10 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Semelhança

Analisando um mapa político da Europa, observamos certas peculiaridades na relação posicional entre as capitais de alguns países. Para retratá-las, montamos um esboço que poderá auxiliar no aprendizado de conceitos importantes de Geometria.

Nele aparecem os pontos *M* (correspondente a Moscou), *B* (Berlim), *U* (Bucareste), *R* (Roma), *L* (Londres), *P* (Paris) e *A* (Madri), além do ponto *X*, todos representados na figura 1.

Adaptado de: *Atlas Geográfico Saraiva*, 2005.

figura 1

Observe que as capitais da Rússia, da Alemanha e da França estão alinhadas!

O segmento que une as capitais da Itália e da Rússia é perpendicular ao que liga a capital da Romênia à da Alemanha!

Reduzindo o mapa da figura 1, obtivemos a figura 2 abaixo.

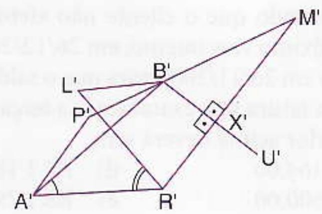


figura 2

Nessa figura, os pontos denominados *M*, *B*, etc. na figura 1 são chamados *M'*, *B'*, etc.

Observe que as figuras apenas estão em escalas diferentes.

Vamos relacionar alguns elementos da figura 1 com os correspondentes da figura 2.

- Assim como *M*, *B* e *P* pertencem à mesma reta, os pontos *M'*, *B'* e *P'* também estão alinhados.
- Do mesmo modo que há perpendicularidade entre os segmentos $\overline{MR}$ e $\overline{BU}$, também formam ângulo reto os segmentos $\overline{M'R'}$ e $\overline{B'U'}$.
- Medindo qualquer distância entre duas capitais assinaladas na figura 1 e comparando a distância correspondente na figura 2, observamos que a primeira é exatamente o dobro da segunda.

Por exemplo: a distância entre Roma e Madri, representada na figura 1 por $\overline{RA}$, mede 3,5 cm, enquanto sua correspondente na figura 2, $\overline{R'A'}$, mede 1,75 cm. Já a distância entre Berlim e Moscou na figura 1 mede aproximadamente 4,0 cm (BM = 4,0 cm) e na figura 2, 2,0 cm (B'M' = 2,0 cm).

- Medindo qualquer ângulo assinalado na figura 1 e seu correspondente na figura 2, obtemos sempre a mesma medida.
  Observe: o ângulo $B\hat{A}R$ mede aproximadamente 39° e seu correspondente $B'\hat{A}'R'$ possui a mesma medida. Ainda: o ângulo de vértice em Roma e lados passando por Londres e Madri mede aproximadamente 54°, e o mesmo ocorre com o ângulo $L'\hat{R}'A'$ da figura 2. A esse respeito, lembre-se também do ângulo reto entre $\overline{BU}$ e $\overline{MR}$, que ocorre igualmente entre $\overline{M'R'}$ e a perpendicular $\overline{B'U'}$ na figura 2.

Assim, podemos concluir que:

- as medidas lineares apuradas entre uma figura e outra são proporcionais;
- as medidas angulares apuradas entre uma figura e outra são invariáveis.

Ainda a respeito das figuras apresentadas, podemos dizer que a primeira figura comporta quatro vezes a segunda. Qualquer superfície encontrada na figura 2 "cabe" exatamente quatro vezes na superfície correspondente da figura 1; veja, por exemplo, os quadriláteros B'L'R'X' e BLRX, que foram superpostos na figura 3.

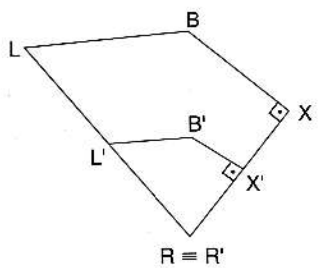


figura 3

De modo geral, quando comparamos figuras e observamos os fatos apresentados, dizemos que elas são semelhantes.

No caso das figuras 1 e 2, definimos a razão de semelhança *k* como 2 (da primeira para a segunda) ou $\frac{1}{2}$ (da segunda para a primeira). Além disso, sendo k = 2, a razão de semelhança entre as áreas das figuras é $k^2 = 4$.

Vamos estudar em detalhe a semelhança entre triângulos, devido à sua importância em Matemática.

Triângulos semelhantes

Definição

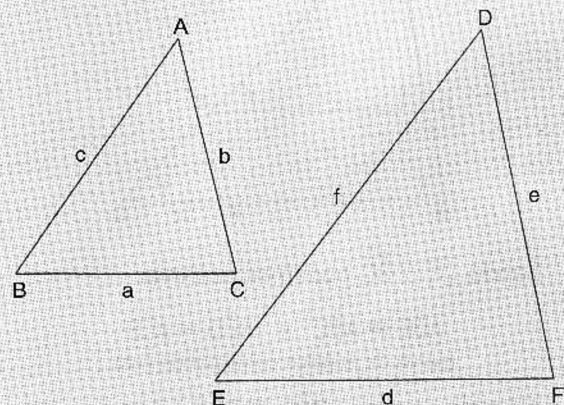
Dois triângulos são semelhantes quando possuem os ângulos correspondentes congruentes e os lados homólogos proporcionais.

Lembre-se de que lados homólogos são lados que ocupam a mesma posição nas figuras.

$\underbrace{\text{homo}}_{\text{"mesmo"}}\underbrace{\text{lógos}}_{\text{"lugar"}}$

exemplo 1

Observe os triângulos a seguir.



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF\text{, pois } \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{cases} \text{ e } \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$

(meça os ângulos) (estabeleça a proporcionalidade medindo os lados)

Lembre-se de que o símbolo ~ lê-se "semelhante a" e o símbolo ≡ lê-se "congruente a".

No caso, $k = \frac{2}{3}$ (de ABC para DEF).

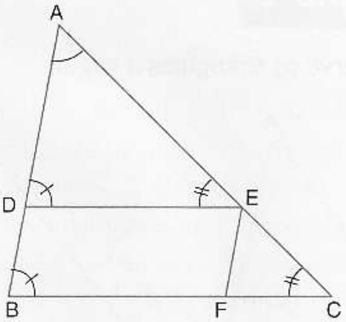
As relações expressas no exemplo 1 confirmam a definição inicial: para que dois triângulos sejam semelhantes, é necessário que os ângulos de um sejam congruentes aos ângulos do outro e que os lados homólogos sejam proporcionais.

No entanto, veremos oportunamente que, se uma dessas condições é satisfeita, a outra também se verifica; ou seja, se dois triângulos possuem os ângulos congruentes, seus lados são proporcionais, e vice-versa. Essa simplificação conduz aos critérios de semelhança que estudaremos adiante. Antes, porém, veremos uma propriedade muito importante acerca dos triângulos.

Propriedade

Toda paralela a um lado de um triângulo que intercepta os outros dois lados em pontos distintos determina um novo triângulo, semelhante ao primeiro.

Vamos então demonstrar essa propriedade com o triângulo ABC.



Sendo $\overline{DE} // \overline{BC}$, podemos escrever:

$$A\hat{D}E \equiv A\hat{B}C \quad e \quad A\hat{E}D \equiv A\hat{C}B$$
(pares de ângulos correspondentes)

Além disso, como $B\hat{A}C \equiv D\hat{A}E$ é ângulo comum, os três ângulos do triângulo ADE são congruentes aos ângulos do triângulo ABC.

