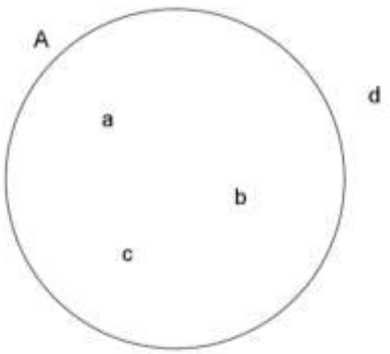
# CONJUNTOS

## 1. NOÇÕES PRIMITIVAS E NOTAÇÃO

**Conjunto**, **elemento** e **pertinência** entre elemento e conjunto são noções primitivas, ou seja, conceitos iniciais para os quais não há definição.

Um conjunto costuma ser denotado por uma letra maiúscula e os seus elementos por letras minúsculas entre chaves. Assim, o conjunto A de elementos a, b e c é denotado por $A=\{a,b,c\}$.

Um conjunto pode ser representado graficamente por um **diagrama de Venn**, onde cada conjunto é representado por uma curva fechada. Os elementos pertencentes ao conjunto localizam-se no interior dessa curva e os elementos não pertencentes ao conjunto, em seu exterior.



A={a,b,c}

Se **a é um elemento do conjunto A**, diz-se que **a pertence a A** e denota-se $a \in A$.

Se **d não é elemento de A**, diz-se que **d não pertence a A** e denota-se $d \notin A$.

Exemplo: Seja o conjunto $A=\{1,2\}$, então $1 \in A$, $2 \in A$ e $3 \notin A$.

Um conjunto pode ser descrito pela citação de seus elementos ou por uma propriedade característica.

Exemplo: $A=\{a,e,i,o,u\}=\{x \mid x \text{ é vogal}\}$

## 2. CONJUNTO VAZIO

O conjunto vazio é o conjunto que não possui elementos e é denotado por $\varnothing$ ou $\{\ \}$.

Exemplo: $A=\{x \mid x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\}=\varnothing$

## 3. CONJUNTO UNITÁRIO

Um conjunto unitário é um conjunto que possui somente um elemento.

Exemplos:

$A=\{1\}$

$B=\{x \mid x \text{ é um número primo par}\}=\{2\}$

$C=\{\{2,3\}\}$ é um conjunto unitário de elemento $\{2,3\}$.

## PROBIZU

O conjunto $\{\varnothing\}$ é um conjunto unitário de elemento $\varnothing$.

## 4. CONJUNTO UNIVERSO

Quando todos os conjuntos em análise são subconjuntos de um mesmo conjunto, este recebe o nome de conjunto universo e denota-se por U.

## 5. CONJUNTOS IGUAIS

Dois conjuntos são iguais se possuem os mesmos elementos.

$$A=B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Exemplos:

$\{a,b,c\}=\{b,c,a\}$

$\{a,b,c\} \neq \{a,b,c,d\}$

$\{a,b,c,a,c\}=\{a,b,c\}$, pois ambos os conjuntos possuem os mesmos elementos a, b e c.

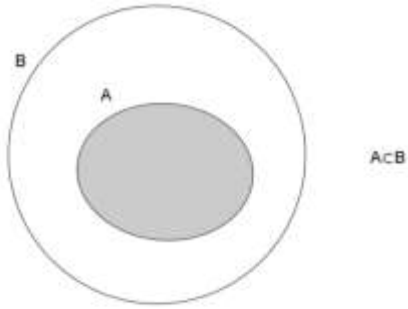
## 6. SUBCONJUNTOS

Um conjunto A é **subconjunto de um conjunto** B, denotado por $A \subset B$, se, e somente se, todo elemento de A é também elemento de B.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Exemplo: $\{a,b\} \subset \{a,b,c,d\}$ ; $\{a,b\} \not\subset \{b,c,d\}$ .

O diagrama de Venn a seguir representa dois conjuntos A e B tais que $A \subset B$ .




## 6.1. PROPRIEDADES DA INCLUSÃO

Para quaisquer conjuntos A, B e C, tem-se:

$\boldsymbol{\varnothing \subset A}$

$\boldsymbol{A \subset A}$ **(propriedade reflexiva)**

$\boldsymbol{(A \subset B \wedge B \subset A) \Rightarrow A = B}$ **(propriedade antissimétrica)**

$\boldsymbol{(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow A \subset C}$ **(propriedade transitiva)**

- A é um **subconjunto próprio** de B quando $A \subset B$ e $A \neq B$ .

Exemplo: $\{1,2\}$ é um subconjunto próprio de $\{1,2,3\}$ .

- O conjunto vazio não tem nenhum subconjunto próprio.
- Qualquer conjunto não vazio tem vazio como subconjunto próprio.

## 6.2. CONJUNTO DAS PARTES (OU CONJUNTO POTÊNCIA)

O conjunto das partes ou conjunto potência de um determinado conjunto A é o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto A e é denotado por P (A).

Exemplo: $A = \{a,b\} \Rightarrow P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

Se #(X) representa a quantidade de elementos do conjunto X, a **quantidade de elementos do conjunto das partes** de um conjunto A pode ser calculada pela expressão abaixo:

$$\boldsymbol{\#(P(A)) = 2^{\#(A)}}$$

## 7. OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

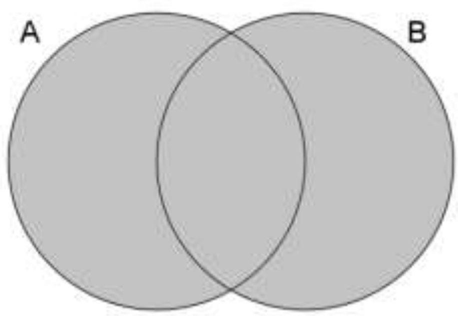
### 7.1. UNIÃO DE CONJUNTOS

Dados dois conjuntos A e B, a sua união é o conjunto formado por todos os elementos que pertençam a A ou a B.

$$\mathbf{A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}}$$

Exemplo: $\{a,b\} \cup \{b,c\} = \{a,b,c\}$

O diagrama de Venn abaixo representa a união dos conjuntos A e B.




**Propriedades:**

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer, então:

- $A \cup A = A$ (idempotente)
- $A \cup \varnothing = A$ (elemento neutro)
- $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

### NÚMERO DE ELEMENTOS DA UNIÃO

O número de elementos da união de conjuntos pode ser calculado com base no princípio da inclusão-exclusão. A seguir estão as relações para o caso de dois e três conjuntos:

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

$$\#(A \cup B \cup C) = \#(A) + \#(B) + \#(C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

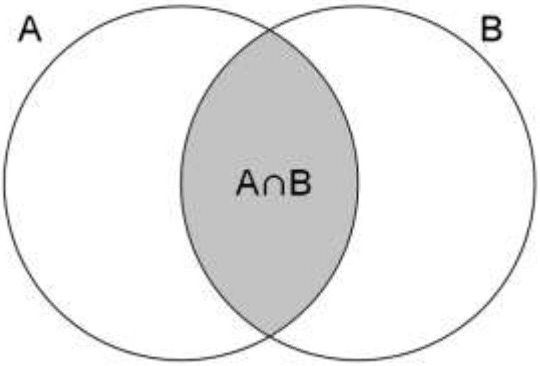
### 7.2. INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS

$$\mathbf{A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}}$$

Dados dois conjuntos A e B, a sua interseção é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e B, ou seja, pelos elementos comuns aos dois conjuntos.

Exemplo: $\{a,b,c,d\}\cap\{c,d,e\}=\{c,d\}$ ; $\{a,b\}\cap\{c,d\}=\varnothing$

O diagrama de Venn a seguir representa a interseção de dois conjuntos A e B.




## CONJUNTOS DISJUNTOS

Conjuntos disjuntos são conjuntos cuja interseção é o conjunto vazio, ou seja, não possuem elementos comuns.

