(1 \times 10^{-6})}{3^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 10^{-2} m}$$

Na segunda parte do problema, quando a esfera é descarregada e cai livremente, temos um novo problema de energia. Quando a esfera está caindo, ela está transformando energia potencial gravitacional em energia cinética. Considerando a conservação da energia mecânica, já que não foi mencionado nenhuma força dissipativa, temos que:

$$E_P = E_C$$

$$mgh = 0{,}009\pi \Rightarrow m = \frac{0{,}009\pi}{10.750}\ kg$$

Vamos deixar as contas para o final. Portanto, a massa específica da esfera de plástico é de:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\frac{0{,}009\pi}{10.750}}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\boxed{\rho = 0{,}9 kg/m^3}$$

4.4. Aplicação do potencial elétrico na indução total

A indução total ocorre quando todas as linhas de força que partem de um corpo carregado chegam a um outro corpo. Como exemplo, temos dois corpos carregados na qual um deles envolve completamente o outro, como visto abaixo:

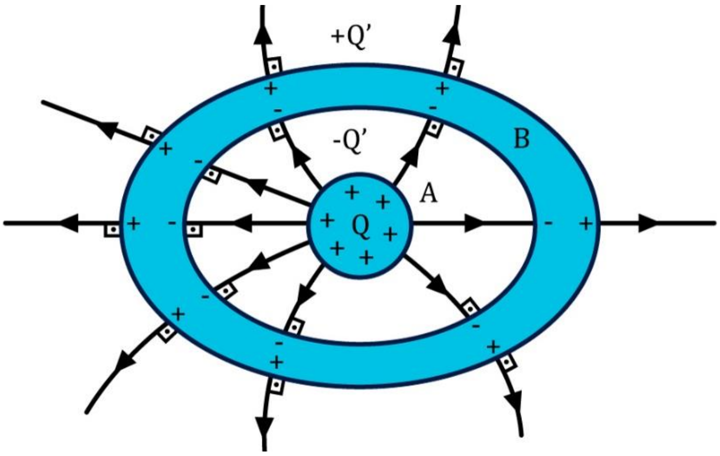


Figura 38: Indução total.

Como já vimos anteriormente, a carga do corpo interno provocará a separação das cargas da casca condutora, de tal forma que a superfície interna terá carga $-Q_{ind}$ e na externa uma carga $+Q_{ind}$, mas sabemos que:

$$\boxed{Q = +Q_{ind} = -(-Q_{ind})}$$

Vamos estudar o potencial em função da distância para o seguinte sistema:

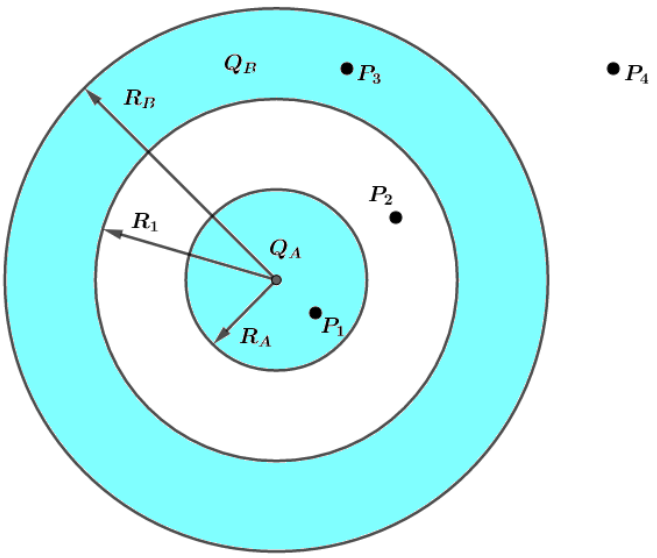


Figura 39: Cálculo do potencial em função da distância de uma carga dentro de uma casca esférica.

Considere uma esfera A tem carga Q_A e uma casca esférica B tem carga Q_B. De acordo com a indução total, a superfície interna da casca B terá carga $-Q_A$ e a superfície externa carga $Q_A + Q_B$, pois sabemos que a carga total da casca B deve permanecer Q_B.

Vamos determinar o potencial nos seguintes pontos P_1, P_2, P_3 e P_4, utilizando o Princípio da Superposição, vamos adotar três esferas tais que:

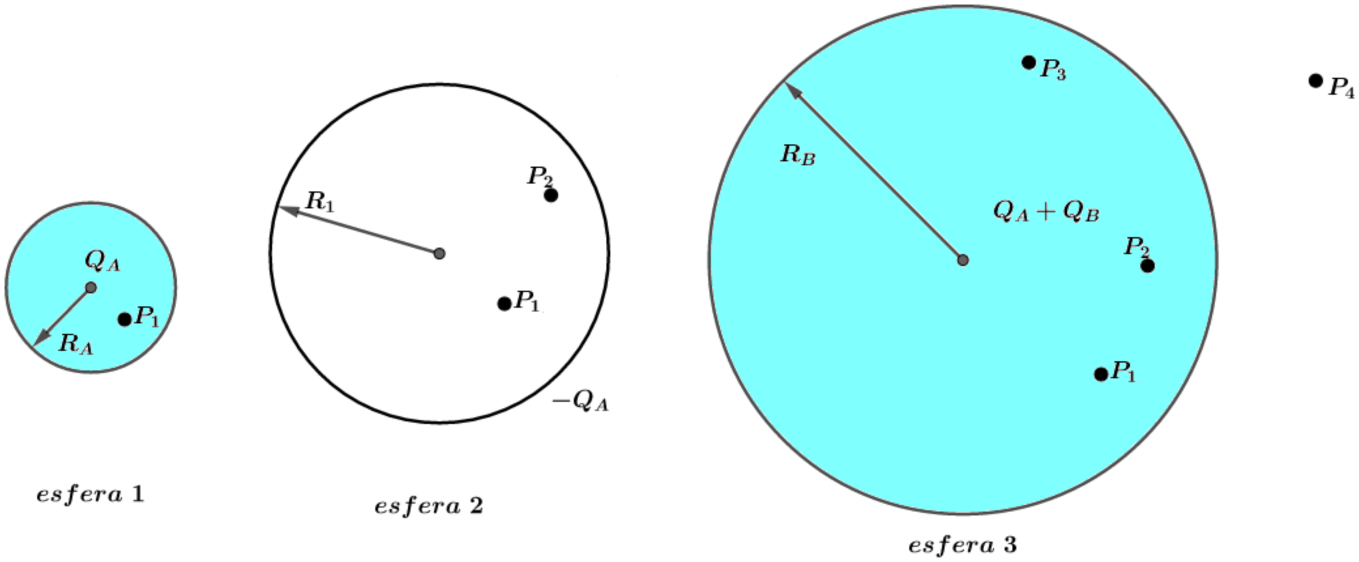


Figura 40: Princípio da superposição para determinação do potencial em função da distância.

O ponto P_1 é interior as três esferas, portanto, o potencial nele é a soma dos potenciais constantes nas três esferas adotadas:

$$V_{P_1}(r \leq R_A) = V_{esfera1} + V_{esfera2} + V_{esfera3}$$

$$V_{P_1}(r \leq R_A) = K\frac{Q_A}{R_A} + \left(-K\frac{Q_A}{R_1}\right) + \left(K\frac{Q_A + Q_B}{R_B}\right)$$

$$\boxed{V_{P_1} = K\left(Q_A\frac{(R_1 - R_A)}{R_1 R_A}\right) + \left(K\frac{Q_A + Q_B}{R_B}\right)}$$

Como esperado, o potencial no interior do condutor A é constante. O ponto P_2 é externo a esfera 1 e interior as outras, logo:

$$V_{P_2}(R_A \leq r \leq R_1) = K\frac{Q_A}{r} - K\frac{Q_A}{R_1} + K\frac{(Q_A + Q_B)}{R_2}$$

$$\boxed{V_{P_2} = K\frac{Q_A}{r} - K\frac{Q_A}{R_1} + K\frac{(Q_A + Q_B)}{R_B}}$$

O ponto P_3 é externo a esfera 1 e a esfera 2, então:

$$V_{P_3}(R_1 \leq r \leq R_B) = K\frac{Q_A}{r} - K\frac{Q_A}{r} + K\frac{(Q_A + Q_B)}{R_B}$$

$$\boxed{V_{P_3} = K\frac{(Q_A + Q_B)}{R_B}}$$

No ponto P_4 , ponto fora do conjunto, o potencial é expresso por:

$$V_{P_4}(r \geq R_B) = K\frac{Q_A}{r} - K\frac{Q_A}{r} + K\frac{(Q_A + Q_B)}{r}$$

$$\boxed{V_{P_4} = K\frac{(Q_A + Q_B)}{r}}$$

Graficamente, podemos expressar o potencial em função da distância:

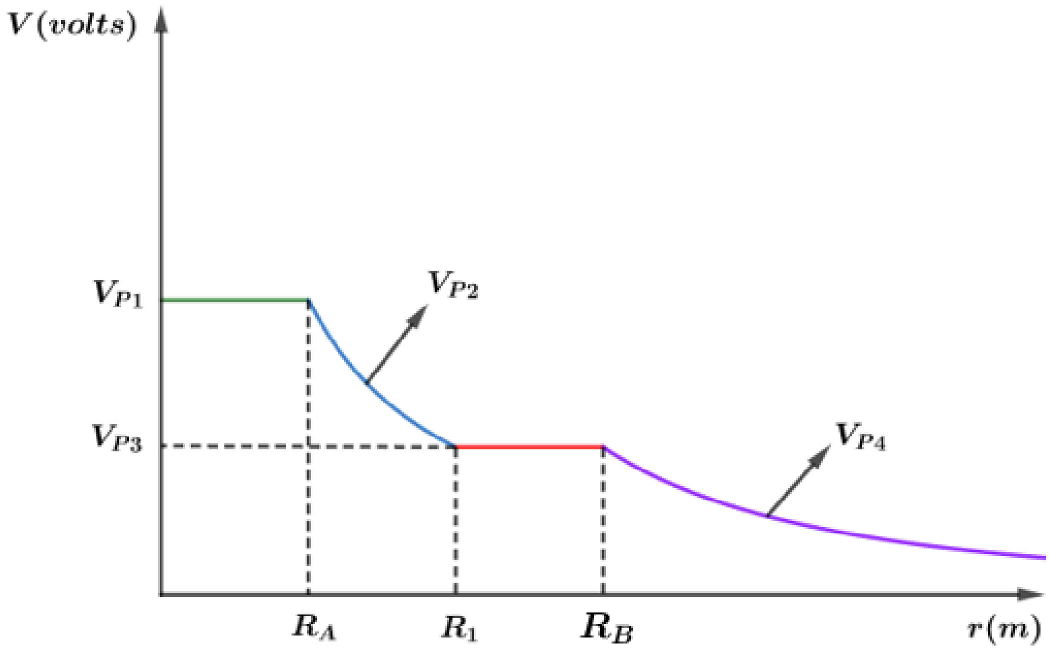


Figura 41: Gráfico do potencial em função da distância.

Vale a pena lembrar que o campo elétrico na direção radial é dado por $E = -\frac{dV}{dr}$ e a descontinuidade na superfície do condutor. Assim, temos o campo elétrico em cada região:

a) $r < R_A$:

$$\left(\vec{E}_{int}\right)_A = \vec{0}$$

Para um ponto muito próximo da superfície de A, temos que:

$$E = K\frac{Q_A}{R_A^2}$$

Logo, na superfície do condutor A ($r = R_A$), o campo é dado por:

$$E_{sup} = \frac{1}{2}E_{prox} = \frac{1}{2}K\frac{Q_A}{R_A^2}$$

b) $R_A < r < R_1$

$$E = K\frac{Q_A}{r^2}$$

Para um ponto muito próximo da superfície interna de B, temos que:

$$E = K\frac{Q_A}{R_1^2}$$

Logo, na superfície interna do condutor B ($r = R_1$), o campo é dado por:

$$E_{sup} = \frac{1}{2} E_{prox} = \frac{1}{2} K \frac{Q_A}{R_1^2}$$

c) $R_1 < r < R_B$:

$$\left(\vec{E}_{int}\right)_B = \vec{0}$$

Para um ponto muito próximo da superfície externa de B, temos que:

$$E = K \frac{Q_A + Q_B}{R_B^2}$$

Logo, na superfície externa do condutor B ($r = R_B$), o campo é dado por:

$$E_{sup} = \frac{1}{2} E_{prox} = \frac{1}{2} K \frac{Q_A + Q_B}{R_B^2}$$

d) $r > R_B$:

Para pontos externos da casca esférica B, tudo se passa como existisse uma carga puntiforme $Q_A + Q_B$ no centro das esferas. Portanto:

$$E = K \frac{(Q_A + Q_B)}{r}$$

Portanto, o gráfico é dado por:

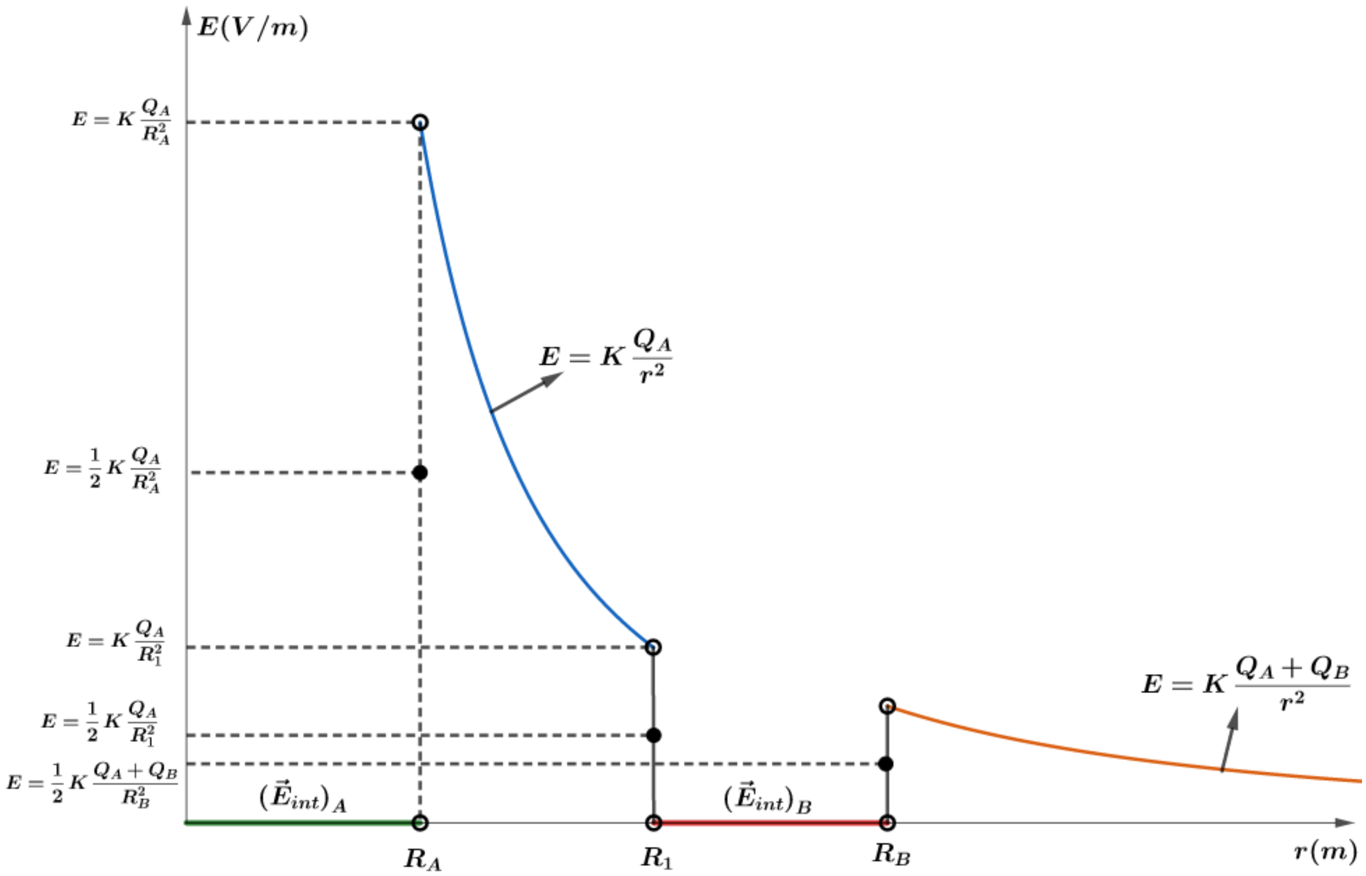


Figura 42: Gráfico do campo elétrico em função da distância.

NOVIDADE!

Vamos estudar agora um problema que pode vir a cair na prova do ITA ou parte dele. Trata-se de um problema clássico.

Considere uma esfera isolante carregada com uma carga Q positiva. Nessa esfera, existe uma cavidade bem pequena, na qual existe uma carga elétrica negativa $-q$ $(q > 0)$, massa m, que é lançada com uma velocidade v, como mostra a figura:

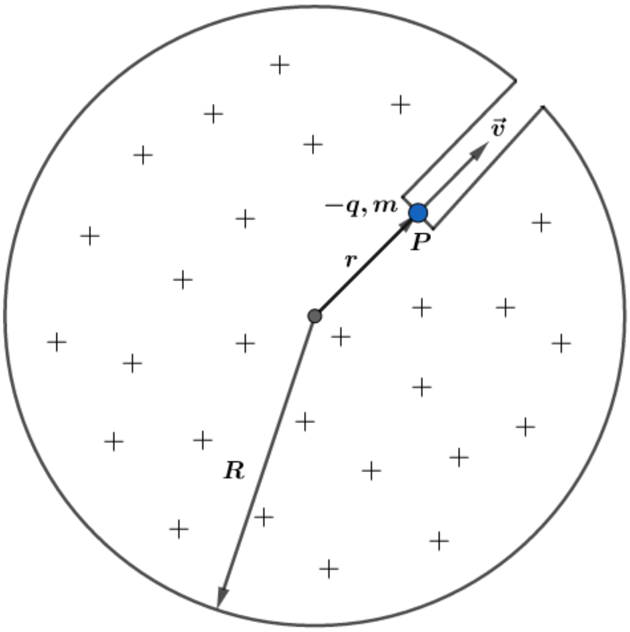


Figura 43: Carga sendo lançada do interior de uma cavidade carregada.

Qual deve ser a mínima velocidade para que a carga $-q$ consiga escapar da esfera?