Ainda, pelo teorema de Tales, porque $\overline{DE} // \overline{BC}$:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (1)$$

Tomemos agora o segmento $\overline{EF}$, com F em $\overline{BC}$, de modo que $\overline{EF} // \overline{BD}$. O quadrilátero BDEF é um paralelogramo e BF = DE.

Novamente, usando o teorema de Tales:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}, \text{ o que significa } \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (2)$$

Comparando as igualdades (1) e (2), temos:

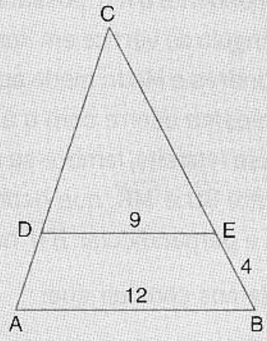
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

que mostra a proporcionalidade entre as medidas dos lados dos triângulos.

Assim, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

exemplo 2

Considere o triângulo ABC abaixo, sendo $\overline{DE} // \overline{AB}$:



Para determinar as medidas de $\overline{CE}$ e $\overline{CB}$, devemos observar que, sendo $\overline{DE} // \overline{AB}$, temos $\triangle CDE \sim \triangle CAB$, o que acarreta, além das congruências angulares $C\hat{D}E \equiv C\hat{A}B$ e $C\hat{E}D \equiv C\hat{B}A$, a proporcionalidade:

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{CE}{CE+4} = \frac{9}{12} \Rightarrow$$

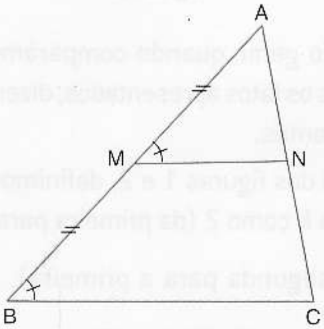
$$\Rightarrow 12CE = 9CE + 36 \Rightarrow CE = 12 \text{ e } CB = 16$$

Uma decorrência importante dessa propriedade estabelece que "se a paralela a um lado de triângulo intercepta um dos lados no seu ponto médio, ela também intercepta o outro lado no ponto médio".

Vamos demonstrar essa propriedade.

Considere o triângulo ABC a seguir e seja $\overline{MN} // \overline{BC}$.

Sabendo que M é ponto médio de $\overline{AB}$, é fácil demonstrar que N é ponto médio de $\overline{AC}$.



Temos:

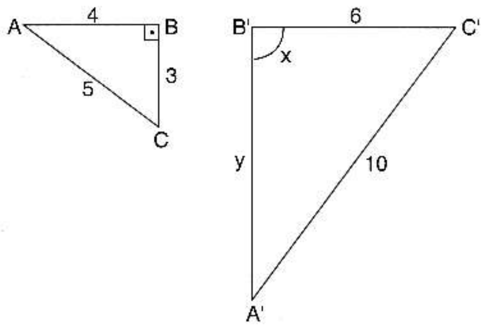
$$\triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AN = \frac{AC}{2} \text{ e } N \text{ é ponto médio de } \overline{AC}$$

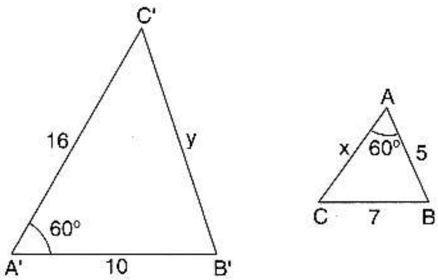
exercícios

1. Em cada caso temos $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Determine as medidas x e y.

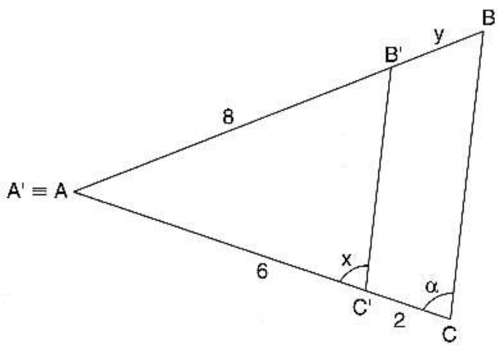
a)



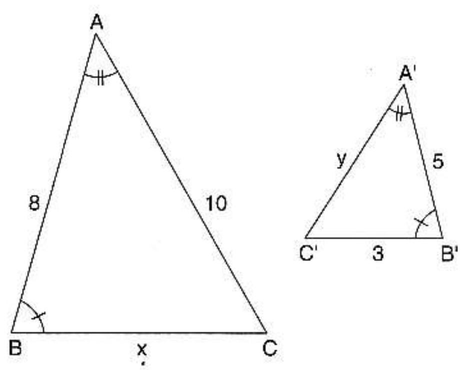
b)



c)



d)



2. Um triângulo retângulo ABC possui um ângulo de 40° e é semelhante ao triângulo XYZ. Determine os ângulos deste último.

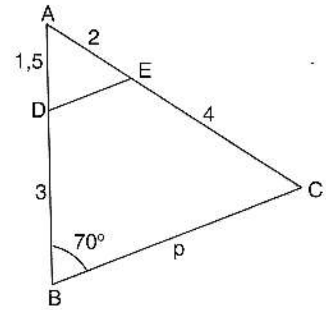
3. Os lados de um triângulo eqüilátero medem 3 cm; um outro triângulo possui os três lados medindo 6 cm cada um. Responda:

a) Os triângulos citados são semelhantes? Por quê?

b) Qual é a razão de semelhança entre eles?

c) Qual é a razão entre as suas áreas?

4. Nesta figura temos $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

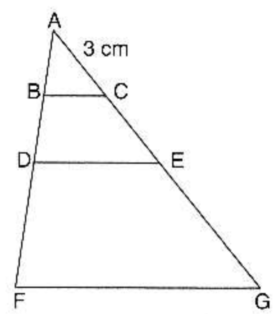


a) Quanto mede $A\hat{D}E$?

b) O que pode ser dito a respeito de $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$?

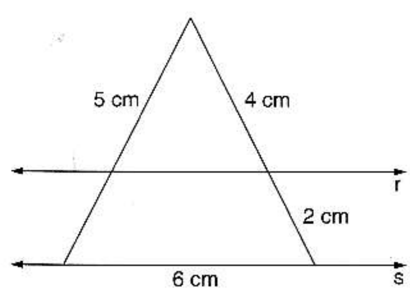
c) Encontre a medida de $\overline{DE}$ em função de p e escreva a proporcionalidade entre os lados dos triângulos, calculando a razão de semelhança entre o maior e o menor triângulo, nessa ordem.

5. Na figura, $\overline{BC} \mathbin{//} \overline{DE} \mathbin{//} \overline{FG}$.

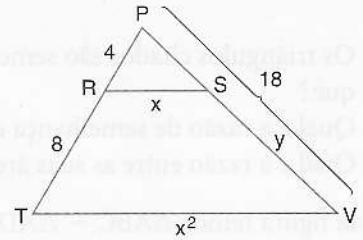


Sabendo que $AD = DF = 2 \cdot DB$, determine CE, AE e CG.

6. Determine a razão entre os perímetros dos triângulos (do menor para o maior) da figura abaixo, sabendo que r // s.



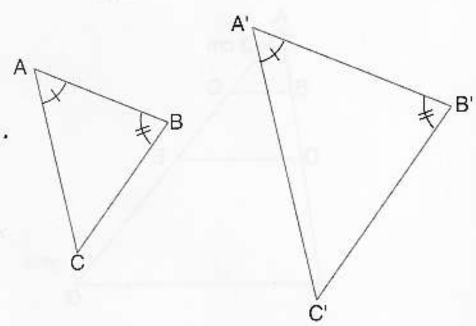
7. Na figura, $\overline{RS} \parallel \overline{TV}$. Determine x e y.