**A e B são disjuntos** $\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$

**Propriedades:**

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer, então:
- $A\cap A=A$ (idempotente)
- $A\cap\varnothing=\varnothing$
- $A\cap B=B\cap A$ (comutativa)
- $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (associativa)

## PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA DA UNIÃO E DA INTERSEÇÃO

$$\mathbf{A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)}$$
$$\mathbf{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$$

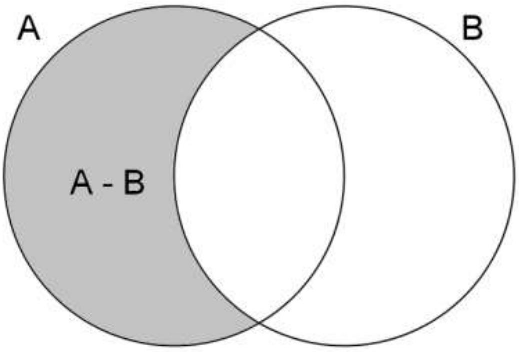
## 7.3. DIFERENÇA DE CONJUNTOS

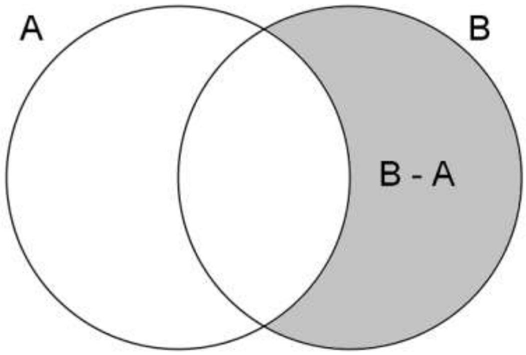
A diferença entre dois conjuntos A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B.

$$\mathbf{A-B=\{x\,|\,x\in A\wedge x\notin B\}}$$

Ex.: $\{a,b,c,d\}-\{c,d,e\}=\{a,b\}$; $\{a,b\}-\{a,b,c\}=\varnothing$; $\{a,b\}-\{c,d\}=\{a,b\}$

Os diagramas de Venn a seguir representam as diferenças $A-B$ e $B-A$.




## 7.4. COMPLEMENTAR DE B EM A

Dados dois conjuntos A e B, tais que $B\subset A$, chama- se complementar de B em relação a A o conjunto $A-B$.

$$\mathbf{B\subset A\Rightarrow C_A^{\,B}=A-B}$$

Exemplo:

$A=\{a,b,c\}$ e $B=\{a,b\}$, $B\subset A\Rightarrow C_A^{\,B}=A-B=\{c\}$

Se B não for um subconjunto de A, então $C_A^{\,B}$ não está definido.

## PROBIZU

**LEIS DE DE MORGAN:**

$$\mathbf{\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}}$$
$$\mathbf{\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}}$$

$C(A)$, $\overline{A}$ e $A'$ são notações que representam o complementar de A em relação ao universo.

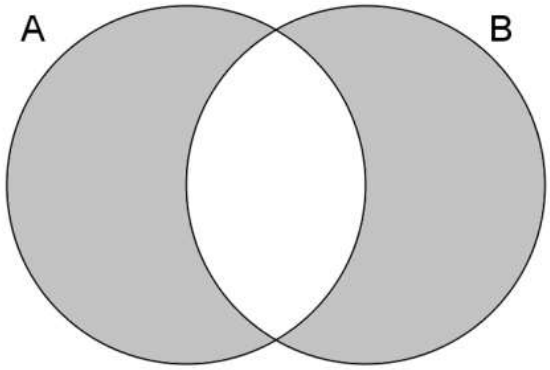
## 7.5. DIFERENÇA SIMÉTRICA

A diferença simétrica de dois conjuntos A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a um, e somente a um, dos conjuntos A e B, e denota-se por $A\Delta B$.

$$\mathbf{A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)}$$

Exemplo: $\{a,b,c\}\Delta\{b,c,d\}=\{a,d\}$

O diagrama de Venn a seguir representa a diferença simétrica de dois conjuntos A e B.



## EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. (CMRJ 2000) Se $A=\{1,\{9\},9,2\}$, assinale a afirmação **errada**:

a) $1 \in A$.

b) $9 \in A$.

c) $\{9\} \in A$.

d) $\{9\} \subset A$.

e) $2 \subset A$.

2. (UFF) São subconjuntos do conjunto $A=\{\{1\};2;\{1,2\};\varnothing\}$ os seguintes conjuntos:

a) $\{\{2\}\}$, $\{1,2\}$.

b) A, $\varnothing$, $\{\{2\}\}$.

c) A, $\varnothing$, $\{1,2\}$.

d) A, $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$.

e) A, $\varnothing$, $\{2\}$, $\{\{1\},2\}$.

3. (UFF 1999) Dado o conjunto $P=\{0,\{0\},\varnothing,\{\varnothing\}\}$, considere as afirmativas:

I. $\{0\} \in P$

II. $\{0\} \subset P$

III. $\varnothing \in P$

Com relação a estas afirmativas conclui-se que:

a. Todas são verdadeiras.

b. Apenas a I é verdadeira.

c. Apenas a II é verdadeira.

d. Apenas a III é verdadeira.

e. Todas são falsas.

4. (CN 1985) Considere os conjuntos $A=\{1,\{1\},2\}$ e $B=\{1,2,\{2\}\}$ e as cinco afirmações:

I. $A-B=\{1\}$

II. $\{2\} \subset (B-A)$

III. $\{1\} \subset A$

IV. $A \cup B = \{1,2,\{1,2\}\}$

V. $B - A = \{\{2\}\}$

Logo:

a) Todas as afirmações estão erradas.

b) Só existe uma afirmação correta.

c) As afirmações ímpares estão corretas.

d) As afirmações III e V estão corretas.

e) As afirmações I e IV são as únicas incorretas.

5. (CN 2007) Observe os conjuntos $A = \{3,\{3\},5,\{5\}\}$ e $B = \{3,\{3,5\},5\}$. Sabendo-se que n (X) representa o numero total de elementos de um conjunto X, e que P (X) é o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto X, pode-se afirmar que:

a) $n(A \cap B) = 3$.

b) $n(A \cup B) = 7$.

c) $n(A - B) = 2$.

d) $n(P(A)) = 32$.

e) $n(P(B)) = 16$.

6. (EPCAR 2002) No concurso para o CPCAR foram entrevistados 979 candidatos dos quais 527 falam a língua inglesa, 251 a língua francesa e 321 não falam nenhum desses idiomas. O número de candidatos que falam as línguas inglesas e francesas é:

a) 778.

b) 658.

c) 120.

d) 131.

7. (EPCAR 2000) Numa cidade residem n famílias e todas leem jornais. Nela há três jornais, A, B e C, e sabe-se que 250 famílias leem jornal A, 180 leem o jornal B, 150 leem C, 110 leem A e B, 95 leem A e C, 80 leem B e C e 40 leem A, B e C. O número de famílias que leem SOMENTE os jornais A ou B é:

a) 70.

b) 185.

c) 320.

d) 280.

8. (EPCAR 1986) Um conjunto A tem n elementos e p subconjuntos e um conjunto B tem 3 elementos a mais do que o conjunto A. Se q é o número de subconjuntos de B, então:

a) $q = 3p$ .

b) $p = 8q$ .

c) $p = q + 8$ .

d) $\frac{p}{q} = \frac{1}{8}$.

e) $q = p + 8$ .

9. (EPCAR 2006) Para uma turma de 80 alunos do CPCAR, foi aplicada uma prova de matemática valendo 9,0 pontos distribuídos igualmente em 3 questões sobre:

1º) FUNÇÃO

2º) GEOMETRIA

3º) POLINÔMIOS

Sabe-se que:

- Apesar de 70% dos alunos terem acertado a questão sobre FUNÇÃO, apenas $\frac{1}{10}$ da turma conseguiu nota 9,0;
- 20 alunos acertaram as questões sobre FUNÇÃO e GEOMETRIA;
- 22 acertaram as questões sobre GEOMETRIA e POLINÔMIOS;
- 18 acertaram as questões sobre FUNÇÃO e POLINÔMIOS.

A turma estava completa nessa avaliação, ninguém tirou nota zero, no critério de correção não houve questões com acertos parciais e o número de acertos apenas em GEOMETRIA é o mesmo que o número de acertos apenas em POLINÔMIOS.

Nessas condições, é correto afirmar que:

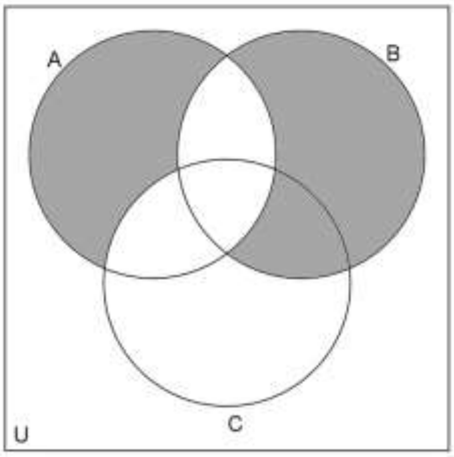
a. O número de alunos que só acertaram a $2^{\underline{a}}$ questão é o dobro do número de alunos que acertaram todas as questões.

b. Metade da turma só acertou uma questão.

c. Mais de 50% da turma errou a terceira questão.

d. Apenas $\frac{3}{4}$ da turma atingiu a média maior ou igual a 5,0.