Para resolver esse problema, vamos usar o conceito de energia. Pelo teorema da energia cinética, temos que:

$$\left(\tau_{F_{ele}}\right)_{P\to\infty} = \Delta E_c \Rightarrow -q(V_P - V_\infty) = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{1}{2}mv^2$$

No infinito, temos que o potencial é nulo e dada a condiçao de velocidade mínima que desejamos, a carga deve chegar no infinito com velocidade praticamente nula, portanto:

$$q.V_P = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2.q.V_P}{m}}$$

Com isso, nosso problema agora passou a ser encontrar o potencial elétrico no ponto P.

$$(E_M)_P = (E_M)_\infty$$

Para isso, vamos lembrar como é o gráfico do campo eletrico de uma esfera isolante:

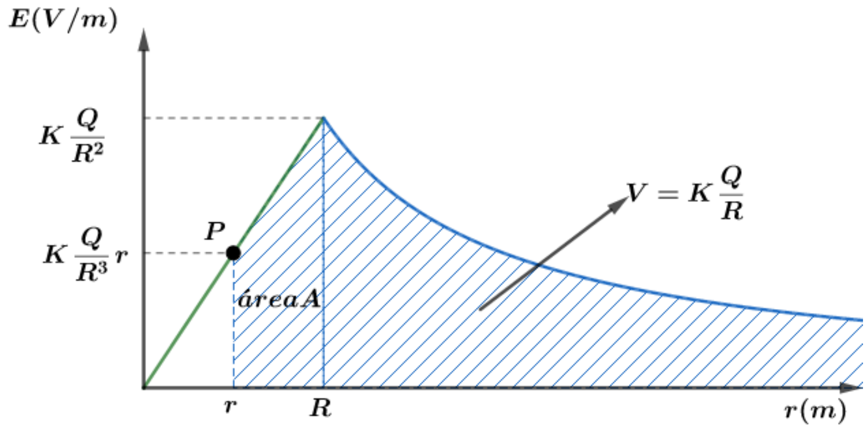


Figura 44: Gráfico da esfera isolante carregada.

Portanto, a área sombreada corresponde ao potencial elétrico. Logo:

$$V_P = \frac{KQ}{R} + área\ A$$

A área A é a area de um trapézio ($A = \left(\frac{base\ maior + base\ menor}{2}\right).\,altura$), logo:

$$V_P = \frac{KQ}{R} + \left(\frac{\frac{KQ}{R^2} + \frac{KQr}{R^2}}{2}\right)(R - r)$$

Manipulando algebricamente, temos que:

$$\boxed{V_P = \frac{3}{2}K\frac{Q}{R} - \frac{1}{2}K\frac{Q}{R^3}r^2}$$

Podemos dizer que o gráfico do potencial é dado por:

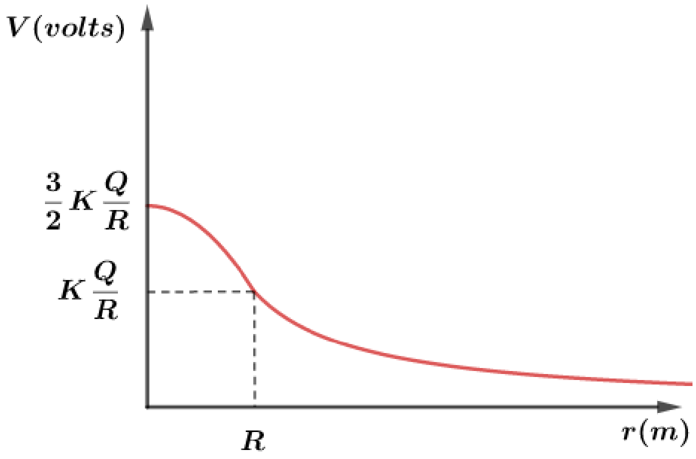


Figura 45: Gráfico do potencial elétrico em função da distância $\boldsymbol{r}$.

Portanto, a velocidade mínima para que a carga $-q$ chegue no infinito é de:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2.q}{m}\left(\frac{3}{2}K\frac{Q}{R} - \frac{1}{2}K\frac{Q}{R^3}r^2\right)}}$$

5. Método das imagens

Vamos imaginar o seguinte problema: suponha uma carga q a uma distância d de um plano condutor aterrado.

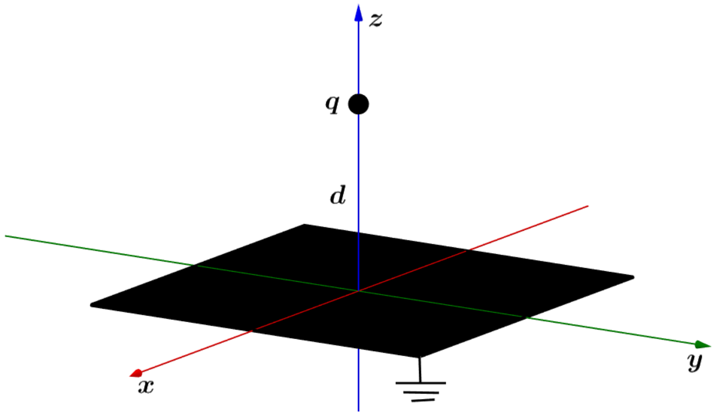
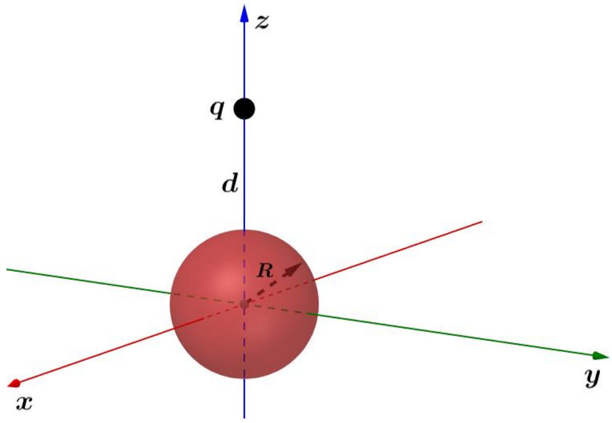


Figura 46: Interação entre uma carga e um plano condutor aterrado.

A pergunta que surge é: qual o potencial na região acima do plano? Obviamente, não é apenas Kq/r, pois há carga induzida no plano condutor e não sabemos quanta carga é induzida, nem como ela está distribuída. Outra situação análoga é a interação entre uma carga e uma esfera condutora.



Para atacar esse tipo de problema, vamos relembrar um problema simples: duas cargas $+q$ e $-q$.

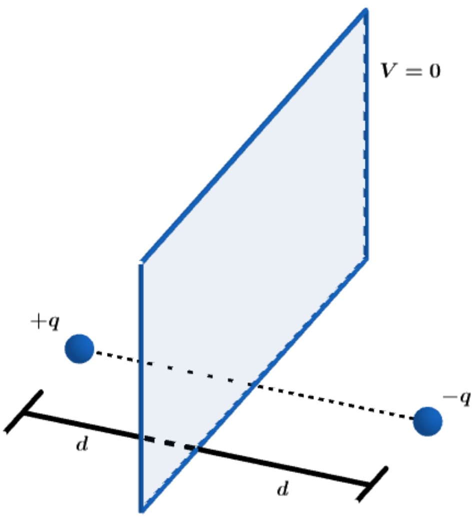


Figura 47: Plano mediador onde o potencial elétrico é nulo.

Note que para o potencial nulo, temos que:

$$V_{plano} = \frac{Kq}{x_1} + \frac{K(-q)}{x_2}$$

$$V_{plano} = Kq\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)$$

Se o potencial do plano for nulo, podemos dizer que a distância $x_1 = x_2$, ou seja, qualquer ponto cuja distância entre a carga $+q$ e o ponto for igual a distância entre a carga $-q$ e o mesmo ponto, sabemos que o potencial é nulo. O lugar geométrico que contém esses pontos é o plano mediador. Assim, qualquer ponto deste plano terá potencial elétrico nulo.

Além disso, se eu pegasse qualquer configuração com uma carga $+Q$ simétrica a uma carga $-Q$, em relação ao plano mediador, o potencial elétrico seria nulo no plano.

Agora, vamos aplicar essa ideia no problema da carga $+q$ próxima ao plano metálico aterrado. Como o plano metálico está aterrado, podemos dizer que o potencial elétrico do plano é nulo. Então, podemos imaginar que existe uma carga simetricamente oposta à carga $+q$, mas de sinal contrário $(-q)$, de tal forma que o plano mediador funcione como um espelho e essa carga $-q$ é a carga imagem que gera um potencial nulo no plano mediador.

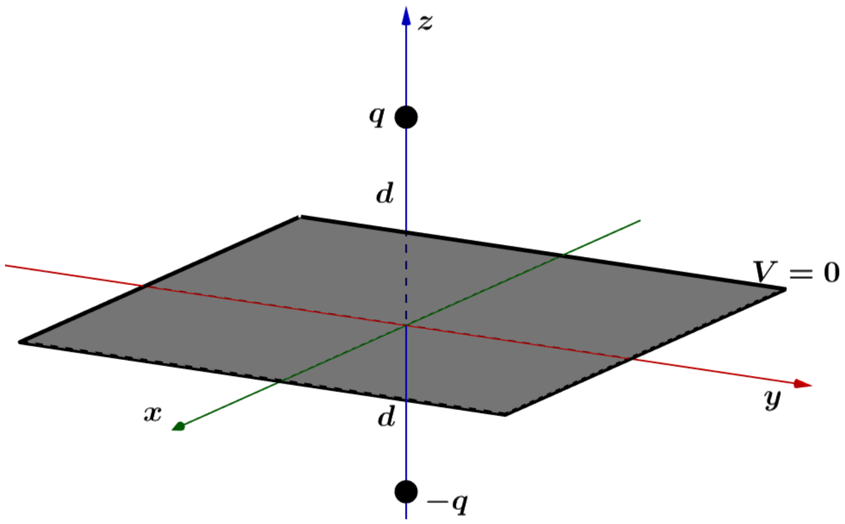


Figura 48: Carga imagem -q definindo um plano (o plano mediador) que possui potencial nulo.

Assim, o grande ponto é analisar onde estão situadas as cargas-imagens para que a condição de potencial nulo possa ser satisfeita.

HORA DE PRATICAR!

6. Lista de Exercícios

1. (ITA 1983)

Entre duas placas planas e paralelas, existe um campo elétrico uniforme. Devido a uma diferença de potencial V aplicada entre elas. Um feixe de elétrons é lançado entre as placas com velocidade inicial v_0. A massa do elétron é m e q é o módulo de sua carga elétrica. L é a distância horizontal que o elétron percorre para atingir uma das placas e d é a distância entre as placas.

Dados: v_0, L, d e V, a razão entre o módulo da carga e a massa do elétron $\frac{q}{m}$ é dada por:

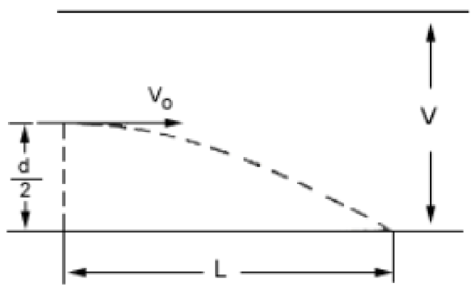
a) $\frac{Vd}{Lv_0}$

b) $\frac{2L^2v_0}{Vd}$

c) $\frac{V^2L}{d^2v_0}$

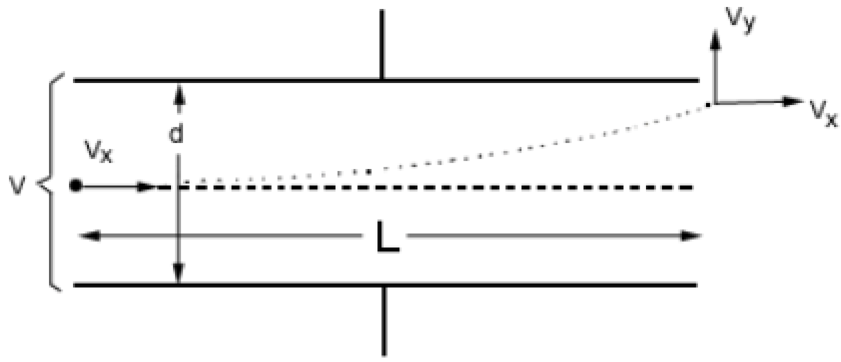
d) $\frac{d^2v_0^2}{VL^2}$

e) $\frac{VL}{d^2v_0^2}$



2. (ITA-1971)

Um elétron de massa m e carga $-q$ penetra com velocidade $v_x = constante$ entre as placas de um capacitor plano. Neste há uma diferença de potencial V orientada de modo a fazer o elétron subir.



Deduza a expressão da componente v_y da velocidade que o elétron possui ao deixar o capacitor e assinale-a entre as opções abaixo. Despreze a atração gravitacional sobre o elétron.

a) $v_y = \frac{qVL}{mdv_x}$

b) $v_y = \frac{qmL}{Vdv_x}$

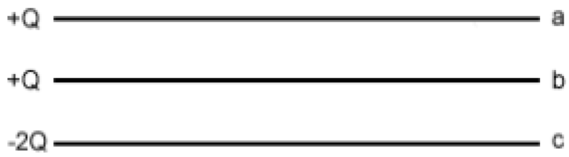
c) $v_y = v_x$

d) $v_y = \frac{L}{d} \cdot v_x$

e) nenhuma das opções é correta.

3. (ITA-1969)

Três superfícies planas circulares isoladas possuem cargas distribuídas conforme indica a figura:



Pode-se afirmar que:

a) O campo elétrico na região compreendida entre a e b é nulo.

b) O campo elétrico apresenta valores mínimos na região entre b e c.

c) No centro geométrico de b, o campo elétrico é equivalente àquele determinado pelas cargas de a e c.

d) Entre c e b o sentido do campo elétrico é de c para b.

e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

4. (ITA – 81)

Uma partícula de massa m e outra de massa $2m$ tem cargas elétricas q de mesmo módulo, mas de sinais opostos. Estando inicialmente separadas de uma distância R, são soltas a partir do repouso. Nestas condições, quando a distância entre as partículas for $R/2$, desprezando a ação gravitacional terrestre, se $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, pode-se afirmar que:

a) Ambas terão a mesma velocidade $v = q\left(\frac{K}{3mR}\right)^{1/2}$.

b) Ambas terão a mesma velocidade $v = q\left(\frac{K}{mR}\right)^{1/2}$.

c) Ambas terão a mesma velocidade $v = 2q\left(\frac{k}{3mR}\right)^{1/2}$.

d) uma terá velocidade $v = q\left(\frac{K}{mR}\right)^{1/2}$ e a outra terá velocidade de $v = 2q\left(\frac{K}{3mR}\right)^{1/2}$.

e) uma terá velocidade $v = q\left(\frac{K}{3mR}\right)^{1/2}$ e a outra terá velocidade de $v = 2q\left(\frac{K}{3mR}\right)^{1/2}$.

5. (ITA-1985)

Uma esfera condutora de raio $0{,}50\ cm$ é elevada a um potencial de $10{,}0V$. Uma segunda esfera, bem afastada da primeira, tem raio $1{,}00\ cm$ e está ao potencial $15{,}0V$. Elas são ligadas por um fio de capacitância desprezível. Sabendo-se que o meio no qual a experiência é realizada é homogêneo e isotrópico, podemos afirmar que os potenciais finais das esferas serão:

a) $12{,}5V$ e $12{,}5V$.

b) $8{,}33V$ para a primeira e $16{,}7V$ para a segunda.

c) $16{,}7V$ para a primeira e $8{,}33V$ para a segunda.

d) $13{,}3V$ e $13{,}3V$.

e) Zero para a primeira e $25{,}0V$ para a segunda.

6. (ITA-1986)

Duas esferas metálicas, A e B, de raios R e $3R$, respectivamente, são postas em contato. Inicialmente A possui carga elétrica positiva $+2Q$ e B, carga $-Q$. Após atingir o equilíbrio eletrostático, as novas cargas de A e B passam a ser, respectivamente:

a) $Q/2, Q/2$.

b) $3Q/4, Q/4$.

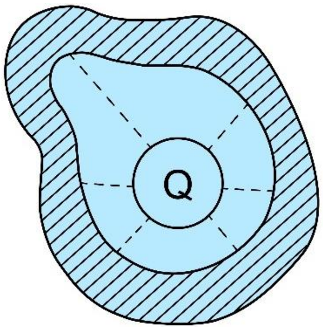
c) $3Q/2, Q/2$.

d) $Q/4, 3Q/4$.

e) $4Q/3\ e\ -Q/3$.

7. (ITA-1987)

A figura representa um condutor oco e um condutor de forma esférica dentro da cavidade do primeiro, ambos em equilíbrio eletrostático. Sabe-se que o condutor interno tem carga $+Q$.



Pode-se afirmar que:

a) Não há campo elétrico dentro da cavidade.

b) As linhas de força dentro da cavidade são retas radiais em relação à esfera, como na figura.

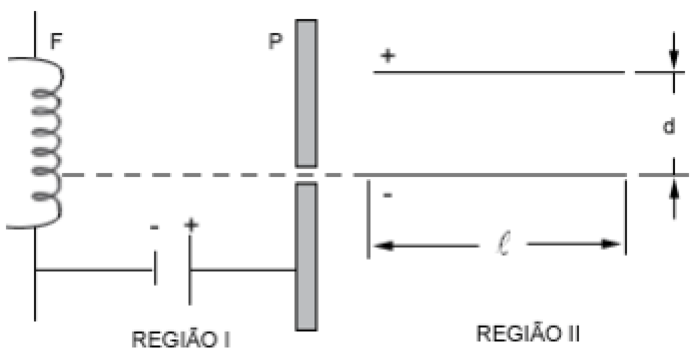
c) A carga da superfície interna do condutor oco é $-Q$ e as linhas de força são perpendiculares a essa superfície.

d) A carga da superfície interna do condutor oco é $-Q$ e as linhas de força são tangenciais a essa superfície.

e) Não haverá diferença de potencial entre os dois condutores se a carga do condutor oco também for igual a Q.

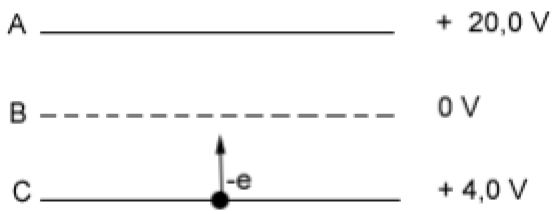
8. (ITA-1987)

Numa experiência de laboratório, elétrons são emitidos por um filamento metálico F, com velocidade inicial praticamente nula. Eles são acelerados através da região I por uma diferença de potencial de $25 \times 10^3\ V$, aplicada entre F e a placa perfurada P. Eles emergem do furo da placa com velocidade horizontal e penetram na região II, onde são obrigados a atravessar o campo elétrico uniforme de um capacitor cujas placas têm comprimento $l = 5{,}0\ cm$ e estão separadas por uma distância $d = 0{,}50\ cm$, conforme a figura. Qual é o máximo valor da tensão V_2 entre as placas do capacitor que ainda permite que algum elétron atinja a região III onde não há campo elétrico?