Casos de semelhança de triângulos

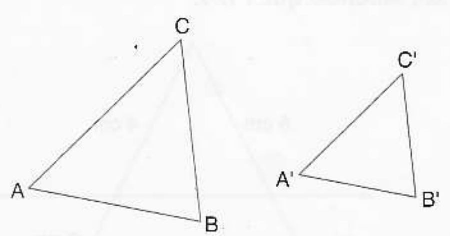
Para simplificar o reconhecimento da semelhança entre triângulos, foram estabelecidos, a partir de relações de congruência e de proporcionalidade entre elementos de um e de outro, três critérios mínimos, chamados casos de semelhança, os quais apresentaremos a seguir, sem as respectivas demonstrações.

► *Caso AA*: "Dois triângulos são semelhantes quando possuem dois ângulos respectivamente congruentes."



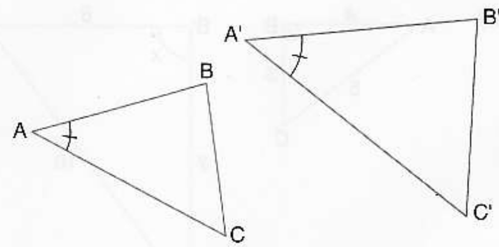
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}'\end{array}\right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

► *Caso LLL*: "Se dois triângulos possuem os lados proporcionais, eles são semelhantes."



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

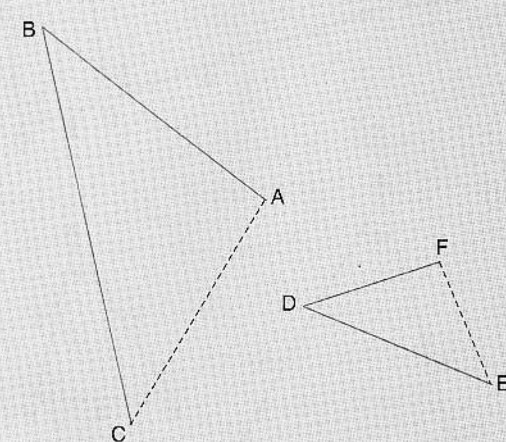
► *Caso LAL*: "Quando dois triângulos possuem, respectivamente, dois lados proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, os triângulos são semelhantes."



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A}'\end{array}\right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

exemplo 3

Se, num triângulo ABC, temos $\hat{B} = 40°$, $AB = 4$ cm e $BC = 6$ cm e, num triângulo FDE, ocorre $\hat{D} = 40°$, $DF = 2$ cm e $DE = 3$ cm, considerando a proporção $\frac{4}{2} = \frac{6}{3}$ e o fato de o ângulo de 40° estar compreendido entre os lados proporcionais, pelo caso LAL podemos garantir que $\triangle ABC \sim \triangle FDE$.



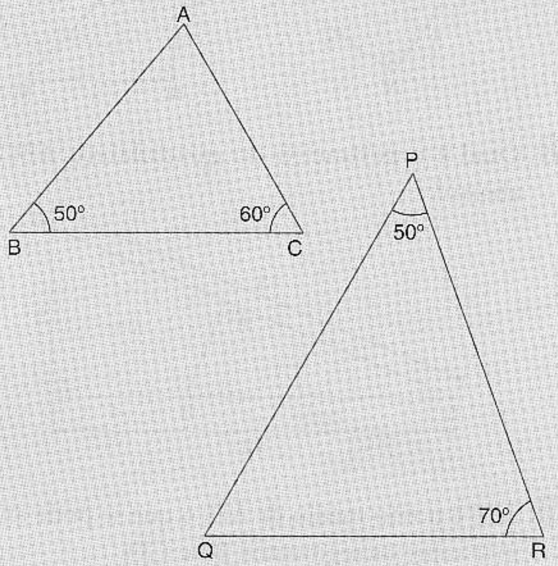
Na notação $\triangle ABC \sim \triangle FDE$, observe que a ordem dos vértices segue a correspondência entre eles. Veja:

A corresponde a *F*
(cada um é oposto ao maior lado do triângulo)

B corresponde a *D*
(vértices dos ângulos congruentes)

exemplo 4

Os triângulos escalenos abaixo são semelhantes.



Basta notar que seus ângulos são congruentes; medem, em ambos os triângulos, 50°, 60° e 70°.

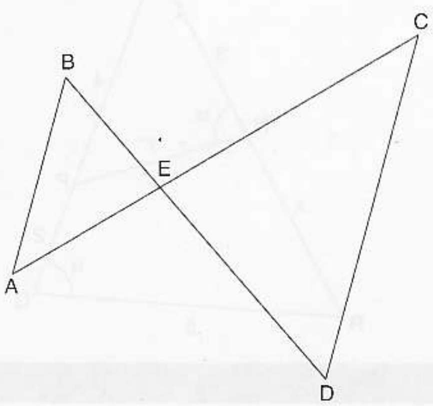
Escrevemos, então, $\triangle ABC \sim \triangle RPQ$.

Assim, decorre a proporcionalidade entre os lados:

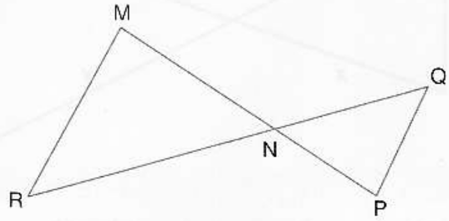
$$\frac{AB}{RP} = \frac{AC}{RQ} = \frac{BC}{PQ} = k$$

exercícios

8. Determine DE, sendo $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, BE = 4 cm, EC = 8 cm e AC = 11 cm.

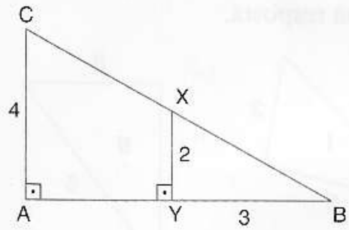


9. Observe a figura a seguir. Considerando que $\triangle MNR \sim \triangle PNQ$, o que se pode afirmar sobre a posição relativa entre os lados $\overline{PQ}$ e $\overline{MR}$? Justifique.