10. (CN 1991) Considere os conjuntos A, B, C e U no diagrama abaixo. A região sombreada corresponde ao conjunto:




a) $\left[A-(B\cap C)\right]\cup\left[(B\cap C)-A\right]$

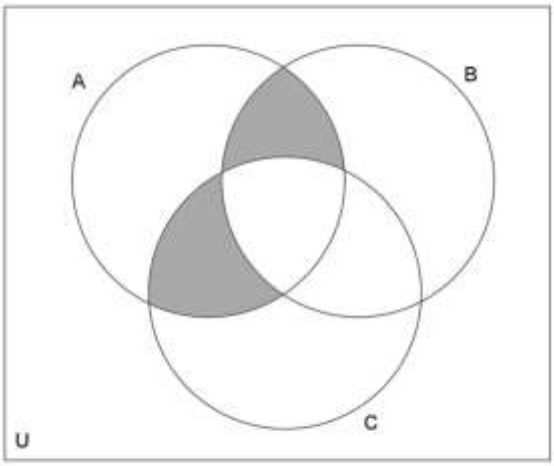
b) $C_{(A\cup B\cup C)}\left[(A\cup B)-C\right]$

c) $C_{A\cup(B\cap C)}\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\right]$

d) $(A\cup B)-\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\right]$

e) $\left[(B\cap C)-A\right]\cup(A-B)$

11. (CN 1993) Considere os diagramas onde A, B, C, e U são conjuntos. A região sombreada pode ser representada por:




a) $(A\cap B)\cup(A\cap C)-(B\cap C)$

b) $(A\cap B)\cup(A\cap C)-(B\cup C)$

c) $(A\cup B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$

d) $(A\cup B)-(A\cup C)\cap(B\cap C)$

e) $(A-B)\cap(A-C)\cap(B-C)$

12. (CN 1998) Dados os conjuntos A, B e C, tais que: $n(B \cup C) = 20$, $n(A \cap B) = 5$ $n(A \cap C) = 4$, $n(A \cap B \cap C) = 1$ e $n(A \cup B \cup C) = 22$, o valor de $n[A - (B \cap C)]$ é:

a) 10.

b) 7.

c) 9.

d) 6.

e) 8.

13. (CMRJ 2011) Uma pesquisa realizada com 300 alunos do Prevest do CMRJ revelou que 135, 153 e 61 desses alunos pretendem fazer concurso para o IME, o ITA e a Escola Naval, respectivamente. Ela mostrou, também, que nenhum dos entrevistados pretende prestar vestibular para as três instituições; que vários deles farão dois desses concursos e que todos farão pelo menos um deles. Sabendo que a quantidade de estudantes que farão as provas para o IME e o ITA é igual ao dobro da quantidade dos que realizarão as provas para o IME e a Escola Naval que, por sua vez, é igual ao dobro dos que prestarão concurso para o ITA e a Escola Naval, a quantidade de entrevistados que farão apenas as provas para a Escola Naval é igual a:

a) 48.

b) 45.

c) 40.

d) 36.

e) 30.

14. (CN 1984) Num colégio verificou-se que 120 alunos não têm pai professor; 130 alunos não têm mãe professora e 5 têm pai e mãe professores. Qual o número de alunos do colégio, sabendo-se que 55 alunos possuem pelo menos um dos pais professor e que não existem alunos irmãos?

a) 125.

b) 135.

c) 145.

d) 155.

e) 165.

15. (CN 1988) Dados os conjuntos !M, N e P tais que $N \subset M$, $n(M \cap N) = 60\% \cdot n(M)$, $n(N \cap P) = 50\% \cdot n(N)$, $n(M \cap N \cap P) = 40\% \cdot n(P)$ e $n(P) = x\% \cdot n(M)$. O valor de x é:

OBS.: n (A) indica o número de elementos do conjunto A.

a) 80

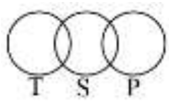
b) 75

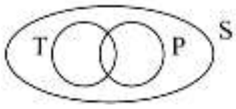
c) 60

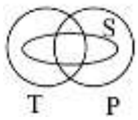
d) 50

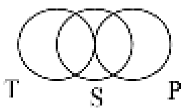
e) 45

16. (EEAr 2000) Os conjuntos S, T e P são tais que todo elemento de S é elemento de T ou P. O diagrama que pode representar esses conjuntos é:

a) 


b) 


c) 


d) 


17. (EsPCEx 1996) Numa pesquisa feita junto a 200 universitários sobre o hábito de leitura de dois jornais (A e B), chegou-se às seguintes conclusões:

I. 80 universitários leem apenas um jornal;

II. O número dos que não leem nenhum dos jornais é o dobro do número dos que leem ambos os jornais.

III. O número dos que leem o jornal A é o mesmo dos que leem apenas o jornal B.

Com base nesses dados, podemos afirmar que o número de universitários que leem o jornal B é:

a) 160.

b) 140.

c) 120.

d) 100.

e) 80.

18. (EsPCEx 2014) Uma determinada empresa de biscoitos realizou uma pesquisa sobre a preferência de seus consumidores em relação a seus três produtos: biscoitos *cream cracker*, *wafer* e recheados. Os resultados indicaram que:

- 65 pessoas compram *cream crackers*.
- 85 pessoas compram *wafers.*
- 170 pessoas compram biscoitos recheados.
- 20 pessoas compram *wafers*, *cream crackers* e recheados.
- 50 pessoas compram *cream crackers* e recheados.
- 30 pessoas compram *cream crackers* e *wafers*.
- 60 pessoas comram *wafers* e recheados.
- 50 pessoas não compram biscoitos dessa empresa.

Determine quantas pessoas responderam essa pesquisa.

a) 200.

b) 250.

c) 320.

d) 370.

e) 530.

19. (EFOMM 1995) Num grupo de 99 esportistas, 40 jogam vôlei; 20 jogam vôlei e “Futevôlei”; 22 jogam “Futevôlei” e basquete; 18 jogam vôlei e basquete; 11 jogam as 3 modalidades. O número de pessoas que jogam “Futevôlei” é igual ao número de pessoas que jogam basquete. O número de pessoas que jogam “Futevôlei” ou basquete e não jogam vôlei é:

a) 55.

b) 56.

c) 57.

d) 58.

e) 59.

20. (EFOMM 2002) Na Bienal do Livro realizada no Riocentro, Rio de Janeiro, os livros A, B e C de um determinado autor apresentaram os seguintes percentuais de vendas aos leitores:

- 48% compraram o livro A;
- 45% compraram o livro B;
- 50% compraram o livro C;
- 18% compraram os livros A e B;
- 25% compraram os livros B e C;
- 15% compraram os livros A e C;

- 5% não compraram nenhum dos livros.

Qual o percentual de leitores que compraram um, e apenas um, dos três livros?

a) 10%.

b) 18%.

c) 29%.

d) 38%.

e) 57%.

21. (EFOMM 2004) Em uma universidade, 80% dos alunos leem o jornal $x$ e 60% o jornal $y$. Sabendo-se que todo aluno lê pelo menos um dos jornais, qual é o percentual de alunos que leem ambos os jornais?

a) 10%.

b) 20%.

c) 25%.

d) 30%.

e) 40%.

22. (EFOMM 2006) Sejam os conjuntos $U=\{1,2,3,4\}$ e $A=\{1,2\}$. O conjunto B tal que $B\cap A=\{1\}$ e $B\cup A=U$ é:

a) $\varnothing$.

b) $\{1\}$.

c) $\{1,2\}$.

d) $\{1,3,4\}$.

e) $U$.

23. (EFOMM 2007) Numa companhia de 496 alunos, 210 fazem natação, 260 musculação e 94 estão impossibilitados de fazer esportes. Neste caso, o número de alunos que fazem só natação é:

a) 116.

b) 142.

c) 166.

d) 176.

e) 194.

24. (EFOMM 2010) Analise as afirmativas abaixo.