9. (ITA-1988)

A, B e C são superfícies que se acham, respectivamente, a potenciais +20V, 0V e + 4,0V. Um elétron é projetado a partir da superfície C no sentido ascendente com uma energia cinética inicial de 9,0 eV. (Um elétron-volt é a energia adquirida por um elétron quando submetido a uma diferença de potencial de um volt). A superfície B é porosa e permite a passagem de elétrons. Podemos afirmar que:



a) Na região entre C e B o elétron será acelerado pelo campo elétrico até atingir a superfície B com energia cinética de 33,0 eV. Uma vez na região entre B e A, será desacelerado, atingindo a superfície A com energia cinética de 13,0 eV.

b) Entre as placas C e B o elétron será acelerado atingindo a placa B com energia cinética igual a 13,0 eV, mas não atinge a placa A.

c) Entre C e B o elétron será desacelerado pelo campo elétrico aí existente e não atingirá a superfície B.

d) Na região entre C e B o elétron será desacelerado, mas atingirá a superfície B com energia cinética de 5,0 eV. Ao atravessar B, uma vez na região entre B e A será acelerado, até atingir a superfície A com uma energia cinética de 25,0 eV.

e) Entre as placas C e B o elétron será desacelerado, atingindo a superfície B com energia cinética de 5,0 eV. Uma vez na região entre B e A, será desacelerado, até atingir a superfície A com energia cinética de 15,0 eV.

10. (ITA-1988)

Um fio condutor homogêneo de $25\ cm$ de comprimento foi conectado entre os terminais de uma bateria de $6V$. A $5\ cm$ do pólo positivo, faz-se uma marca P sobre este fio e a $15\ cm$, outra marca Q.

Então, a intensidade E do campo elétrico dentro deste fio (em volt/metro) e a diferença de potencial $\Delta V = V_P - V_Q$ (em volts) existente entre os pontos P e Q dentro do fio serão dados, respectivamente, por:

a) 6,0 e 0,6.

b) 24 e 2,4.

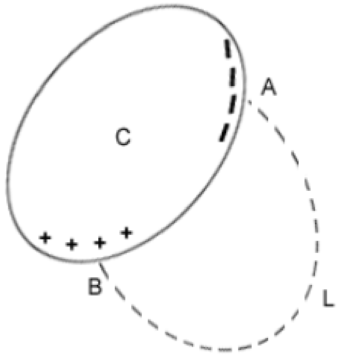
c) 24 e 2,4.

d) 6,0 e 6,0.

e) 24 e 6,0.

11. (ITA-1988)

Na figura, C é um condutor em equilíbrio eletrostático, que se encontra próximo de outros objetos eletricamente carregados. Considere a curva tracejada L que une os pontos A e B da superfície do condutor.



Podemos afirmar que:

a) A curva L não pode representar uma linha de força do campo elétrico.

b) A curva L pode representar uma linha de força, sendo que o ponto B está a um potencial mais baixo que o ponto A.

c) A curva L pode representar uma linha de força, sendo que o ponto B está a um potencial mais alto que o ponto A.

d) A curva L pode representar uma linha de força, desde que L seja ortogonal à superfície do condutor nos pontos A e B.

e) A curva L pode representar uma linha de força, desde que a carga total do condutor seja nula.

12. (ITA-1990)

Um condutor esférico oco, isolado, de raio R, tem no seu interior uma pequena esfera de raio $r < R$. O sistema está inicialmente neutro. Eletriza-se a pequena esfera com carga positiva. Uma vez atingido o equilíbrio eletrostático, pode-se afirmar que:

a) A carga elétrica na superfície externa do condutor é nula.

b) A carga elétrica na superfície interna do condutor é nula.

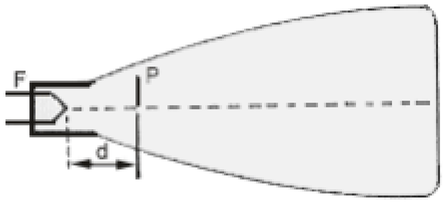
c) O campo elétrico no interior do condutor é nulo.

d) O campo elétrico no exterior do condutor é nulo.

e) Todas as afirmativas acima estão erradas.

13. (ITA-1990)

Num tubo de raios catódicos tem-se um filamento F que libera elétrons quando aquecido, e uma placa aceleradora P que é mantida a um potencial mais alto que o filamento. O filamento fica a uma distância d da placa. A placa tem, ainda, um orifício que permite a passagem dos elétrons que vão se chocar com uma tela que fica fluorescente quando os mesmos a atingem.



Nestas condições:

a) Se aumentarmos a distância d entre o filamento e a placa, a energia cinética com que os elétrons chegam à placa aumenta.

b) O aumento da distância d faz com que a energia cinética dos elétrons diminua.

c) A energia cinética dos elétrons não depende da distância entre o filamento e a placa, mas só da diferença de potencial U entre o filamento e a placa aceleradora.

d) A energia cinética dos elétrons só depende da temperatura do filamento.

e) Nenhuma das alternativas anteriores é verdadeira.

14. (ITA-1993)

Entre as armaduras de um capacitor plano com placas horizontais, existe uma diferença de potencial V. A separação entre as armaduras é d. Coloca-se uma pequena carga $Q > 0$, de massa m entre as armaduras e esta fica em equilíbrio. A aceleração da gravidade é g. Qual é o valor da carga Q?

a) $Q = mgd^{-1}/V$.

b) $Q = Vd/m$.

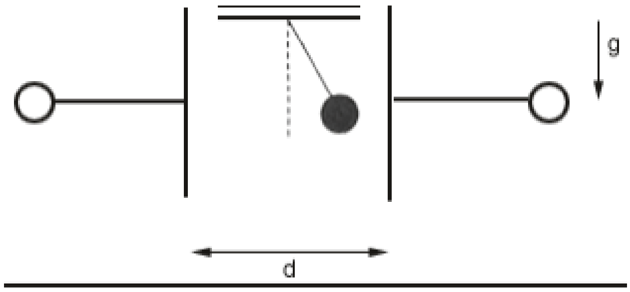
c) $Q = mgd/V$.

d) $Q = Vgd/m$.

e) $Q = gd/Vm$.

15. (ITA-2001)

Uma esfera de massa m e carga q está suspensa por um fio frágil e inextensível, feito de um material eletricamente isolante. A esfera se encontra entre as placas paralelas de um capacitor plano, como mostra a figura. A distância entre as placas é d, a diferença de potencial entre as mesmas é V e o esforço máximo que o fio pode suportar é igual ao quádruplo do peso da esfera. Para que a esfera permaneça imóvel, em equilíbrio estável, é necessário que:



a) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 15\, mg$

b) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 4\, (mg)^2$

c) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 15\, (mg)^2$

d) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \geq 15\, mg$

e) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 16\, (mg)^2$

16. (ITA-2002)

Uma esfera metálica isolada, de raio $R_1 = 10,0\ cm$ é carregada no vácuo até atingir o potencial $U = 9,0V$. Em seguida, ela é posta em contato com outra esfera metálica isolada, de raio $R_2 = 5,0\ cm$, inicialmente neutra. Após atingir o equilíbrio eletrostático, qual das alternativas melhor descreve a situação física? É dado que $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9,0 \times 10^9\ Nm^2/C^2$.

a) A esfera maior terá uma carga de 0,66. 10-10 C.

b) A esfera maior terá um potencial de 4,5V.

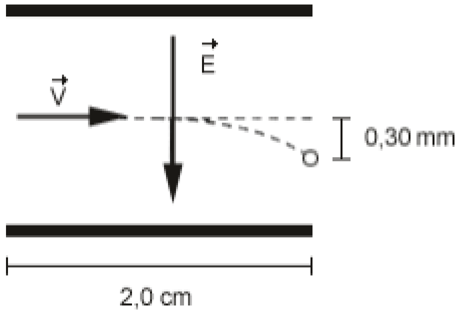
c) A esfera menor terá uma carga de 0,66. 10-10 C.

d) A esfera menor terá um potencial de 4,5V.

e) A carga total é igualmente dividida entre as duas esferas.

17. (ITA-2005)

Em uma impressora a jato de tinta, gotas de certo tamanho ejetadas de um pulverizador em movimento, passam por uma unidade eletrostática onde perdem alguns elétrons, adquirindo uma carga q, e, a seguir, deslocam-se no espaço entre placas planas paralelas eletricamente carregadas, pouco antes da impressão. Considere gotas de raio $10\ \mu m$ lançadas com velocidade de módulo $v = 20\ m/s$ entre as placas de comprimento igual a $2,0\ cm$, no interior das quais existe um campo elétrico uniforme de módulo $E = 8,0 \times 10^4\ N/C$, como mostra a figura.



Considerando que a densidade da gota seja $1000\ kg/m^3$ e sabendo-se que a mesma sofre um desvio de $0{,}30\ mm$ ao atingir o final do percurso, o módulo de sua carga elétrica é de:

a) 2,0. 10-14 C.

b) 3,1. 10-14 C.

c) 6,3. 10-14 C.

d) 3,1. 10-11 C.

e) 1,1. 10-10 C.

18. (ITA-2009)

Uma carga q distribui-se uniformemente na superfície de uma esfera condutora, isolada, de raio R. Assinale a opção que apresenta a magnitude do campo elétrico e o potencial elétrico num ponto situado a uma distância $r = R/3$ do centro da esfera.

a) $E = 0\ V/m\ e\ U = 0\ V$

b) $E = 0\ V/m\ e\ U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R}$

c) $E = 0\ V/m\ e\ U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{3q}{R}$

d) $E = 0\ V/m\ e\ U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qr}{R^2}$

e) $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qr}{R^3}\ e\ U = 0\ V$

19. (ITA-2009)

Três esferas condutoras, de raio a e carga Q, ocupam os vértices de um triângulo equilátero de lado $b >> a$, conforme mostra a figura (1). Considere as figuras (2), (3) e (4), em que, respectivamente, cada uma das esferas se liga e desliga da Terra, uma de cada vez. Determine, nas situações (2), (3) e (4), a carga das esferas Q_1, Q_2 e Q_3, respectivamente, em função de a, b e Q.

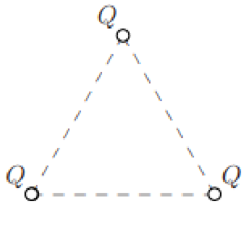


Fig. (1)

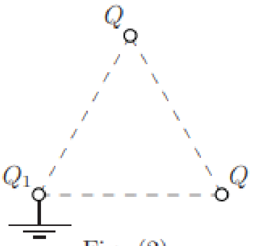


Fig. (2)

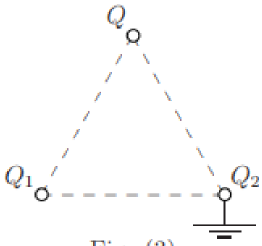


Fig. (3)

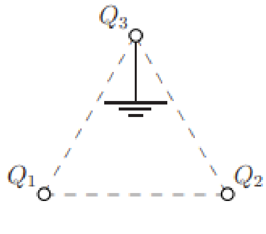


Fig. (4)

20. (ITA-2010)

Considere as cargas elétricas $q1 = 1\ C$, situada em $x = -\ 2m$, e $q2 = -\ 2\ C$, situada em $x = -\ 8\ m$. Então, o lugar geométrico dos pontos de potencial nulo é

a) uma esfera que corta o eixo x nos pontos $x = -\ 4\ m$ e $x = 4m$.

b) uma esfera que corta o eixo x nos pontos $x = -\ 16\ m$ e $x = 16\ m$.

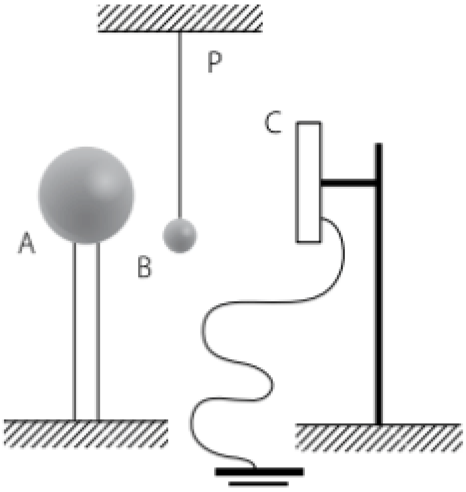
c) um elipsoide que corta o eixo x nos pontos $x = -\ 4\ m$ e $x = 16\ m$.

d) um hiperboloide que corta o eixo x no ponto $x = -\ 4\ m$.

e) um plano perpendicular ao eixo x que o corta no ponto $x = -\ 4\ m$.

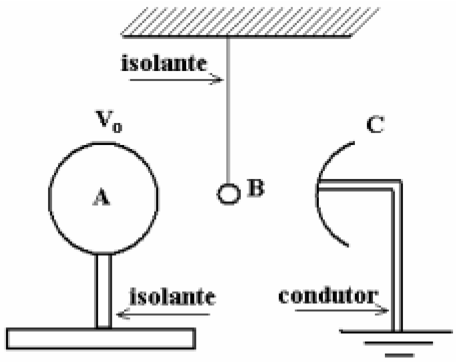
21. (IME – 79)

A figura mostra, esquematicamente, uma campainha eletrostática A e B são condutores esféricos, com diâmetros de $20cm$ e $4\ cm$, respectivamente. B é suspenso de P por um fio isolante. A placa metálica C é ligada à Terra. A esfera A, carregada inicialmente a um potencial de $50kv$, atrai B que, após o contato, é repelida e se choca com a placa C, descarregando-se. A operação se repete enquanto o potencial de A for superior a $25\ kV$. Determine o número de vezes que B baterá em A.



22. (ITA – 2008)

Considere um condutor esférico A de $20cm$ de diâmetro colocado sobre um pedestal fixo e isolante. Uma esfera condutora B de $0{,}5mm$ de diâmetro, do mesmo material da esfera A, é suspensa por um fio fixo e isolante. Em posição oposta à esfera A, é colocada uma campainha C ligada à terra, conforme mostra a figura. O condutor A é, então, carregado a um potencial eletrostático V_0, de forma a atrair a esfera B. As duas esferas entram em contato devido à indução eletrostática e, após a transferência de carga, a esfera B é repelida, chocando-se com a campainha C, onde a carga adquirida é escoada para a terra. Após 20 contatos com a campainha, verifica-se que o potencial da esfera A é de $10\ 000\ V$. Determine o potencial inicial da esfera A. Considere $(1 + x)^n \cong 1 + nx$ se $|x| < 1$

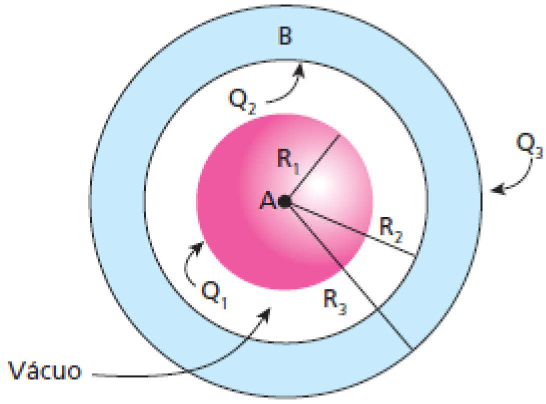


23. (FEI-SP)

Duas esferas condutoras concêntricas A e B possuem raios $R_1 = 10\ cm$, $R_2 = 20\ cm$ e $R_3 = 25\ cm$ e estão eletrizadas de forma que a diferença de potencial entre elas é $V_A - V_B = 9\ kV$ e a carga total da esfera B é de $0{,}3\ \mu C$. Determine as cargas Q_1, Q_2 e Q_3 existentes nas superfícies dessas esferas.

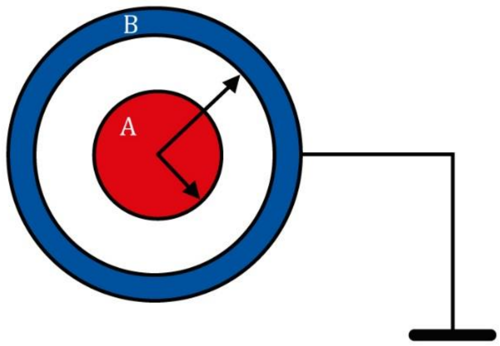
Dado: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\ Nm^2C^{-2}$.

OBS: o meio entre as esferas é o vácuo.



24.

Considere dois condutores esféricos, sendo o menor maciço de raio R_A e o outro B oco de raio interno R_1 e raio externo R_2. O condutor maciço está eletrizado com carga q_A, enquanto B está ligado à Terra, como mostra a figura:



Calcule:

a) O potencial na esfera A.

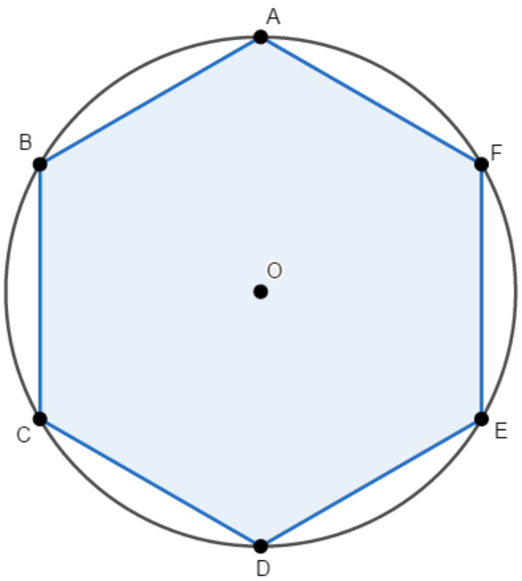
b) O potencial na esfera B.

c) O potencial num ponto P entre A e B.

Faça o esboço gráfico do potencial em função da distância do centro das esferas.

25.

7 cargas positivas Q encontram-se no infinito. As cargas têm módulo $Q = 40\mu C$ e o hexágono abaixo tem lado 12 cm.



Pede-se:

a) a energia gasta para trazer 6 dessas cargas do infinito e dispô-las nos vértices do hexágono.

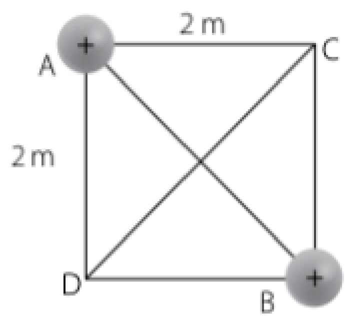
b) a energia gasta para, em seguida, trazer a sétima carga do infinito e colocá-la no centro O do hexágono.

c) a energia liberada se essa "molécula" for totalmente destruída e as cargas voltarem para o infinito.