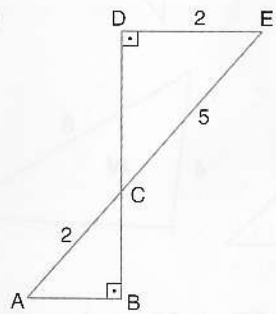


10. Determine a medida de $\overline{AB}$ em cada caso:

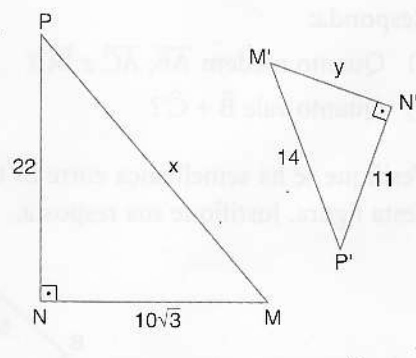
a)



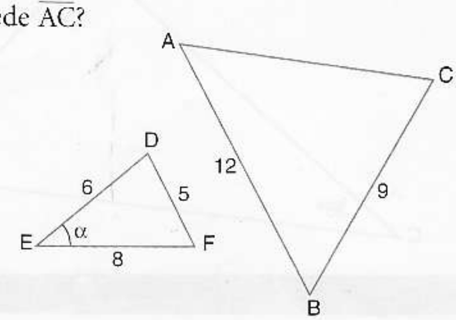
b)



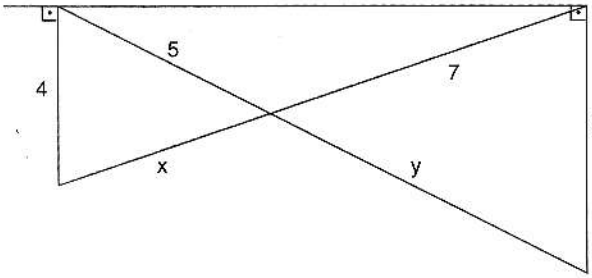
11. Determine as medidas x e y, de modo que $\triangle MNP \sim \triangle M'N'P'$.



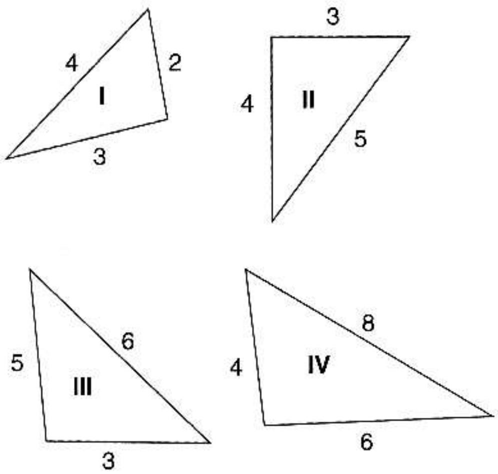
12. Se $\triangle DEF \sim \triangle CBA$, quanto mede $\hat{ABC}$? Quanto mede $\overline{AC}$?



13. Determine x e y:



14. Observe as figuras abaixo e identifique entre elas um par de triângulos semelhantes. A seguir, justifique sua resposta.

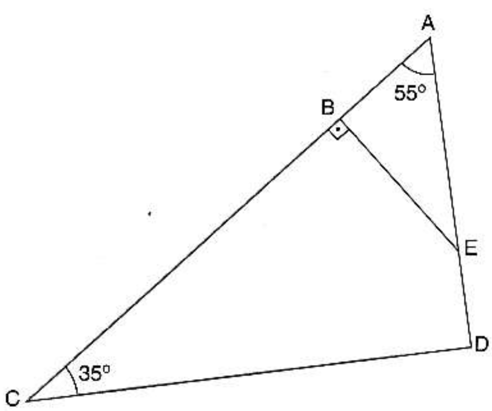


15. Um triângulo ABC, de 20 cm de perímetro, é semelhante a A'B'C', cujos lados medem 10 cm, 14 cm e 16 cm. Além disso, $\hat{A}'$ vale 60°. Résponda:

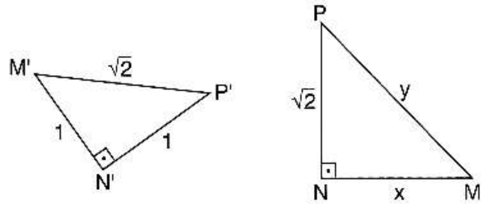
a) Quanto medem $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$?

b) Quanto vale $\hat{B} + \hat{C}'$?

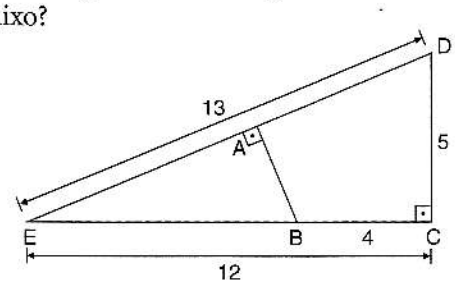
16. Verifique se há semelhança entre os triângulos desta figura. Justifique sua resposta.



17. Admita a semelhança entre os triângulos abaixo para determinar as medidas x e y.



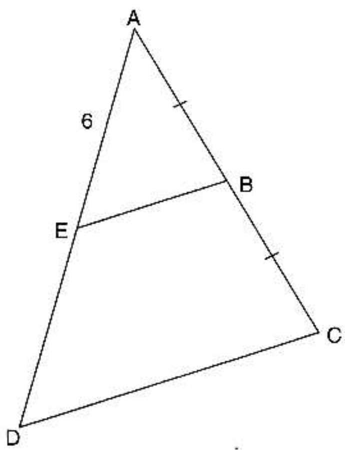
18. Qual é o perímetro do quadrilátero ABCD abaixo?



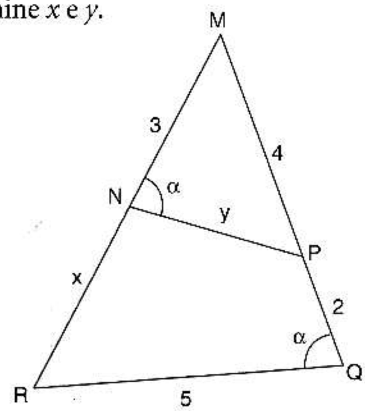
19. Se E é ponto médio de $\overline{AD}$, o que se pode afirmar sobre os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$:

a) quanto à posição relativa entre eles?

b) quanto às suas medidas?

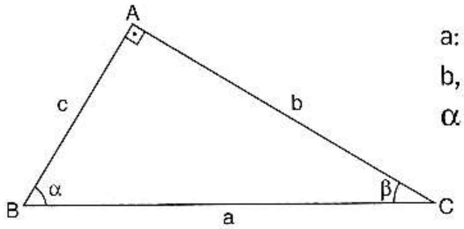


20. Determine x e y.



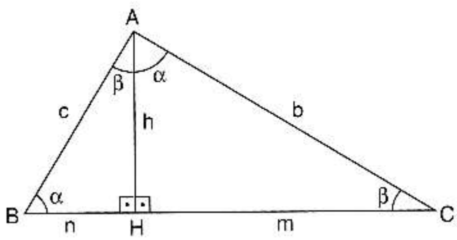
Relações métricas no triângulo retângulo

Todo triângulo retângulo possui dois ângulos agudos complementares e um ângulo reto, ao qual se opõe o seu maior lado, chamado hipotenusa; os outros dois lados são denominados catetos.



a: hipotenusa
b, c: catetos
$\alpha + \beta = 90°$

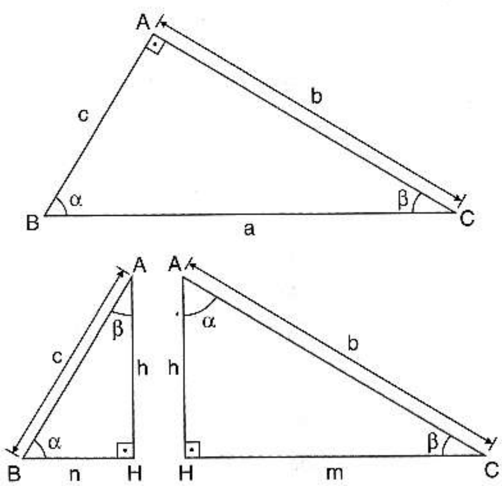
A perpendicular a $\overline{BC}$, traçada por A, é a altura h, relativa à hipotenusa do triângulo.



