Capítulo 5
Geometria analítica: cônicas

Para pensar

1. Resposta pessoal.

2. Resposta possível: antena parabólica que capta sinais vindos de satélites.

Exercícios propostos

1. a) Temos:

- $PF_1 = \sqrt{(1-(-2))^2 + (2-(-2))^2} =$
  $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
- $PF_2 = |2 - 1| = 1$

Então, a medida $2a$ do eixo maior é dada por:
$2a = PF_1 + PF_2 = 5 + 1 = 6$

b) A distância focal $2c$ é dada por:
$2c = F_1F_2 = \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-2)^2} =$
$= \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$

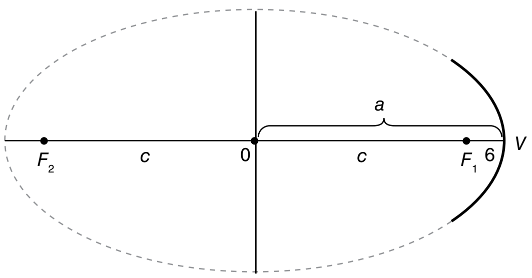
c) Lembrando que $a^2 = b^2 + c^2$, temos:
$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow 9 = b^2 + 8$$
$\therefore b = 1$
Dessa forma, a medida $2b$ do eixo menor é dada por: $2b = 2$

d) A excentricidade e da elipse é dada por:
$$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

2. A medida A_1A_2 do eixo maior é dada por:
$A_1A_2 = A_1F_1 + A_2F_1 = 1{,}47 \cdot 10^8\ \text{km} + 1{,}53 \cdot 10^8\ \text{km} =$
$= 3 \cdot 10^8\ \text{km}$
Já a distância focal F_1F_2 é dada por:
$F_1F_2 = A_2F_1 - A_2F_2 = 1{,}53 \cdot 10^8\ \text{km} - 1{,}47 \cdot 10^8\ \text{km} =$
$= 0{,}06 \cdot 10^8\ \text{km} = 6 \cdot 10^6\ \text{km}$

3. Esquematizando a elipse geradora da superfície do espelho, sejam:

- F_1 e F_2 os focos, estando a lâmpada em F_1 e o dente do paciente em F_2;
- V o vértice mais próximo de F_1;
- a a medida do semieixo maior;
- c a semidistância focal.



Assim, temos:
$$\begin{cases} a = 6 + c \\ 0{,}85 = \dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow a = 40 \text{ e } c = 34$$

Concluímos, então, que a distância entre a lâmpada e o dente iluminado é 68 cm.

4. a) Sendo $G(x, y)$ um ponto genérico da elipse, temos:
$GF_1 + GF_2 = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = 4$
$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 4$
Essa já é uma equação da elipse, porém, se quisermos apresentá-la sem os radicais, agimos do seguinte modo:
Isolamos um dos radicais:
$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$
Quadramos ambos os membros, obtendo:
$\left(\sqrt{(x-2)^2 + y^2}\right)^2 = \left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 16 - 8\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2$
$\therefore x^2 - 4x + 4 + y^2 = 16 - 8\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2$
Isolamos o radical remanescente:
$8\sqrt{x^2 + y^2} = 4x + 12 \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = x + 3$
Quadramos ambos os membros, obtendo:
$4(x^2 + y^2) = (x + 3)^2 \Rightarrow 4x^2 + 4y^2 = x^2 + 6x + 9$
$\therefore 3x^2 + 4y^2 - 6x - 9 = 0$

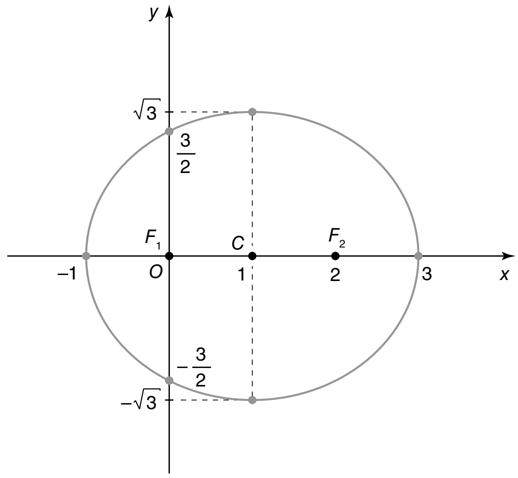
b) I. A medida a do semieixo maior e a semidistância focal c são 2 e 1, respectivamente. Como a, c e a medida b do semieixo menor satisfazem a equação $a^2 = b^2 + c^2$, temos:
$2^2 = b^2 + 1^2 \Rightarrow b = \sqrt{3}$

II. O centro C da elipse é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, isto é:
$$C\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = C(1, 0)$$

III. Para determinar os pontos de intersecção da elipse com o eixo Ox, fazemos $y = 0$ na equação $3x^2 + 4y^2 - 6x - 9 = 0$, obtendo:
$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -1$
Logo, a elipse intercepta o eixo das abscissas nos pontos $(3, 0)$ e $(-1, 0)$.

IV. Para determinar os pontos de intersecção da elipse com o eixo Oy, fazemos $x = 0$ na equação $3x^2 + 4y^2 - 6x - 9 = 0$, obtendo:
$4y^2 - 9 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ ou $y = -\frac{3}{2}$
Logo, a elipse intercepta o eixo das ordenadas nos pontos $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ e $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.

Com as conclusões obtidas em I, II, III e IV, esboçamos o gráfico da elipse:



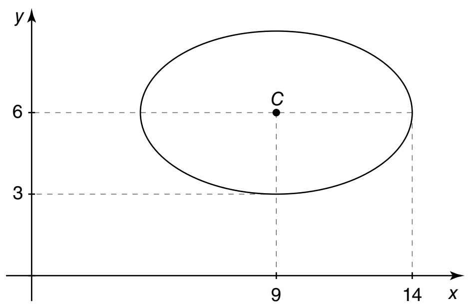
5. Sendo c a semidistância focal, temos:
$c^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow c = 4$
Logo, os focos da elipse são $F_1(0, 4)$ e $F_2(0, -4)$. Por definição, se um ponto $P(x, y)$ pertence a essa elipse, devemos ter:
$PF_1 + PF_2 = A_1A_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+4)^2} = 10$
Essa já é uma equação da elipse, que também pode ser apresentada sem os radicais, adotando-se os seguintes procedimentos:
$\sqrt{x^2 + (y-4)^2} = 10 - \sqrt{x^2 + (y+4)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + (y-4)^2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{x^2 + (y+4)^2}\right)^2 \Rightarrow$
$\therefore \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 8y + \cancel{16} =$
$= 100 - 20\sqrt{x^2 + y^2 + 8y + 16} + \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 8y + \cancel{16} \Rightarrow$
$\Rightarrow 20\sqrt{x^2 + y^2 + 8y + 16} = 100 + 16y$
$\therefore 5\sqrt{x^2 + y^2 + 8y + 16} = 25 + 4y \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(5\sqrt{x^2 + y^2 + 8y + 16}\right)^2 = (25 + 4y)^2$
$\therefore 25(x^2 + y^2 + 8y + 16) = 625 + 200y + 16y^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 25x^2 + 25y^2 + \cancel{200y} + 400 = 625 + \cancel{200y} + 16y^2$
$\therefore 25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$

6. a) O centro da elipse é $C(6, 3)$, o semieixo maior é paralelo ao eixo Ox e mede: $a = 10 - 6 = 4$, e o semieixo menor mede: $b = 5 - 3 = 2$
Logo, a equação reduzida da elipse é:
$$\frac{(x-6)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{2^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-6)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

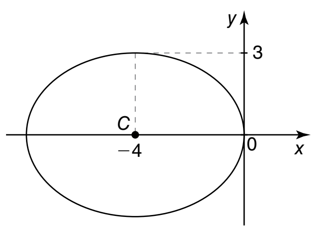
b) O centro da elipse é $C(7, -4)$, o semieixo menor mede: $b = 7 - 5 = 2$, e o semieixo maior é paralelo ao eixo Oy e mede: $a = -1 - (-4) = 3$
Logo, a equação reduzida da elipse é:
$$\frac{(x-7)^2}{2^2} + \frac{[y-(-4)]^2}{3^2} = 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(x-7)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1$$

c) O centro da elipse é $C(0, 0)$, o semieixo menor mede $b = 6$ e o semieixo maior é paralelo ao eixo Oy e mede $a = 7$. Logo, a equação reduzida da elipse é:
$$\frac{(x-0)^2}{6^2} + \frac{(y-0)^2}{7^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1$$

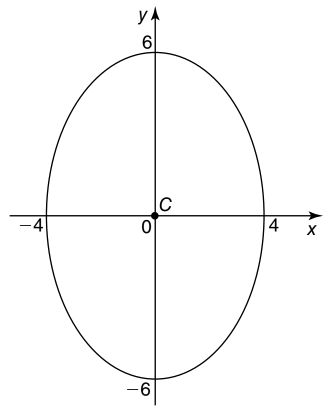
7. a)



b)



c)



8. As medidas a e b dos semieixos maior e menor, respectivamente, são dadas por:
$$\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 1$$
A semidistância focal c satisfaz a equação $a^2 = b^2 + c^2$; logo:
$2^2 = 1^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{3}$
Concluímos, então, que a excentricidade e da elipse é dada por:
$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

9. Por definição, temos:
$PF_1 + PF_2 = 2a \Rightarrow$
$\Rightarrow |\sqrt{2} - 0| + \sqrt{(0-4)^2 + \left(\sqrt{2} - 0\right)^2} = 2a$
$\therefore \sqrt{2} + \sqrt{16 + 2} = 2a \Rightarrow 2a = \sqrt{2} + 3\sqrt{2}$
$\therefore a = 2\sqrt{2}$
Além disso, temos: $2c = 4 - 0 = 4$, ou seja, $c = 2$, e, portanto:
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \left(2\sqrt{2}\right)^2 = b^2 + 2^2$
$\therefore b = 2$
Logo, a equação reduzida da elipse, de centro $C\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = C(2, 0)$, é:
$$\frac{(x-2)^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} + \frac{(y-0)^2}{2^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

10. a) I. O centro da elipse é o ponto médio do segmento $\overline{A_1A_2}$, isto é:
$$C\left(\frac{2+2}{2}, \frac{0+10}{2}\right) = C(2, 5)$$
II. Sendo a a medida do semieixo maior, c a semidistância focal e e a excentricidade, temos:
$$\begin{cases} e = \frac{c}{a} \\ 2a = A_1A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} = 0{,}8 \\ 2a = \sqrt{(2-2)^2 + (0-10)^2} = 10 \end{cases}$$
$\therefore a = 5$ e $c = 4$
A medida b do semieixo maior satisfaz a equação $a^2 = b^2 + c^2$; logo:
$5^2 = b^2 + 4^2 \Rightarrow b = 3$
III. O eixo maior da elipse é paralelo ao eixo Oy.
Com as conclusões obtidas em I, II e III, temos a equação reduzida da elipse:
$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

b) Os focos F_1 e F_2 da elipse são:
$F_1(2, 5 - 4)$ e $F_2(2, 5 + 4)$, ou seja, $F_1(2, 1)$ e $F_2(2, 9)$.

11. **I.** O centro da elipse é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, isto é:

$$C\left(\frac{1+7}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = C(4, 1)$$

II. Sendo a a medida do semieixo maior e c a semidistância focal, temos:

$$\begin{cases} 2a = 8 \\ 2c = F_1F_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 8 \\ 2c = \sqrt{(1-7)^2 + (1-1)^2} = 6 \end{cases}$$

$\therefore\ a = 4$ e $c = 3$

A medida b do semieixo maior satisfaz a equação $a^2 = b^2 + c^2$; logo:

$4^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow b = \sqrt{7}$

III. O eixo maior da elipse é paralelo ao eixo Ox, pois contém o segmento $\overline{F_1F_2}$.

Com as conclusões obtidas em I, II e III, temos a equação reduzida da elipse:

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{7} = 1$$

12. **I.** O centro da elipse é o ponto médio do segmento $\overline{B_1B_2}$, isto é:

$$C\left(\frac{0+0}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = C(0, 5)$$

II. Sendo b a medida do semieixo menor, temos:

$2b = B_1B_2 \Rightarrow 2b = \sqrt{(0-0)^2 + (3-7)^2} = 4$

$\therefore\ b = 2$

III. O eixo maior da elipse é paralelo ao eixo Ox, pois o eixo menor $\overline{B_1B_2}$ é paralelo ao eixo Oy.

Com as conclusões obtidas em I, II e III, e sendo a a medida do eixo maior da elipse, temos que a equação reduzida dessa cônica é da forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$$

Como o ponto $P(3, 6)$ pertence à elipse, temos:

$$\frac{3^2}{a^2} + \frac{(6-5)^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 12$$

Concluímos, então, que a equação reduzida da elipse é:

$$\frac{x^2}{12} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$$

13. a) $5x^2 + 3y^2 = 15 \Rightarrow \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

b) $4(x-1)^2 + 9(y+4)^2 = 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+4)^2}{4} = 1$

c) $x^2 + 16y^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + 16y^2 = 0 + 7 + 9$

$\therefore\ (x-3)^2 + 16y^2 = 16 \Rightarrow \dfrac{(x-3)^2}{16} + y^2 = 1$

d) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 20 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(x^2 - 4x + 4) + 9y^2 = 0 + 20 + 16$

$\therefore\ 4(x-2)^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

e) $4x^2 + 25y^2 - 50y - 75 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 + 25(y^2 - 2y + 1) = 0 + 75 + 25$

$\therefore\ 4x^2 + 25(y-1)^2 = 100 \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$