Considere: $K = 9{,}0 \times 10^9\ Nm^2/C^2$ e $\sqrt{3} \cong 1{,}5$.

26.

Na figura a seguir, temos um quadrado de lado 2 m. Nos vértices A e B estão fixas duas cargas puntiformes idênticas +Q.



Determine a mínima energia potencial adquirida por uma carga $+Q$, puntiforme, colocada dentro do quadrado.

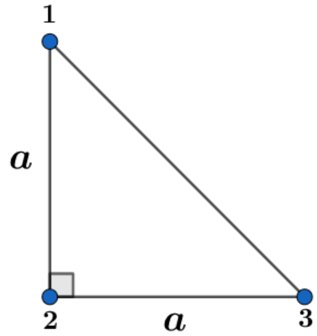
27. (Mack - 2005)

Uma partícula de massa igual a 2cg e carga de $+1\mu C$ é lançada com velocidade de $300\ m/s$, em direção a uma carga fixa de $+3\ \mu C$. O lançamento é feito no vácuo de um ponto bastante afastado da carga fixa. Desprezando ações gravitacionais, qual a mínima distância entre as cargas?

Adote: $K_0 = 9{,}0 \times 10^9\ N.m^2/C^2$.

28.

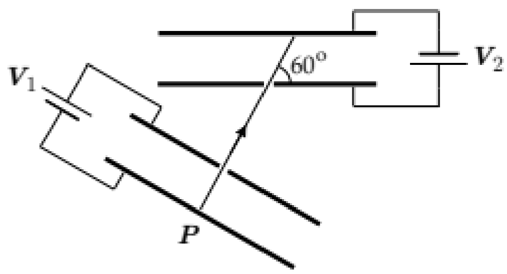
Três esferas metálicas idênticas de raio $\boldsymbol{r}$ estão localizadas nos vértices de um triângulo isósceles, como se mostra na figura (supor $r << a$). As esferas estão inicialmente com carga $\boldsymbol{q}$ cada. As esferas 1 e 2 são ligadas por um curto período de tempo, com um fio condutor, em seguida, o fio é retirado. Determine as cargas finais das esferas 1 e 2 após o processo.



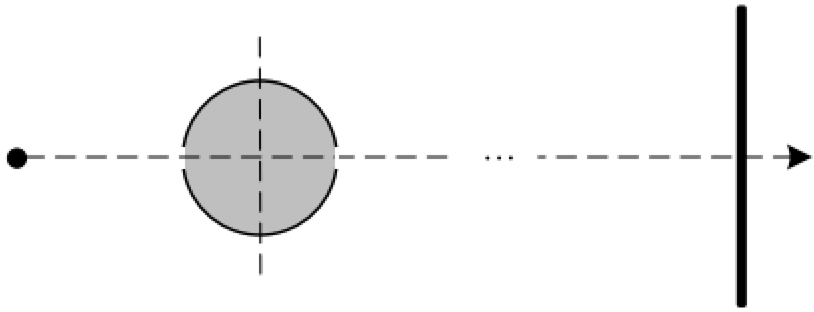
Caso necessário, utilize a aproximação $(1+x)^n \cong 1 + nx$, quando $x \ll 1$.

29. (ITA – 2020)

Um capacitor 1 de placas paralelas está submetido a uma d.d.p. $V_1 = 12\ V$, e um capacitor 2, idêntico ao primeiro, a uma d.d.p. V_2. Um elétron em repouso parte do ponto P, atravessa um orifício no primeiro capacitor e adentra o segundo através de outro orifício, a 60° em relação à placa, conforme indica a figura. Desconsiderando a ação da gravidade, determine a d.d.p. V_2 para que o elétron tangencie a placa superior do capacitor 2.



30. (IME – 2020)



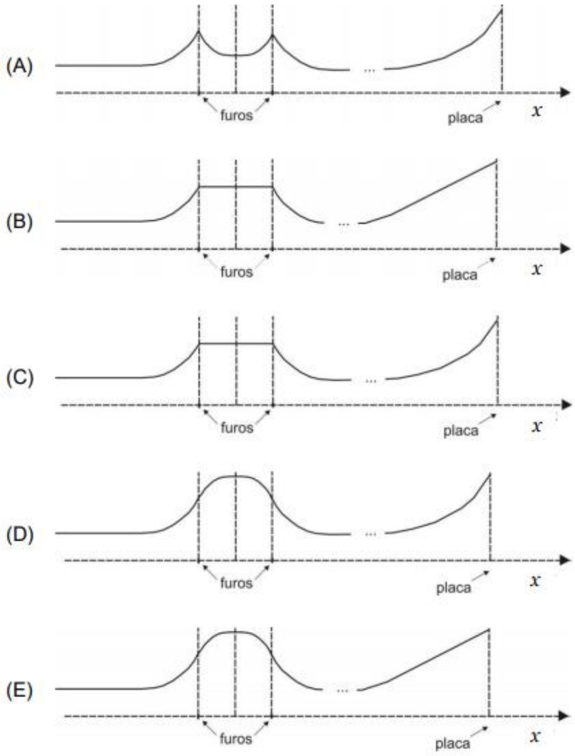
Uma partícula com carga positiva viaja em velocidade constante até aproximar-se de uma esfera oca com carga negativa uniformemente distribuída em sua casca. Ao encontrar a esfera, a partícula entra em seu interior por um pequeno furo, passa pelo centro e deixa a esfera por um segundo furo, prosseguindo o movimento. Bem distante da esfera, a partícula se aproxima de uma placa metálica plana de grande dimensão, com carga negativa uniformemente distribuída pela placa, conforme esquema da figura.

Observações:

• a carga da partícula não redistribui a carga da casca esférica e nem da placa plana; e

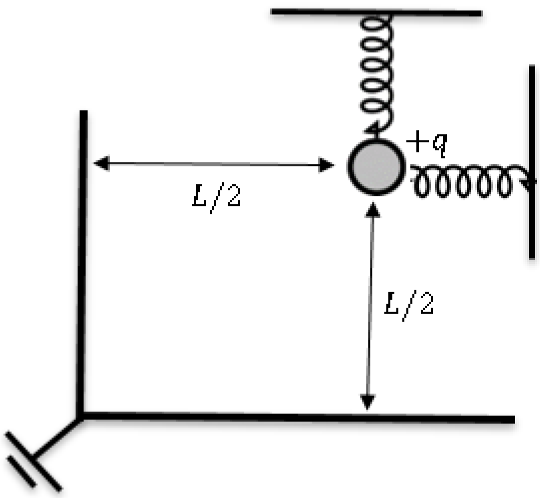
• a distribuição das cargas da casca esférica e da placa plana não interferem entre si.

O gráfico que melhor exprime a velocidade da partícula em função de sua posição é:



31. (Simulado ITA 2ª fase)

Uma carga elétrica $+q$ de massa m está em frente a uma associação de dois de planos metálicos aterrados. O ângulo entre os planos é de 90°. A carga está presa por duas molas de mesma constante elástica. A mola vertical se mantém na vertical e a mola horizontal se mantem na horizontal. A permissividade elétrica do meio vale ε_0. Determine a razão entre as elongações nas molas.



GABARITO

7. Gabarito sem Comentários

1. D
2. A
3. C
4. E
5. D
6. D
7. C
8. $V_2 = 1000\ V$
9. D
10. C
11. A
12. E
13. C
14. C
15. C
16. A
17. B
18. B
19. $Q_1 = -\frac{2Qa}{b}$, $Q_2 = \frac{Q\cdot a}{b}\left(\frac{2a}{b} - 1\right)$ e $Q_3 = \frac{Qa^2}{b^2}\left(3 - \frac{2a}{b}\right)$
20. A
21. 4 vezes
22. $V_0 = 10500\ V$
23. $Q_1 = +0{,}2\mu C$, $Q_2 = -0{,}2\mu C$ e $Q_3 = +0{,}5\mu C$
24. a) $V_A = Kq_A\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_1}\right)$ b) zero c) $V_P = Kq_A\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{R_1}\right)$
25. a) 1380 J; b)720 J; c) 2100 J
26. KQ^2
27. $d_{min} = 3\ cm$
28. $Q_1' = q\left[1 + \frac{1}{2}\frac{r}{a}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$, $Q_2' = q\left[1 - \frac{1}{2}\frac{r}{a}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$
29. 9 V
30. Sem alternativa
31. $\frac{x}{y} = \frac{2q^2(2-\sqrt{2})}{16mg\pi\varepsilon_0 L^2 - q^2(4-\sqrt{2})}$

ESCLARECENDO!

8. Lista de Exercícios Comentada

1. (ITA 1983)

Entre duas placas planas e paralelas, existe um campo elétrico uniforme. Devido a uma diferença de potencial V aplicada entre elas. Um feixe de elétrons é lançado entre as placas com velocidade inicial v_0. A massa do elétron é m e q é o módulo de sua carga elétrica. L é a distância horizontal que o elétron percorre para atingir uma das placas e d é a distância entre as placas.

Dados: v_0, L, d e V, a razão entre o módulo da carga e a massa do elétron $\frac{q}{m}$ é dada por:

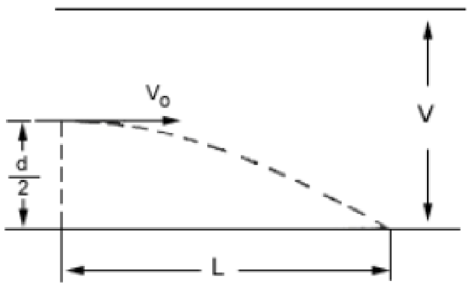
a) $\frac{Vd}{Lv_0}$

b) $\frac{2L^2v_0}{Vd}$

c) $\frac{V^2L}{d^2v_0}$

d) $\frac{d^2v_0^2}{VL^2}$

e) $\frac{VL}{d^2v_0^2}$



Comentários:

O movimento do elétron é semelhante a um lançamento horizontal, de velocidade v_0 e campo de aceleração vertical dado por:

$$g_{apa} = \frac{E_{ele}q}{m} = \frac{Vq}{md}$$

Lembrando da equação da parábola de um lançamento horizontal:

$$y(x) = -\frac{gx^2}{2v_0^2}$$

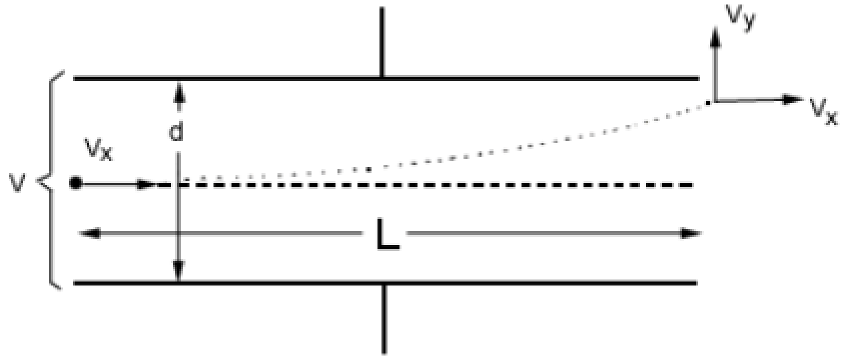
$$\frac{d}{2} = \frac{g_{apa}x^2}{2v_0^2}$$

$$\frac{q}{m} = \frac{d^2v_0^2}{L^2V}$$

Gabarito: D

2. (ITA-1971)

Um elétron de massa m e carga $-q$ penetra com velocidade $v_x = constante$ entre as placas de um capacitor plano. Neste há uma diferença de potencial V orientada de modo a fazer o elétron subir.



Deduza a expressão da componente v_y da velocidade que o elétron possui ao deixar o capacitor e assinale-a entre as opções abaixo. Despreze a atração gravitacional sobre o elétron.

a) $v_y = \frac{qVL}{mdv_x}$

b) $v_y = \frac{qmL}{Vdv_x}$

c) $v_y = v_x$

d) $v_y = \frac{L}{d} \cdot v_x$

e) nenhuma das opções é correta.

Comentários:

Aplicando $F = ma$ ao elétron, na direção vertical, temos:

$$a = \frac{Eq}{m} = \frac{Vq}{md}$$

Como se trata de um movimento com aceleração constante, podemos escrever:

$$v_y = v_0 + at \Rightarrow v_y = \frac{Vqt_f}{md} \quad (eq. 1)$$

O movimento horizontal tem velocidade constante, logo:

$$v_x = \frac{L}{t_f} \Rightarrow t_f = \frac{L}{v_x}$$

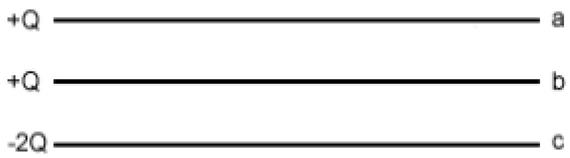
Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\boxed{v_y = \frac{VqL}{mdv_x}}$$

Gabarito: A

3. (ITA-1969)

Três superfícies planas circulares isoladas possuem cargas distribuídas conforme indica a figura:



Pode-se afirmar que:

a) O campo elétrico na região compreendida entre a e b é nulo.

b) O campo elétrico apresenta valores mínimos na região entre b e c.

c) No centro geométrico de b, o campo elétrico é equivalente àquele determinado pelas cargas de a e c.

d) Entre c e b o sentido do campo elétrico é de c para b.

e) Nenhuma das afirmações anteriores é correta.

Comentários:

Incorreto. Como as placas são finitas temos o chamado efeito de bordas, de modo que as linhas de campo saindo das placas não são perpendiculares e, portanto, não se cancelam. Além disso, temos o campo gerado pela placa C, que contribui para que o campo elétrico resultante na região não seja nulo.

Incorreto. O campo tem intensidade crescente de c para b, logo não pode ter um mínimo naquele intervalo.

Correto. Considere uma porção arbitrária de b. Essa porção possuirá uma outra, simétrica em relação ao centro da superfície, de modo que o campo resultante desse par de cargas, no centro, é nulo. A superfície é composta por pares como o descrito acima, logo gera campo resultante nulo no centro.

Incorreto. Cargas negativas geram campos que apontam em sua direção e positivas, o oposto.

Gabarito: C

---

4. (ITA – 81)

Uma partícula de massa m e outra de massa $2m$ tem cargas elétricas q de mesmo módulo, mas de sinais opostos. Estando inicialmente separadas de uma distância R, são soltas a partir do repouso. Nestas condições, quando a distância entre as partículas for $R/2$, desprezando a ação gravitacional terrestre, se $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, pode-se afirmar que:

a) Ambas terão a mesma velocidade $v = q\left(\frac{K}{3mR}\right)^{1/2}$.

b) Ambas terão a mesma velocidade $v = q\left(\frac{K}{mR}\right)^{1/2}$.

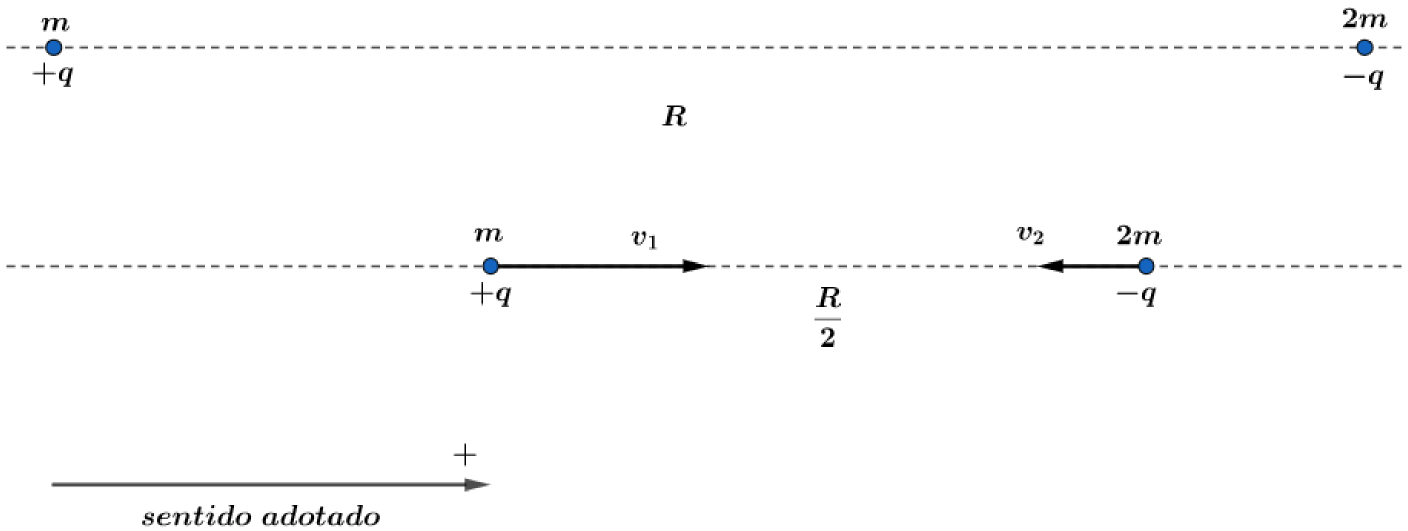
c) Ambas terão a mesma velocidade $v = 2q\left(\frac{k}{3mR}\right)^{1/2}$.

d) uma terá velocidade $v = q\left(\frac{K}{mR}\right)^{1/2}$ e a outra terá velocidade de $v = 2q\left(\frac{K}{3mR}\right)^{1/2}$.

e) uma terá velocidade $v = q\left(\frac{K}{3mR}\right)^{1/2}$ e a outra terá velocidade de $v = 2q\left(\frac{K}{3mR}\right)^{1/2}$.

Comentários:

Vamos fazer um desenho representativo do nosso sistema:



O sistema é isolado, já que não existe forças externas atuando nele e a força elétrica de atração as cargas é interna, podemos dizer que a quantidade de movimento do sistema se conserva, logo:

$$\vec{Q}_{antes} = \vec{Q}_{depois}$$

$$m.0 + m.0 = m.v_1 - 2m.v_2$$

$$\boxed{v_1 = 2v_2}\ eq\ 1$$

Dado que o sistema é conservativo, temos que a energia mecânica se conserva, portanto:

$$(E_M)_{antes} = (E_M)_{depois}$$

$$\frac{Kq(-q)}{R} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}2mv_2^2 + \frac{Kq(-q)}{\frac{R}{2}}\ eq\ 2$$

Substituindo 1 em 2 e manipulando algebricamente, temos que:

$$\frac{Kq^2}{R} = 3mv_2^2 \Rightarrow v_2 = q\sqrt{\frac{K}{3mR}}$$

Então:

$$\boxed{v_1 = 2v_2 = 2q\sqrt{\frac{K}{3mR}}}$$

Gabarito: E.