I. Seja K o conjunto dos quadriláteros planos, seus subconjuntos são:

$P=\{x\in K \mid x \text{ possui lados opostos paralelos}\}$ ;

$L=\{x\in K \mid x \text{ possui 4 lados congruentes}\}$ ;

$R=\{x\in K \mid x \text{ possui 4 ângulos retos}\}$ ;

$Q=\{x\in K \mid x \text{ possui 4 lados congruentes e 2 ângulos com medidas iguais}\}$ .

Logo, $L\cap R=L\cap Q$ .

II. Seja o conjunto $A=\{1,2,3,4\}$ , nota-se que A possui somente 4 subconjuntos.

III. Observando as seguintes relações entre conjuntos: $\{a,b,c,d\}\cup Z=\{a,b,c,d,e\}$ , $\{c,d\}\cup Z=\{a,c,d,e\}$ e $\{b,c,d\}\cap Z=\{c\}$ ; pode-se concluir que $Z=\{a,c,e\}$ .

Em relação às afirmativas acima, assinale a opção correta:

a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

b) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

c) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

d) Apenas a afirmativa III é verdadeira.

e) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

25. (EFOMM 2010) Se X é um conjunto com um número finito de elementos, n(X) representa o número de elementos do conjunto X. Considere os conjuntos A, B e C com as seguintes propriedades:

- $n(A\cup B\cup C)=25$
- $n(A-C)=13$
- $n(B-A)=10$
- $n(A\cap C)=n(C-(A\cup B))$

O maior valor possível de n (C) é igual a:

a) 9.

b) 10.

c) 11.

d) 12.

e) 13.

26. (EFOMM 2012) Considere-se o conjunto universo U, formado por uma turma de cálculo da Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante (EFOMM) e composta por alunos e alunas. São dados os subconjuntos de U:

A: conjunto formado pelos alunos;

B: conjunto formado por todos os alunos e alunas aprovados.

Pode-se concluir que $C_U^B - (A - B)$ é a quantidade de:

a) Alunos aprovados.

b) Alunos reprovados.

c) Todos os alunos e alunas aprovados.

d) Alunas aprovadas.

e) Alunas reprovadas.

27. (EFOMM 2014) Denotaremos por n (X) o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam A, B, C conjuntos tais que $n(A \cup B) = 14$, $n(A \cup C) = 14$ e $n(B \cup C) = 15$, $n(A \cup B \cup C) = 17$ e $n(A \cap B \cap C) = 3$. Então $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a:

a) 18.

b) 20.

c) 25.

d) 29.

e) 32.

28. (EN 2010) Os 36 melhores alunos do Colégio Naval submeteram-se a uma prova de 3 questões para estabelecer a antiguidade militar. Sabendo que dentre esses alunos, 5 só acertaram a primeira questão, 6 só acertaram a segunda, 7 só acertaram a terceira, 9 acertaram a primeira e a segunda, 10 acertaram a primeira e a terceira, 7 acertaram a segunda e a terceira e, 4 erraram todas as questões, podemos afirmar que o número de alunos que não acertaram todas as 3 questões é igual a:

a) 6.

b) 8.

c) 26.

d) 30.

e) 32.

29. (ITA 2008) Sejam $X$, $Y$, $Z$, $W$ subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $(X-Y)\cap Z=\{1,2,3,4\}$, $Y=\{5,6\}$, $Z\cap Y=\varnothing$, $W\cap(X-Z)=\{7,8\}$, $X\cap W\cap Z=\{2,4\}$. Então o conjunto $[X\cap(Z\cup W)]-[W\cap(Y\cup Z)]$ é igual a:

a) $\{1,2,3,4,5\}$

b) $\{1,2,3,4,7\}$

c) $\{1,3,7,8\}$

d) $\{1,3\}$

e) $\{7,8\}$

30. (ITA 2012) Dos n alunos de um colégio, cada um estuda pelo menos uma das três matérias: Matemática, Física e Química. Sabe-se que 48% dos alunos estudam Matemática, 32% estudam Química e 36% estudam Física. Sabe-se, ainda, que 8% dos alunos estudam Física e Matemática, enquanto 4% estudam todas as três matérias. Os alunos que estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química totalizam 63 estudantes. Determine n.

## GABARITO

1.

a) $1 \in A$. **Verdadeira**, pois 1 é elemento de A.

b) $9 \in A$. **Verdadeira**, pois 9 é elemento de A.

c) $\{9\} \in A$. **Verdadeira**, pois {9} é elemento de A.

d) $\{9\} \subset A$. **Verdadeira**, pois {9} é subconjunto de A.

e) $2 \subset A$. **Falsa**, 2 é um elemento de A e não um subconjunto.

**RESPOSTA: E**

2.

$A \subset A$

$\varnothing \subset A$

$\{2\} \subset A$, pois 2 é elemento de A.

$\{\{1\},2\} \subset A$, pois {1} e 2 são elementos de A.

$\{\{2\}\}$ não é subconjunto de A, pois {2} não é elemento de A.

$\{1,2\}$ não é subconjunto de A, pois 1 não é elemento de A.

$\{1\}$ não é subconjunto de A, pois 1 não é elemento de A.

**RESPOSTA: E**

3.

I. **Verdadeira**, pois $\{0\}$ é elemento de P.

II. **Verdadeira**, pois 0 é elemento de P e consequentemente {0} é subconjunto de P.

III. **Verdadeira**, pois $\varnothing$ é elemento de P. Note ainda que também é verdadeiro $\varnothing \subset P$, $\{\varnothing\} \in P$, $\{\varnothing\} \subset P$ e $\{\{\varnothing\}\} \subset P$.

**RESPOSTA: A**

4.

**I. FALSA**, pois $A - B = \{\{1\}\}$

**II. FALSA**, pois $B - A = \{\{2\}\} \Rightarrow \{2\} \in (B - A) \wedge \{2\} \not\subset (B - A)$

**III. VERDADEIRA**, pois {1} é um subconjunto de A. Note que {1} também é um elemento de A. Assim, também é verdade que $\{1\} \in A$ e $\{\{1\}\} \subset A$.

**IV. FALSA**, pois $A \cup B = \{1,2,\{1\},\{2\}\}$.

**V. VERDADEIRA**, pois $B - A$ é um conjunto formado pelos elementos de B que não são elementos de A, ou seja, $B - A = \{\{2\}\}$.

**RESPOSTA: D**

5.

$A \cup B = \{3,\{3\},5,\{5\},\{3,5\}\} \Rightarrow n(A \cup B) = 5$

$A \cap B = \{3,5\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$

$A - B = \{\{3\},\{5\}\} \Rightarrow n(A - B) = 2$

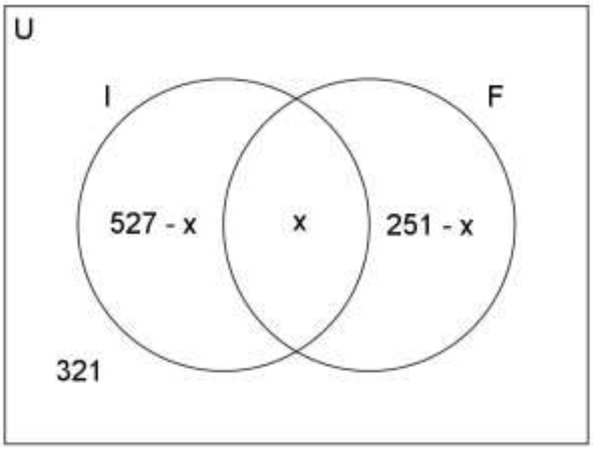
$A = \{3,\{3\},5,\{5\}\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow n(P(A)) = 2^4 = 16$

$B = \{3,\{3,5\},5\} \Rightarrow n(B) = 3 \Rightarrow n(P(B)) = 2^3 = 8$

Logo, a alternativa correta é (C).

**RESPOSTA: C**

6. O diagrama a seguir representa a situação descrita no enunciado. O preenchimento do diagrama deve sempre começar pela interseção dos conjuntos.