BH = n e CH = m são as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Observando as medidas dos ângulos, concluímos que os três triângulos formados são semelhantes:

$$\triangle ABC \sim \triangle HAC \sim \triangle HBA$$



Considerando a semelhança entre os dois primeiros triângulos:

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b^2 = am} & ① \\ \text{e} \\ \boxed{ah = bc} & ② \end{cases}$$

Pela semelhança entre o primeiro e o terceiro triângulos:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow \boxed{c^2 = an} \quad ①$$

Considerando agora a semelhança entre os dois últimos triângulos, podemos escrever:

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow \boxed{h^2 = mn} \quad ③$$

> **Assim, podemos afirmar que em todo triângulo retângulo:**
>
> **① O quadrado de cada cateto vale o produto da sua projeção sobre a hipotenusa pela hipotenusa.**
>
> **② O produto da hipotenusa pela altura relativa a ela vale o produto dos catetos.**
>
> **③ O quadrado da altura relativa à hipotenusa vale o produto entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.**

Lembrando que a = m + n e considerando ainda as relações ①, temos:

$$\left.\begin{array}{l} am = b^2 \\ an = c^2 \end{array}\right\} +$$

$$am + an = b^2 + c^2 \Rightarrow a(m + n) = b^2 + c^2 \Rightarrow$$

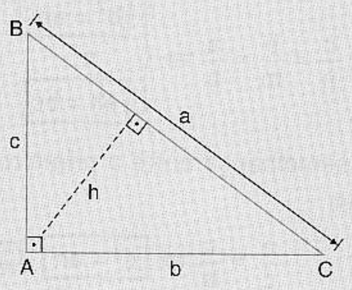
$$\Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2} \quad ④$$

Esta última — e muito importante — relação é conhecida como teorema de Pitágoras e é assim interpretada:

> **Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.**

exemplo 5

Considerando que os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem, respectivamente, 3 cm e 4 cm, vamos determinar a medida da altura relativa à hipotenusa. Podemos utilizar a relação ②: $ah = bc \Rightarrow ah = 3 \cdot 4$.



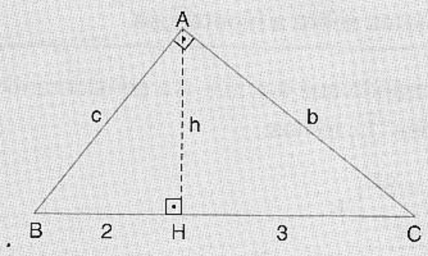
Mas, pelo teorema de Pitágoras, $a^2 = 3^2 + 4^2 = 25$; portanto, a = 5 cm.

Substituindo:

$$5h = 3 \cdot 4 \Rightarrow h = \frac{12}{5} = 2{,}4 \Rightarrow h = 2{,}4 \text{ cm}$$

exemplo 6

Sejam 2 cm e 3 cm as medidas das projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa. Vamos calcular as medidas dos catetos.



Podemos fazer pela relação ③:

$$h^2 = 2 \cdot 3 \Rightarrow h = \sqrt{6} \text{ cm}$$

Como o triângulo ABH é retângulo, vale o teorema de Pitágoras:

$c^2 = 2^2 + h^2 = 4 + 6 = 10$ e $c = \sqrt{10}$ cm

Por ①: $b^2 = 5 \cdot 3 = 15 \Rightarrow b = \sqrt{15}$ cm

(Também podemos usar o teorema de Pitágoras, no $\triangle ACH$ ou no $\triangle ABC$.)

Constatando:

Por ①: $\sqrt{10}^2 = 5 \cdot 2$ e $\sqrt{15}^2 = 5 \cdot 3$

Por ②: $5 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{15} \cdot \sqrt{10}$

Por ③: $\sqrt{6}^2 = 2 \cdot 3$

Pitágoras: $5^2 = \sqrt{10}^2 + \sqrt{15}^2$

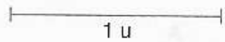
exercícios

21. São dadas as medidas dos catetos de um triângulo: 5 cm e 12 cm. Determine a medida da altura relativa à hipotenusa e da projeção do menor cateto sobre a hipotenusa.

22. A hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles mede 10 cm. Quanto mede cada um dos catetos?

23. As projeções dos catetos de um triângulo sobre a hipotenusa medem 10 cm e 20 cm. Determine as medidas dos catetos e da altura relativa à hipotenusa.

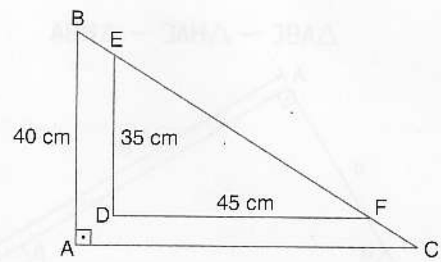
24. O segmento abaixo mede uma unidade de comprimento. Utilize o teorema de Pitágoras para obter um segmento que meça $\sqrt{5}$ unidades de comprimento.



25. Um cateto do triângulo ABC mede 7 m e os outros dois lados possuem medidas, em metros, com números consecutivos. Determine a medida da altura relativa à hipotenusa.

26. Em um triângulo retângulo o pé da altura relativa à hipotenusa divide-a em segmentos de medidas x e $3x$. Quanto vale o produto entre as medidas daquela altura e dos catetos?

27. Sendo $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ e $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$, quanto mede a hipotenusa $\overline{BC}$?



28. Considere um triângulo eqüilátero.
    a) Determine sua altura, se seu lado mede 4 cm.
    b) Quanto mede seu lado se sua altura mede 4 cm?

29. Considere um quadrado.
    a) Quanto mede sua diagonal se seu lado mede 5 cm?
    b) Se sua diagonal mede 5 cm, qual é a medida do perímetro desse quadrado?

30. (UE-RJ) Terno pitagórico é a denominação para os três números inteiros que representam as medidas, com a mesma unidade, dos três lados de um triângulo retângulo. Um terno pitagórico pode ser gerado da seguinte forma:

- escolhem-se dois números pares consecutivos ou dois números ímpares consecutivos;
- calcula-se a soma de seus inversos, obtendo-se uma fração cujos numerador e denominador representam as medidas dos catetos de um triângulo retângulo;
- calcula-se a hipotenusa.

a) Utilizando o procedimento descrito, calcule as medidas dos três lados de um triângulo retângulo, considerando os números pares 4 e 6.

b) Considerando que x é um número inteiro maior que 1 e que $(x - 1)$ e $(x + 1)$ representam dois pares ou dois ímpares consecutivos, demonstre que esses dois números geram um terno pitagórico.

31. Credita-se a Pitágoras a fórmula usada para descobrir tríades pitagóricas, ou seja, ternos de números naturais que satisfazem o teorema de Pitágoras (3, 4 e 5 é um exemplo).