---

5. (ITA-1985)

Uma esfera condutora de raio $0{,}50\ cm$ é elevada a um potencial de $10{,}0V$. Uma segunda esfera, bem afastada da primeira, tem raio $1{,}00\ cm$ e está ao potencial $15{,}0V$. Elas são ligadas por um fio de capacitância desprezível. Sabendo-se que o meio no qual a experiência é realizada é homogêneo e isotrópico, podemos afirmar que os potenciais finais das esferas serão:

a) $12{,}5V$ e $12{,}5V$.

b) $8{,}33V$ para a primeira e $16{,}7V$ para a segunda.

c) $16{,}7V$ para a primeira e $8{,}33V$ para a segunda.

d) $13{,}3V$ e $13{,}3V$.

e) Zero para a primeira e $25{,}0V$ para a segunda.

Comentários:

Calculando a carga na primeira esfera:

$$V_1 = \frac{kQ_1}{r_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{r_1V_1}{k} \quad (eq.1)(r_1 = 0{,}5\ cm)$$

Do mesmo modo:

$$Q_2 = \frac{r_2V_2}{k} \quad (eq.2)(r_1 = 1\ cm)$$

Quando as duas são ligadas a carga se distribui de modo que as duas esferas possuam o mesmo potencial:

$$V_f = \frac{kQ_1'}{r_1} = \frac{kQ_2'}{r_2} \Rightarrow Q_1' = \frac{r_1V_f}{k} \quad (eq.3) \text{ e } Q_2' = \frac{r_2V_f}{k} \quad (eq.4)$$

A carga total do sistema se mantém constante:

$$Q = Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' \quad (eq.5)$$

Substituindo (1), (2), (3) e (4) em (5), obtemos:

$$\frac{r_1V_1}{k} + \frac{r_2V_2}{k} = \frac{r_1V_f}{k} + \frac{r_2V_f}{k} \Rightarrow V_f = \frac{r_1V_1 + r_2V_2}{r_1 + r_2}$$

$$V_f = \frac{0{,}5 \cdot 10 + 1 \cdot 1{,}5}{1{,}5} = \frac{20}{1{,}5} = 13{,}3\ V$$

Gabarito: D

---

6. (ITA-1986)

Duas esferas metálicas, A e B, de raios R e $3R$, respectivamente, são postas em contato. Inicialmente A possui carga elétrica positiva $+2Q$ e B, carga $-Q$. Após atingir o equilíbrio eletrostático, as novas cargas de A e B passam a ser, respectivamente:

a) $Q/2, Q/2.$

b) $3Q/4, Q/4.$

c) $3Q/2, Q/2.$

d) $Q/4, 3Q/4.$

e) $4Q/3\ e\ -Q/3.$

Comentários:

Quando as duas são postas em contato a carga se distribui de modo que as duas esferas possuam o mesmo potencial:

$$V_f = \frac{kQ'_A}{r_A} = \frac{kQ'_B}{r_B} \Rightarrow Q'_B = \frac{r_B}{r_A}Q'_A = 3Q'_A \quad (eq. 1)$$

A carga total do sistema se mantém constante:

$$Q_{tot} = 2Q + (-Q) = Q'_A + Q'_B \quad (eq. 2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$Q = Q'_A + 3Q'_A \Rightarrow Q'_A = \frac{Q}{4}$$

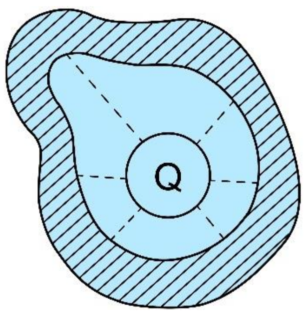
$$\therefore Q'_B = 3Q'_A = \frac{3Q}{4}$$

Gabarito: D

---

7. (ITA-1987)

A figura representa um condutor oco e um condutor de forma esférica dentro da cavidade do primeiro, ambos em equilíbrio eletrostático. Sabe-se que o condutor interno tem carga $+Q$.



Pode-se afirmar que:

a) Não há campo elétrico dentro da cavidade.

b) As linhas de força dentro da cavidade são retas radiais em relação à esfera, como na figura.

c) A carga da superfície interna do condutor oco é $-Q$ e as linhas de força são perpendiculares a essa superfície.

d) A carga da superfície interna do condutor oco é $-Q$ e as linhas de força são tangenciais a essa superfície.

e) Não haverá diferença de potencial entre os dois condutores se a carga do condutor oco também for igual a Q.

Comentários:

a) **Incorreto**. Usando a Lei de Gauss:

$$\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0}$$

Usando qualquer gaussiana Ω cobrindo Q e contida na cavidade do condutor oco, chegamos em:

$$\sum_{\Omega(\mathrm{Q})} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} > 0$$

$\vec{E} \neq 0$

b) **Incorreto**. As linhas de força devem chegar perpendiculares à superfície interna do condutor.

c) **Correto**. O campo dentro do condutor em equilíbrio é nulo, assim, usando a Lei de Gauss com qualquer gaussiana Ω que esteja inteiramente no seu interior resulta em:

$$\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0}$$

$$0 = +Q + q_{condutor,int}$$

$$q_{condutor,int} = -Q$$

d) **Incorreto**. As linhas são perpendiculares.

e) **Incorreto**. Note que o argumento usado em a) independe da carga total do condutor, logo haverá campo entre a carga no centro e a superfície interna do condutor, o que garante uma diferença de potencial não nula.

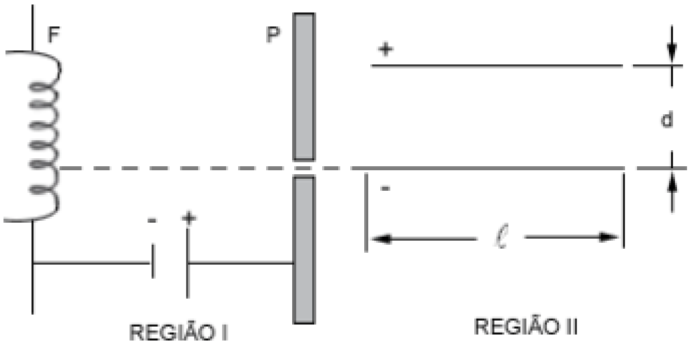
Gabarito: C

---

8. (ITA-1987)

Numa experiência de laboratório, elétrons são emitidos por um filamento metálico F, com velocidade inicial praticamente nula. Eles são acelerados através da região I por uma diferença de potencial de $25 \times 10^3\ V$, aplicada entre F e a placa perfurada P. Eles emergem do furo da placa com velocidade horizontal e penetram na região II, onde são obrigados a atravessar o campo elétrico uniforme de um capacitor cujas placas têm comprimento $l = 5{,}0\ cm$ e estão separadas por uma distância $d = 0{,}50\ cm$, conforme a figura. Qual é o máximo valor da tensão

V_2 entre as placas do capacitor que ainda permite que algum elétron atinja a região III onde não há campo elétrico?



Comentários:

Note que estamos tratando de um movimento análogo a um lançamento horizontal, com campo gravitacional a_y e eixo y invertido. A equação da parábola para tal movimento é dada por:

$$y(x) = \frac{g_{ap}x^2}{2v_x^2} \Rightarrow d = \frac{\left(\frac{V_{II}q}{md}\right)l^2}{2\left(\frac{2V_I q}{m}\right)}$$

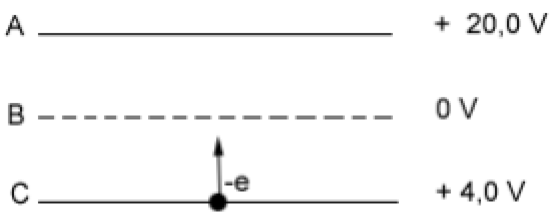
$$V_{II} = 4V_I\left(\frac{d}{l}\right)^2 = 4 \cdot 25 \cdot 10^3 \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 1000\ V$$

Gabarito: $\boldsymbol{V_2 = 1000\ V}$

---

9. (ITA-1988)

A, B e C são superfícies que se acham, respectivamente, a potenciais +20V, 0V e + 4,0V. Um elétron é projetado a partir da superfície C no sentido ascendente com uma energia cinética inicial de 9,0 eV. (Um elétron-volt é a energia adquirida por um elétron quando submetido a uma diferença de potencial de um volt). A superfície B é porosa e permite a passagem de elétrons. Podemos afirmar que:



a) Na região entre C e B o elétron será acelerado pelo campo elétrico até atingir a superfície B com energia cinética de 33,0 eV. Uma vez na região entre B e A, será desacelerado, atingindo a superfície A com energia cinética de 13,0 eV.

b) Entre as placas C e B o elétron será acelerado atingindo a placa B com energia cinética igual a 13,0 eV, mas não atinge a placa A.

c) Entre C e B o elétron será desacelerado pelo campo elétrico aí existente e não atingirá a superfície B.

d) Na região entre C e B o elétron será desacelerado, mas atingirá a superfície B com energia cinética de 5,0 eV. Ao atravessar B, uma vez na região entre B e A será acelerado, até atingir a superfície A com uma energia cinética de 25,0 eV.

e) Entre as placas C e B o elétron será desacelerado, atingindo a superfície B com energia cinética de 5,0 eV. Uma vez na região entre B e A, será desacelerado, até atingir a superfície A com energia cinética de 15,0 eV.

Comentários:

Utilizando o teorema da energia cinética, podemos determinar a energia cinética na superfície B:

$$\left(\tau_{F_{ele}}\right)_{C\to B} = (-e).(V_C - V_B) = \Delta E_c = (E_c)_B - (E_c)_C$$

$$(-e)(4-0) = (E_c)_B - 9eV$$

$$(E_c)_B = 5\ eV$$

Novamente, pelo teorema da energia cinética, temos que a energia cinética com que o elétron chegará na placa é de:

$$\left(\tau_{F_{ele}}\right)_{B\to A} = (-e).(V_B - V_A) = \Delta E_c = (E_c)_A - (E_c)_B$$

$$(-e).(0-20) = (E_c)_A - 5eV$$

$$\boxed{(E_c)_A = 25\ eV}$$

Gabarito: D.

10.

Um fio condutor homogêneo de $25\ cm$ de comprimento foi conectado entre os terminais de uma bateria de $6V$. A $5\ cm$ do pólo positivo, faz-se uma marca P sobre este fio e a $15\ cm$, outra marca Q.

Então, a intensidade E do campo elétrico dentro deste fio (em volt/metro) e a diferença de potencial $\Delta V = V_P - V_Q$ (em volts) existente entre os pontos P e Q dentro do fio serão dados, respectivamente, por:

a) 6,0 e 0,6.

b) 24 e 2,4.

c) 24 e 2,4.

d) 6,0 e 6,0.

e) 24 e 6,0.

Comentários:

O campo elétrico dentro do fio será perpendicular à sua secção transversal, já que a presença de uma componente radial levaria ao acúmulo de cargas. Como não há campo na direção da secção transversal, o potencial elétrico deve ser o mesmo em toda a sua extensão.

Desse modo, temos um campo uniforme dentro do fio, nos permitindo escrever:

$$\Delta V = Ed$$

$$\Delta V_{bateria} = El_{fio} \quad (eq.1)$$

$$\Delta V_{PQ} = El_{PQ} \quad (eq.2)$$

Dividindo (2) por (1), obtemos:

$$\Delta V_{PQ} = \Delta V_{bateria} \frac{l_{PQ}}{l_{fio}} \Rightarrow \Delta V_{PQ} = 6 \cdot \frac{10}{25} = 2{,}4\ V$$

De (1), temos:

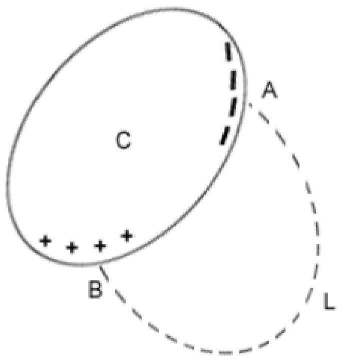
$$E = \frac{6}{0{,}25} = 24\ V/m$$

Gabarito: C

---

11. (ITA-1988)

Na figura, C é um condutor em equilíbrio eletrostático, que se encontra próximo de outros objetos eletricamente carregados. Considere a curva tracejada L que une os pontos A e B da superfície do condutor.



Podemos afirmar que:

a) A curva L não pode representar uma linha de força do campo elétrico.

b) A curva L pode representar uma linha de força, sendo que o ponto B está a um potencial mais baixo que o ponto A.

c) A curva L pode representar uma linha de força, sendo que o ponto B está a um potencial mais alto que o ponto A.

d) A curva L pode representar uma linha de força, desde que L seja ortogonal à superfície do condutor nos pontos A e B.

e) A curva L pode representar uma linha de força, desde que a carga total do condutor seja nula.

Comentários:

Um condutor em equilíbrio eletrostático apresenta o mesmo potencial em toda sua extensão. Assuma, por absurdo, que existe uma linha de força ligando dois pontos, A e B, desse condutor. Considere uma região bem pequena dessa linha, de comprimento Δl, de modo que podemos considerar a direção do campo constante nesse trecho:

$$\Delta V = -E\,\Delta l$$

A linha como um todo pode ser considerar uma some de trechos, logo:

$$\sum \Delta V = -E \sum \Delta l = -El \neq 0$$

O que é um absurdo, pois não existe diferença de potencial entre os pontos do condutor.

Gabarito: A

---

12. (ITA-1990)

Um condutor esférico oco, isolado, de raio R, tem no seu interior uma pequena esfera de raio r < R. O sistema está inicialmente neutro. Eletriza-se a pequena esfera com carga positiva. Uma vez atingido o equilíbrio eletrostático, pode-se afirmar que:

a) A carga elétrica na superfície externa do condutor é nula.

b) A carga elétrica na superfície interna do condutor é nula.

c) O campo elétrico no interior do condutor é nulo.

d) O campo elétrico no exterior do condutor é nulo.

e) Todas as afirmativas acima estão erradas.

Comentários:

a) **Incorreto**. Veja b).

b) **Incorreto**. O campo dentro do condutor em equilíbrio é nulo, assim, usando a Lei de Gauss com qualquer gaussiana Ω que esteja inteiramente no seu interior resulta em:

$$\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0}$$

$$0 = +Q + q_{condutor,int}$$

$$q_{condutor,int} = -Q$$

Como o condutor externo é neutro, temos:

$$q_{condutor,int} + q_{condutor,ext} = 0$$

$$q_{condutor,ext} = Q$$

Logo, não é nula a carga na superfície interna, nem na superfície externa, como mostrada a indução, utilizando a Lei de Gauss.

c) **Incorreto**. Usando a Lei de Gauss:

$$\sum\nolimits_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0}$$

Usando qualquer gaussiana Ω cobrindo Q e contida na cavidade do condutor oco, chegamos em:

$$\sum\nolimits_{\Omega(\mathrm{Q})} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} > 0$$

$$\vec{E} \neq 0$$

Notamos que na região entre a casca esférica e a esfera menor, existe um campo elétrico não-nulo. O ITA fez uma pegadinha nesse item.

d) **Incorreto**. Usando a Lei de Gauss:

$$\sum\nolimits_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = q_{interna}$$

Usando qualquer gaussiana Ω cobrindo o condutor oco, chegamos em:

$$\sum\nolimits_{\Omega(\mathrm{Q})} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = Q + q_{condutor,int} + q_{condutor,ext} = Q > 0$$

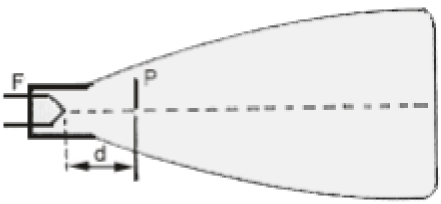
$$\vec{E} \neq 0$$

Gabarito: E

---

13. (ITA-1990)

Num tubo de raios catódicos tem-se um filamento F que libera elétrons quando aquecido, e uma placa aceleradora P que é mantida a um potencial mais alto que o filamento. O filamento fica a uma distância d da placa. A placa tem, ainda, um orifício que permite a passagem dos elétrons que vão se chocar com uma tela que fica fluorescente quando os mesmos a atingem.



Nestas condições:

a) Se aumentarmos a distância d entre o filamento e a placa, a energia cinética com que os elétrons chegam à placa aumenta.

b) O aumento da distância d faz com que a energia cinética dos elétrons diminua.

c) A energia cinética dos elétrons não depende da distância entre o filamento e a placa, mas só da diferença de potencial U entre o filamento e a placa aceleradora.

d) A energia cinética dos elétrons só depende da temperatura do filamento.

e) Nenhuma das alternativas anteriores é verdadeira.

Comentários:

Como a única força que atua nos elétrons é a força elétrica e ela é conservativa, podemos usar o teorema da energia cinética nesse caso:

$$\tau_{F_{ele}} = \Delta E_c$$

Onde o trabalho da força elétrica pode ser dado por:

$$\tau_{F_{ele}} = q(V_F - V_P)$$

Portanto:

$$q(V_F - V_P) = \frac{1}{2}mv_{final}^2 - \frac{1}{2}mv_{inicial}^2$$

O enunciado deixa claro que o potencial da placa P é maior que o potencial do filamento, como esperado, os elétrons (cargas negativas) procuram, espontaneamente, potenciais maiores.

a) **Incorreto**. Como vimos, a velocidade final dos elétrons ao chegar na placa não depende da distância d.

b) **Incorreto**. Novamente, a distância d não interfere na variação da energia cinética dos elétrons.

c) **Correto**. Como mostramos a variação da energia cinética dos elétrons é função exclusiva da diferença de potencial das placas:

$$\frac{1}{2}mv_{final}^2 - \frac{1}{2}mv_{inicial}^2 = q(V_F - V_P)$$

d) **Incorreto**. Conforme vimos no item c.

e) **Incorreto**. O item c está correto.

Gabarito: C

---

14. (ITA-1993)

Entre as armaduras de um capacitor plano com placas horizontais, existe uma diferença de potencial V. A separação entre as armaduras é d. Coloca-se uma pequena carga $Q > 0$, de massa m entre as armaduras e esta fica em equilíbrio. A aceleração da gravidade é g. Qual é o valor da carga Q?

a) $Q = mgd^{-1}/V$.

b) $Q = Vd/m$.