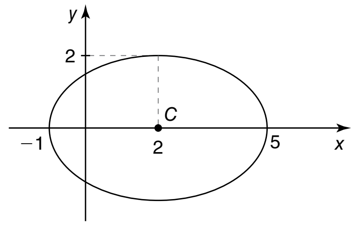
14. Vamos obter a equação reduzida da elipse:

$4x^2 + 9y^2 - 16x - 20 = 0 \Rightarrow$

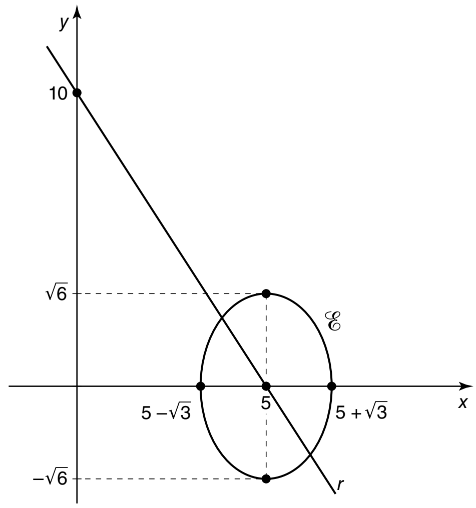
$\Rightarrow 4(x^2 - 4x + 4) + 9y^2 = 0 + 20 + 16$

$\therefore\ 4(x-2)^2 + 9y^2 = 36 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Representando graficamente a elipse, temos:



15. a) A reta r passa pelos pontos (0, 10) e (5, 0). A elipse $\mathscr{E}$ tem centro (5, 0) e eixos de medidas $2\sqrt{6}$ e $2\sqrt{3}$, sendo o eixo maior paralelo ao eixo Oy. Assim, os gráficos de r e $\mathscr{E}$ são:



b) Os pontos comuns a r e $\mathscr{E}$, se existem, são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} y = 10 - 2x & \text{(I)} \\ \dfrac{(x-5)^2}{3} + \dfrac{y^2}{6} = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\frac{(x-5)^2}{3} + \frac{(10-2x)^2}{6} = 1 \Rightarrow x = 6 \text{ ou } x = 4$$

Substituindo esses valores de x em (I), concluímos que:

- $x = 6 \Rightarrow y = -2$
- $x = 4 \Rightarrow y = 2$

Logo: $r \cap \mathscr{E} = \{(6, -2), (4, 2)\}$

16. a) Segundo o enunciado, o custo, em real, para a produção de x quilolitros do tipo A é $x(100 - x)$ e para a produção de y quilolitros do tipo B é $y\left(120 - \dfrac{y}{4}\right)$. Como o custo total deve ser R$ 16.800,00, temos:

$x(100 - x) + y\left(120 - \dfrac{y}{4}\right) = 16.800 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 100x + \dfrac{y^2}{4} - 120y = -16.800$

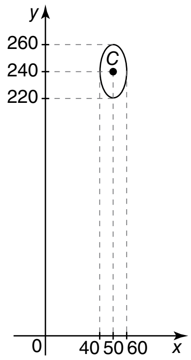
$\therefore\ (x^2 - 100x + 2.500) + \left(\dfrac{y^2}{4} - 120y + 14.400\right) =$

$= -16.800 + 2.500 + 14.400 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-50)^2 + \left(\dfrac{y}{2} - 120\right)^2 = 100$

$\therefore\ \dfrac{(x-50)^2}{100} + \dfrac{(y-240)^2}{400} = 1$

Logo, os pontos (x, y) formam a elipse representada a seguir:



17. **a)** O eixo real mede $2a$ tal que: $|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\sqrt{[4-(-4)]^2+(6-0)^2} - \sqrt{(4-4)^2+(6-0)^2}\right| =$

$= 2a$

$\therefore \left|\sqrt{8^2+6^2} - \sqrt{0^2+6^2}\right| = 2a \Rightarrow 2a = 4$

b) A distância focal $2c$ é dada por: $2c = |-4 - 4| = 8$

c) Dos itens **a** e **b**, temos $a = 2$ e $c = 4$. Assim:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 4^2 = 2^2 + b^2$

$\therefore b = 2\sqrt{3}$

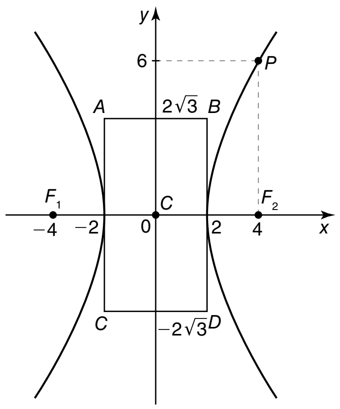
Logo, a medida $2b$ do eixo imaginário é dada por: $2b = 4\sqrt{3}$

d) A excentricidade e é dada por: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{2} = 2$

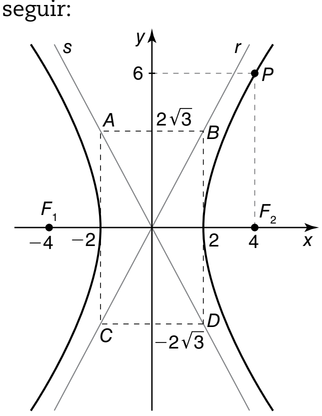
e) O centro C é o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$. Temos, então:

$C\left(\dfrac{-4+4}{2}, \dfrac{0+0}{2}\right) = C(0, 0)$

f) O retângulo de referência $ABCD$ está representado a seguir:



g) As assíntotas r e s da hipérbole estão representadas a seguir:



h) Os coeficientes angulares das assíntotas da hipérbole são:

$m_r = \dfrac{2\sqrt{3} - 0}{2 - 0} = \sqrt{3}$ e

$m_s = \dfrac{-2\sqrt{3} - 0}{2 - 0} = -\sqrt{3}$

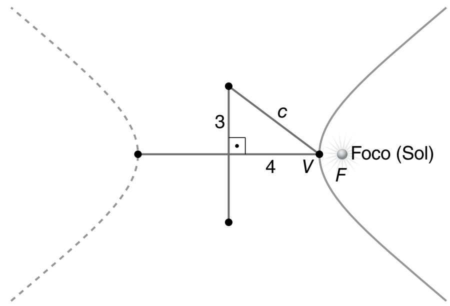
Logo, as equações de r e s são:

$(r)\ y - 0 = \sqrt{3}(x - 0) \Rightarrow y = \sqrt{3}\,x$

$(s)\ y - 0 = -\sqrt{3}(x - 0) \Rightarrow y = -\sqrt{3}\,x$

18. A menor distância d entre o Sol e o cometa ocorre quando este atinge o vértice do ramo de hipérbole. Assim, a menor distância d é a diferença $c - a$, em que c é a semidistância focal e a é a medida do semieixo real.

Esquematizamos essa situação do seguinte modo:



Pelo teorema de Pitágoras, obtemos:

$c^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow c = 5$

Logo, $d = 5 - 4 = 1$, ou seja, a menor distância entre o cometa e o Sol é de 1 ua.

19. **a)** Sendo $G(x, y)$ um ponto genérico da hipérbole, temos:

$|GF_1 - GF_2| = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}\right| = 2$

$\therefore \left|\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-4)^2+y^2}\right| = 2$

Essa já é uma equação da hipérbole, porém, se quisermos apresentá-la sem o módulo e os radicais, agimos do seguinte modo:

Aplicamos a definição de módulo:

$\left|\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-4)^2+y^2}\right| = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-4)^2+y^2} = \pm 2$

Isolamos um dos radicais:

$\sqrt{(x-4)^2+y^2} = \pm 2 + \sqrt{x^2+y^2}$

Quadramos ambos os membros:

$\left(\sqrt{(x-4)^2+y^2}\right)^2 = \left(\pm 2 + \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4 \pm 4\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2$

Isolamos o radical remanescente:

$\pm 4\sqrt{x^2+y^2} = 8x - 12 \Rightarrow \pm\sqrt{x^2+y^2} = 2x - 3$

Quadramos ambos os membros:

$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (2x-3)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4x^2 - 12x + 9$

$\therefore 3x^2 - y^2 - 12x + 9 = 0$

b) **I.** A medida a do semieixo real e a semidistância focal c são 1 e 2, respectivamente. Como a, c e a medida b do semieixo imaginário satisfazem a equação $c^2 = a^2 + b^2$, temos:

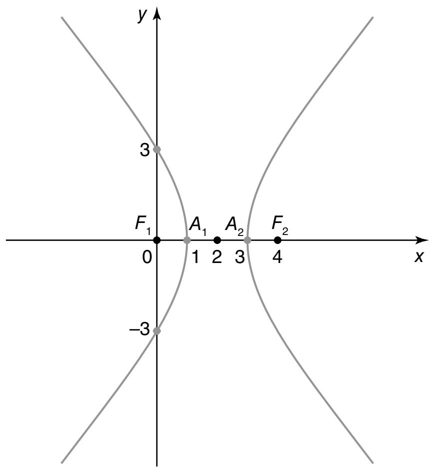
$2^2 = 1^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{3}$

II. O centro C da hipérbole é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, isto é, $C\left(\dfrac{0+4}{2}, \dfrac{0+0}{2}\right) = C(2, 0)$.

III. Para determinar os pontos de intersecção da hipérbole com o eixo Ox, fazemos $y = 0$ na equação $3x^2 - y^2 - 12x + 9 = 0$, obtendo:
$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$ ou $x = 1$
Logo, a hipérbole intercepta o eixo das abscissas nos pontos $(3, 0)$ e $(1, 0)$.

IV. Para determinar os pontos de intersecção da hipérbole com o eixo Oy, fazemos $x = 0$ na equação $3x^2 - y^2 - 12x + 9 = 0$, obtendo:
$-y^2 + 9 = 0 \Rightarrow y = 3$ ou $y = -3$
Logo, a hipérbole intercepta o eixo das ordenadas nos pontos $(0, 3)$ e $(0, -3)$.

O valor b do semieixo imaginário, obtido em I, seria utilizado se quiséssemos representar o retângulo referência e as assíntotas da hipérbole, o que não foi pedido. Assim, apenas com as conclusões obtidas em II, III e IV, conseguimos esboçar o gráfico da hipérbole:



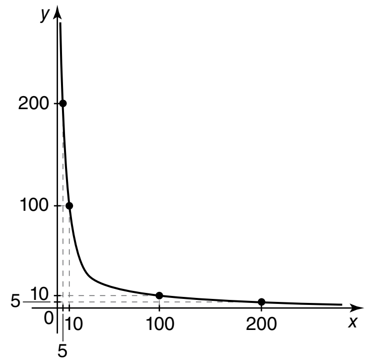
20. Sendo $G(x, y)$ um ponto genérico da hipérbole, temos:
$|GF_1 - GF_2| = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left|\sqrt{(x-0)^2 + (y-5)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + [y-(-5)]^2}\right| = 6$
$\therefore \left|\sqrt{x^2 + (y-5)^2} - \sqrt{x^2 + (y+5)^2}\right| = 6$
Essa já é uma equação da hipérbole, porém, se quisermos apresentá-la sem o módulo e os radicais, agimos do seguinte modo:
Aplicamos a definição de módulo:
$\left|\sqrt{x^2 + (y-5)^2} - \sqrt{x^2 + (y+5)^2}\right| = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-5)^2} - \sqrt{x^2 + (y+5)^2} = \pm 6$
Isolamos um dos radicais:
$\sqrt{x^2 + (y-5)^2} = \pm 6 + \sqrt{x^2 + (y+5)^2}$
Quadramos ambos os membros:
$\left(\sqrt{x^2 + (y-5)^2}\right)^2 = \left(\pm 6 + \sqrt{x^2 + (y+5)^2}\right)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 10y + 25 = 36 \pm 12\sqrt{x^2 + (y+5)^2} +$
$+ x^2 + y^2 + 10y + 25$
Isolamos o radical remanescente:
$\pm 12\sqrt{x^2 + (y+5)^2} = 20y + 36 \Rightarrow$
$\Rightarrow \pm 3\sqrt{x^2 + (y+5)^2} = 5y + 9$
Quadramos ambos os membros:
$\left(\pm 3\sqrt{x^2 + (y+5)^2}\right)^2 = (5y + 9)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9(x^2 + y^2 + 10y + 25) = 25y^2 + 90y + 81$
$\therefore 16y^2 - 9x^2 - 144 = 0$

21. Como a hipérbole é equilátera, a medida $2a$ do eixo real é igual à medida $2b$ do eixo imaginário. Além disso, a distância focal $2c$ é dada por:
$2c = F_1F_2 = \sqrt{(2-(-2))^2 + (2-(-2))^2} = 4\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow c = 2\sqrt{2}$
Temos, então:
$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \left(2\sqrt{2}\right)^2 = a^2 + a^2$
$\therefore a = 2$
Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole. Por definição, temos:
$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow$
$\Rightarrow \left|\sqrt{(x-(-2))^2 + (y-(-2))^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}\right| =$
$= 4$
$\therefore \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} =$
$= \pm 4 \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} =$
$= \pm 4 + \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$
$\therefore (x+2)^2 + (y+2)^2 = 16 \pm 8\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} +$
$+ (x-2)^2 + (y-2)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 =$
$= 16 \pm 8\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} + x^2 - 4x + 4 +$
$+ y^2 - 4y + 4$
$\therefore (x + y - 2) = \pm\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + y - 2)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2$
$\therefore x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4x - 4y =$
$= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 \Rightarrow xy = 2$

22. a) Sejam x a velocidade, em metro por segundo, e y o tempo, em segundo, gasto para percorrer o trecho de 1.000 m. Por definição, temos:
$\text{velocidade} = \dfrac{\text{distância}}{\text{tempo}} \Rightarrow x = \dfrac{1.000}{y}$
$\therefore xy = 1.000$
Logo, as grandezas são inversamente proporcionais.