$979 = 321 + (527 - x) + (251 - x) + x \Leftrightarrow x = 120$

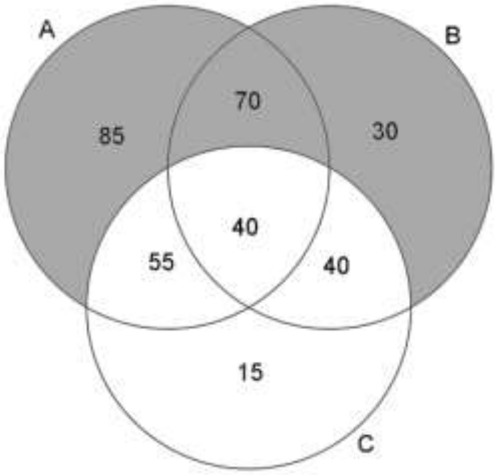
Outra forma é observar que $\#(I \cup F) = 979 - 321 = 658$ e que

$\#(I \cup F) = \#(I) + \#(F) - \#(I \cap F) \Leftrightarrow 658 = 527 + 251 - \#(I \cap F) \Leftrightarrow \#(I \cap F) = 120$

O número de candidatos que falam as línguas inglesas e francesas é $\#(I \cap F) = 120$

**RESPOSTA: C**

7. O diagrama a seguir representa a situação descrita no enunciado. O preenchimento do diagrama deve começar pela interseção dos três conjuntos.




O número de famílias que leem SOMENTE os jornais A ou B é $\#((A \cup B) - C) = 85 + 70 + 30 = 185$ que é a região sombreada do diagrama.

**RESPOSTA: B**

8.

$2^n = p$

$2^{n+3} = q \Leftrightarrow 2^n \cdot 2^3 = q \Rightarrow p \cdot 8 = q \Leftrightarrow \frac{p}{q} = \frac{1}{8}$

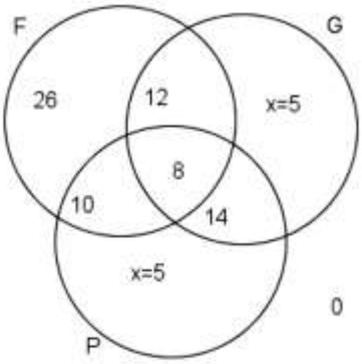
**RESPOSTA: D**

9.

$\frac{70}{100} \cdot 80 = 56$ alunos acertaram a questão de função

$\frac{1}{10} \cdot 80 = 8$ alunos acertaram todas as questões

Colocando todas as informações num diagrama de Venn:



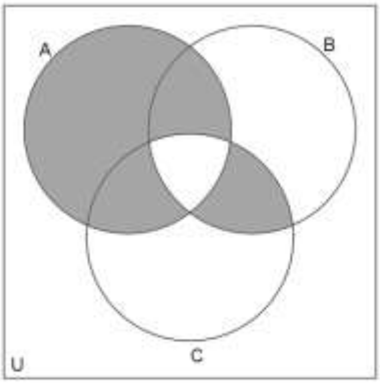

$x + x + 8 + 10 + 12 + 14 + 26 = 80 \Leftrightarrow x = 5$

Analisando as opções, verifica-se que apenas a opção c é correta, pois $26+12+5=43$ alunos erraram a 3ª questão o que é mais de 50% da turma.

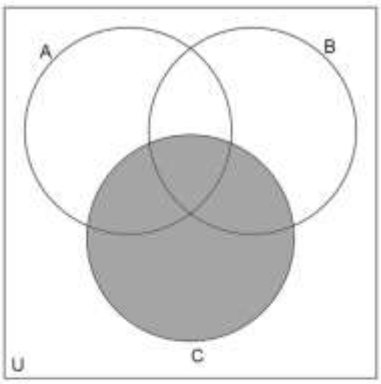
**RESPOSTA: C**

10. Vamos confeccionar o diagrama de Venn de cada uma das alternativas e comparar com o do enunciado.

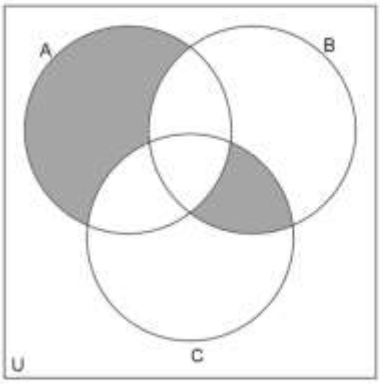
a) $\left[A-(B\cap C)\right]\cup\left[(B\cap C)-A\right]$



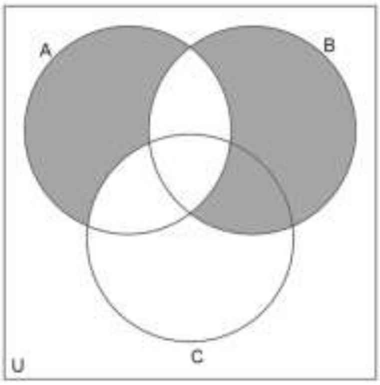

b) $C_{(A\cup B\cup C)}\left[(A\cup B)-C\right]=(A\cup B\cup C)-\left[(A\cup B)-C\right]$



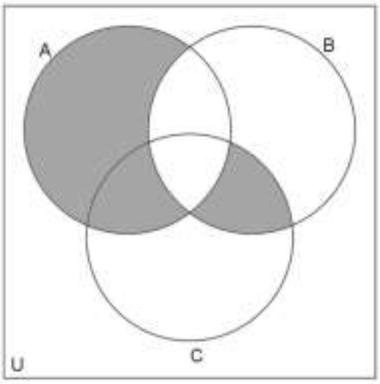

c) $C_{A\cup(B\cap C)}\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\right]=A\cup(B\cap C)-\left[(A\cap B)\cup(A\cap C)\right]$



d) $(A \cup B) - [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$




e) $[(B \cap C) - A] \cup (A - B)$

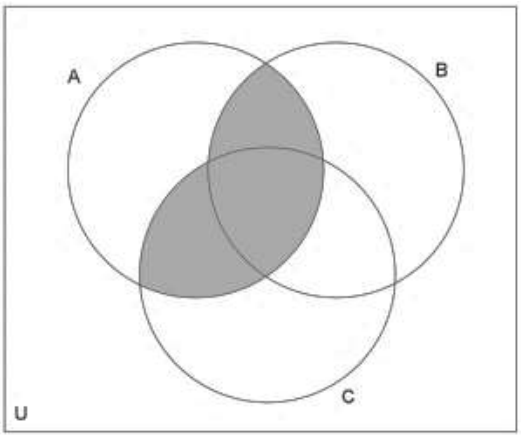



Logo, a opção correta é a letra (d).

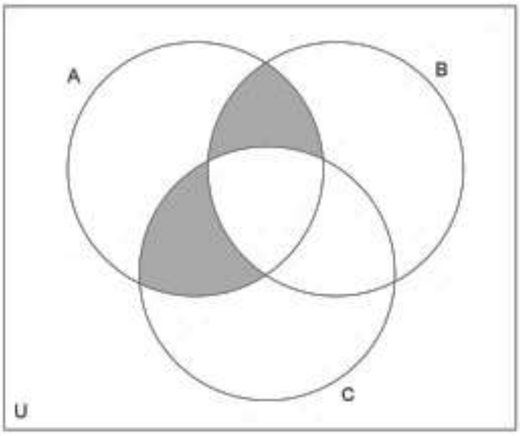
**RESPOSTA: D**

11.

a) $(A \cap B) \cup (A \cap C) - (B \cap C)$ : corresponde ao diagrama do enunciado.

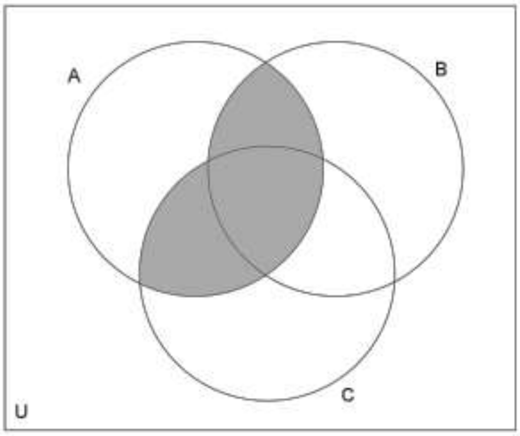



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

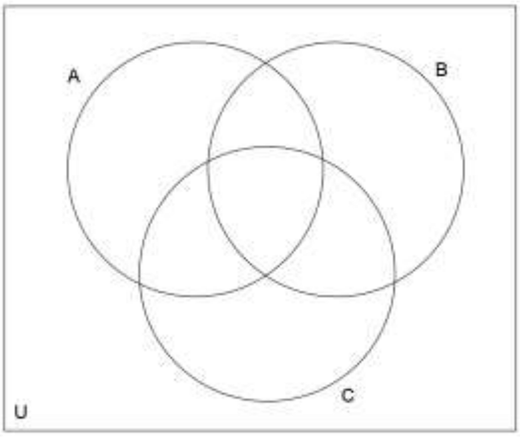



$(A \cap B) \cup (A \cap C) - (B \cap C)$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) - (B \cup C)$: NÃO corresponde ao diagrama do enunciado.