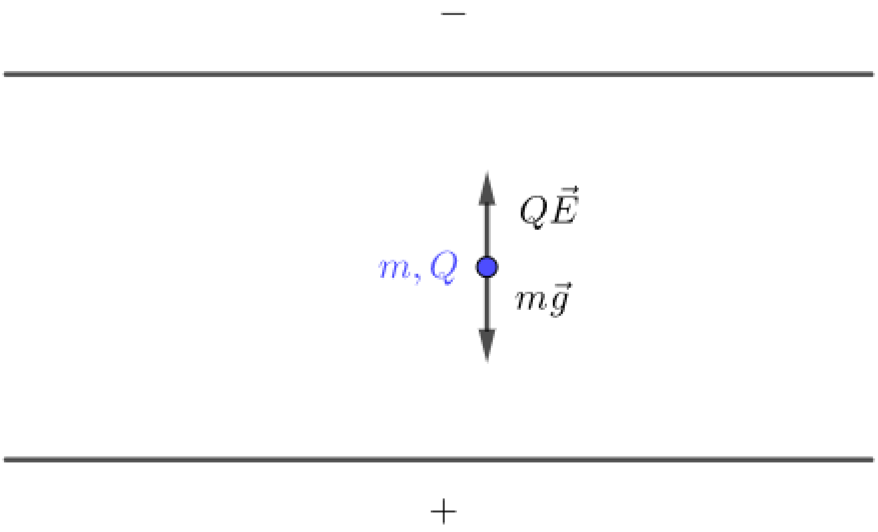
c) $Q = mgd/V$.

d) $Q = Vgd/m$.

e) $Q = gd/Vm$.

Comentários:

Nessa configuração temos um campo uniforme e perpendicular às placas do capacitor. Equilibrando as forças agindo na carga:



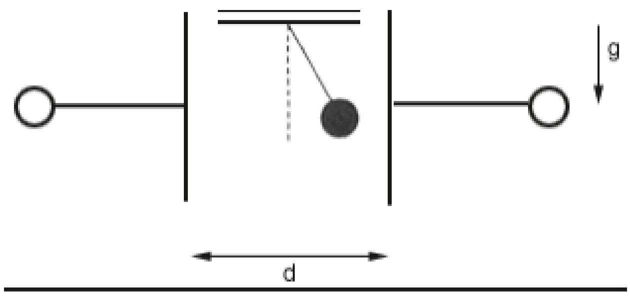
$$F_{ele} = Peso \Rightarrow Eq = mg \Rightarrow \boxed{Q = \frac{mgd}{V}}$$

Gabarito: C

---

15. (ITA-2001)

Uma esfera de massa m e carga q está suspensa por um fio frágil e inextensível, feito de um material eletricamente isolante. A esfera se encontra entre as placas paralelas de um capacitor plano, como mostra a figura. A distância entre as placas é d, a diferença de potencial entre as mesmas é V e o esforço máximo que o fio pode suportar é igual ao quádruplo do peso da esfera. Para que a esfera permaneça imóvel, em equilíbrio estável, é necessário que:



a) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 15\, mg$

b) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 4\, (mg)^2$

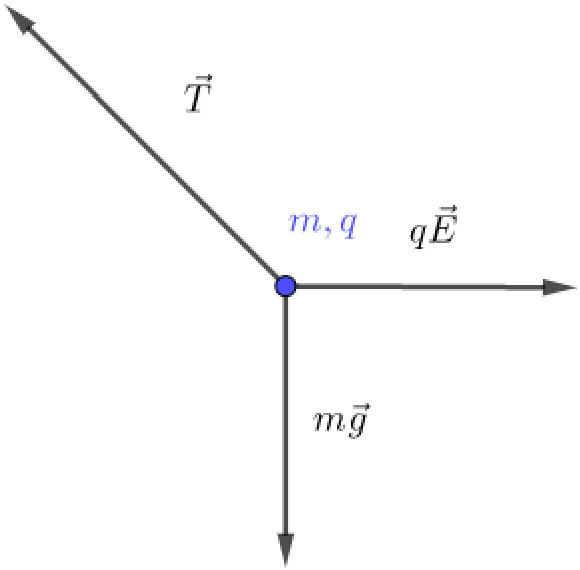
c) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 15\, (mg)^2$

d) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \geq 15\, mg$

e) $\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 16\,(mg)^2$

Comentários:

Considere o esquema de forças agindo sobre a carga:



Pelo equilíbrio, temos:

$$T^2 = (mg)^2 + (qE)^2$$

Lembrando que esforço máximo é tal que $T \leq 4mg$, então:

$$(qE)^2 \leq 15(mg)^2$$

$$\left(\frac{qV}{d}\right)^2 \leq 15(mg)^2$$

Gabarito: C

---

16. (ITA-2002)

Uma esfera metálica isolada, de raio $R_1 = 10{,}0\ cm$ é carregada no vácuo até atingir o potencial $U = 9{,}0V$. Em seguida, ela é posta em contato com outra esfera metálica isolada, de raio $R_2 = 5{,}0\ cm$, inicialmente neutra. Após atingir o equilíbrio eletrostático, qual das alternativas melhor descreve a situação física? É dado que $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9{,}0 \times 10^9\ Nm^2/C^2$.

a) A esfera maior terá uma carga de 0,66. 10-10 C.

b) A esfera maior terá um potencial de 4,5V.

c) A esfera menor terá uma carga de 0,66. 10-10 C.

d) A esfera menor terá um potencial de 4,5V.

e) A carga total é igualmente dividida entre as duas esferas.

Comentários:

Calculando a carga na primeira esfera:

$$V_1 = \frac{kQ_1}{R_1} \Rightarrow Q_1 = \frac{R_1 V_1}{k} \quad (eq.1)(R_1 = 10\ cm)$$

Quando as duas são ligadas a carga se distribui de modo que as duas esferas possuam o mesmo potencial:

$$V_f = \frac{kQ_1'}{R_1} = \frac{kQ_2'}{R_2} \Rightarrow Q_1' = \frac{R_1 V_f}{k} \quad (eq.2) \text{ e } Q_2' = \frac{R_2 V_f}{k} \quad (eq.3)$$

Pelo Princípio da Conservação das Cargas, temos:

$$Q = Q_1 = Q_1' + Q_2' \quad (eq.4)$$

Substituindo (1), (2), (3) em (4), obtemos:

$$\frac{R_1 U}{k} = \frac{R_1 V_f}{k} + \frac{R_2 V_f}{k} \Rightarrow V_f = \frac{R_1 U}{R_1 + R_2} \Rightarrow V_f = \frac{2}{3} 9 = 6\ V \quad (eq.5)$$

Substituindo (5) em (2) e (3), obtemos:

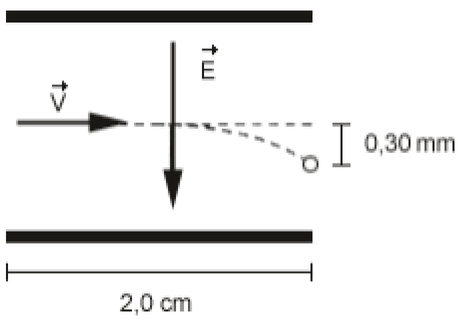
$$Q_1 = 0{,}66 \cdot 10^{-10}\ C \quad (gabarito)$$
$$Q_2 = 0{,}33 \cdot 10^{-10}\ C$$

Gabarito: A

---

17. (ITA-2005)

Em uma impressora a jato de tinta, gotas de certo tamanho ejetadas de um pulverizador em movimento, passam por uma unidade eletrostática onde perdem alguns elétrons, adquirindo uma carga q, e, a seguir, deslocam-se no espaço entre placas planas paralelas eletricamente carregadas, pouco antes da impressão. Considere gotas de raio $10\ \mu m$ lançadas com velocidade de módulo $v = 20\ m/s$ entre as placas de comprimento igual a $2{,}0\ cm$, no interior das quais existe um campo elétrico uniforme de módulo $E = 8{,}0 \times 10^4\ N/C$, como mostra a figura.



Considerando que a densidade da gota seja $1000\ kg/m^3$ e sabendo-se que a mesma sofre um desvio de $0{,}30\ mm$ ao atingir o final do percurso, o módulo de sua carga elétrica é de:

a) 2,0. 10-14 C.

b) 3,1. 10-14 C.

c) 6,3. 10-14 C.

d) 3,1. 10-11 C.

e) 1,1. 10-10 C.

Comentário:

Aplicando $F = ma$ à gota, temos:

$$a_y = \frac{Eq}{m} \quad (1)(para\ baixo)$$

O movimento é análogo a um lançamento horizontal com campo gravitacional igual a (1). A equação da parábola para lançamentos horizontais é dada por:

$$y(x) = y_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2} \Rightarrow \Delta y = -\frac{g_{apa}x^2}{2v^2} \Rightarrow h_{final} = \frac{\left(\frac{Eq}{m}\right) l_{placa}^2}{2v^2}$$

$$q = \frac{2h_{final}v^2 m}{El_{placa}^2} = \frac{2h_{final}v^2(\rho_{gota} \cdot \frac{4}{3}\pi r_{gota}^3)}{El_{placa}^2}$$

$$\boxed{q = \pi \cdot 10^{-14}\ C}$$

Gabarito: B

---

18. (ITA-2009)

Uma carga q distribui-se uniformemente na superfície de uma esfera condutora, isolada, de raio R. Assinale a opção que apresenta a magnitude do campo elétrico e o potencial elétrico num ponto situado a uma distância $r = R/3$ do centro da esfera.

a) $E = 0\ V/m\ e\ U = 0\ V$

b) $E = 0\ V/m\ e\ U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R}$

c) $E = 0\ V/m\ e\ U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{3q}{R}$

d) $E = 0\ V/m\ e\ U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qr}{R^2}$

e) $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{qr}{R^3}\ e\ U = 0\ V$

Comentários:

Usando a Lei de Gauss com qualquer gaussiana esférica de raio menor que R, temos:

$$\sum\nolimits_{\Omega(\mathrm{r})} \vec{E} \cdot \Delta\vec{s} = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0} = 0$$

Pela simetria do problema teremos um campo radial, que é constante em variações angulares, ou seja, $E = E(r)$. Logo o produto escalar acima se torna:

$$\sum_{\Omega(\mathrm{r})} E(r) \cdot \Delta s = E(r) \cdot S(\Omega(r)) = 0$$

$$E(r) = 0, \forall r < R$$

Como não há linhas de campo entre um ponto de raio r e o centro do condutor, o potencial desses é o mesmo. Calculando o potencial no centro do condutor esférico: (todas as cargas têm a mesma distância ao centro)

$$V_{cond} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = V(r)$$

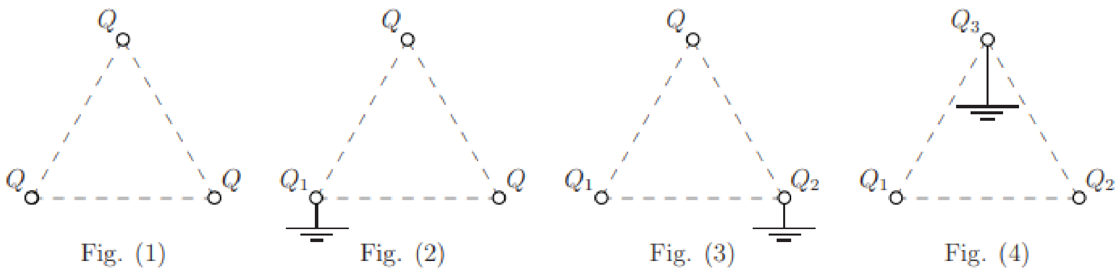
Resultado já esperado, uma vez que o campo no interior de um condutor maciço é constante e o campo elétrico é nulo.

Gabarito: B

---

19. (ITA-2009)

Três esferas condutoras, de raio a e carga Q, ocupam os vértices de um triângulo equilátero de lado $b >> a$, conforme mostra a figura (1). Considere as figuras (2), (3) e (4), em que, respectivamente, cada uma das esferas se liga e desliga da Terra, uma de cada vez. Determine, nas situações (2), (3) e (4), a carga das esferas Q_1, Q_2 e Q_3, respectivamente, em função de a, b e Q.



Comentários:

Em (2) o condutor ligado à Terra deve ter potencial nulo, logo:

$$V_1 = \frac{kQ_1}{a} + \frac{kQ}{b} + \frac{kQ}{b} = 0 \Rightarrow Q_1 = \frac{2aQ}{b}$$

Em (3) o condutor ligado à Terra deve ter potencial nulo, assim:

$$V_2 = \frac{kQ_2}{a} + \frac{kQ_1}{b} + \frac{kQ}{b} = 0 \Rightarrow Q_2 = -\frac{aQ}{b}\left(1 - \frac{2a}{b}\right)$$

Do mesmo modo, em (4) o condutor ligado à Terra deve ter potencial nulo:

$$V_3 = \frac{kQ_3}{a} + \frac{kQ_2}{b} + \frac{kQ_1}{b} = 0 \Rightarrow Q_3 = \frac{Qa^2}{b^2}\left(3 - \frac{2a}{b}\right)$$

Gabarito: $Q_1 = -\frac{2Qa}{b}$, $Q_2 = \frac{Q \cdot a}{b}\left(\frac{2a}{b} - 1\right)$ e $Q_3 = \frac{Qa^2}{b^2}\left(3 - \frac{2a}{b}\right)$

20. (ITA-2010)

Considere as cargas elétricas $q1 = 1\ C$, situada em $x = -\ 2m$, e $q2 = -\ 2\ C$, situada em $x = -\ 8\ m$. Então, o lugar geométrico dos pontos de potencial nulo é

b) uma esfera que corta o eixo x nos pontos $x = -\ 4\ m$ e $x = 4m$.

b) uma esfera que corta o eixo x nos pontos $x = -\ 16\ m$ e $x = 16\ m$.

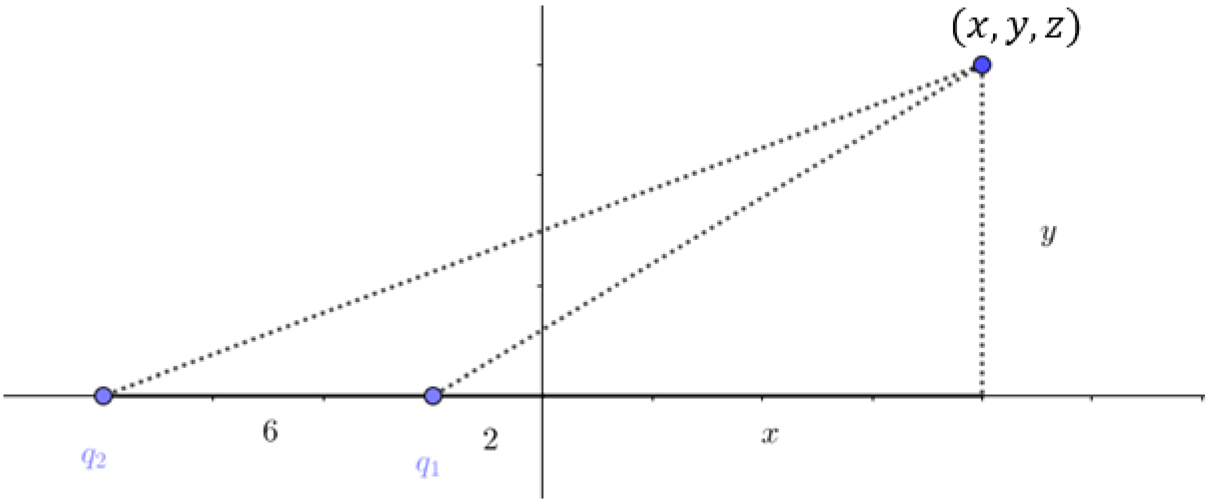
c) um elipsoide que corta o eixo x nos pontos $x = -\ 4\ m$ e $x = 16\ m$.

d) um hiperboloide que corta o eixo x no ponto $x = -\ 4\ m$.

e) um plano perpendicular ao eixo x que o corta no ponto $x = -\ 4\ m$.

Comentários:

Calculando o potencial de um ponto arbitrário (x, y, z) (considere o eixo z saindo do plano da folha):



$$V(x,y) = \frac{kq_1}{\sqrt{(2+x)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{kq_2}{\sqrt{(8+x)^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

$$\sqrt{(8+x)^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{(2+x)^2 + y^2 + z^2}$$

$$(8+x)^2 + y^2 + z^2 = 4[(2+x)^2 + y^2 + z^2]$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 48$$

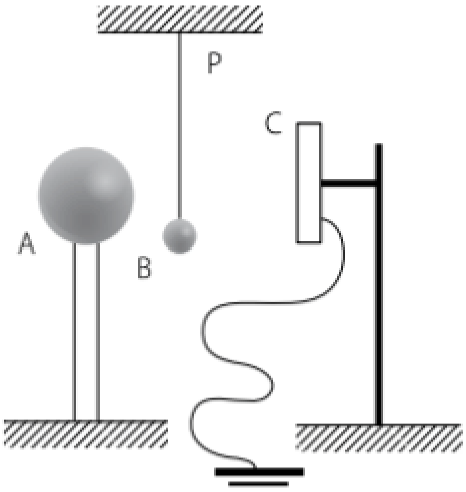
$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 16}$$

A equação representa uma esfera centrada em $(0,0,0)$ de raio 4, cortando o eixo x em 4 e -4.

Gabarito: A

21. (IME – 79)

A figura mostra, esquematicamente, uma campainha eletrostática A e B são condutores esféricos, com diâmetros de $20cm$ e $4\ cm$, respectivamente. B é suspenso de P por um fio isolante. A placa metálica C é ligada à Terra. A esfera A, carregada inicialmente a um potencial de $50kv$, atrai B que, após o contato, é repelida e se choca com a placa C, descarregando-se. A operação se repete enquanto o potencial de A for superior a $25\ kV$. Determine o número de vezes que B baterá em A.