Tomando n como um natural ímpar, se o 1º membro da fórmula é $n^2 + \left(\frac{n^2 - 1}{2}\right)^2$, assinale a alternativa correta para o 2º membro:

a) $\frac{(n-1)^2 + 1}{2}$ c) $\left(\frac{n^2 - 1}{2} + 1\right)^2$

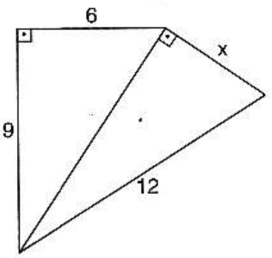
b) $\left(\frac{n^2 + 1}{2} - 1\right)^2$ d) $\frac{(n-1)^2}{2} + n^2$

32. A respeito da fórmula do exercício anterior, escreva-a por completo e determine, em cada caso, a tríade pitagórica que se obtém substituindo n por:

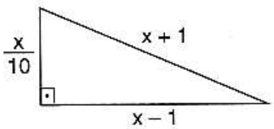
a) 5 b) 7 c) 9 d) 11

33. Determine o valor de x em cada caso.

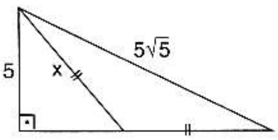
a)



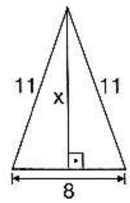
b)



c)



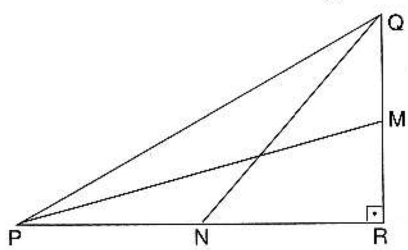
d)



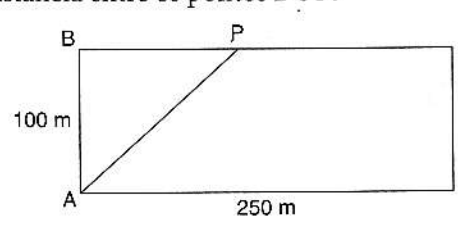
34. As medidas dos catetos de um triângulo retângulo diferem em 2 cm. Sabendo-se que um deles mede $(\sqrt{2} - 1)$ cm, qual é a medida da altura relativa à hipotenusa do triângulo?

35. Uma escada de 6 m de comprimento está apoiada em uma parede, em um ponto distante 4 m do solo. Qual é a distância do pé da escala à parede?

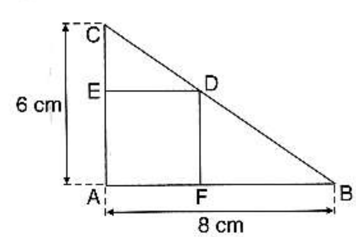
36. Na figura, M é ponto médio de $\overline{QR}$, e N é ponto médio de $\overline{PR}$. Se $PM = \sqrt{73}$ cm e $QN = 2\sqrt{13}$ cm, quanto mede o maior lado do triângulo PQR?



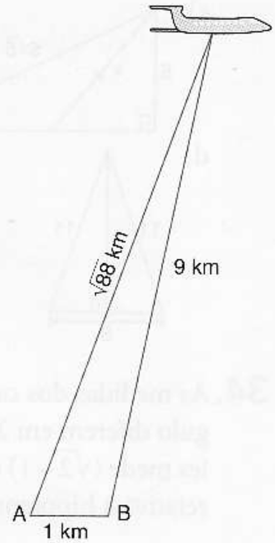
37. (UF-GO) Uma pista retangular para caminhada mede 100 m por 250 m. Deseja-se marcar um ponto P, conforme figura abaixo, de modo que o comprimento do percurso ABPA seja a metade do comprimento total da pista. Calcule a distância entre os pontos B e P.



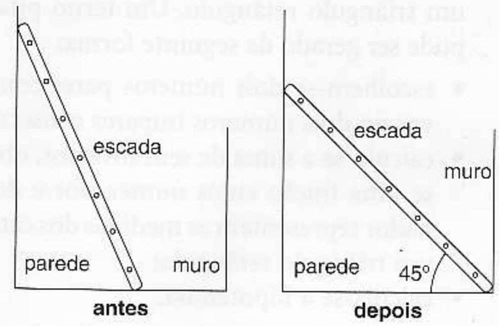
38. Quanto mede $\overline{AD}$, se AEDF é quadrado?



39. (UF-BA) A figura mostra a posição de um avião observado a partir de dois pontos, A e B, localizados no solo e distantes 1 km um do outro. Sabe-se que, nesse instante, o avião dista, respectivamente, $\sqrt{88}$ km e 9 km, dos pontos A e B. Nessas condições, determine a altura do avião, em relação ao solo, no instante considerado.



40. (Unicamp-SP) Para trocar uma lâmpada, Roberto encostou uma escada na parede de sua casa, de forma que o topo da escada ficou a uma altura de aproximadamente $\sqrt{14}$ m. Enquanto Roberto subia os degraus, a base da escada escorregou por 1 m, indo tocar o muro paralelo à parede, conforme ilustração abaixo.



Refeito do susto, Roberto reparou que, após deslizar, a escada passou a fazer um ângulo de 45° com a horizontal. Pergunta-se:

a) Qual é a distância entre a parede da casa e o muro?

b) Qual é o comprimento da escada de Roberto?

Matemática e Astronomia

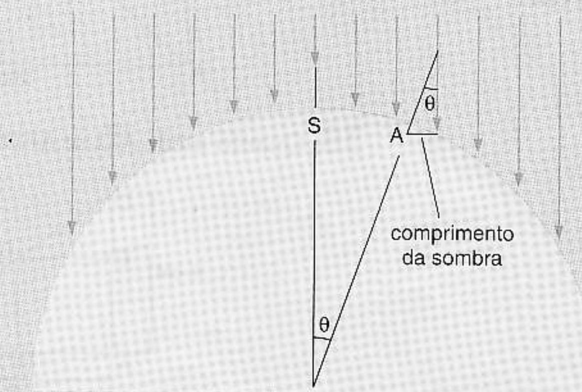
Há mais de 2 200 anos...

Na Antiguidade, os gregos exerceram um papel importante no desenvolvimento de diversos ramos do conhecimento humano. Movidos talvez pela curiosidade ou fascínio pelos astros, empreenderam incursões interessantes em assuntos de Astronomia.

Vejamos, por exemplo, o caso do geógrafo e matemático Eratóstenes, que viveu entre os anos 276 e 194 a.C. e trabalhou na famosa biblioteca de Alexandria. Baseando-se em alguns fatos conhecidos na época, ele conseguiu determinar o raio da Terra através de um procedimento bastante interessante.

Já se sabia na época que no solstício de verão — dia 21 de junho, início do verão no hemisfério norte — os raios solares atingiam perpendicularmente a superfície da cidade egípcia de Siena (atualmente chamada Aswan). Com essa informação, Eratóstenes pensou em observar a inclinação dos raios solares em Alexandria, outra cidade egípcia situada ao sul de Siena, e em um 21 de junho verificou que aquela inclinação era de 7,2°.

Observe o esquema abaixo.



θ = ângulo medido = 7,2°
S = Siena
A = Alexandria

Aplicando conhecimentos básicos de semelhança de triângulos, Eratóstenes percebeu que, como 7,2° equivale à qüinquagésima parte de 360°, a distância entre as duas cidades — que estariam sobre o mesmo meridiano — corresponderia a $\frac{1}{50}$ da circunferência da Terra. A distância entre Siena e Alexandria, apurada a duras penas, media cerca de 790 km (ao que parece Eratóstenes pagou um homem para percorrer essa distância contando seus passos).

Multiplicando, então, 50 por 790, ele obteve para a circunferência terrestre a medida de 39 500 quilômetros. Como sabemos, para obter a medida do raio, bastaria fazer o cálculo do quociente entre 39 500 e 2π, mas na época o valor de π era aproximado para $\frac{22}{7}$. Assim, Eratóstenes fez $39\,500 : \left(2 \cdot \frac{22}{7}\right)$ e obteve a medida de aproximadamente 6 284 km para o raio da Terra.