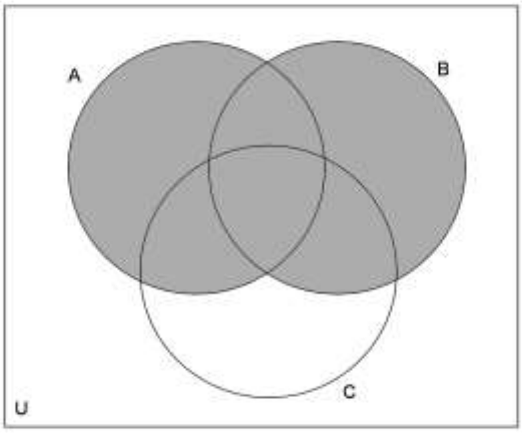



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$



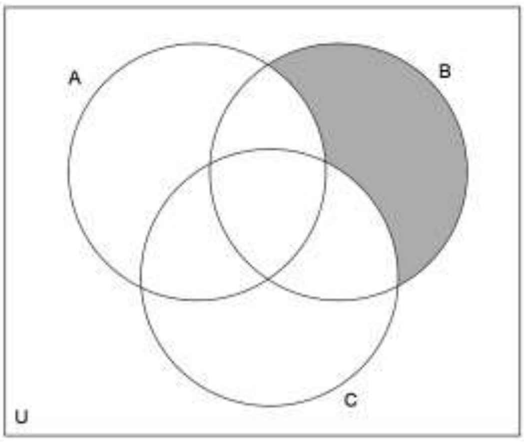

$(A \cap B) \cup (A \cap C) - (B \cup C)$

c) $(A \cup B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) = A \cup B$: NÃO corresponde ao diagrama do enunciado.

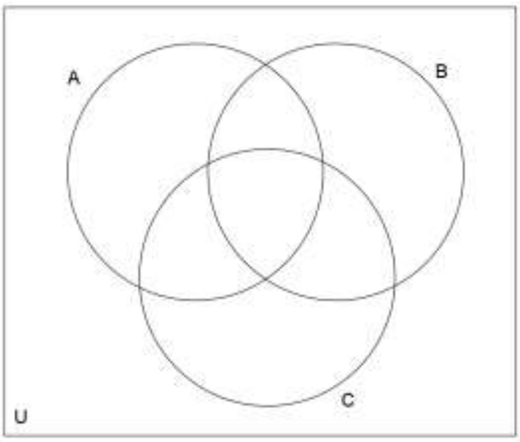



$(A \cup B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

d) $(A \cup B) - (A \cup C) \cap (B \cap C)$: NÃO corresponde ao diagrama do enunciado.

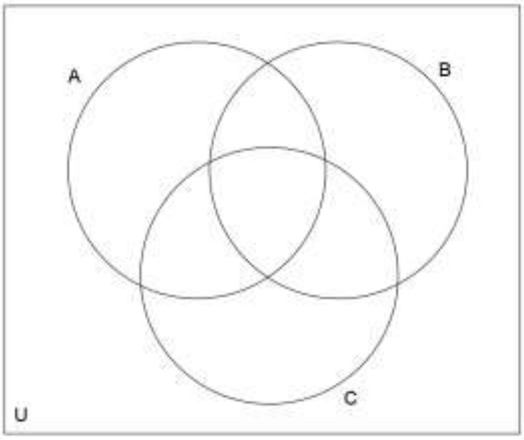



$(A \cup B) - (A \cup C)$




$(A \cup B) - (A \cup C) \cap (B \cap C)$

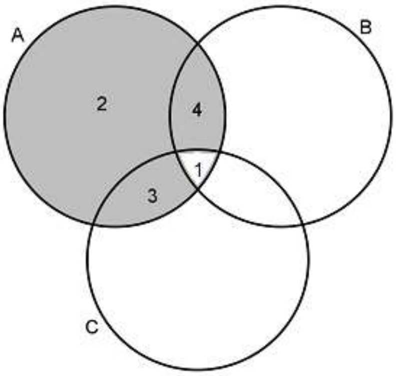
e) $(A-B)\cap(A-C)\cap(B-C)=\varnothing$: NÃO corresponde ao diagrama do enunciado.




$(A-B)\cap(A-C)\cap(B-C)$

**RESPOSTA: A**

12. Esse problema pode ser resolvido facilmente com auxílio de um diagrama de Venn.



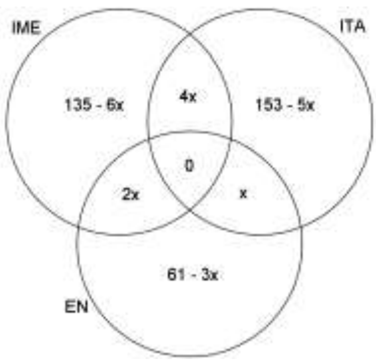

Primeiro preenche-se $n(A\cap B\cap C)=1$, depois $n(A\cap B)=5$ e $n(A\cap C)=4$.

A região que representa $(A\cup B\cup C)-(B\cup C)$ tem $22-20=2$.

Logo, o conjunto procurado, que corresponde à região hachurada, é tal que $n\left[A-(B\cap C)\right]=2+3+4=9$.

**RESPOSTA: C**

13.

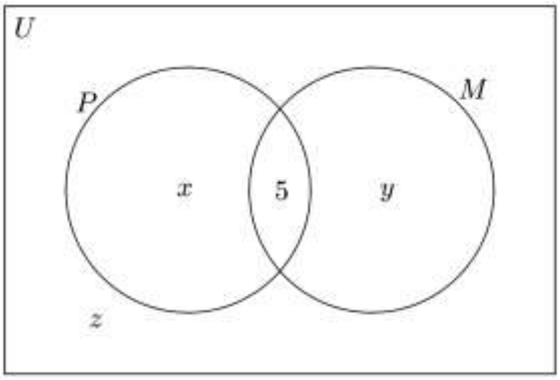


Como há um total de 300 entrevistados e que todos os entrevistados farão pelo menos um dos vestibulares, então $(135-6x)+(153-5x)+(61-3x)+4x+2x+x=300 \Leftrightarrow x=7$.

Logo, a quantidade de entrevistados que farão apenas as provas para a Escola Naval é igual a $61-3x=61-3\cdot 7=40$.

**RESPOSTA: C**

14. Na figura abaixo, P é o conjunto dos alunos que possuem pai professor e M é o conjunto dos alunos que possuem mãe professora. A interseção de P e M que é o conjunto dos alunos que têm pai e mãe professores.




Os números ou variáveis representados em cada região do diagrama representam a quantidade de elementos da região.

Como 120 alunos não têm pai professor, então $y+z=120$.

Como 130 alunos não têm mãe professora, então $x+z=130$.

Como 55 alunos possuem pelo menos um dos pais professor, então $x+y+5=55 \Leftrightarrow x+y=50$.

Somando as três igualdades obtidas, temos: $2\cdot(x+y+z)=300 \Leftrightarrow x+y+z=150$.

Assim, o número de alunos do colégio é $n(U)=x+y+z+5=150+5=155$.

**RESPOSTA: D**

15.

$N \subset M \Rightarrow n(M \cap N)=n(N)=60\% \cdot n(M)=0,6\cdot n(M)$

$n(N \cap P)=50\% \cdot n(N)=0,5\cdot n(N)=0,5\cdot 0,6\cdot n(M)=0,3\cdot n(M)$

$N \subset M \Rightarrow M \cap N \cap P=N \cap P \Rightarrow n(M \cap N \cap P)=n(N \cap P) \Rightarrow 0,4\cdot n(P)=0,3\cdot n(M)$

$\Leftrightarrow n(P)=0,75\cdot n(M)=75\% \cdot n(M)$

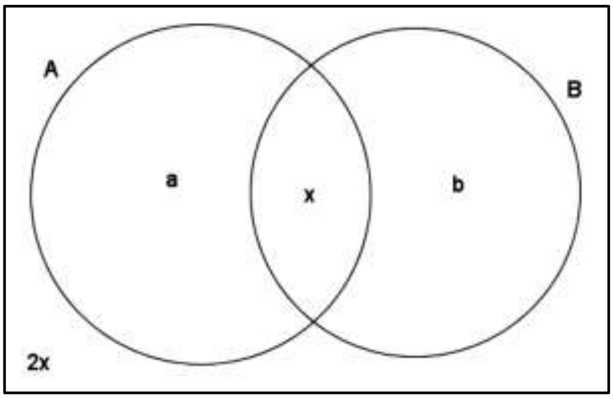
Logo, $x=75$.