b) Do item **a**, temos que: $y = \dfrac{1.000}{x}$

c) O gráfico cartesiano da equação obtida no item **b**, para $x > 0$ e $y > 0$, é:



23. a) O centro da hipérbole é $C(0, 2)$.
Temos: $a = A_1C = |-3 - 0| = 3$
e $c = F_1C = |-5 - 0| = 5$
Assim:
$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + b^2$
$\therefore b = 4$
Logo, como o eixo real é paralelo ao eixo x, a equação reduzida da hipérbole é:
$\dfrac{(x-0)^2}{3^2} - \dfrac{(y-2)^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$

b) O centro da hipérbole é: $C\left(2, \dfrac{0+6}{2}\right) = C(2, 3)$

Temos: $a = A_1C = |1 - 3| = 2$ e $c = F_1C = |0 - 3| = 3$

Assim:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 3^2 = 2^2 + b^2$

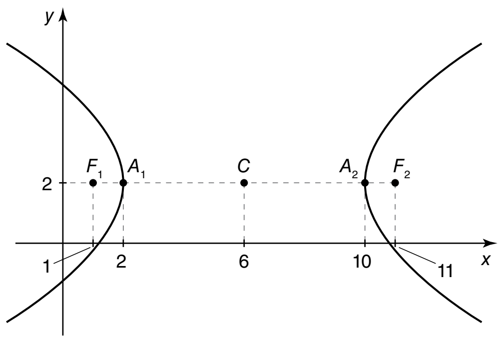
$\therefore\ b = \sqrt{5}$

Logo, como o eixo real é paralelo ao eixo y, a equação reduzida da hipérbole é:

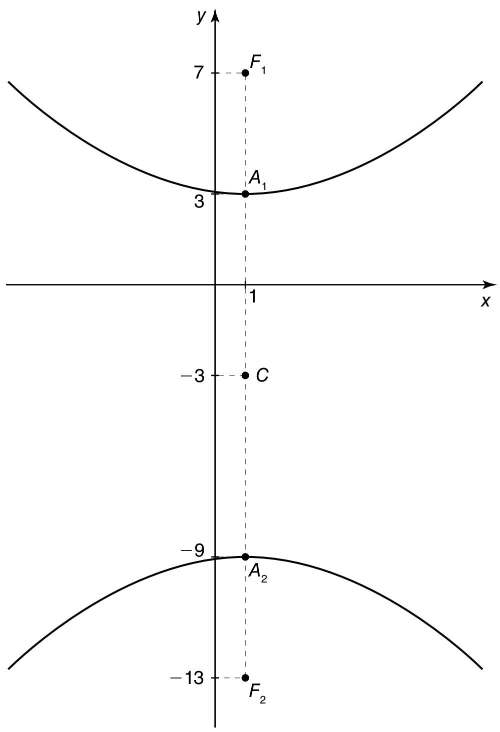
$$\frac{(y-3)^2}{2^2} - \frac{(x-2)^3}{\left(\sqrt{5}\right)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x-2)^3}{5} = 1$$

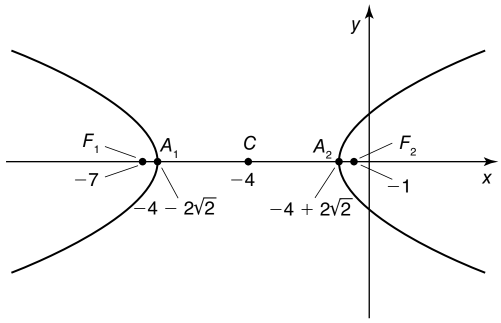
24. a)



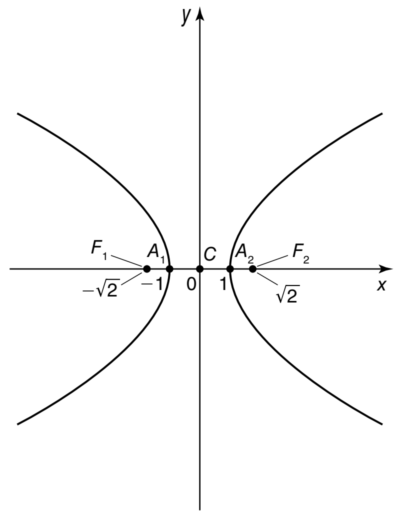
b)



c)



d)



25. a) O centro C é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, ou seja, $C\left(\dfrac{0+0}{2}, \dfrac{8+4}{2}\right) = C(0, 6)$.

b) Como $P(3, 8)$ pertence à hipérbole, temos que a medida a do semieixo real é dada por:

$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\sqrt{(3-0)^2 + (8-8)^2} - \sqrt{(3-0)^2 + (8-4)^2}\right| = 2a$

$\therefore\ |3 - 5| = 2a \Rightarrow a = 1$

Assim, os vértices da hipérbole são $A_1(0, 6 + 1)$ e $A_2(0, 6 - 1)$, ou seja, $A_1(0, 7)$ e $A_2(0, 5)$.

c) A semidistância focal c é dada por: $c = \dfrac{F_1F_2}{2} = 2$, e a medida a do semieixo real é 1, conforme calculamos no item **b**. Logo, a excentricidade e é calculada por:

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{1} = 2$

d) **I.** O centro da hipérbole é $C(0, 6)$.

II. A medida a do semieixo real é 1.

III. A medida b do semieixo imaginário obedece à equação: $c^2 = a^2 + b^2$; logo:

$2^2 = 1^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{3}$

IV. O eixo real é paralelo ao eixo Oy.

Assim, por I, II, III e IV, concluímos que a equação reduzida da hipérbole é:

$$\frac{(y-6)^2}{1} - \frac{(x-0)^2}{3} = 1 \text{ ou, ainda,}$$

$$(y-6)^2 - \frac{x^2}{3} = 1$$

e) Fazendo $y = 0$ na equação da hipérbole, temos:

$(0-6)^2 - \dfrac{x^2}{3} = 1 \Rightarrow y = \sqrt{105}$ ou $y = -\sqrt{105}$

Logo, os pontos de intersecção da hipérbole com o eixo das abscissas são $\left(\sqrt{105}, 0\right)$ e $\left(-\sqrt{105}, 0\right)$.

26. Temos $c = F_1C = |0 - 6| = 6$,

$F_2 = (6 + c, 5) = F_2(12, 5)$ e, como a hipérbole passa pelo ponto $(0, 0)$, temos:

$\left|\sqrt{(0-0)^2 + (5-0)^2} - \sqrt{(12-0)^2 + (5-0)^2}\right| =$

$= 2a \Rightarrow |5 - 13| = 2a$

$\therefore\ a = 4$

Temos, também:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 6^2 = 4^2 + b^2$

$\therefore b = 2\sqrt{5}$

Logo, como o eixo real é paralelo ao eixo x, a equação reduzida da hipérbole é:

$$\frac{(x-6)^2}{4^2} - \frac{(y-5)^2}{(2\sqrt{5})^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-6)^2}{16} - \frac{(y-5)^2}{20} = 1$$

27. **I.** O centro da hipérbole é $C(1, 0)$.

II. Por ser equilátera, a hipérbole tem o eixo real e o eixo imaginário com a mesma medida, isto é:

$2a = 2b \Rightarrow a = b$

Como $2c = 8$, temos que $c = 4$ e, portanto:

$$\begin{cases} 4^2 = a^2 + b^2 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow a = b = 2\sqrt{2}$$

III. O eixo real da hipérbole é paralelo ao eixo Oy.

Por I, II e III, concluímos que a equação da hipérbole é:

$$\frac{(y-0)^2}{8} - \frac{(x-1)^2}{8} = 1$$

28. **a)** As equações das assíntotas da hipérbole são tais que:

$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x + y)(x - y) = 0$

$\therefore x + y = 0$ ou $x - y = 0$

Logo, as equações das assíntotas são $x + y = 0$ e $x - y = 0$.

b) As equações das assíntotas da hipérbole são tais que:

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{2} + y\right)\left(\frac{x}{2} - y\right) = 0$$

$$\therefore \frac{x}{2} + y = 0 \text{ ou } \frac{x}{2} - y = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x + 2y = 0$ ou $x - 2y = 0$

Logo, as equações das assíntotas são $x + 2y = 0$ e $x - 2y = 0$.

c) As equações das assíntotas da hipérbole são tais que:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{(x-4)^2}{9} = 0 \Rightarrow 9y^2 - 16(x-4)^2 = 0$$

$\therefore (3y + 4(x - 4))(3y - 4(x - 4)) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y + 4x - 16 = 0$ ou $3y - 4x + 16 = 0$

Logo, as equações das assíntotas são

$4x + 3y - 16 = 0$ e $4x - 3y - 16 = 0$.

29. Pela equação reduzida, deduzimos que o eixo real da hipérbole é paralelo ao eixo Ox e que o centro é o ponto $C(0, 0)$.

Como um dos focos é $F_1(0, 5)$, temos que a semidistância focal c é dada por: $c = CF_1 = 5$

Com esse valor de c e com o valor da excentricidade, obtemos a medida a do semieixo real:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow 1{,}25 = \frac{5}{a}$$

$\therefore a = 4$

Com os valores a e c, obtemos a medida b do semieixo imaginário:

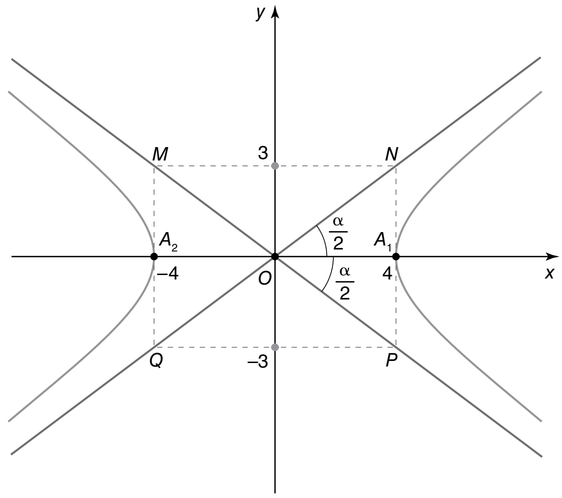
$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + b^2$

$\therefore b = 3$

Assim, temos a equação reduzida:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

O gráfico dessa hipérbole, juntamente com o retângulo referência e as assíntotas, é:



Um ângulo agudo formado pelas assíntotas é $N\widehat{O}P$, cuja medida indicamos por α.

No triângulo NOA_1, temos: $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$, com o que calculamos $\text{tg}\,\alpha$:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{2\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1 - \text{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

Logo, a tangente de um ângulo agudo formado pelas assíntotas da hipérbole é $\frac{24}{7}$.

30. **a)** $4x^2 - 3y^2 = 12 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$

b) $5(x - 2)^2 - 2(y + 3)^2 = 10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{5} = 1$$

c) $x^2 - 4y^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) - 4y^2 = 0 - 5 + 9$

$$\therefore (x-3)^2 - 4y^2 = 4 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{4} - y^2 = 1$$

d) $x^2 - y^2 - 6x + 4y + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) - (y^2 - 4y + 4) = 0 - 4 + 9 - 4$

$\therefore (x - 3)^2 - (y - 2)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 3)^2 - (y - 2)^2 = 1$

e) $4y^2 - 9x^2 - 8y + 18x - 41 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(y^2 - 2y + 1) - 9(x^2 - 2x + 1) =$

$= 0 + 41 + 4 - 9$

$\therefore 4(y - 1)^2 - 9(x - 1)^2 = 36 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

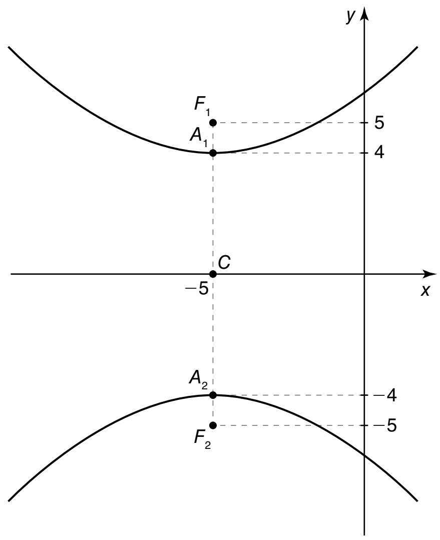
31. Para obter o centro, o semieixo real e o semieixo imaginário da hipérbole, escrevemos sua equação na forma reduzida:

$9y^2 - 16x^2 - 160x - 544 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9y^2 - 16(x^2 + 10x + 25) = 0 + 544 - 400$

$$\therefore 9y^2 - 16(x+5)^2 = 144 \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{(x+5)^2}{9} = 1$$

Assim, a representação gráfica da hipérbole é:



32. **a)** Inicialmente, representamos a equação na forma reduzida:

$4x^2 - 9y^2 - 16x - 20 = 0 \Rightarrow 4(x^2 - 4x) - 9y^2 = 20$

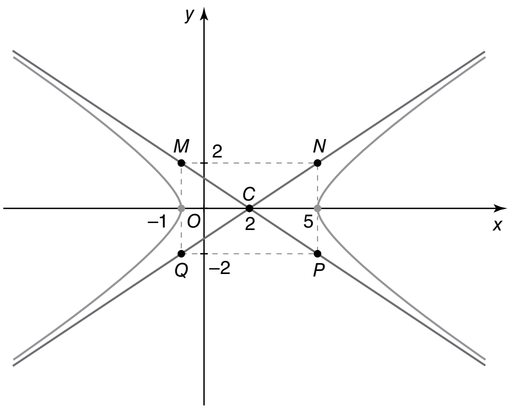
$\therefore\ 4(x^2 - 4x + 4) - 9y^2 = 20 + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(x - 2)^2 - 9y^2 = 36$

Dividindo ambos os membros por 36, obtemos a equação reduzida:

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Assim, temos o gráfico:



b) No gráfico do item **a**, o coeficiente angular m_r da assíntota r que passa pelos pontos $M(-1, 2)$ e $P(5, -2)$ é dado por:

$$m_r = \frac{2 - (-2)}{-1 - 5} = -\frac{2}{3}$$

Com esse coeficiente angular e o ponto $M(-1, 2)$, obtemos a equação de r:

$$y - 2 = -\frac{2}{3} \cdot [x - (-1)] \Rightarrow y = -\frac{2x}{3} + \frac{4}{3}$$

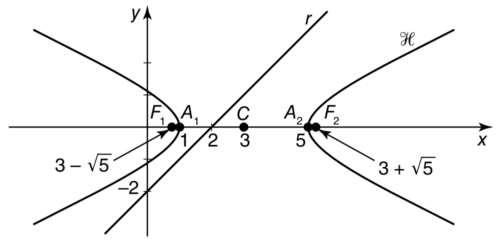
O coeficiente angular m_s da assíntota s que passa pelos pontos $N(5, 2)$ e $Q(-1, -2)$ é dado por:

$$m_s = \frac{2 - (-2)}{5 - (-1)} = \frac{2}{3}$$

Com esse coeficiente angular e o ponto $N(5, 2)$, obtemos a equação de s:

$$y - 2 = \frac{2}{3} \cdot (x - 5) \Rightarrow y = \frac{2x}{3} - \frac{4}{3}$$

33. **a)** A reta r passa pelos pontos $(0, -2)$ e $(2, 0)$. A hipérbole $\mathcal{H}$ tem centro $(3, 0)$ e eixos real e imaginário de medidas 4 e 2, respectivamente, e focos $F_1\left(3 - \sqrt{5}, 0\right)$ e $F_2\left(3 + \sqrt{5}, 0\right)$, sendo que o eixo real está contido no eixo Ox. Assim, os gráficos de r e $\mathcal{H}$ são:



b) Observando o gráfico do item **a**, constatamos que r e $\mathcal{H}$ não têm ponto em comum. Essa conclusão também pode ser obtida pelo sistema:

$$\begin{cases} y = x - 2 & \text{(I)} \\ \dfrac{(x-3)^2}{4} - y^2 = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

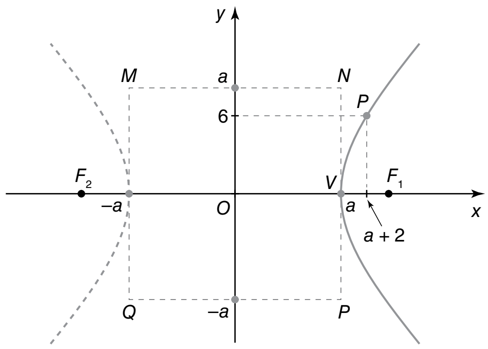
Substituindo (I) em (II), obtemos a equação polinomial do 2º grau:

$$\frac{(x-3)^2}{4} - (x - 2)^2 = 1$$

cujo discriminante é negativo, com o que se conclui que o sistema é impossível.

Logo, r e $\mathcal{H}$ não têm ponto em comum.

34. Por ser equilátera, a hipérbole $\mathcal{H}$, geradora do hiperboloide, tem a medida a do eixo real igual à medida b do eixo imaginário. Vamos associar um sistema cartesiano ao plano dessa hipérbole tal que o centro C de $\mathcal{H}$ coincida com a origem O do sistema e o eixo real de $\mathcal{H}$ esteja contido no eixo Ox, isto é:



Assim, a equação de $\mathcal{H}$ é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Como o ponto $P(a + 2, 6)$ pertence a $\mathcal{H}$, temos:

$$\frac{(a+2)^2}{a^2} - \frac{6^2}{a^2} = 1 \Rightarrow (a + 2)^2 - 36 = a^2$$

$\therefore\ a^2 + 4a + 4 - 36 = a^2 \Rightarrow a = 8$

A semidistância focal c pode ser calculada por:

$c^2 = 8^2 + 8^2 \Rightarrow c = 8\sqrt{2}$

Concluímos, então, que a distância VF_1 é dada por:

$VF_1 = \left(8\sqrt{2} - 8\right)$ cm $= 8\left(\sqrt{2} - 1\right)$ cm

35. **a)** $y - 1 = 0$

b) $p = 3$

c) $x - 2 = 0$

d) Sendo $P(1, y)$ o ponto procurado, temos:

$$PF = Pr \Rightarrow \sqrt{(1-2)^2 + (y-4)^2} = \frac{|0 \cdot 1 + y - 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

$$\therefore \sqrt{1 + (y-4)^2} = |y - 1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{1 + (y-4)^2}\right]^2 = |y-1|^2$$

$$\therefore 1 + y^2 - 8y + 16 = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow y = \frac{8}{3}$$

Logo, a ordenada do ponto P é $\frac{8}{3}$.

36. Seja $P(x, y)$ um ponto da parábola. Por definição, temos:

$$PF = Pr \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = \frac{|0 \cdot x + 1 \cdot y - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = |y - 2| \Rightarrow x^2 + (y-4)^2 = (y-2)^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 8y + 16 = y^2 - 4y + 4 \Rightarrow x^2 - 4y + 12 = 0$$

37. Seja $P(x, y)$ um ponto da parábola. Por definição, temos:

$$PF = Pr \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \frac{|1 \cdot x + 1 \cdot y - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$\therefore \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \frac{|x + y - 3|}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-1)^2 + 2(y-2)^2 = (x + y - 3)^2$$

$$\therefore 2x^2 - 4x + 2 + 2y^2 - 8y + 8 =$$

$$= x^2 + y^2 + 9 + 2xy - 6x - 6y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1 = 0$$

38. A diretriz r da parábola é perpendicular ao eixo de simetria e. Como o coeficiente angular de e é 1, concluímos que o coeficiente angular de r é -1. Assim, a equação de r é da forma: $x + y + k = 0$, em que k é uma constante real. Essa constante pode ser obtida pela definição de parábola, pois, como A pertence à parábola, temos que a distância d_{AF}, entre os pontos A e F, é igual à distância d_{Ar}, entre o ponto A e a diretriz r, isto é:

$$d_{AF} = d_{Ar} \Rightarrow \sqrt{(2-1)^2 + (0-1)^2} = \frac{|2 + 0 + k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$\therefore |2 + k| = 2 \Rightarrow k = 0 \text{ ou } k = -4$$

Analisando cada valor de k, temos:

- Para $k = 0$, a equação de diretriz r é $x + y = 0$, que nos convém, pois r não passa por nenhum ponto do primeiro quadrante.
  Sendo $G(x, y)$ um ponto genérico da parábola, devemos ter:

$$d_{GF} = d_{Gr} \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x + y|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$\therefore \left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}\right)^2 = \left(\frac{|x+y|}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2}$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2xy - 4x - 4y + 4 = 0$$

- Para $k = -4$, a equação da diretriz r' é $x + y - 4 = 0$, que não convém, pois r' passa por pontos do primeiro quadrante.

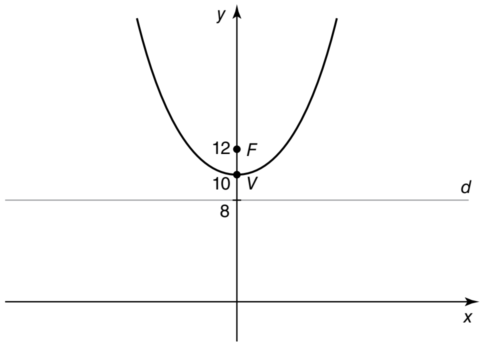
Assim, concluímos que a equação da parábola é: $x^2 + y^2 - 2xy - 4x - 4y + 4 = 0$

39. a) O vértice da parábola é $V(-2, 5)$, e o parâmetro da parábola é: $p = 2 \cdot |5 - 1| = 8$
Logo, a equação reduzida da parábola é:
$(x - (-2))^2 = 2 \cdot 8(y - 5) \Rightarrow (x + 2)^2 = 16(y - 5)$

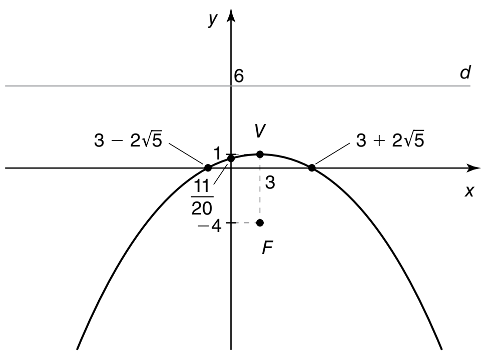
b) O vértice da parábola é: $V\left(0, \frac{-4 + 2}{2}\right) = V(0, -1)$,
e o parâmetro da parábola é: $p = |2 - (-4)| = 6$
Logo, a equação reduzida da parábola é:
$(x - 0)^2 = -2 \cdot 6(y - (-1)) \Rightarrow x^2 = -12(y + 1)$

c) O vértice da parábola é $V(1, 6)$, e o parâmetro é: $p = 2 \cdot |-4 - 1| = 10$
Logo, a equação reduzida da parábola é:
$(y - 6)^2 = -2 \cdot 10(x - 1) \Rightarrow (y - 6)^2 = -20(x - 1)$

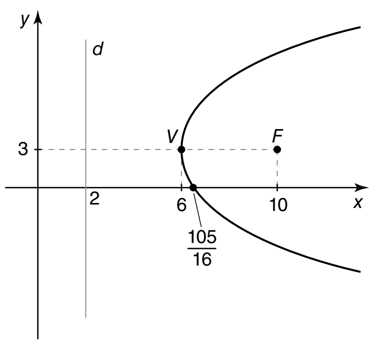
40. a)



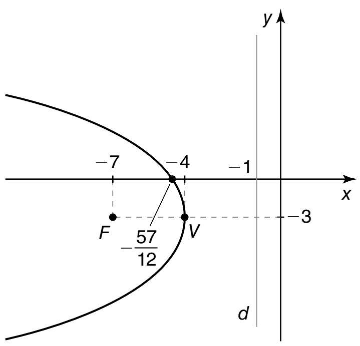
b)



c)



d)



41. O vértice da parábola $\mathcal{P}$ é o ponto $V(2, 5)$, a diretriz é paralela ao eixo Oy e a concavidade é voltada para a direita. Assim, sendo p o parâmetro, temos que a equação de $\mathcal{P}$ é da forma:
$(y - 5)^2 = 2p(x - 2)$
Como o ponto $P(3, 3)$ pertence a $\mathcal{P}$, temos:
$(3 - 5)^2 = 2p(3 - 2) \Rightarrow p = 2$
Concluímos, então, que a equação da parábola é:
$(y - 5)^2 = 2 \cdot 2 \cdot (x - 2)$, ou seja, $(y - 5)^2 = 4(x - 2)$

42. **a)** $y = 3x^2 + 6x - 5 \Rightarrow y = 3(x^2 + 2x) - 5$
$\therefore y + 5 + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 1)^2 = \dfrac{1}{3}(y + 8)$

b) $x = y^2 - 6y + 7 \Rightarrow x - 7 + 9 = y^2 - 6y + 9$
$\therefore (y - 3)^2 = x + 2$

c) $y = \dfrac{x^2}{4} - x - 3 \Rightarrow 4y = x^2 - 4x - 12$
$\therefore 4y + 12 + 4 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 2)^2 = 4(y + 4)$

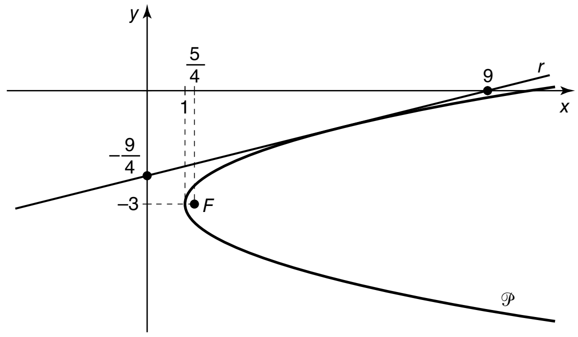
43. **a)** Inicialmente, representamos a equação na forma reduzida:
$y = x^2 + 2x + 5 \Rightarrow y - 5 = x^2 + 2x$
$\therefore y - 5 + 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow (x + 1)^2 = y - 4$
Assim, concluímos que o vértice da parábola é o ponto $V(-1, 4)$.

b) Sendo p o parâmetro, temos que:
$2p = 1 \Rightarrow p = \dfrac{1}{2}$

44. **a)** Inicialmente, representamos a equação na forma reduzida:
$3y^2 - x + 9 = 0 \Rightarrow 3y^2 = x - 9$
$\therefore y^2 = \dfrac{1}{3} \cdot (x - 9)$
Assim, o vértice de $\mathcal{P}$ é $V(9, 0)$ e o parâmetro p é dado por:
$2p = \dfrac{1}{3} \Rightarrow p = \dfrac{1}{6}$
O eixo de simetria de $\mathcal{P}$ é horizontal e passa por $V(9, 0)$; logo, o foco é um ponto da forma $F(k, 0)$. Como a distância do vértice ao foco é metade do parâmetro, temos que: $k = 9 + \dfrac{1}{12} = \dfrac{109}{12}$. Assim, concluímos que $F\left(\dfrac{109}{12}, 0\right)$.

b) A diretriz r é uma reta vertical; logo, sua equação é da forma $x = c$. Como a distância do vértice $V(9, 0)$ à diretriz r é metade do parâmetro, temos que $c = 9 - \dfrac{1}{12} = \dfrac{107}{12}$. Assim, concluímos que a equação da diretriz é $x = \dfrac{107}{12}$.

