MATEMÁTICA

FRENTE: MATEMÁTICA III

PROFESSOR(A): JUDSON SANTOS

EAD – ITA/IME

AULAS 01 E 02

ASSUNTO: NÚMEROS COMPLEXOS

Resumo Teórico

Conjuntos dos números complexos

Um número complexo **z** pode ser definido como um par ordenado (x,y) de números reais, z = (x, y).

O par (x, 0) é identificado como o número real **x**, x = (x, 0), e o par (0,1) será chamado de unidade imaginária: denotado por **i**: (0, 1) = i.

Observamos que:

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ se, somente se, $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$.

Em particular, temos que:

$z = (x, y) = 0 = (0, 0)$ se, e só se, $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Dados dois números complexos quaisquer $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$ definiremos duas operações: **Soma** e **Produto**, denotado por $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$, definidos por:

$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)$

Em particular, temos:

$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y)$

Por outro lado: $(0, y) = (y, 0) \cdot (0, 1)$. Assim,

$z = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + y \cdot i$

Com isso, a representação $\boxed{z = x + y \cdot i, \text{ onde } z = (x, y)}$ é chamada **Forma Algébrica**.

Como i = (0, 1), podemos calcular i^2, isto é,

$i^2 = i \cdot i$

$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1)$

$i^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)$

$i^2 = (-1, 0)$

$i^2 = -1$

Logo, $\boxed{i^2 = -1}$

Nesse resultado, notam-se facilmente as potências de expoentes múltiplos de 4: $i^0 = i^4 = i^8 = i^{12} = i^{16} = ... = i^{4k} = (i^4)^k = (1)^k = 1$, onde $\mathbf{K} \in \mathbb{N}$.

Assim, dado i^n, com $n \in n$, temos:

$$\begin{array}{l|l} n & \underline{4} \\ r & k \end{array} \Rightarrow n = 4k + r$$

resto: 0, 1, 2 ou 3

Daí,

$$i^n = i^{4k+r} = \underbrace{i^{4k}}_{1} \cdot i^r \Rightarrow i^n = i^r = \begin{cases} 1, \text{ se } r = 0 \\ i, \text{ se } r = 1 \\ -1, \text{ se } r = 2 \\ -i, \text{ se } r = 3 \end{cases}$$

Operações dos números complexos

Igualdade de números complexos

Por tratar-se de pares ordenados, dois números complexos são iguais se têm, respectivamente, as mesmas componentes:

$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \text{ (partes reais iguais)} \\ b = d \text{ (partes imaginárias iguais)} \end{cases}$$

Adição de números complexos

Sendo dados $Z_1 = (x_1, y_1)$ e $Z_2 = (x_2, y_2)$, por definição, temos:

$Z_1 + Z_2 = (x_2 + x_2; y_1 + y_2)$

ou

$$(x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{soma das partes reais}} + \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\text{soma das partes imaginárias}}$$

Multiplicação de números complexos

Sendo $Z_1 = (x_1, y_1)$ e $Z_2 = (x_2, y_2)$, em que $Z_1, Z_2 \in C$, definimos a multiplicação em **C** do seguinte modo:

$$(x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1)$$

ou

$$(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$$

Note: $y_1y_2i^2 = y_1y_2 \cdot (-1) = -y_1y_2$ é real

Conjugado de um número complexo ($\overline{Z}$)

Chamaremos de conjugado do número complexo $Z = (x, y) = x + yi$, e denotaremos por $\overline{Z}$ o número complexo da forma $\overline{Z} = (x, -y) = x - yi$.

Módulo de um número complexo

O número $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ é chamado de módulo ou valor absoluto do número complexo z = x + y · i.