Comentários:

Calculando a carga inicial de A:

$$V_A = \frac{kQ_A}{R_A} \quad (eq.1) \Rightarrow Q_A = \frac{V_A R_A}{k} \quad (eq.2)$$

Quando A e B entram em contato, seus potenciais se igualam:

$$V = \frac{kQ'_A}{R_A} = \frac{kQ'_B}{R_B} \quad (eq.3) \Rightarrow \frac{Q'_A}{R_A} = \frac{Q'_B}{R_B} \quad (eq.4)$$

Por conservação de carga, temos:

$$Q'_A + Q'_B = Q_A$$

Usando (4):

$$Q'_A + \frac{R_B}{R_A}Q'_A = Q_A \Rightarrow Q'_A = \left(\frac{R_A}{R_A + R_B}\right)Q_A$$

Note que a carga Q_A pode ser trata como a carga inicial antes de qualquer colisão (não necessariamente a primeira) e Q'_A a carga após a colisão, logo cada colisão multiplica a carga de A pelo fator mostrado. Assim, após n colisões a carga de A será:

$$Q_A(n) = \left(\frac{R_A}{R_A + R_B}\right)^n Q_A$$

Queremos a colisão que deixará A com um potencial menor que $25\ kV$:

$$V < 25\ kV$$

$$\frac{kQ_A(n)}{R_A} < 25$$

$$\frac{kQ_A}{R_A}\left(\frac{R_A}{R_A + R_B}\right)^n < 25$$

Por (1), temos:

$$V_A\left(\frac{R_A}{R_A + R_B}\right)^n < 25$$

$$\left(\frac{20}{24}\right)^n < \frac{1}{2}$$

$$n \geq 4$$

Após a primeira colisão que satisfaz a desigualdade não haverá outras, logo:

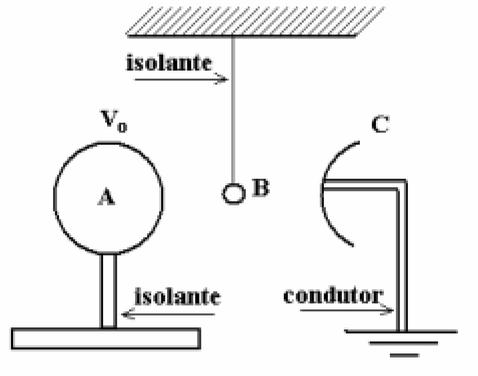
$$\boxed{n = 4\ colisões}$$

Gabarito: 4 vezes

---

22. (ITA – 2008)

Considere um condutor esférico A de $20cm$ de diâmetro colocado sobre um pedestal fixo e isolante. Uma esfera condutora B de $0{,}5mm$ de diâmetro, do mesmo material da esfera A, é suspensa por um fio fixo e isolante. Em posição oposta à esfera A, é colocada uma campainha C ligada à terra, conforme mostra a figura. O condutor A é, então, carregado a um potencial eletrostático V_0, de forma a atrair a esfera B. As duas esferas entram em contacto devido à indução eletrostática e, após a transferência de carga, a esfera B é repelida, chocando-se com a campainha C, onde a carga adquirida é escoada para a terra. Após 20 contatos com a campainha, verifica-se que o potencial da esfera A é de $10\ 000\ V$. Determine o potencial inicial da esfera A. Considere $(1 + x)^n \cong 1 + nx$ se $|x| < 1$



Comentários:

Calculando a carga inicial de A:

$$V_0 = \frac{kQ_A}{R_A} \quad (eq.1)$$

$$Q_A = \frac{V_0 R_A}{k} \quad (eq.2)$$

Quando A e B entram em contato, seus potenciais se igualam:

$$V = \frac{kQ'_A}{R_A} = \frac{kQ'_B}{R_B} \quad (eq.3) \Rightarrow \frac{Q'_A}{R_A} = \frac{Q'_B}{R_B} \quad (eq.4)$$

Por conservação de carga, temos:

$$Q'_A + Q'_B = Q_A$$

Usando (4):

$$Q'_A + \frac{R_B}{R_A} Q'_A = Q_A \Rightarrow Q'_A = \left(\frac{R_A}{R_A + R_B}\right) Q_A$$

Note que a carga Q_A pode ser trata como a carga inicial antes de qualquer colisão (não necessariamente a primeira) e Q'_A a carga após a colisão, logo cada colisão multiplica a carga de A pelo fator mostrado. Assim, após n colisões a carga de A será:

$$Q_A(n) = \left(\frac{R_A}{R_A + R_B}\right)^n Q_A$$

Assim, o potencial após a enésima colisão é dado por:

$$V_A(n) = \frac{kQ_A(n)}{R_A} = \frac{kQ_A}{R_A}\left(\frac{R_A}{R_A + R_B}\right)^n$$

Usando (1), temos:

$$V_A(n) = V_0 \left(\frac{R_A}{R_A + R_B}\right)^n \Rightarrow V_0 = V_A(n)\left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right)^n$$

Como $R_B \ll R_A$, podemos fazer a aproximação fornecida no enunciado: ($n = 20$)

$$V_0 = 10000 \left(1 + \frac{20 \cdot 0{,}5}{200}\right) = 10500\, V$$

Gabarito: $V_0 = 10500\, V$

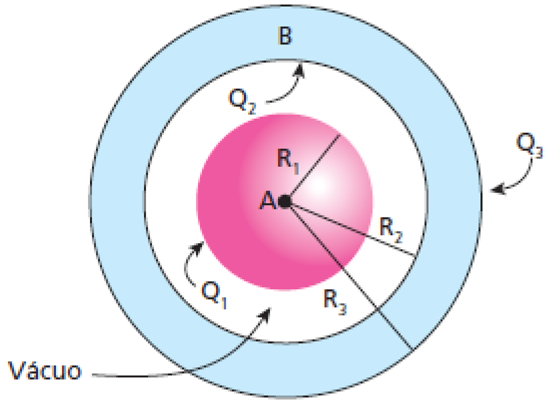
---

23. (FEI-SP)

Duas esferas condutoras concêntricas A e B possuem raios $R_1 = 10\, cm$, $R_2 = 20\, cm$ e $R_3 = 25\, cm$ e estão eletrizadas de forma que a diferença de potencial entre elas é $V_A - V_B = 9\, kV$ e a carga total da esfera B é de $0{,}3\, \mu C$. Determine as cargas Q_1, Q_2 e Q_3 existentes nas superfícies dessas esferas.

Dado: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9\, Nm^2C^{-2}$.

OBS: o meio entre as esferas é o vácuo.



Comentários:

Usaremos o fato de o potencial causado pela carga na superfície de um condutor ser constante no seu interior e igual a:

$$V(r) = \frac{kQ}{R}, \forall r < R$$

No exterior temos:

$$V(r) = \frac{kQ}{r}, \forall r \geq R$$

Por indução temos:

$$Q_2 = -Q_1 \quad (eq. 1)$$

Pela carga total de B, temos:

$$Q_3 + Q_2 = 3 \cdot 10^6\ C$$

$$Q_3 - Q_1 = 3 \cdot 10^6\ C \quad (eq. 2)$$

Calculando a ddp entre A e B, obtemos:

$$V_A - V_B = \left(\frac{kQ_3}{R_3} + \frac{kQ_2}{R_2} + \frac{kQ_1}{R_1}\right) - \left(\frac{kQ_3}{R_3} + \frac{kQ_2}{R_2} + \frac{kQ_1}{R_2}\right)$$

$$V_A - V_B = \left(\frac{kQ_3}{R_3} - \frac{kQ_1}{R_2} + \frac{kQ_1}{R_1}\right) - \left(\frac{kQ_3}{R_3} - \frac{kQ_1}{R_2} + \frac{kQ_1}{R_2}\right)$$

$$V_A - V_B = kQ_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$9 \cdot 10^3 = 9 \cdot 10^9 Q_1 \left(\frac{1}{0.1} - \frac{1}{0.2}\right)$$

$$Q_1 = 0{,}2\ \mu C$$

Substituindo o resultado acima em (1) e (2), obtemos:

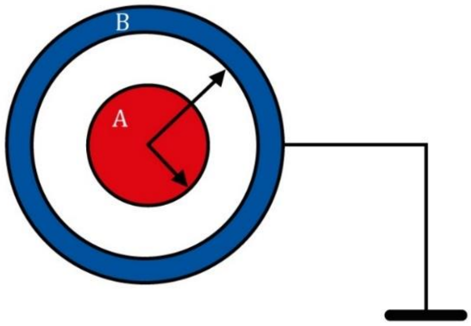
$$Q_2 = -0{,}2\ \mu C$$

$$Q_3 = 0{,}5\ \mu C$$

Gabarito: $\boldsymbol{Q_1 = +0,2\mu C}$, $\boldsymbol{Q_2 = -0,2\mu C}$ **e** $\boldsymbol{Q_3 = +0,5\mu C}$

24.

Considere dois condutores esféricos, sendo o menor maciço de raio R_A e o outro B oco de raio interno R_1 e raio externo R_2. O condutor maciço está eletrizado com carga q_A, enquanto B está ligado à Terra, como mostra a figura:



Calcule:

a) O potencial na esfera A.

b) O potencial na esfera B.

c) O potencial num ponto P entre A e B.

Faça o esboço gráfico do potencial em função da distância do centro das esferas.

Comentários:

a)

Como bem sabemos, a carga da esfera A induzira na superfície interna da esfera B uma carga de mesma intensidade e sinal contrário. Por outro lado, a superfície externa ficará com falta de elétrons, deixando-a com carga positiva, mas como a casca esférica B está conectada à Terra, elétrons fluíram para neutralizar essas cargas positiva e, dessa forma, a superfície externa ficará com carga nula.

Dado que a esfera A é condutora e nos condutores o potencial é constante, podemos determinar o seu potencial pela expressão:

$$V_A = K\frac{q_A}{R_A} + K\frac{(-q_A)}{R_1}$$

$$\boxed{V_A = Kq_A\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

b)

Devido ao fato da esfera B estar conectada à Terra, temos que seu potencial será nulo.

c)

Para um ponto P situado na região entre a esfera A e a casca esférica B, temos que o potencial é dado pela soma dos potenciais:

$$V_P = K\frac{q_A}{r} - K\frac{q_A}{R_1}$$

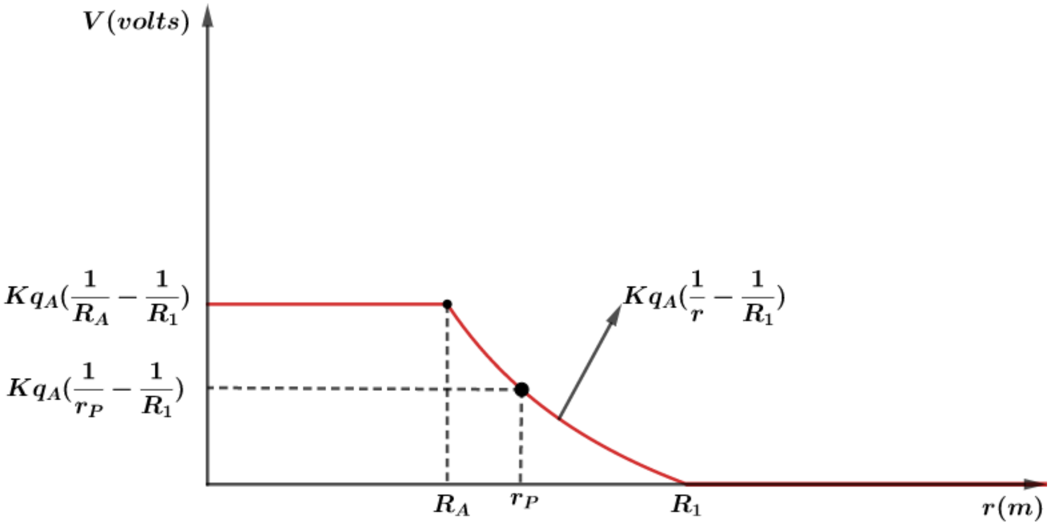
$$\boxed{V_P = Kq_A\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{R_1}\right)}$$

Para pontos externos, temos que o potencial será nulo, pois:

$$V = K\frac{q_A}{r} - K\frac{q_A}{r}$$

$$\boxed{V = 0}$$

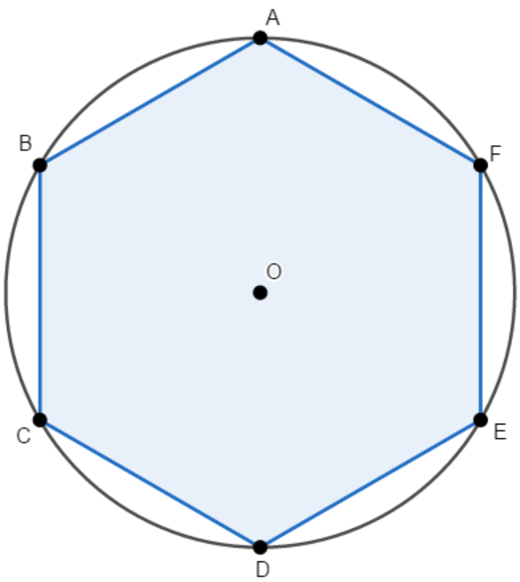
Portanto o gráfico é dado por:



Gabarito: a) $\boldsymbol{V_A = Kq_A\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_1}\right)}$ **b) zero c)** $\boldsymbol{V_P = Kq_A\left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{R_1}\right)}$

25.

7 cargas positivas Q encontram-se no infinito. As cargas têm módulo $Q = 40\mu C$ e o hexágono abaixo tem lado 12 cm.



Pede-se:

a) a energia gasta para trazer 6 dessas cargas do infinito e dispô-las nos vértices do hexágono.

b) a energia gasta para, em seguida, trazer a sétima carga do infinito e colocá-la no centro O do hexágono.

c) a energia liberada se essa "molécula" for totalmente destruída e as cargas voltarem para o infinito.
Considere: $K = 9{,}0 \times 10^9\ Nm^2/C^2$ e $\sqrt{3} \cong 1{,}5$.

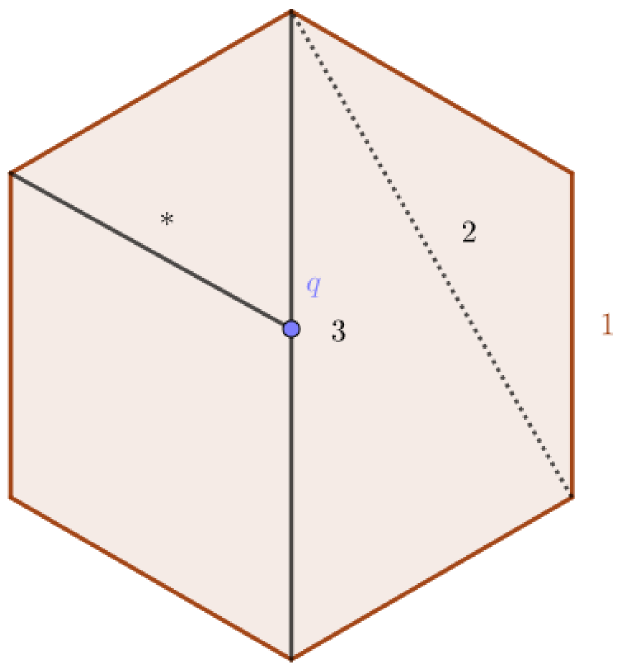
Comentários:

a)

A energia gasta deve ser a diferença de energia entre o sistema inicial e final:

$$E_{gasta} = U_{final} - U_0$$

A energia final deve levar em consideração a interação de cada par de cargas contidas no hexágono:



Vamos separar a energia potencial elétrica em três grupos de acordo com a distância:

Grupo 1): energia potencial para cargas que estão a distância de l:

$$U_1 = \frac{kq^2}{l}$$

Grupo 2): energia potencial para cargas que estão a distância de $l\sqrt{3}$:

$$U_2 = \frac{kq^2}{l\sqrt{3}}$$

Grupo 3): energia potencial para cargas que estão a distância de $2l$:

$$U_3 = \frac{kq^2}{2l}$$

Logo a energia gasta deve ser:

$$E_{gasta,1} = (6U_1 + 6U_2 + 3U_3) - 0$$

$$E_{gasta,1} = \frac{3kq^2}{l}\left(2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\right)$$

$$E_{gasta,1} = 1380\ J$$

b)

Novamente:

$$E_{gasta,2} = U_f - U_0$$

$$E_{gasta,2} = \left(E_{gasta,1} + 6U_1\right) - E_{gasta,1}$$

$$E_{gasta,2} = \frac{6kq^2}{l}$$

$$E_{gasta,2} = 720\ J$$

A energia liberada é a energia perdida pelo sistema, assim:

$$E_{liberada} = U_0 - U_{final}$$

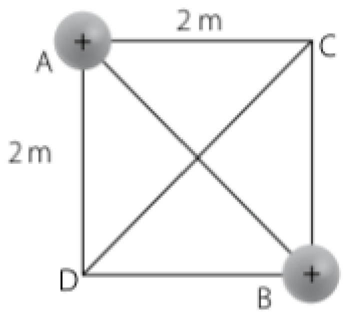
$$E_{liberada} = \left(E_{gasta,1} + E_{gasta,2}\right) - 0$$

$$E_{liberada} = E_{gasta,1} + E_{gasta,2} = 2100\ J$$

Gabarito: a) $1380\ J$; b)$720\ J$; c) $2100\ J$

26.

Na figura a seguir, temos um quadrado de lado 2 m. Nos vértices A e B estão fixas duas cargas puntiformes idênticas +Q.



Determine a mínima energia potencial adquirida por uma carga $+Q$, puntiforme, colocada dentro do quadrado.

Comentários:

Seja r_1 a distância de Q a A e r_2 a distância de Q a B. Desse modo, a energia potencial adquirida pela carga deve ser:

$$U(Q) = kQ^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Como $\frac{1}{r_1} > 0$ e $\frac{1}{r_2} > 0$ podemos usar a desigualdade das médias:

$$M.A. \geq M.G. \Rightarrow \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \geq \frac{2}{\sqrt{r_1 r_2}}$$

Onde o mínimo ocorre quando $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2}$, ou seja, quando:

$$r_1 = r_2 = r$$

$$[U(Q)]_{min} = \frac{2kQ^2}{r}$$

Obviamente o menor potencial será alcançado no maior r, isto é, $r = 2\ m$, logo:

$$\boxed{[U(Q)]_{min,r=2m} = kQ^2}$$

Gabarito: kQ^2

---

27. (Mack – 2005)

Uma partícula de massa igual a 2cg e carga de $+1\mu C$ é lançada com velocidade de $300\ m/s$, em direção a uma carga fixa de $+3\ \mu C$. O lançamento é feito no vácuo de um ponto bastante afastado da carga fixa. Desprezando ações gravitacionais, qual a mínima distância entre as cargas?

Adote: $K_0 = 9{,}0 \times 10^9\ N.m^2/C^2$.

Comentários:

Inicialmente, vamos considerar que a energia potencial eletrostática é nula, já que a carga no momento do lançamento está muito afastada. Como apenas a força elétrica é considerada no problema, temos um sistema conservativo. Logo, a energia mecânica é conservada:

$$(E_M)_{antes} = (E_M)_{depois} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{(Kq_1q_2)}{d}$$

Notamos que devido ao fato de as duas cargas serem positivas, a força elétrica está freando a carga. Dessa forma, a distância será mínima quando a velocidade for nula, marcando a inversão do movimento. Portanto:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{(Kq_1q_2)}{d_{min}} \Rightarrow d_{min} = \frac{2Kq_1q_2}{mv_0^2}$$

Substituindo valores, temos que:

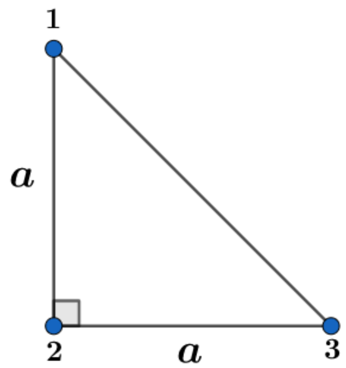
$$d_{min} = \frac{2.9 \times 10^9 . 1 \times 10^{-6} . 3 \times 10^{-6}}{1 \times 10^{-5} . (300)^2}$$

$$\boxed{d_{min} = 3\ cm}$$

Gabarito: $d_{min} = 3\ cm$

28.