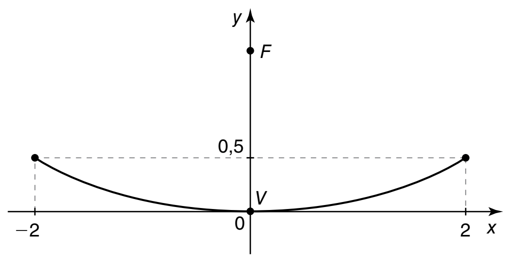
45. **a)** A reta r passa pelos pontos $(9, 0)$ e $\left(0, -\dfrac{9}{4}\right)$.
A parábola $\mathcal{P}$ tem vértice $C(1, -3)$, parâmetro $p = \dfrac{1}{2}$, diretriz de equação $x = \dfrac{3}{4}$ e foco $F\left(\dfrac{5}{4}, -3\right)$.
Assim, os gráficos de r e $\mathcal{P}$ são:



b) Os pontos comuns a r e $\mathcal{P}$, se existem, são as soluções do sistema:
$$\begin{cases} x = 9 + 4y & \text{(I)} \\ (y + 3)^2 = x - 1 & \text{(II)} \end{cases}$$
Substituindo (I) em (II), obtemos:
$(y + 3)^2 = 9 + 4y - 1 \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 0$
$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$
$y = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} \Rightarrow y = -1$
Fazendo $y = -1$ em (I), obtemos $x = 5$.
Logo, $r \cap \mathcal{P} = \{(5, -1)\}$.

46. Da equação $x^2 = 12(y - 4)$, concluímos que a parábola tem concavidade para cima, diretriz paralela ao eixo x, vértice $V(0, 4)$ e parâmetro p tal que: $2p = 12 \Rightarrow p = 6$
Assim, o foco da parábola, que está na mesma reta vertical que o vértice V e à distância $\dfrac{p}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ acima de V, é $F(0, 7)$.
Então, a distância do cometa ao Sol, no momento em que passar pelo ponto $(8, 1)$, será:
$\sqrt{(8 - 0)^2 + (1 - 7)^2} = 10$
Alternativa **b**.

47. Uma secção plana que contém o eixo de simetria do paraboloide é um arco de parábola. Ao plano que contém esse arco, associamos um sistema cartesiano, conforme mostra a figura:

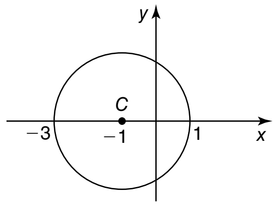


A equação da parábola que contém esse arco é $x^2 = 2py$, em que p é o parâmetro. Como o ponto $(2; 0{,}5)$ pertence a essa parábola, temos:
$2^2 = 2p \cdot 0{,}5 \Rightarrow p = 4$
Logo, o receptor, que se localiza no foco F, dista 2 m do vértice V.

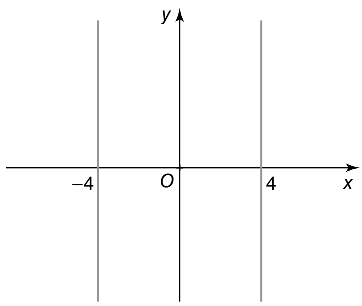
48. Nas descrições I, II e III, temos as definições de circunferência, hipérbole e elipse, respectivamente. Portanto, as associações corretas são: I – B; II – A; III – C
Alternativa **d**.

49. **a)** Sendo Q(x, y), impomos que QA = 2QO, ou seja:
$\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2} = 2\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4x^2 + 4y^2$
$\therefore x^2 + y^2 + 2x = 3 \Rightarrow (x^2 + 2x + 1) + y^2 = 3 + 1$
$\therefore (x+1)^2 + y^2 = 4$
Logo, uma equação do L.G. é: $(x+1)^2 + y^2 = 4$

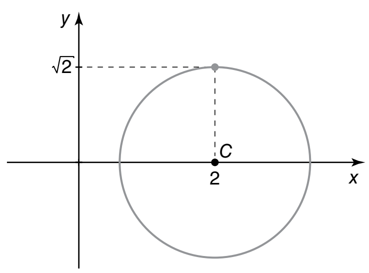
b) A equação do item **a** representa uma circunferência de centro C(−1, 0) e raio R = 2.
Assim, o gráfico do L.G. é:



50. Sendo P(x, y) um ponto genérico do L.G., temos que:
$\frac{|D|}{2} = 6$, em que $D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3x$
Logo:
$\frac{|-3x|}{2} = 6 \Rightarrow x = 4$ ou $x = -4$
Concluímos, então, que o L.G. é formado pelas retas verticais de equações: x = 4 e x = −4, cujo gráfico é:



51. Sendo P(x, y) um ponto genérico do L.G., temos que:
$\frac{PA}{PB} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}{\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}} = \sqrt{2}$,
para $(x, y) \neq (1, 0)$
Quadrando ambos os membros da equação, temos:
$\frac{(x-0)^2+(y-0)^2}{(x-1)^2+(y-0)^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2[(x-1)^2 + y^2]$
$\therefore x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0$
Essa equação parece ser de uma circunferência. Vamos representá-la na forma reduzida para nos certificar:
$x^2 + y^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = -2 + 4$
$\therefore (x-2)^2 + y^2 = 2$
De fato, a equação representa uma circunferência de centro C(2, 0) e raio $\sqrt{2}$. Assim, temos o gráfico:



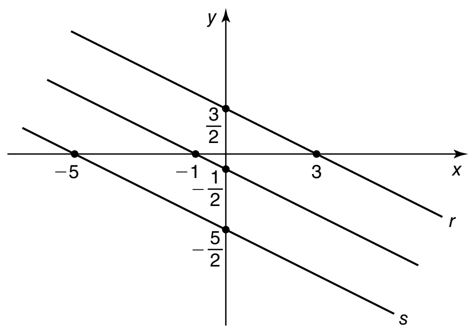
52. Sendo P(x, y) um ponto genérico do L.G., temos que:
$d_{Pr} = 2d_{PA} \Rightarrow \frac{|x-2|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 2\sqrt{(x-5)^2+(y-0)^2}$
$\therefore |x-2| = 2\sqrt{(x-5)^2+y^2}$
Quadramos ambos os membros:
$\left(|x-2|\right)^2 = \left(2\sqrt{(x-5)^2+y^2}\right)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 4(x^2 - 10x + 25 + y^2)$
$\therefore 3x^2 + 4y^2 - 36x + 96 = 0$
Escrevemos essa equação na forma reduzida:
$3(x^2 - 12x + 36) + 4y^2 = 108 - 96 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3(x-6)^2 + 4y^2 = 12$
$\therefore \frac{(x-6)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$
Concluímos, então, que o L.G. é uma elipse.
Alternativa **c**.

53. **a)**
- Seja Q(x, y) um ponto genérico do plano cartesiano.
- Impomos que $d_{Qr} = d_{Qs}$, ou seja:

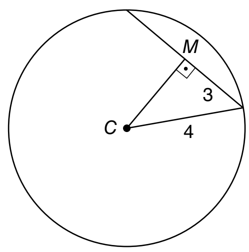
$\frac{|1 \cdot x + 2 \cdot y - 3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|1 \cdot x + 2 \cdot y + 5|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow |x + 2y - 3| = |x + 2y + 5|$
Como $x + 2y - 3 \neq x + 2y + 5$, quaisquer que sejam x e y, temos: $x + 2y - 3 = -x - 2y - 5$
$\therefore x + 2y + 1 = 0$

Portanto, uma equação do L.G. é: $x + 2y + 1 = 0$

b) Representando no plano cartesiano as retas r, s e o L.G. do item **a**, temos:

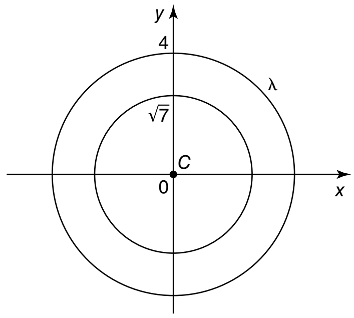


54. **a)** A circunferência λ tem raio 4 e centro C(0, 0). Como a corda tem medida 6, sendo M o ponto médio dessa corda, temos:



Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$(MC)^2 + 3^2 = 4^2 \Rightarrow MC = \sqrt{7}$
Assim, a distância dos pontos médios M(x, y) das cordas de medida 6 ao centro C(0, 0) da circunferência λ é $\sqrt{7}$. Temos, então:
$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{7} \Rightarrow x^2 + y^2 = 7$
Logo, a equação do L.G. é: $x^2 + y^2 = 7$

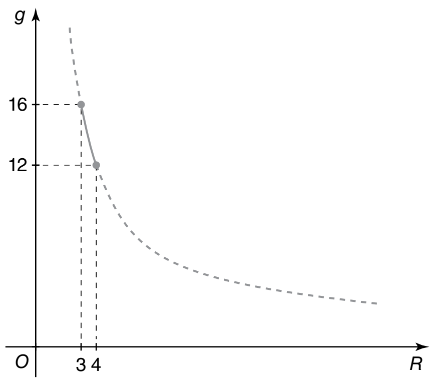
b) A equação do L.G. representa uma circunferência de centro (0, 0) e raio $\sqrt{7}$, e a circunferência λ tem centro (0, 0) e raio 4. Assim:



55. Como a área lateral A_L do cone é dada por: $A_L = \pi Rg$, temos:

$\pi Rg = 48\pi \Rightarrow Rg = 48$

Logo, as medidas R e g são inversamente proporcionais. Assim, de acordo com o exercício proposto 21, o L.G. dos pontos P(R, g) é um arco de hipérbole. A representação gráfica desse L.G. é:



Alternativa **b**.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. a) Sendo G(x, y) um ponto genérico da elipse, temos:

$GF_1 + GF_2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2$

$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2$

Essa já é uma equação da elipse, porém, se quisermos apresentá-la sem os radicais, agimos do seguinte modo:

Isolamos um dos radicais:

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$

Quadramos ambos os membros:

$\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}\right)^2 = \left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 - 4\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2$

$\therefore x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 =$

$= 4 - 4\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2$

Isolamos o radical remanescente:

$4\sqrt{x^2 + y^2} = 2 + 2x + 2y \Rightarrow 2\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + x + y$

Quadramos ambos os membros, obtendo:

$4(x^2 + y^2) = (1 + x + y)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 + 4y^2 = 1 + x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2xy$

$\therefore 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2x - 2y - 1 = 0$

b) Para determinar os pontos de intersecção da elipse com o eixo Ox, fazemos y = 0 na equação $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2x - 2y - 1 = 0$, obtendo:

$3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -\dfrac{1}{3}$

Logo, a elipse intercepta o eixo das abscissas nos pontos (1, 0) e $\left(-\dfrac{1}{3}, 0\right)$.

c) Para determinar os pontos de intersecção da elipse com o eixo Oy, fazemos x = 0 na equação $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2x - 2y - 1 = 0$, obtendo:

$3y^2 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -\dfrac{1}{3}$

Logo, a elipse intercepta o eixo das ordenadas nos pontos (0, 1) e $\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$.

2. A distância focal é dada por:

$2c = F_1F_2 = \sqrt{(2-0)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

Como o eixo menor mede $2b = 4$ e lembrando que $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

$a^2 = \left(\dfrac{4}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 4 + 2$

$\therefore a = \sqrt{6}$

Sendo P(x, y) um ponto da elipse, temos:

$PF_1 + PF_2 = 2\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} +$

$+ \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = 2\sqrt{6}$

$\therefore \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = 2\sqrt{6} - \sqrt{x^2 + (y-4)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}\right)^2 =$

$= \left(2\sqrt{6} - \sqrt{(x^2 + (y-4)^2}\right)^2$

$\therefore (x-2)^2 + (y-2)^2 =$

$= 24 - 4\sqrt{6(x^2 + (y-4)^2)} + x^2 + (y-4)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 =$

$= 24 - 4\sqrt{6(x^2 + (y-4)^2)} + x^2 + y^2 - 8y + 16$

$\therefore 4\sqrt{6(x^2 + (y-4)^2)} = 32 + 4x - 4y \Rightarrow$

$\Rightarrow 6(x^2 + (y-4)^2) = (8 + x - y)^2$

$\therefore 6x^2 + 6y^2 - 48y + 96 =$

$= x^2 + y^2 + 16x - 16y - 2xy + 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 16x - 32y + 2xy + 32 = 0$

3. a) O centro da elipse é: $C\left(6, \dfrac{13+1}{2}\right) = C(6, 7)$, o semieixo menor mede: $b = 9 - 6 = 3$, e o semieixo maior é paralelo ao eixo Oy e mede: $a = 13 - 7 = 6$. Logo, a equação reduzida da elipse é dada por:

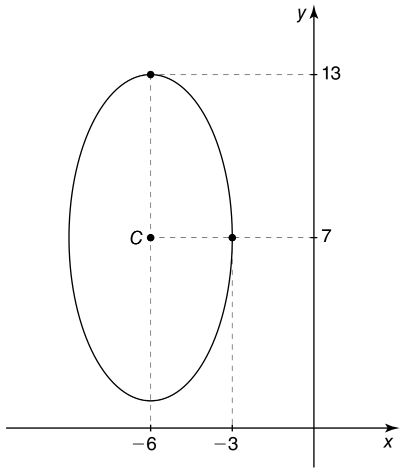
$\dfrac{(x-6)^2}{3^2} + \dfrac{(y-7)^2}{6^2} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(x-6)^2}{9} + \dfrac{(y-7)^2}{36} = 1$

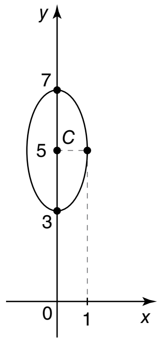
b) O centro da elipse é: $C\left(\dfrac{10}{2}, 0\right) = C(5, 0)$, o semieixo maior é paralelo ao eixo Ox e mede: $a = \dfrac{10}{2} = 5$, e o semieixo menor mede: $b = 4$. Logo, a equação reduzida da elipse é dada por:

$\dfrac{(x-5)^2}{5^2} + \dfrac{(y-0)^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{(x-5)^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

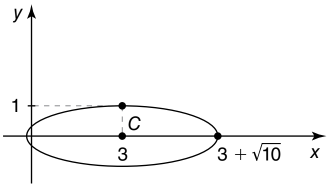
4. a)



b)



c)



5. Como a distância entre o foco F_1, e o vértice mais próximo dele é $3 - 0 = 3$, a distância entre o outro foco e o outro vértice também é 3. Logo, o eixo maior mede: $2a = 7 - 0 + 3 = 10$, ou seja, $a = 5$, e a distância focal é: $2c = 7 - 3 = 4$, isto é, $c = 2$. A excentricidade da elipse é, então:

$e = \dfrac{e}{a} = \dfrac{2}{5}$

6. Por definição, temos:

$$PF_1 + PF_2 = 2a \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{12}{5} - 0\right)^2 + (0 - (-1))^2} + \sqrt{\left(\frac{12}{5} - 0\right)^2 + (0 - 7)^2} = 2a$$

$$\therefore \sqrt{\frac{144}{25} + 1} + \sqrt{\frac{144}{25} + 49} = 2a \Rightarrow 2a = \frac{13}{5} + \frac{37}{5}$$

$\therefore a = 5$

Além disso, temos $2c = 7 - (-1) = 8$, ou seja, $c = 4$ e, portanto:

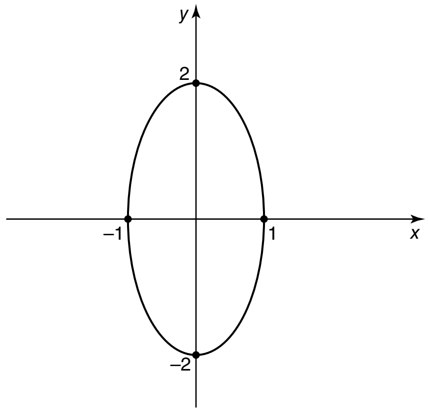
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 5^2 = b^2 + 4^2$

$\therefore b = 3$

Logo, a equação reduzida da elipse, de centro $C\left(\dfrac{0 - 0}{2}, \dfrac{-1 + 7}{2}\right) = C(0, 3)$ e eixo maior paralelo ao eixo Oy, é dada por:

$$\frac{(x - 0)^2}{3^2} + \frac{(y - 3)^2}{5^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{25} = 1$$

7. Graficamente, temos:



Assim, os semieixos maior e menor medem $a = 2$ e $b = 1$, respectivamente. A semidistância focal c é dada por:

$c^2 = 2^2 - 1^2 \Rightarrow c = \sqrt{3}$

A excentricidade e é dada por:

$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Alternativa **e**.

8. a) $16x^2 + 9y^2 + 64x - 54y + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16(x^2 + 4x + 4) + 9(y^2 - 6y + 9) =$

$= 0 - 1 + 64 + 81$

$\therefore 16(x + 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(x + 2)^2}{9} + \dfrac{(y - 3)^2}{16} = 1$

b) $x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 23 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4x + 4) +$

$+ 9(y^2 - 2y + 1) = 0 + 23 + 4 + 9$

$\therefore (x - 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(x - 2)^2}{36} + \dfrac{(y - 1)^2}{4} = 1$

c) $3x^2 + 5y^2 - 12x - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x^2 - 4x + 4) + 5y^2 = 0 + 3 + 12$

$\therefore 3(x - 2)^2 + 5y^2 = 15 \Rightarrow \dfrac{(x - 2)^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

d) $9x^2 + 4y^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{\frac{1}{9}} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

e) $3x^2 + 5y^2 = 2 \Rightarrow \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{5y^2}{2} = 1 \therefore \dfrac{x^2}{\frac{2}{3}} + \dfrac{y^2}{\frac{2}{5}} = 1$

9. Escrevendo a equação da elipse em sua forma reduzida, temos:

$$25(x - 2)^2 + 16(y + 1)^2 = 1 \Rightarrow \frac{(x - 2)^2}{\frac{1}{25}} + \frac{(y + 1)^2}{\frac{1}{16}} = 1$$

Assim, $a^2 = \dfrac{1}{16}$, $b^2 = \dfrac{1}{25}$ e, portanto:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{25} + c^2$

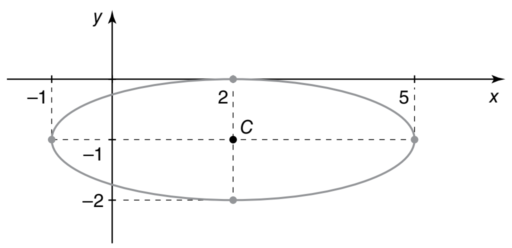
$\therefore c = \dfrac{3}{20}$

Dessa forma, a excentricidade da elipse é dada por:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

10. Inicialmente, representamos a equação na forma reduzida:
$25x^2 + 9y^2 - 90y = 0 \Rightarrow 25x^2 + 9(y^2 - 10y + 25) = 225$
$\therefore 25x^2 + 9(y - 5)^2 = 225$
Dividindo ambos os membros por 225, obtemos a equação reduzida:
$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$
Assim, o centro da elipse é o ponto $C(0, 5)$, a medida a do semieixo maior é 5, a medida b do semieixo menor é 3.
A semidistância focal c é dada pela equação $a^2 = b^2 + c^2$; logo, $5^2 = 3^3 + c^2$; portanto, $c = 4$.
Os focos são os pontos $(0, 5 - 4)$ e $(0, 5 + 4)$, ou seja, $(0, 1)$ e $(0, 9)$.
Alternativa **e**.

11. Inicialmente, vamos obter uma equação que relacione apenas as variáveis x e y; para isso, devemos eliminar o parâmetro t:
$$\begin{cases} x = 2 + 3\cos t \\ y = -1 + \text{sen } t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \cos t \\ y + 1 = \text{sen } t \end{cases}$$
Quadramos ambos os membros de cada equação, obtendo:
$$\begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{9} = \cos^2 t \\ (y+1)^2 = \text{sen}^2\, t \end{cases}$$
Adicionando membro a membro, chegamos, finalmente, a uma equação nas variáveis x e y:
$$\frac{(x-2)^2}{9} + (y+1)^2 = \cos^2 t + \text{sen}^2\, t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + (y+1)^2 = 1$$
Assim, observamos que a equação representa uma elipse de centro $C(2, -1)$, cujas medidas dos semieixos maior e menor são 3 e 1, respectivamente, com o eixo maior horizontal. Logo, o gráfico pedido é:



12. A equação representa uma elipse de centro $C(0, 0)$ com eixo maior horizontal. A medida a do semieixo maior dessa elipse é 5; a medida b do semieixo menor é 3; e a semidistância focal c é dada por: $5^2 = 3^2 + c^2$; logo, $c = 4$.
Deduzimos, então, que os focos da elipse são os pontos $(0 + 4, 0)$ e $(0 - 4, 0)$, ou seja $(4, 0)$ e $(-4, 0)$.
Assim, a área A do triângulo PF_1F_2 é dada por:
$$A = \frac{|D|}{2}, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} 2 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 64$$
Logo:
$$A = \frac{|64|}{2} = 32$$
Alternativa **d**.

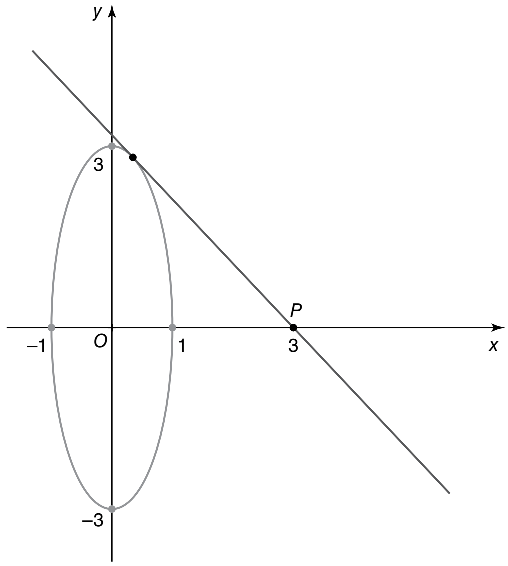
13. As intersecções entre a circunferência e a elipse são solução do sistema:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 3 & \text{(I)} \\ 2x^2 + 3y^2 = 6 & \text{(II)} \end{cases}$$
Subtraindo, membro a membro, (I) e (II), temos:
$x^2 = -3 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$
Logo, $\lambda \cap \mathscr{E} = \varnothing$.

14. **a)** Todo ponto de intersecção entre a reta e a elipse, se existe, é solução do sistema:
$$\begin{cases} y = 2x + 1 & \text{(I)} \\ \dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$
Substituindo a equação (I) na equação (II), obtemos:
$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(2x+1)^2}{4} = 1 \Rightarrow$$
$\Rightarrow 4(x - 3)^2 + 9(2x + 1)^2 = 36$
$\therefore 4x^2 - 24x + 36 + 36x^2 + 36x + 9 = 36 \Rightarrow$
$\Rightarrow 40x^2 + 12x + 9 = 0$
$\therefore \nexists\, x \in \mathbb{R}$
Logo, $r \cap \mathscr{E} = \varnothing$.

15. Como a reta e a elipse têm um único ponto em comum, deduzimos que o sistema formado por suas equações tem uma única solução. Discutindo esse sistema, temos:
$$\begin{cases} y = ax + 1 & \text{(I)} \\ x^2 + 4y^2 = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$
Substituímos (I) em (II), obtendo:
$x^2 + 4(ax + 1)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 4(a^2x^2 + 2ax + 1) = 1$
$\therefore x^2(1 + 4a^2) + 8ax + 3 = 0 \quad \text{(III)}$
O sistema acima terá uma única solução se, e somente se, o discriminante da equação (III) for nulo, isto é:
$$(8a)^2 - 4 \cdot (1 + 4a^2) \cdot 3 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4}$$
$$\text{Logo: } 8a^2 = 8 \cdot \frac{3}{4} = 6$$

16. Indicando por m o coeficiente angular da reta, temos que sua equação é da forma: $y - 0 = m(x - 3)$, ou seja, $y = mx - 3m$. Como essa reta e a elipse têm um único ponto em comum, deduzimos que o sistema formado por suas equações tem uma única solução. Discutindo esse sistema, temos:
$$\begin{cases} y = mx - 3m & \text{(I)} \\ x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$
Substituímos (I) em (II), obtendo:
$$x^2 + \frac{(mx - 3m)^2}{9} = 1 \Rightarrow$$
$\Rightarrow (9 + m^2)x^2 - 6m^2x + 9m^2 - 9 = 0 \quad \text{(III)}$
O sistema acima terá uma única solução se, e somente se, o discriminante da equação (III) for nulo, isto é:
$$(-6m^2)^2 - 4(9 + m^2)(9m^2 - 9) = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{81}{72}$$
$$\therefore m = \pm\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Esboçando o gráfico, constatamos que o coeficiente angular da reta deve ser negativo; logo, $m = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$.



Alternativa **e**.

17. Sendo $\mathscr{E}$ uma elipse de focos F_1 e F_2 e eixo maior de medida $2a$, temos que:

- Um ponto L pertence a $\mathscr{E}$ se, e somente se, $LF_1 + LF_2 = 2a$.
- Um ponto M é interior a $\mathscr{E}$ se, e somente se, $MF_1 + MF_2 < 2a$.
- Um ponto N é exterior a $\mathscr{E}$ se, e somente se, $NF_1 + NF_2 > 2a$.

Assim, para responder às perguntas, vamos calcular a medida $2a$ do eixo maior da elipse em questão.

Como $P(0, 3)$ pertence à elipse de focos $F_1(-4, 0)$ e $F_2(4, 0)$, temos que:

$PF_1 + PF_2 = 2a \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{[0-(-4)]^2 + (3-0)^2} + \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2} = 2a$

$\therefore 2a = 10$

Vejamos, então, qual é a posição de cada um dos pontos $Q(0, -3)$ e $T\left(\frac{5}{2}, \frac{13}{5}\right)$ em relação à elipse em questão:

- $QF_1 + QF_2 = \sqrt{[0-(-4)]^2 + (-3-0)^2} +$
  $+ \sqrt{(0-4)^2 + (-3-0)^2} = 10$

  Logo, $Q(0, -3)$ pertence à elipse.

- $TF_1 + TF_2 = \sqrt{\left[\frac{5}{2}-(-4)\right]^2 + \left(\frac{13}{5}-0\right)^2} +$
  $+ \sqrt{\left(\frac{5}{2}-4\right)^2 + \left(\frac{13}{5}-0\right)^2} = \frac{\sqrt{4.901}}{10} + \frac{\sqrt{901}}{10}$

  Observamos que:

  $\sqrt{4.901} > 70$, pois $70^2 = 4.900$

  e

  $\sqrt{901} > 30$, pois $30^2 = 900$

  Assim, deduzimos que:

  $\frac{\sqrt{4.901}}{10} + \frac{\sqrt{901}}{10} > 7 + 3$

  Logo, $TF_1 + TF_2 > 10$, e concluímos que o ponto T é exterior à elipse em questão.

18. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole. Por definição, temos:

$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}\right| = 1$

$\therefore \sqrt{(x-1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \pm 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \pm 1 + \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$

$\therefore (x-1)^2 + y^2 =$

$= 1 \pm 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} + (x-1)^2 + (y-3)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = 1 \pm 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} + y^2 - 6y + 9$

Isolamos o radical remanescente:

$\pm 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = 10 - 6y \Rightarrow$

$\Rightarrow \pm\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = 5 - 3y$

Quadrando ambos os membros:

$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (5-3y)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 25 - 30y + 9y^2$

$\therefore x^2 - 8y^2 - 2x + 24y - 15 = 0$

19. A distância focal da hipérbole é dada por:

$2c = F_1F_2 = \sqrt{(2-0)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow c = \sqrt{5}$

Além disso, $2b = 2$, ou seja, $b = 1$. Temos, então:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \left(\sqrt{5}\right)^2 = a^2 + 1^2$

$\therefore a = 2$

Dessa forma, a medida do eixo real é $2a = 4$. Assim, sendo $P(x, y)$ um ponto da hipérbole, temos:

$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}\right| = 4$

$\therefore \sqrt{(x-2)^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + (y-4)^2} = \pm 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \pm 4 + \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$

$\therefore (x-2)^2 + y^2 = 16 \pm 8\sqrt{x^2 + (y-4)^2} +$

$+ x^2 + (y-4)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 =$

$= 16 \pm 8\sqrt{x^2 + (y-4)^2} + x^2 + y^2 - 8y + 16$

$\therefore 2y - x - 7 = \pm 2\sqrt{x^2 + (y-4)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y^2 + x^2 + 49 - 4xy - 28y + 14x =$

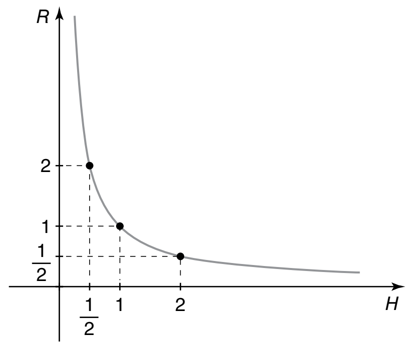
$= 4(x^2 + y^2 - 8y + 16)$

$\therefore 3x^2 + 4xy - 14x - 4y + 15 = 0$

20. **a)** Como a área lateral A_L do cilindro é dada por $A_L = 2\pi RH$, temos:

$2\pi RH = 2\pi \Rightarrow RH = 1$

Logo, as medidas R e H são inversamente proporcionais. Assim, de acordo com o exercício proposto 21, o L.G. dos pontos $P(R, H)$ é o ramo de uma hipérbole. A representação gráfica desse L.G. é:



b) Sendo k uma constante real não nula, temos que o gráfico de toda equação do tipo $xy = k$ é uma hipérbole equilátera, com o centro na origem O do sistema de eixos, cujas assíntotas são os eixos coordenados (veja o exercício proposto 21).

Se $k > 0$, então o eixo real da hipérbole está contido na bissetriz dos quadrantes ímpares; se $k < 0$, então o eixo real está contido na bissetriz dos quadrantes pares.

Assim, a equação $RH = 1$ tem como gráfico o ramo do primeiro quadrante da hipérbole $\mathscr{H}$ de equação $xy = 1$. Os vértices de $\mathscr{H}$ são os pontos $A_1(-1, -1)$ e $A_2(1, 1)$; logo, as medidas $2a$ e $2b$ dos eixos real e imaginário, respectivamente, são dadas por $2a = 2b = A_1A_2 = 2\sqrt{2}$. Como a semidistância focal c satisfaz a equação $c^2 = a^2 + b^2$, temos que: $c^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$, ou seja, $c = 2$.

Qualquer um dos focos de $\mathscr{H}$ pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares; logo, eles são da forma $F(a, a)$, com $a \in \mathbb{R}$. Assim, temos:

$FO = c \Rightarrow \sqrt{(a - 0)^2 + (a - 0)^2} = 2$

$\therefore \sqrt{2a^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2$

$\therefore a = \pm\sqrt{2}$

Concluímos, então, que os focos de $\mathscr{H}$ são os pontos $F_1\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ e $F_2\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

21. a) O centro da hipérbole é $C(0, 0)$.

Temos: $a = A_2C = |3 - 0| = 3$ e

$c = F_2C = |5 - 0| = 5$

Assim:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + b^2$

$\therefore b = 4$

Logo, como o eixo real é paralelo ao eixo x, a equação reduzida da hipérbole é:

$$\frac{(x - 0)^2}{3^2} - \frac{(y - 0)^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

b) O centro da hipérbole é: $C\left(-3, \dfrac{1 + 7}{2}\right) = C(-3, 4)$

Temos: $a = A_1C = |5 - 4| = 1$ e

$c = F_1C = |7 - 4| = 3$

Assim:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 3^2 = 1^2 + b^2$

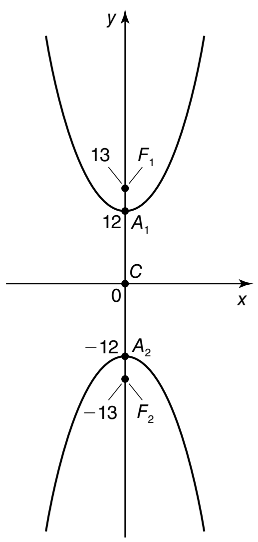
$\therefore b = 2\sqrt{2}$

Logo, como o eixo real é paralelo ao eixo y, a equação reduzida da hipérbole é:

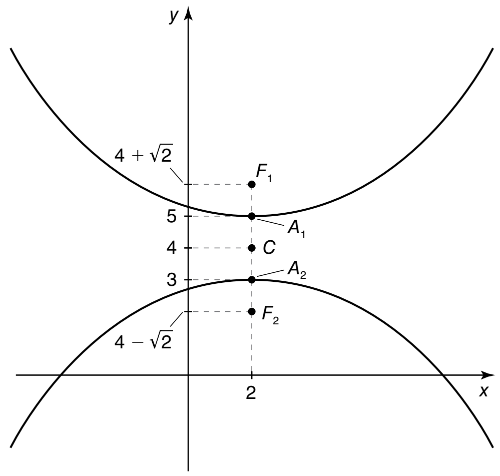
$$\frac{(y - 4)^2}{1^2} - \frac{(x - (-3))^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y - 4)^2 - \frac{(x + 3)^2}{8} = 1$$

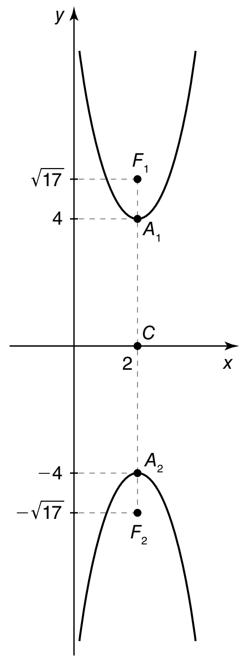
22. a)



b)



c)



23. Dados $F_1(-2, -3)$, $A_2(-2, 1)$ e $C(-2, 0)$, temos:

$A_2C = a \Rightarrow |1 - 0| = a \therefore a = 1$

$F_1C = c \Rightarrow |-3 - 0| = c \therefore c = 3$

Como $e = \dfrac{c}{a}$, então $e = 3$.

24. Temos $2c = F_1F_2 = |-5 - 5| = 10$, isto é, $c = 5$; e, como a hipérbole passa pelo ponto $\left(4, \dfrac{20}{3}\right)$, temos:

$$\left|\sqrt{(4-0)^2 + \left(\frac{20}{3} - 5\right)^2} - \sqrt{(4-0)^2 + \left(\frac{20}{3} - (-5)\right)^2}\right| =$$

$$= 2a \Rightarrow \left|\frac{13}{3} - \frac{37}{3}\right| = 2a$$

$\therefore a = 4$

Temos, ainda:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + b^2$

$\therefore b = 3$

Logo, como o eixo real é paralelo ao eixo y, a equação reduzida da hipérbole é:

$$\frac{(y - 0)^2}{4^2} - \frac{(x - 0)^2}{3^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

25. a) As equações das assíntotas da hipérbole são tais que:

$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 3y^2 = 0$

$\therefore \left(2x + \sqrt{3}\,y\right)\left(2x - \sqrt{3}\,y\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + \sqrt{3}y = 0$ ou $2x - \sqrt{3}y = 0$

Logo, as equações das assíntotas são:

$2x + \sqrt{3}y = 0$ e $2x - \sqrt{3}y = 0$

b) As equações das assíntotas da hipérbole são tais que:

$\frac{(y-5)^2}{9} - \frac{(x-6)^2}{4} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(y-5)^2 - 9(x-6)^2 = 0$

$\therefore (2(y-5) + 3(x-6))(2(y-5) - 3(x-6)) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y + 3x - 28 = 0$ ou $2y - 3x + 8 = 0$

Logo, as equações das assíntotas são:

$3x + 2y - 28 = 0$ e $3x - 2y - 8 = 0$

26. O centro C da hipérbole é o ponto comum às assíntotas; logo, C é a solução do sistema:

$\begin{cases} y = 2x \\ y = -2x + 12 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ e } y = 6$

Temos, portanto, que $C(3, 6)$.

Como o eixo real é horizontal e mede 4 unidades, temos que os vértices de $\mathcal{H}$ são os pontos $A_1(3 - 2, 6)$ e $A_2(3 + 2, 6)$, ou seja, $A_1(1, 6)$ e $A_2(5, 6)$.

As retas perpendiculares ao eixo real que passam por A_1 e A_2 encontram as assíntotas nos vértices do retângulo referência. Como a reta vertical que passa por A_2 tem equação $x = 5$, temos que um lado vertical do retângulo referência de $\mathcal{H}$ tem como extremos as soluções dos sistemas:

$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2x \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 5 \\ y = -2x + 12 \end{cases}$

Logo, esses extremos são os pontos $M(5, 10)$ e $N(5, 2)$, com o que deduzimos que a medida $2b$ do eixo imaginário é dada por:

$2b = MN = \sqrt{(5-5)^2 + (10-2)^2} = 8$

Concluímos, então, que a equação reduzida da hipérbole é:

$\frac{(x-3)^2}{2^2} - \frac{(y-6)^2}{4^2} = 1$, ou seja,

$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-6)^2}{16} = 1$

27. a) $3x^2 - 2y^2 - 8y - 14 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 - 2(y^2 + 4y + 4) = 0 + 14 - 8$

$\therefore 3x^2 - 2(y+2)^2 = 6 \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{(y+2)^2}{3} = 1$

b) $x^2 - 2y^2 + 2x + 4y - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 + 2x + 1) - 2(y^2 - 2y + 1) = 0 + 5 + 1 - 2$

$\therefore (x+1)^2 - 2(y-1)^2 = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$

c) $3y^2 - 5x^2 + 12y + 40x - 83 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(y^2 + 4y + 4) - 5(x^2 - 8x + 16) =$

$= 0 + 83 + 12 - 80$

$\therefore 3(y+2)^2 - 5(x-4)^2 = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(y+2)^2}{5} - \frac{(x-4)^2}{3} = 1$

d) $4y^2 - 8x^2 = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\frac{1}{8}} = 1$

e) $(x+2)^2 - 9(y-1)^2 = 1 \Rightarrow (x+2)^2 - \frac{(y-1)^2}{\frac{1}{9}} = 1$

28. Representando a equação de $\mathcal{H}$ na forma reduzida, temos:

$x^2 - 4y^2 + 8y - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4(y^2 - 2y + 1) = 8 - 4$

$\therefore x^2 - 4(y-1)^2 = 4$

Dividindo por 4 ambos os membros, chegamos à equação reduzida:

$\frac{x^2}{4} - (y-1)^2 = 1$

Assim, respondemos aos itens, temos:

a) F, pois, pela equação reduzida, deduzimos que $a^2 = 4$ e $b^2 = 1$, ou seja, $a = 2$ e $b = 1$; logo, o eixo real mede 4 e o eixo imaginário mede 2.

b) F, pois, atribuindo o valor 0 para x e o valor 0 para y na equação $x^2 - 4y^2 + 8y - 8 = 0$, obtemos uma sentença falsa; observe:

$0^2 - 4 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 - 8 = 0$

c) V, conforme se observa na equação reduzida.

d) V, pois, a semidistância focal pode ser obtida da equação $c^2 = 2^2 + 1^2$, de onde deduzimos que $c = \sqrt{5}$. Logo, a distância focal é $2\sqrt{5}$.

e) F, pois, a excentricidade é calculada por $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

f) V, conforme a justificativa do item **a**.

29. a) Representando a equação de $\mathcal{H}$ na forma reduzida, temos:

$x^2 - 6x - 9y^2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 6x + 9) - 9y^2 = 9$

$\therefore (x-3)^2 - 9y^2 = 9$

Dividindo por 9 ambos os membros, chegamos à equação reduzida:

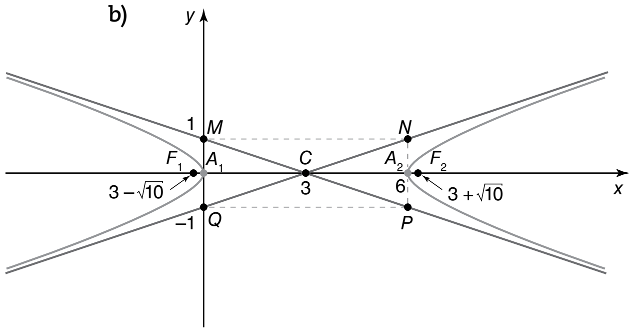
$\frac{(x-3)^2}{9} - y^2 = 1$

Assim, deduzimos que:

- o centro de $\mathcal{H}$ é o ponto $C(3, 0)$;
- o eixo real é horizontal;
- as medidas a e b do eixo semieixo real e do semieixo imaginário, respectivamente, são tais que $a^2 = 9$ e $b^2 = 1$, ou seja, $a = 3$ e $b = 1$;
- a semidistância focal c pode ser obtida pela equação $c^2 = 3^2 + 1^2$; logo, $c = \sqrt{10}$.