**RESPOSTA: B**

16. Como todo elemento de S é elemento de T ou P, então $S \subset (T \cup P)$, o que está representado pelo diagrama c.

**RESPOSTA: C**

17.

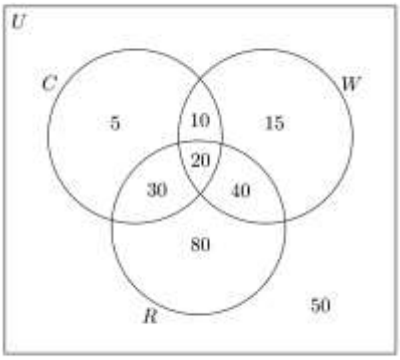



$$\begin{cases} 3x+a+b=200 \\ a+b=80 \\ a+x=b \end{cases} \Rightarrow 3x = 200-80 = 120 \Leftrightarrow x = 40 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=80 \\ b-a=40 \end{cases} \Rightarrow b = 60 \text{ e } a = 20$$

O número de universitários que leem o jornal B é $x+b=40+60=100$.

**RESPOSTA: D**

18. Vamos representar as informações do enunciado em um diagrama de Venn, onde o conjunto C representa a pessoas que compram *cream cracker*, o conjunto W as pessoas que compram *wafer* e o conjunto R as pessoas que compram recheados.




Assim, o número de pessoas que respondeu à pesquisa foi $n(U)=170+15+10+5+50=250$.

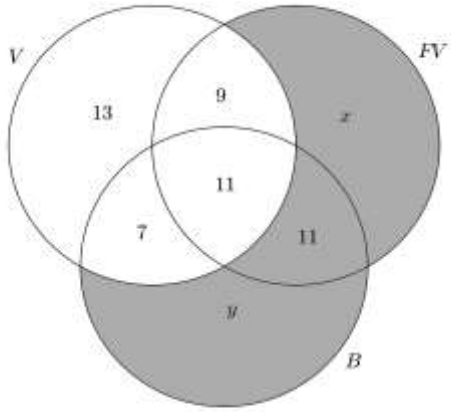
**RESPOSTA: B**

19.

$x+31=y+29 \Leftrightarrow y-x=2$

$40+x+y+11=99 \Leftrightarrow x+y=48$

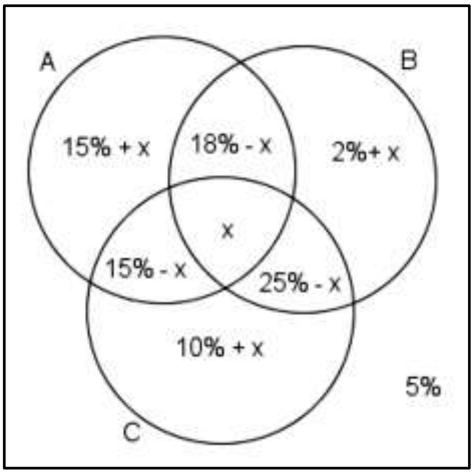
$\Leftrightarrow y=25 \wedge x=23$




A região sombreada corresponde às pessoas que jogam "Futevôlei" ou basquete e não jogam vôlei, que totalizam $x+y+11=48+11=59$.

**RESPOSTA: E**

20.




$$15\%+x+2\%+x+10\%+x+18\%-x+15\%-x+25\%-x+x+5\%=100\% \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 90\%+x=100\% \Leftrightarrow x=10\%$$

Percentual de leitores que compraram um, e apenas um, dos três livros:

$$15\%+x+2\%+x+10\%+x=27\%+3x=57\%$$

**RESPOSTA: E**

21. Sejam N o total de alunos da universidade e X e Y, o conjunto dos alunos que leem os jornais x e y, respectivamente:

$$\#(X)=80\%\cdot N$$

$$\#(Y)=60\%\cdot N$$

$$\#(X\cup Y)=100\%\cdot N$$

$$\#(X\cup Y)=\#(X)+\#(Y)-\#(X\cap Y) \Leftrightarrow 100\%\cdot N=80\%\cdot N+60\%\cdot N-\#(X\cap Y)$$

$\Leftrightarrow \#(X \cap Y) = 40\% \cdot N$

Portanto, o percentual de alunos que leem ambos os jornais é 40%.

**RESPOSTA: E**

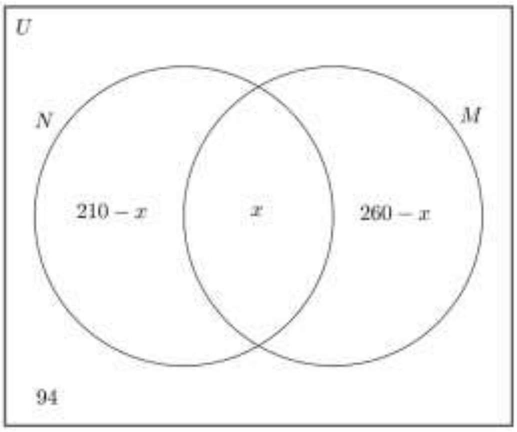
22.

$B \cap A = \{1\} \Rightarrow 1 \in B \ \wedge \ 2 \notin B$

$B \cup A = U \Rightarrow B = \{1,3,4\}$

**RESPOSTA: D**

23.




$\#(U) = (210 - x) + x + (260 - x) + 94 = 496 \Leftrightarrow x = 68$

Portanto, o número de alunos que fazem só natação é $210 - x = 210 - 68 = 142$.

**RESPOSTA: B**

24.

I. **FALSA**

$L \cap R \neq L \cap Q$, basta notar que losangos pertencem a $L \cap Q$, mas não pertencem a $L \cap R$, no qual só há quadrados.

II. **FALSA**

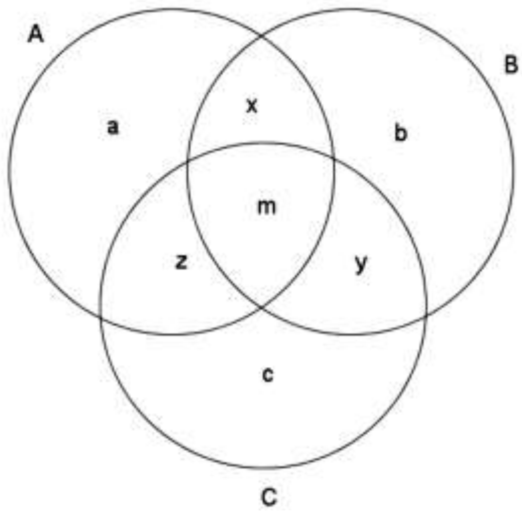
A quantidade de subconjuntos de A é $2^4 = 16$.

III. **VERDADEIRA**

$$\left.\begin{array}{l} \{a,b,c,d\} \cup Z = \{a,b,c,d,e\} \Rightarrow Z \subset \{a,b,c,d,e\} \ \wedge \ e \in Z \\ \{c,d\} \cup Z = \{a,c,d,e\} \Rightarrow Z \subset \{a,c,d,e\} \ \wedge \ a \in Z \ \wedge \ b \notin Z \\ \{b,c,d\} \cap Z = \{c\} \Rightarrow c \in Z \ \wedge \ b \notin Z \ \wedge \ d \notin Z \end{array}\right\} \Rightarrow Z = \{a,c,e\}$$

**RESPOSTA: D**

25. Representando os conjuntos A, B e C no diagrama de Venn-Euler, temos:




$n(A \cup B \cup C) = 25 \Leftrightarrow a+b+c+x+y+z+m = 25$

$n(A - C) = 13 \Leftrightarrow a+x = 13$

$n(B - A) = 10 \Leftrightarrow b+y = 10$

$n(A \cap C) = n(C - (A \cup B)) \Leftrightarrow m+z = c \ (*)$

$m+z+c = (a+b+c+x+y+z+m) - (a+x) - (b+y) = 25 - 13 - 10 = 2$

$(*) \Rightarrow c+c = 2 \Leftrightarrow c = m+z = 1$

$n(C) = c+m+z+y = 2+y$

$b+y = 10 \Rightarrow y \le 10 \Rightarrow n(C)_{MAX} = 2+10 = 12$

**RESPOSTA: D**

26.