Hoje sabemos que, considerando o achatamento que existe nos pólos, o raio polar terrestre é de aproximadamente 6 357 km e que a circunferência polar é 39 942 km. Ou seja, podemos afirmar que Eratóstenes obteve com seu método medidas surpreendentemente boas, considerando a precariedade dos instrumentos utilizados. Por exemplo, qual teria sido a precisão da medida angular feita inicialmente? Além disso, ele considerou que as duas cidades estavam sobre o mesmo meridiano, o que hoje, sabe-se, não é exato. Na verdade, há uma diferença de cerca de 3°.

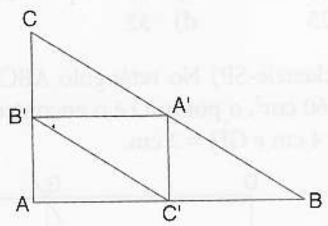
Ainda assim, sua iniciativa é plena de méritos, como também seus outros trabalhos nas áreas de Aritmética e Geografia.

testes de vestibulares

1. (PUC-RS) Para medir a altura de uma árvore, foi usada uma vassoura de 1,5 m, verificando-se que, no momento em que ambas estavam em posição vertical em relação ao terreno, a vassoura projetava uma sombra de 2 m e a árvore, de 16 m. A altura da árvore, em metros, é:

a) 3,0
b) 8,0
c) 12,0
d) 15,5
e) 16,0

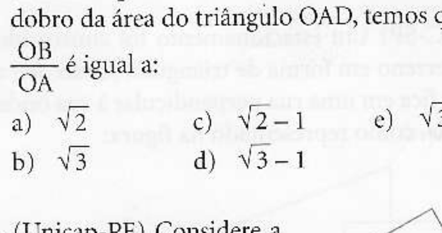
2. (UE-RJ) Unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo ABC, obtém-se um novo triângulo A'B'C', como mostra a figura.



Se S e S' são, respectivamente, as áreas de ABC e A'B'C', a razão $\frac{S}{S'}$ equivale a:

a) 4
b) 2
c) $\sqrt{3}$
d) $\frac{3}{2}$

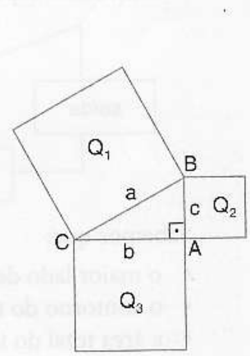
3. (UF-RS) Na figura abaixo, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são perpendiculares a $\overline{AB}$.



Sabendo que a área do trapézio ABCD é igual ao dobro da área do triângulo OAD, temos que a razão $\frac{OB}{OA}$ é igual a:

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{2} - 1$
d) $\sqrt{3} - 1$
e) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

4. (Unicap-PE) Considere a figura composta de um triângulo retângulo em A e os três quadrados Q_1, Q_2 e Q_3 construídos sobre os lados a, c e b do triângulo, respectivamente.

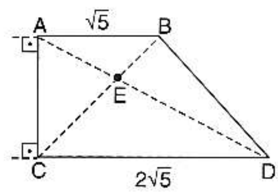


Assim, tem-se:

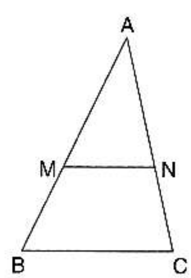
a) a área do quadrado Q_1 é maior que a soma das áreas dos quadrados Q_3 e Q_2.
b) a área do quadrado Q_3 é igual à área do quadrado Q_1, menos a área do quadrado Q_2.
c) o perímetro do quadrado Q_1 é menor que a soma dos perímetros de Q_2 e Q_3.
d) o perímetro de Q_1 é igual à soma dos perímetros de Q_2 e Q_3.
e) a altura h do triângulo pelo vértice A relativamente ao lado a é média geométrica entre os segmentos que determina sobre o lado a.

5. (Mackenzie-SP) Na figura, se o triângulo ABC é isósceles, a medida de $\overline{AE}$ é:

a) $\frac{4}{3}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\sqrt{2}$
e) $\frac{5}{3}$



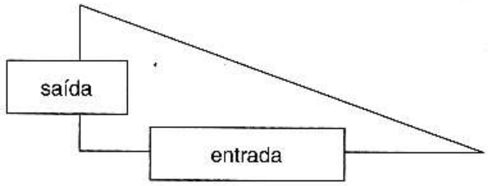
6. (Cefet-MG) No triângulo ABC, um segmento $\overline{MN}$, paralelo a $\overline{BC}$, divide o triângulo em duas regiões de mesma área, conforme representado na figura.



A razão $\frac{AM}{AB}$ é igual a:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
e) $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$

7. (UMC-SP) Um estacionamento foi construído em um terreno em forma de triângulo, sendo que a entrada fica em uma rua perpendicular à rua onde fica a saída, como representado na figura:



Sabemos que:

- o maior lado desse terreno mede 60 m;
- o contorno do terreno mede 144 m;
- a área total do terreno mede 864 m^2.

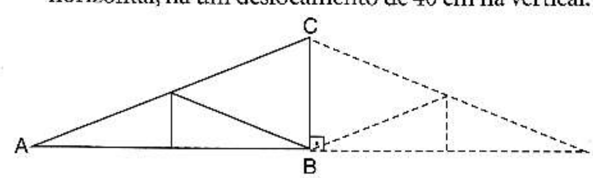
A medida do lado onde se localiza a entrada desse estacionamento, em metros, vale:

a) 12
b) 24
c) 44
d) 48
e) 52

8. (U. F. Juiz de Fora-MG) Seja o triângulo de base igual a 10 m e altura igual a 5 m com um quadrado inscrito, tendo um lado contido na base do triângulo. O lado do quadrado é, em metros, igual a:

a) $\frac{10}{3}$
b) $\frac{5}{2}$
c) $\frac{20}{7}$
d) $\frac{15}{4}$
e) $\frac{15}{2}$

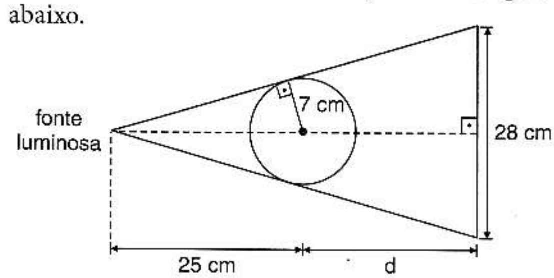
9. (Mackenzie-SP) A figura abaixo representa uma estrutura de construção chamada tesoura de telhado. Sua inclinação é tal que, a cada metro deslocado na horizontal, há um deslocamento de 40 cm na vertical.



Se o comprimento da viga AB é 5 m, das alternativas abaixo, a que melhor aproxima o valor do comprimento da viga AC, em metros, é:

a) 5,4
b) 6,7
c) 4,8
d) 5,9
e) 6,5

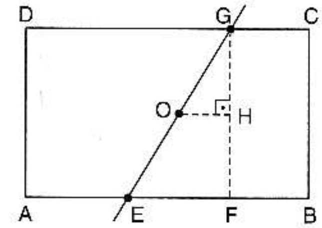
10. (UF-GO) Uma fonte luminosa a 25 cm do centro de uma esfera projeta sobre uma parede uma sombra circular de 28 cm de diâmetro, conforme figura abaixo.