Propriedades dos números complexos

A operação de conjugação goza das seguintes propriedades:

I. $\text{Re } z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ e $\text{Im } z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$;

II. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \times w} = \bar{z} \times \bar{w}$ e $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$;

III. $\bar{z} = z$ se **z** é real;

IV. $\bar{\bar{z}} = z$;

V. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;

VI. $|\bar{z}| = |z|$;

VII. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrações:

I. Seja z = a + bi com **a** e **b** $\in \mathbb{R}$. Então:

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{(a + bi) + (a - bi)}{2} = \frac{2a}{2} = a = \text{Re } z$$

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{(a + bi) - (a - bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b = \text{Im } z$$

II. Sejam z = a + bi, com **a** e **b** $\in \mathbb{R}$ e w = c di com **c** e **d** $\in \mathbb{R}$. Então,

$$\overline{z + w} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i =$$

$= a - bi + c - di = \bar{z} + \bar{w}$.

$$\overline{z \times w} = \overline{(a + bi) \times (c + di)} = \overline{ac + adi + cbi - bd} = \overline{(ac - bd) + (ad + cb)i} =$$

= (ac – bd) – (ad + cb)i = ac – adi – cbi – bd = (a – bi) × (c – di) =

$= \bar{z} \times \bar{w}$

Caso w ≠ 0, isto é, **c** e **d** não são simultaneamente nulos, então,

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{a + bi}{c + di}\right)} = \overline{\left[\frac{(a + bi)}{(c + di)} \times \frac{(c - di)}{(c - di)}\right]} = \overline{\left[\frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}\right]} =$$

$$= \frac{(ac + bd) - (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (ad - bc)i}{c^2 + d^2} = \frac{(a - bi)(c + di)}{c^2 + d^2} =$$

$$= \frac{(a - bi)}{(c - di)} \times \frac{(c + di)}{c + di} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}.$$

III. Suponha-se que $\bar{z} = z$. Então da propriedade 1,

$$\text{Re } z = \frac{z + z}{2} = \frac{2z}{2} = z.$$

Inversamente, suponha-se que **z** é real. Então: z = a + 0i = a – 0i, $a \in \mathbb{R}$, isto é, $\bar{z} = z$.

IV. Suponha-se que z = a + bi. Então,

$$\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a + bi}} = \overline{a - bi} = a + bi = z.$$

V. Suponha-se que z = a + bi. Então,

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \times (a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

VI. Suponha-se que z = a + bi. Então,

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |a - bi| = |\bar{z}|.$$

VII. A Demonstração desta propriedade pode efetuar-se por indução matemática. Comecemos por observar que o resultado é trivialmente verdadeiro para n = 1. Admita-se que o resultado é verdadeiro para p = n. Em resultado da propriedade 2 irá ser verdadeiro para p = n + 1. Então, pelo princípio de indução matemática, conclui-se que a afirmação é verdadeira para todo **n** natural.

Exercícios

01. (USA) Se z_1 e z_2 são soluções da equação $1 - z + z^2 = 0$. Então, o valor de $E = \left(z_1^4 - z_1^3 + 2z_1^2 + 1\right)^{2005} + \left(z_2^4 - z_2^3 + 2z_2^2 + 1\right)^{2005}$ vale:

A) –1
B) 0
C) 1
D) – i
E) i

02. Se **z** é um número complexo que satisfaz $\left(z + \dfrac{1}{z}\right)\left(z + \dfrac{1}{z} + 1\right) = 1$.

Então o valor do produto dos algarismos do resultado da expressão $\left(3z^{100} + \dfrac{2}{z^{100}} + 1\right)\left(z^{100} + \dfrac{2}{z^{100}} + 3\right)$ vale:

A) 12
B) 18
C) 24
D) 36
E) 48

03. Seja **z** um número complexo tal que a parte imaginária de **z** não é nula e a = z^2 + z + 1 seja real. Então **a** não pode assumir o valor:

A) –1
B) $\dfrac{1}{3}$
C) $\dfrac{1}{2}$
D) $\dfrac{3}{4}$
E) $\dfrac{2}{3}$

04. (Mandelbrot – adaptada) Seja o número complexo $\left(\dfrac{3 + i\sqrt{3}}{2}\right)^8 + \left(\dfrac{3 - i\sqrt{3}}{2}\right)^8$ um inteiro **k**. Então a soma dos algarismos do $|k|^2$ vale:

A) 9
B) 12
C) 15
D) 18
E) 21

05. (ITA) O valor da potência $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1 + i}\right)^{93}$ é:

A) $\dfrac{-1 + i}{\sqrt{2}}$
B) $\dfrac{1 + i}{\sqrt{2}}$
C) $\dfrac{-1 - i}{\sqrt{2}}$
D) $\left(\sqrt{2}\right)^{93} i$
E) $\left(\sqrt{2}\right)^{93} + i$

06. Considere os números complexos **x** e **y** não nulos, satisfazendo $x^2 + x \cdot y + y^2 = 0$. Então, o valor de $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2002} + \left(\frac{y}{x+y}\right)^{2002}$ é igual a:

A) 2^{-2002}
B) -1
C) 1
D) i
E) $-$ i

07. (IME/2003) Seja **z** um número complexo de módulo unitário que satisfaz à condição $z^{2n} \neq -1$, onde **n** é um número inteiro positivo. Demonstre que $\left(\frac{z^n}{1+z^{2n}}\right)$ é um número real.

08. (AFA/2007) Seja **z** um número complexo não nulo e **i** a unidade imaginária ($i^2 = -1$) $\cdot$ $z \neq i$. O conjunto de todos os valores de **z**, para os quais $\frac{z+i}{1+i \cdot z}$ é um número real, representa um(a):

A) elipse.
B) hipérbole.
C) circunferência.
D) círculo.

09. (IME/2012) As raízes cúbicas da unidade, no conjunto dos números complexos, são representadas por **1**, **w** e **w²** é um número complexo. O intervalo que contém de $(1 - w)^6$ é:
A) $(-\infty, -30]$
B) $(-30, -10]$
C) $(-10, 10]$
D) $10, 30]$
E) $30, \infty]$

10. Seja **a** um número real. Os valores de $z \in C$ que satisfazem $\left(\frac{a+z^{10}}{1+i}\right)\left(\frac{a+(\bar{z})^{10}}{1-i}\right) \in \mathbb{R}$ são

A) $z = -a + i\sqrt[10]{|a|}$
B) Não é possível determiná-los.
C) $z = -i\sqrt[10]{|a|}$
D) Não existe $z \in C$ tal que isto aconteça.
E) Todo $z \in C$.

11. Seja **i** a unidade imaginária de um número complexo tal que $w = \left(\frac{19+7i}{9-i}\right)^n + \left(\frac{20+5i}{7+6i}\right)^n$ para todo **n** natural. Prove que **w** é um número real.

12. Seja a equação $z^3 = 18 + 26i$, onde $z = x + yi$ com **x** e **y** números inteiros e positivos. Então o valor de $x^2 + y^2$ vale:
A) 4
B) 5
C) 10
D) 13
E) 18

13. Se $(1 + x)^{10} = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_{10} \cdot x^{10}$, então $(a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + a_8 - a_{10})^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + a_9)^2$ é igual a:
A) 3^{10}
B) 2^{10}
C) 2^9
D) 3^9
E) 1

14. (EUA) Se $x = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ e $y = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, onde $i^2 = -1$, então qual das seguintes opções não é correta?
A) $x^5 + y^5 = -1$
B) $x^7 + y^7 = -1$
C) $x^9 + y^9 = -1$
D) $x^{11} + y^{11} = -1$
E) $x^{13} + y^{13} = -1$

15. Seja $F_{(z)} = \frac{z+i}{z-i}$ para qualquer complexo, $z \neq i$, e seja $z_n = F(z_{n-1})$ para todo inteiro positivo **n**. Dado que $z_0 = \frac{1}{137} + i$ e $z_{2002} = a + bi$, em que **a** e **b** são números reais, determine a + b.

Gabarito

01	02	03	04	05
C	B	D	D	A
06	**07**	**08**	**09**	**10**
B	–	C	B	E
11	**12**	**13**	**14**	**15**
–	C	B	C	a + b = 275

– Demonstração

Anotações

SUPERVISOR/DIRETOR: Marcelo Pena – AUTOR: Judson Santos
naldo – REV.: Tereza