$C_U^B = U - B$ é o conjunto formado por todos os alunos e alunas reprovados.

$(A - B)$ é o conjunto formado pelos alunos reprovados.

$C_U^B - (A - B)$ é o conjunto formado pelos elemento que pertencem a $C_U^B$ e não pertencem a $(A - B)$, ou seja, é o conjunto das **alunas reprovadas**.

**RESPOSTA: D**

27. Vamos lançar mão das expressões do princípio da inclusão-exclusão para dois e três conjuntos. Assim, temos:

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ (1)

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (2)

$n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C)$ (3)

$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$ (4)

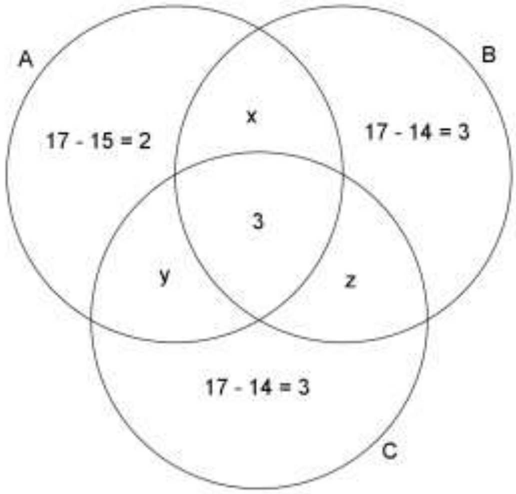
Subtraindo as igualdades (2), (3) e (4) da igualdade (1), temos:

$n(A \cup B \cup C) - n(A \cup B) - n(A \cup C) - n(B \cup C) = -n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B \cap C)$

$\Leftrightarrow n(A) + n(B) + n(C) = n(A \cup B) + n(A \cup C) + n(B \cup C) - n(A \cup B \cup C) + n(A \cap B \cap C)$

Substituindo os valores do enunciado, temos: $n(A) + n(B) + n(C) = 14 + 14 + 15 - 17 + 3 = 29$.

Essa questão também pode ser resolvida da seguinte forma, usando diagramas de Venn:



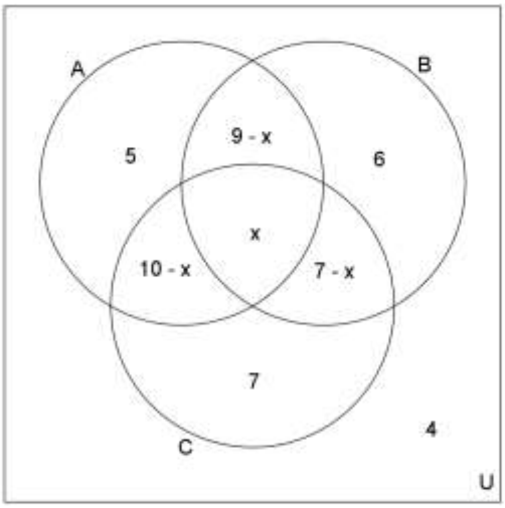

$n(A \cup B) = 14 \Rightarrow x + y + z + 8 = 14 \Leftrightarrow x + y + z = 6$

$n(A) + n(B) + n(C) = (x + y + 5) + (x + z + 6) + (y + z + 6) = 2(x + y + z) + 17 = 2 \cdot 6 + 17 = 29$

**RESPOSTA: D**

28. Seja A, B e C os conjuntos dos alunos que acertaram a primeira, a segunda e a terceira questões, respectivamente e U o conjunto universo no qual se encontram os 36 melhores alunos do CN.

Podemos representar os dados acima no diagrama de Venn a seguir:



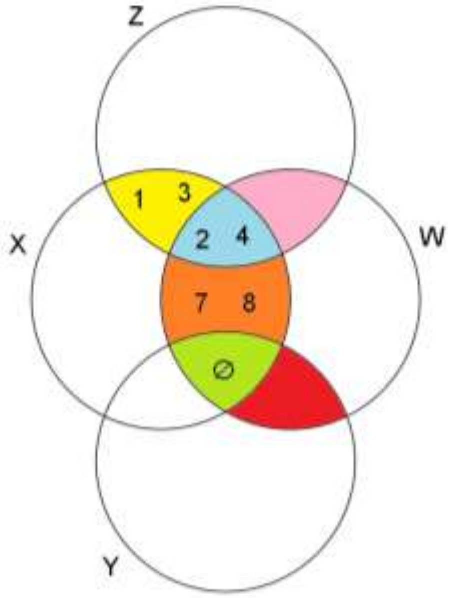

Como $n(U) = 36$, então $5 + 6 + 7 + (9 - x) + (10 - x) + (7 - x) + x + 4 = 36 \Leftrightarrow x = 6$.

O número de alunos que não acertaram todas as três questões é

$n(U - (A \cap B \cap C)) = n(U) - n(A \cap B \cap C) = 36 - x = 36 - 6 = 30$.

**RESPOSTA: D**

29.




O diagrama de Venn a seguir representa os conjuntos X*, Y, Z,* W, onde $Z \cap Y = \varnothing$.

$X \cap W \cap Z = \{2,4\}$ é a região azul.

$Z \cap Y = \varnothing \Rightarrow (X - Y) \cap Z = X \cap Z = \{1,2,3,4\}$ é a união da região azul e da amarela, logo a região amarela corresponde a $\{1,3\}$.

$W \cap (X - Z) = \{7,8\}$ é a união da região verde e da laranja. Mas, $Y = \{5,6\}$ e a região verde está contida em Y, então a região verde é vazia, e a região laranja corresponde a $\{7,8\}$.

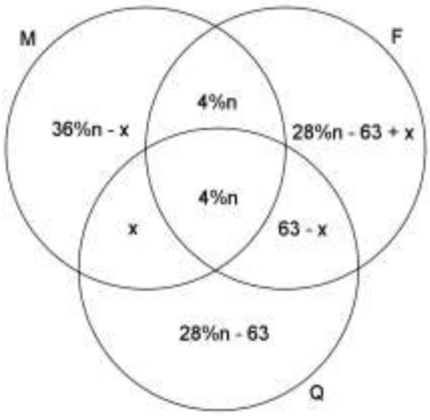
O conjunto $[X \cap (Z \cup W)]$ corresponde à união das regiões amarela, azul, laranja e verde; o conjunto $[W \cap (Y \cup Z)]$ corresponde à união das regiões rosa, azul, verde e vermelha. Portanto, $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ corresponde à união das regiões amarela e laranja, ou seja, $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)] = \{1,3,7,8\}$.

**RESPOSTA: C**

30.

**1ª RESOLUÇÃO:**

Representando as informações do enunciado em um diagrama de Venn, sendo x a quantidade de estudantes que estudam apenas Matemática e Química, temos:




$\#(M \cup F \cup Q) = n$

$\Rightarrow 48\%n + (28\%n - 63 + x) + (63 - x) + (28\%n - 63) = n$

$\Leftrightarrow 4\%n = 63 \Leftrightarrow n = 1575$

**2ª RESOLUÇÃO:**

$\#(M)=48\%\cdot n$; $\#(Q)=36\%\cdot n$; $\#(F)=32\%\cdot n$;

$\#(F\cap M)=8\%\cdot n$

$\#(M\cap F\cap Q)=4\%\cdot n$

$\#(M\cap Q)+\#(F\cap Q)=63+2\#(M\cap F\cap Q)=63+8\%n$

Onde é a quantidade de alunos que estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química.

Usando a expressão do princípio da inclusão-exclusão para três conjuntos, temos:

$\#(M\cup F\cup Q)=\#(M)+\#(F)+\#(Q)$

$-\#(M\cap F)-\#(M\cap Q)-\#(F\cap Q)+\#(M\cap F\cap Q)$

$\Leftrightarrow 100\%\cdot n=48\%\cdot n+36\%\cdot n+32\%\cdot n-8\%\cdot n$

$-(63+8\%\cdot n)+4\%\cdot n \Leftrightarrow 4\%\cdot n=63 \Leftrightarrow n=1575$

Nessa resolução adotamos a notação # (A) para representar a quantidade de elementos de um conjunto finito A para evitar confusão.

**RESPOSTA: 1575**