Três esferas metálicas idênticas de raio r estão localizadas nos vértices de um triângulo isósceles, como se mostra na figura (supor $r << a$). As esferas estão inicialmente com carga q cada. As esferas 1 e 2 são ligadas por um curto período de tempo, com um fio condutor, em seguida, o fio é retirado. Determine as cargas finais das esferas 1 e 2 após o processo.



Caso necessário, utilize a aproximação $(1 + x)^n \cong 1 + nx$, quando $x \ll 1$.

Comentários:

Inicialmente, consideramos o fio condutor com capacidade de acumular cargas desprezível. Dessa forma, temos pelo Princípio da Conservação das Cargas que:

$$Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2'$$

$$\boxed{2q = Q_1' + Q_2'}$$

Quando fazemos o contato das cargas 1 e 2, o potencial elétrico é o mesmo das esferas, logo:

$$V_{Q_1'} = K\frac{Q_1'}{r} + K\frac{Q_2'}{a} + K\frac{q}{a\sqrt{2}}$$

$$V_{Q_2'} = K\frac{Q_2'}{r} + K\frac{Q_1'}{a} + K\frac{q}{a}$$

$$V_{Q_1'} = V_{Q_2'}$$

$$K\frac{Q_1'}{r} + K\frac{Q_2'}{a} + K\frac{q}{a\sqrt{2}} = K\frac{Q_2'}{r} + K\frac{Q_1'}{a} + K\frac{q}{a}$$

$$K\frac{Q_1'}{r} + K\frac{2q - Q_1'}{a} + K\frac{q}{a\sqrt{2}} = K\frac{2q - Q_1'}{r} + K\frac{Q_1'}{a} + K\frac{q}{a}$$

$$Q_1'.2.\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) = q\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{1}{a\sqrt{2}}\right) \quad (\times r)$$

$$Q_1'.2.\left(1-\frac{r}{a}\right)=q\left(2-\frac{r}{a}-\frac{r}{a\sqrt{2}}\right)$$

$$r \ll a \Rightarrow \left(1-\frac{r}{a}\right)^n \cong \left(1+n\frac{r}{a}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{1-\frac{r}{a}} \cong 1+\frac{r}{a}$$

$$Q_1'=q\left(1+\frac{r}{a}\right)\left(\frac{2}{2}-\frac{r}{2a}-\frac{r}{2a\sqrt{2}}\right)$$

$$Q_1'=q\left[\frac{2}{2}-\frac{r}{2a}-\frac{r}{2a\sqrt{2}}+\frac{2r}{2a}-\frac{r^2}{2a^2}-\frac{2r^2}{2a^2\sqrt{2}}\right]$$

Desconsiderando termos quadráticos de $\left(\frac{r}{a}\right)^2$ já que $r \ll a$, temos que:

$$\boxed{Q_1'=q\left[1+\frac{1}{2}\frac{r}{a}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]}$$

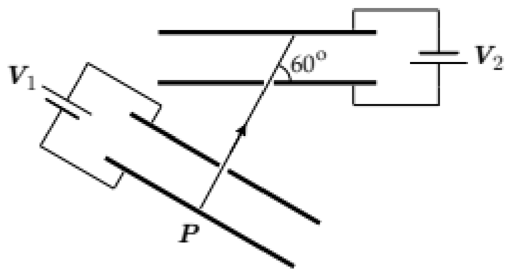
Como $Q_2'=2q-Q_1'$, vem:

$$\boxed{Q_2'=q\left[1-\frac{1}{2}\frac{r}{a}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]}$$

Gabarito: $\boldsymbol{Q_1'=q\left[1+\frac{1}{2}\frac{r}{a}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right], Q_2'=q\left[1-\frac{1}{2}\frac{r}{a}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]}$

29. (ITA – 2020)

Um capacitor 1 de placas paralelas está submetido a uma d.d.p. $V_1=12\ V$, e um capacitor 2, idêntico ao primeiro, a uma d.d.p. V_2. Um elétron em repouso parte do ponto P, atravessa um orifício no primeiro capacitor e adentra o segundo através de outro orifício, a 60° em relação à placa, conforme indica a figura. Desconsiderando a ação da gravidade, determine a d.d.p. V_2 para que o elétron tangencie a placa superior do capacitor 2.



Comentários:

Pelo teorema da energia cinética, podemos determinar a velocidade do corpo ao sair da região definida pelo capacitor 1:

$$\tau_{fel}=\Delta E_C$$

$$q \cdot V_1 = \frac{m \cdot v_e^2}{2} - 0$$

$$q \cdot V_1 = \frac{m \cdot v_e^2}{2}\ (eq.1)$$

Como ele considera desprezível a ação da gravidade, então o corpo chega com v_e na nova região definida pelo capacitor 2, mas com o ângulo de 60°. Assim, podemos decompor a velocidade nas direções normal e tangencial as placas do capacitor 2. Note que na direção tangencial não há forças atuando, portanto, não há variação da velocidade nesta direção. Por outro lado, temos a ação de uma força elétrica freando o elétron, devido a orientação do campo, definida pela diferença de potencial aplicada nas placas.

Portanto, podemos novamente aplicar o teorema da energia cinética:

$$\tau_{Fel} = \Delta E_C$$

$$-q \cdot V_2 = \frac{m \cdot {v_y}_{final}^2}{2} + \frac{m \cdot {v_x}_{final}^2}{2} - \left(\frac{m \cdot {v_y}_{inicial}^2}{2} + \frac{m \cdot {v_x}_{inicial}^2}{2}\right)$$

Com:

$$\frac{m \cdot {v_x}_{final}^2}{2} = \frac{m \cdot {v_x}_{inicial}^2}{2}$$

Então:

$$-q \cdot V_2 = \frac{m \cdot {v_y}_{final}^2}{2} - \frac{m \cdot {v_y}_{inicial}^2}{2}$$

Para que ele tangencie a placa superior do capacitor 2, temos que ${v_y}_{final} = 0$:

$$-q \cdot V_2 = -\frac{m \cdot {v_y}_{inicial}^2}{2}$$

$$q \cdot V_2 = \frac{m \cdot \left(v_e \cdot sen^2(60°)\right)^2}{2}$$

$$q \cdot V_2 = \frac{m \cdot v_e^2}{2} \cdot sen^2(60°)$$

Pela equação 1, temos:

$$q \cdot V_2 = \underbrace{\frac{m \cdot v_e^2}{2}}_{q \cdot V_1} \cdot sen^2(60°)$$

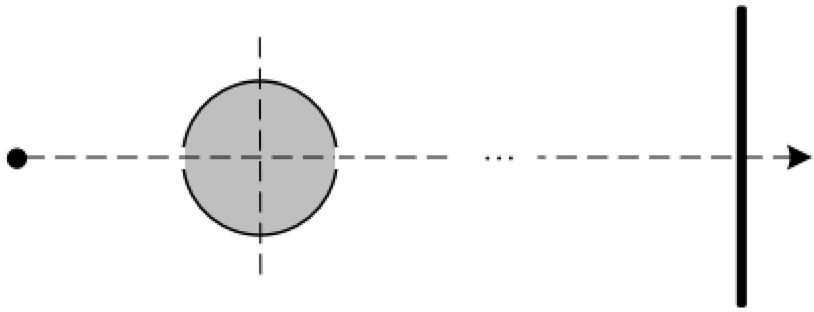
$$q \cdot V_2 = q \cdot V_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$V_2 = \frac{3\ \overbrace{V_1}^{12\ V}}{4}$$

$$\boxed{V_2 = 9\ V}$$

Gabarito: 9 V

30. (IME – 2020)



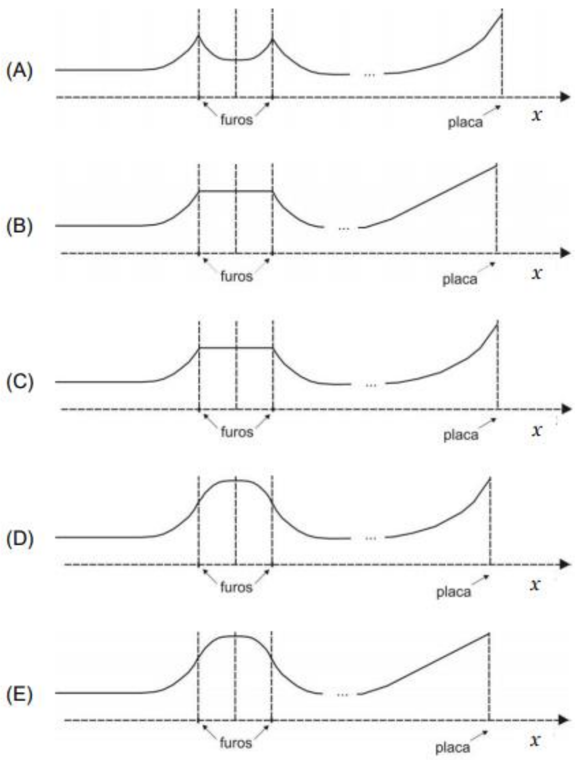
Uma partícula com carga positiva viaja em velocidade constante até aproximar-se de uma esfera oca com carga negativa uniformemente distribuída em sua casca. Ao encontrar a esfera, a partícula entra em seu interior por um pequeno furo, passa pelo centro e deixa a esfera por um segundo furo, prosseguindo o movimento. Bem distante da esfera, a partícula se aproxima de uma placa metálica plana de grande dimensão, com carga negativa uniformemente distribuída pela placa, conforme esquema da figura.

Observações:

• a carga da partícula não redistribui a carga da casca esférica e nem da placa plana; e

• a distribuição das cargas da casca esférica e da placa plana não interferem entre si.

O gráfico que melhor exprime a velocidade da partícula em função de sua posição é:



Comentários:

Nesta questão o aluno deveria lembrar dos conceitos de blindagem eletrostática. Não era necessário a análise numérica do problema. Para o primeiro trecho, enquanto a partícula está fora do alcance de atuação da esfera (e por consequência da placa), sua velocidade não varia. Ao aproximar-se suficientemente da esfera de carga negativa, a partícula é atraída pela esfera e adquiri uma aceleração não nula.

Portanto, o primeiro trecho está representado corretamente em todas as alternativas.

A etapa seguinte é o efeito da casca esférica sobre a partícula enquanto essa caminha no interior da casca esférica. Aqui, é importante lembrar que ocorre o fenômeno de blindagem eletrostática (visto que nas observações despreza-se a redistribuição de carga da casca por efeito da partícula). Por conta do fenômeno da blindagem eletrostática, o campo elétrico no interior da casca esférica é nulo, logo, a variação de velocidade em seu interior também é nula.

Assim, o segundo trecho está corretamente indicado somente nas alternativas B e C.

O terceiro trecho é após a saída da casca esférica. A desaceleração é simétrica à aceleração anterior à entrada, ou seja, considera-se somente o efeito da esfera. Devido à distância até a placa, seu efeito é desprezível. Dessa forma, as alternativas B e C permanecem ambas corretas.

Para o trecho final a análise é mais complicada e foge do escopo da prova, no entanto, será feita aqui. Ao afastar-se suficientemente da esfera, considera-se somente o efeito da placa plana. Como a placa é dita “de grandes dimensões”, considera-se que ela atua como uma placa infinita.

Assim, o campo é dado por:

$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon}$$

Este campo é constante, assim, a aceleração em função do tempo é constante e a velocidade varia linearmente com o tempo. Entretanto, o gráfico a ser analisado é da velocidade em função da distância. Portanto, por Torricelli:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot x$$

Tem-se v^2 em função de x. Para analisar o comportamento da figura, é necessário encontrar-se $\frac{dv}{dx}$. Utilizando-se de Torricelli:

$$\frac{d(v^2)}{dx} = \frac{d(v^2)}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = 2 \cdot v \cdot \frac{dv}{dx}$$

Mas:

$$\frac{d(v^2)}{dx} = 2 \cdot a$$

Assim:

$$2 \cdot a = 2 \cdot v \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{a}{v}$$

A aceleração é constante, entretanto, a velocidade aumenta conforme o passar do tempo. Dessa forma, a derivada da velocidade em relação a x é decrescente. Portanto, o gráfico obtido no último trecho deveria apresentar uma concavidade para baixo, e não se tem esta opção dentre as alternativas.

Observações:

É interessante notar que, caso fosse ignorado a observação acerca da não capacidade de redistribuição de cargas, poderia tratar-se a placa com uso do conceito de carga imagem. Nesse caso:

$$E = \frac{k \cdot q}{l - x}$$

Assim, a força seria dada por:

$$F = q \cdot E = m \cdot a$$

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{k \cdot q^2}{l - x}$$

Mas:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

Substituindo:

$$m \cdot v \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{k \cdot q^2}{l - x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{k \cdot q^2}{m} \cdot \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{l - x}$$

O termo $\frac{k \cdot q^2}{m}$ é constante. A velocidade é crescente, entretanto não se sabe até que valor, entretanto, $(l - x)$ tende a 0. Portanto, considera-se que $v \cdot (l - x)$ tende a 0 (conceito de limites). Ou seja, a derivada tenderia a infinito. Nesse caso, a figura iria se aproximar mais da alternativa C.

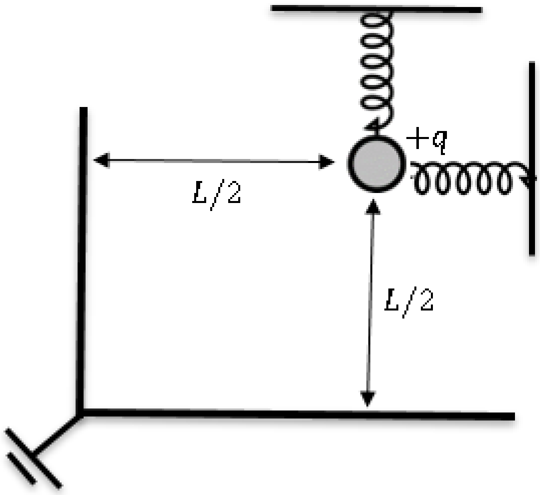
Ressalta-se novamente que esta análise foge completamente do escopo da prova. Portanto, de forma rigorosa, não há alternativa correta.

Gabarito: Sem alternativa

---

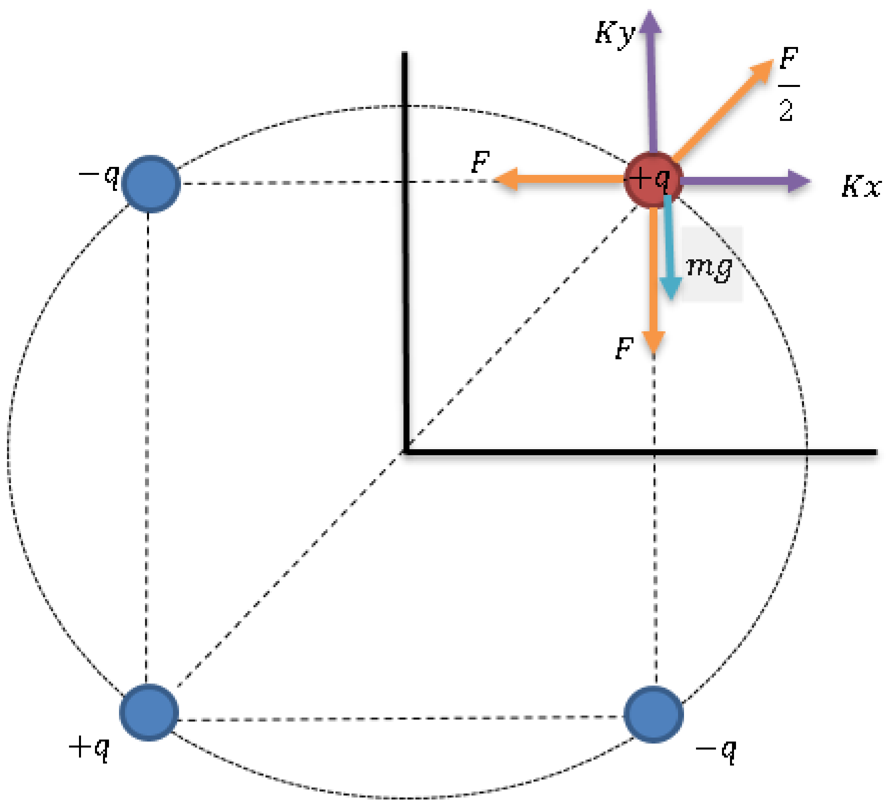
31. (Simulado ITA 2ª fase)

Uma carga elétrica $+q$ de massa m está em frente a uma associação de dois de planos metálicos aterrados. O ângulo entre os planos é de 90°. A carga está presa por duas molas de mesma constante elástica. A mola vertical se mantém na vertical e a mola horizontal se mantem na horizontal. A permissividade elétrica do meio vale ε_0. Determine a razão entre as elongações nas molas.



Comentários:

Devemos utilizar o conceito de carga imagem. A associação dos planos aterrados fornecerá 3 cargas imagens.



Do equilíbrio de forças, temos:

- Vertical:

$$mg + F = \frac{F}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + K \cdot y$$

$$y = \frac{4mg - F(4 - \sqrt{2})}{4K}$$

- Horizontal:

$$F = K \cdot x + F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{F(2 - \sqrt{2})}{2K}$$

A força eletrostática F é dada por:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{L^2}$$

Assim, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{\dfrac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{L^2}(2 - \sqrt{2})}{2K}}{\dfrac{4mg - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{L^2}(4 - \sqrt{2})}{4K}}$$

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{2q^2(2 - \sqrt{2})}{16mg\pi\varepsilon_0 L^2 - q^2(4 - \sqrt{2})}}$$

9. Considerações Finais da Aula

Chegamos ao final da nossa aula. Relembramos conceitos estudados no ensino fundamental e aprofundamos o nosso conhecimento em alguns assuntos. Nessa aula, vimos uma breve revisão de assuntos da Mecânica e fechamos nosso estudo de potencial elétrico.

Na próxima aula, fecharemos o estudo de eletrostática, finalizando com capacitância e uma breve revisão da mecânica e um estudo completo acerca dos capacitores.

Estude com calma e muita concentração. Essa parte da Física é bem difícil e bem abstrata.

Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

10. Referências Bibliográficas

[1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 5. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.

[2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Selecionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.

[3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 3. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.

[4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física volume 3. 9ª ed. Moderna. 490p.

[5] Resnick, Halliday, Jearl Walker. Fundamentos de Física volume 3. 10ª ed. LTC. 365p.

[6] Paul A. Tipler, Gene Mosca. Física para Cientistas e Engenheiros volume 2. 5ª ed. LTC, 2006. 499 f.

11. Versão de Aula

Versão de Aula	Data da última atualização
1.0	09/03/2020