Se o raio da esfera mede 7 cm, a distância (d) do centro da esfera até a parede, em centímetros, é:

a) 23
b) 25
c) 28
d) 32
e) 35

11. (Mackenzie-SP) No retângulo ABCD da figura, de área 60 cm^2, o ponto O é o encontro das diagonais, EF = 4 cm e GH = 3 cm.



A área do retângulo AFGD, em cm^2, é:

a) 42
b) 49
c) 55
d) 36
e) 64

12. (UF-PI) Se num triângulo retângulo a medida da mediana relativa à hipotenusa é 5 cm, então a hipotenusa mede:

a) 8 cm
b) 9 cm
c) 10 cm
d) 11 cm
e) 12 cm

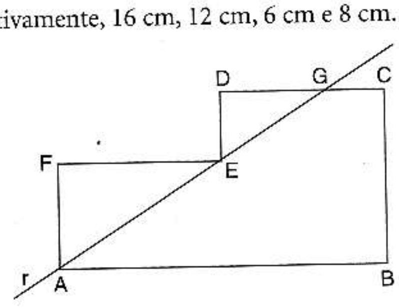
13. (ESPM-SP) Um triângulo retângulo ABC tem os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medindo 5 cm e 12 cm, respectivamente. Considere uma circunferência com centro num ponto do lado $\overline{AB}$, que passa pelo vértice *B* e que tangencia a hipotenusa $\overline{AC}$. A medida do raio dessa circunferência é:

a) 2,4 cm
b) 2,5 cm
c) 2,6 cm
d) 2,8 cm
e) 3,0 cm

14. (Enem-MEC) Quatro estações distribuidoras de energia *A*, *B*, *C* e *D* estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo eqüidistante das estações *A* e *B* e da estrada (reta) que liga as estações *C* e *D*. A nova estação deve ser localizada:

a) no centro do quadrado.
b) na perpendicular à estrada que liga *C* e *D* passando por seu ponto médio, a 15 km dessa estrada.
c) na perpendicular à estrada que liga *C* e *D* passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.
d) no vértice de um triângulo eqüilátero de base $\overline{AB}$, oposto a essa base.
e) no ponto médio da estrada que liga as estações *A* e *B*.

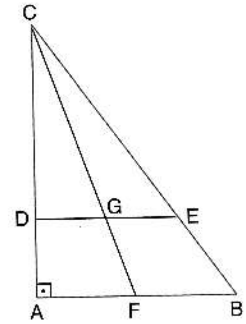
15. (Cefet-MG) A figura mostra o polígono ABCDEF, no qual dois lados consecutivos quaisquer são perpendiculares. O ponto *G* está sobre o lado $\overline{CD}$ e a reta *r*. As medidas dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$ são, respectivamente, 16 cm, 12 cm, 6 cm e 8 cm.



O perímetro do polígono ABCG, em cm, é:

a) 46
b) 48
c) 50
d) 52

16. (Fuvest-SP) Na figura, ABC é um triângulo retângulo de catetos AB = 4 e AC = 5. O segmento $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{AB}$, *F* é um ponto de $\overline{AB}$ e o segmento $\overline{CF}$ intercepta $\overline{DE}$ no ponto *G*, com CG = 4 e GF = 2.

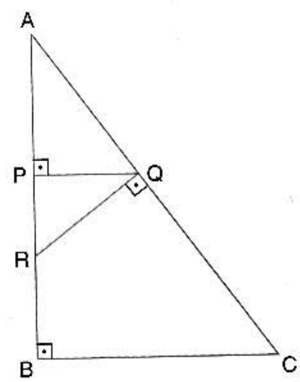


Assim, a área do triângulo CDE é:

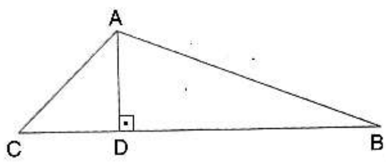
a) $\frac{16}{3}$
b) $\frac{35}{6}$
c) $\frac{39}{8}$
d) $\frac{40}{9}$
e) $\frac{70}{9}$

17. (Mackenzie-SP) Na figura, AC = 5, AB = 4 e PR = 1,2. O valor de $\overline{RQ}$ é:

a) 2
b) 2,5
c) 1,5
d) 1
e) 3



18. (Fuvest-SP) Na figura abaixo, tem-se AC = 3, AB = 4 e CB = 6.



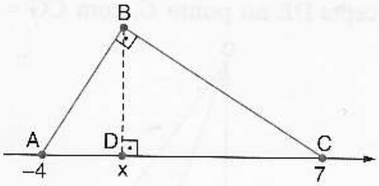
O valor de $\overline{CD}$ é:

a) $\frac{17}{12}$
b) $\frac{19}{12}$
c) $\frac{23}{12}$
d) $\frac{25}{12}$
e) $\frac{29}{12}$

19. (UF-MA) O ângulo agudo de um losango mede 60° e sua diagonal maior tem medida $3\sqrt{2}$ m. Nessas condições, a medida do lado do losango é:

a) 2 m
b) 3 m
c) $\sqrt{2}$ m
d) $\sqrt{3}$ m
e) $\sqrt{6}$ m

20. (U. F. São Carlos-SP) A hipotenusa do triângulo ABC está localizada sobre a reta real, conforme indica a figura.

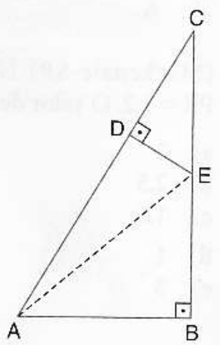


Se $x > 0$ e a medida da altura $\overline{BD}$ relativa ao lado $\overline{AC}$ do triângulo ABC é $2\sqrt{6}$, então x é o número real:

a) $2\sqrt{3}$
b) 4
c) $3\sqrt{2}$
d) 5
e) $3\sqrt{3}$

21. (Fuvest-SP) Na figura, ABC e CDE são triângulos retângulos, $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$ e $BE = 2DE$. Logo, a medida de $\overline{AE}$ é:

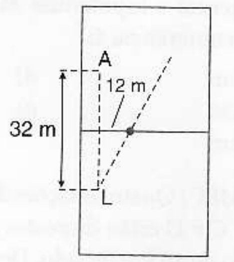
a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$
c) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$
d) $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$
e) $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$



22. (UF-PI) Se o lado de um triângulo eqüilátero tem medida d e sua altura tem medida h, é correto afirmar que:

a) se d é irracional, então h é também irracional.
b) se d é racional, então h também é racional.
c) se h é racional, então d é irracional.
d) se d é irracional, então h é racional.
e) hd é sempre racional.

23. (Fuvest-SP) Um lateral L faz um lançamento para um atacante A, situado 32 m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral e quando passa pela linha de meio do campo está a uma distância de 12 m da linha que une o lateral ao atacante.



Sabendo-se que a linha de meio do campo está à mesma distância dos dois jogadores, a distância mínima que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola será de:

a) 18,8 m
b) 19,2 m
c) 19,6 m
d) 20 m
e) 20,4 m

desafios

1. Mostre que existe uma única solução para o problema a seguir:
"Quatro números inteiros consecutivos expressam as medidas dos lados de um triângulo retângulo e de sua área. Quais são eles?"

2. A figura ao lado mostra a planta de um pequeno terreno.
Além do fato de $\hat{B}$ e $\hat{D}$ serem ângulos retos, a única informação disponível é que os lados do terreno — todos distintos — possuem medidas inteiras em metros.

a) Qual é a menor área possível para esse terreno?
b) É possível a construção de outro terreno quadrangular, semelhante ao primeiro, com o dobro dessa área?