Concluímos, então, que os focos de $\mathcal{H}$ são os pontos $F_1\left(3 - \sqrt{10}, 0\right)$ e $F_2\left(3 + \sqrt{10}, 0\right)$.

b)



c) No gráfico do item **b**, o coeficiente angular m_r da assíntota r que passa pelos pontos $Q(0, -1)$ e $N(6, 1)$ é dado por:

$$m_r = \frac{-1-1}{0-6} = \frac{1}{3}$$

Com esse coeficiente angular e o ponto $Q(0, -1)$, obtemos a equação de r:

$$y - (-1) = \frac{1}{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = \frac{x}{3} - 1$$

No gráfico do item **b**, o coeficiente angular m_s da assíntota s que passa pelos pontos $M(0, 1)$ e $P(6, -1)$ é dado por:

$$m_s = \frac{-1-1}{6-0} = -\frac{1}{3}$$

Com esse coeficiente angular e o ponto $M(0, 1)$, obtemos a equação de s:

$$y - 1 = -\frac{1}{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -\frac{x}{3} + 1$$

30. a) Todo ponto de intersecção entre a reta e a hipérbole, se existe, é solução do sistema:

$$\begin{cases} x - 2y - 2 = 0 \\ \dfrac{x^2}{8} - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y + 2 & \text{(I)} \\ \dfrac{x^2}{8} - y^2 = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo a equação (I) na equação (II), obtemos:

$$\frac{(2y+2)^2}{8} - y^2 = 1 \Rightarrow y^2 + 2y + 1 - 2y^2 = 2$$

$\therefore y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

Da equação (I): para $y = 1$, temos $x = 4$.

Logo, $r \cap \mathcal{H} = \{(4, 1)\}$.

b) Todo ponto de intersecção entre a reta e a hipérbole, se existe, é solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + 2 & \text{(I)} \\ x^2 - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo a equação (I) na equação (II), obtemos:

$$(-y + 2)^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y^2 - 16y + 16 - y^2 + 2y - 1 = 4$$

$$\therefore 3y^2 - 14y + 11 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = \frac{11}{3}$$

Da equação (I):

- Para $y = 1$, temos $x = 1$;
- Para $y = \frac{11}{3}$, temos $x = -\frac{5}{3}$.

Logo, $r \cap \mathcal{H} = \left\{(1, 1), \left(-\frac{5}{3}, \frac{11}{3}\right)\right\}$.

31. Seja $P(x, y)$ um ponto da parábola. Por definição, temos:

$$PF = Pr \Rightarrow \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} = \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

$$\therefore \sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} = |x - 1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-5)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2$$

$$\therefore x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - 8x - 4y + 28 = 0$$

32. A diretriz s da parábola é perpendicular ao eixo de simetria r; logo, a equação de s é da forma $3x + 4y + k = 0$, para um determinado valor real de k. Como o parâmetro da parábola é a distância do foco à diretriz, obtemos o valor de k por meio da seguinte equação:

$$\frac{|3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2{,}4 \Rightarrow |12 + k| = 12$$

$\therefore k = 0$ ou $k = -12$

Assim, temos que s tem equação $3x + 4y = 0$ ou $3x + 4y - 12 = 0$.

- Para obter a equação da parábola com eixo de simetria s: $3x + 4y = 0$, consideramos um ponto genérico $G(x, y)$ e aplicamos a definição:

$$d_{PF} = d_{Ps} \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \frac{|3x + 4y|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$\therefore \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \frac{|3x + 4y|}{5}$$

Quadramos ambos os membros, obtendo:

$$\left(\sqrt{(x-4)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\frac{|3x + 4y|}{5}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + y^2 = \frac{9x^2 + 24xy + 16y^2}{25}$$

$$\therefore 16x^2 + 9y^2 - 24xy - 200x + 400 = 0$$

- Para obtermos a equação da parábola com eixo de simetria s: $3x + 4y - 12 = 0$, consideramos um ponto genérico $P(x, y)$ e aplicamos a definição:

$$d_{PF} = d_{Ps} \Rightarrow \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \frac{|3x + 4y - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$\therefore \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \frac{|3x + 4y - 12|}{5}$$

Quadramos ambos os membros, obtendo:

$$\left(\sqrt{(x-4)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\frac{|3x + 4y - 12|}{5}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4)^2 + y^2 = \frac{(3x + 4y - 12)^2}{25}$$

$$\therefore 16x^2 + 9y^2 - 24xy - 128x + 96y + 256 = 0$$

Concluímos, então, que há duas parábolas possíveis nas condições enunciadas. Suas equações são:

$16x^2 + 9y^2 - 24xy - 200x + 400 = 0$ e

$16x^2 + 9y^2 - 24xy - 128x + 96y + 256 = 0$

33. a) O vértice da parábola é o ponto $V(5, 4)$.

A distância do foco F à diretriz r é o parâmetro p. Como a distância do vértice à diretriz é metade do parâmetro, temos: $Vr = \frac{p}{2} \Rightarrow |5 - 3| = \frac{p}{2}$

$\therefore p = 4$

A diretriz é paralela ao eixo Oy e a concavidade da parábola é voltada para o sentido positivo do eixo Ox (voltada para direita). Assim, identificamos o 3º caso; logo, a equação da reduzida da parábola é:

$(y - 4)^2 = 2 \cdot 4\,(x - 5) \Rightarrow (y - 4)^2 = 8(x - 5)$

b) O vértice da parábola é o ponto $V(0, 0)$

A distância do foco F à diretriz r é o parâmetro p. Como a distância do vértice à diretriz é metade do parâmetro, temos: $Vr = \frac{p}{2} \Rightarrow |0 - 2| = \frac{p}{2}$

$\therefore p = 4$

A diretriz é paralela ao eixo Oy e a concavidade da parábola é voltada para o sentido negativo do eixo Ox (voltada para a esquerda). Assim identificamos o 4º caso; logo, a equação da parábola é: $(y - 0)^2 = -8(x - 0)$, ou seja, $y^2 = -8x$.

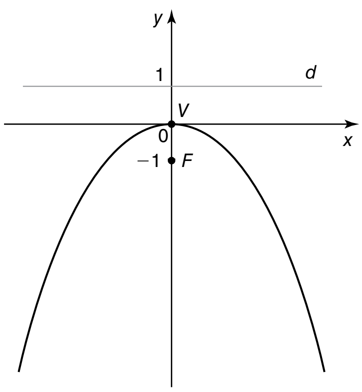
c) O vértice da parábola é o ponto $V(0, 0)$.
A distância do foco F à diretriz r é o parâmetro p. Como a distância do vértice à diretriz é metade do parâmetro, temos: $Vr = \frac{p}{2} \Rightarrow |0 - (-3)| = \frac{p}{2}$
$\therefore p = 6$
A diretriz é paralela ao eixo Ox e a concavidade da parábola é voltada para o sentido positivo do eixo Oy (voltada para cima). Assim, identificamos o 1º caso; logo, a equação da reduzida da parábola é:
$(x - 0)^2 = 2 \cdot 6\,(y - 0) \Rightarrow x^2 = 12y$

d) O vértice da parábola é $V(8, -10)$.
A distância do foco F à diretriz r é o parâmetro p. Como a distância do vértice à diretriz é metade do parâmetro, temos:

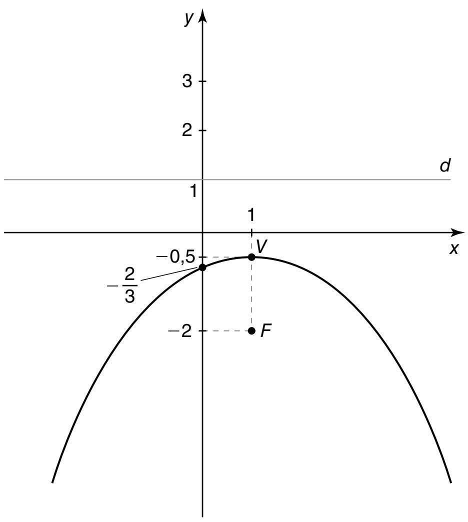
$$Vr = \frac{p}{2} \Rightarrow |-10 - (-6)| = \frac{p}{2} \Rightarrow p = 8$$

A diretriz é paralela ao eixo Ox e a concavidade da parábola é voltada para o sentido negativo do eixo Oy (voltada para baixo). Assim, identificamos o 2º caso; logo, a equação da reduzida da parábola é:
$(x - 8)^2 = -2 \cdot 8[y - (-10)] \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 8)^2 = -16(y + 10)$

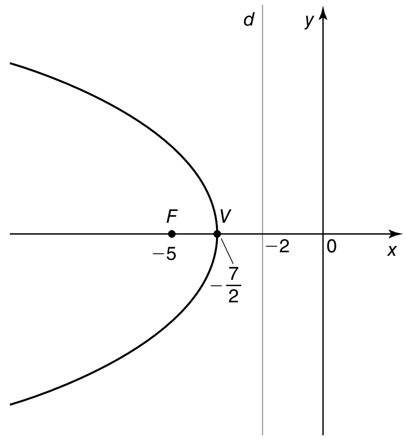
34. a)



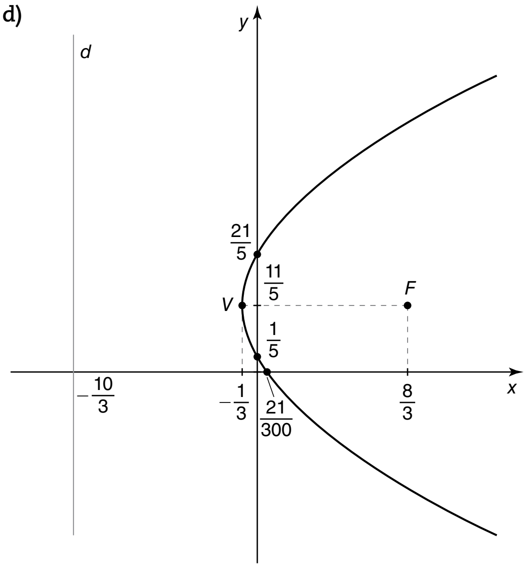
b)



c)



d)



35. O vértice da parábola é $V(3, 0)$. Assim, sendo p seu parâmetro, sua equação reduzida é:
$(y - 0)^2 = -2p(x - 3) \Rightarrow y^2 = -2p(x - 3)$
Como o ponto $(0, 6)$ pertence à parábola, substituindo as variáveis x e y da equação por 0 e 6, respectivamente, temos:
$6^2 = -2p(0 - 3) \Rightarrow -2p = -12$
Logo, a equação reduzida da parábola é:
$y^2 = -12(x - 3)$

36. a) $x = 2y^2 + 2y - 1 \Rightarrow x + 1 = 2(y^2 + y)$

$$\therefore x + 1 + \frac{1}{2} = 2\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

b) $y = x^2 + 3x \Rightarrow y + \frac{9}{4} = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$

$$\therefore \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = y + \frac{9}{4}$$

c) $y = -3x^2 + 6x + 4 \Rightarrow y - 4 = -3(x^2 - 2x)$
$\therefore y - 4 - 3 = -3(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 = -\frac{1}{3}(y - 7)$$

d) $x = 1 - y^2 \Rightarrow y^2 = -1(x - 1)$

37. Para encontrar o vértice da parábola, escrevemos sua equação na forma reduzida:
$x = y^2 + 6y + 5 \Rightarrow x - 5 = y^2 + 6y$
$\therefore x - 5 + 9 = y^2 + 6y + 9 \Rightarrow (y + 3)^2 = x + 4$
Logo, temos $V(-4, -3)$.

38. a) Todo ponto de intersecção da reta s com a parábola $\mathcal{P}$, se existe, é solução do sistema:

$$\begin{cases} 5x + y - 22 = 0 \\ x^2 = 3(y - 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 22 - 5x & \text{(I)} \\ x^2 = 3(y - 4) & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:
$x^2 = 3(22 - 5x - 4) \Rightarrow x^2 = 54 - 15x$
$\therefore x^2 + 15x - 54 = 0 \Rightarrow x = -18$ ou $x = 3$
Da equação (I):
- Para $x = -18$, temos $y = 112$;
- Para $x = 3$, temos $y = 7$.

Logo, $s \cap \mathcal{P} = \{(3, 7), (-18, 112)\}$.

b) Todo ponto de intersecção da reta s com a parábola $\mathcal{P}$, se existe, é solução do sistema:

$$\begin{cases} x - 4 = 0 \\ (x - 5)^2 = -2(y + 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ (x - 5)^2 = -2(y + 1) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:
$(4 - 5)^2 = -2(y + 1) \Rightarrow y = -\dfrac{3}{2}$

Logo, $s \cap \mathcal{P} = \left\{\left(4, -\dfrac{3}{2}\right)\right\}$.

c) Todo ponto de intersecção entre a reta s e a parábola $\mathcal{P}$, se existe, é solução do sistema:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y^2 = -3(x + 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y & \text{(I)} \\ y^2 = -3(x + 2) & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:
$y^2 = -3(y + 2) \Rightarrow y^2 + 3y + 6 = 0 \Rightarrow \nexists\, y \in \mathbb{R}$
Logo, $s \cap \mathcal{P} = \varnothing$.

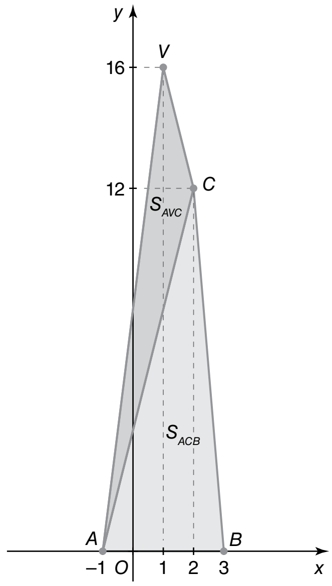
39. a) Fazendo $y = 0$ na equação de $\mathcal{P}$, temos:
$0 = -4x^2 + 8x + 12 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 3$
Assim, supondo que A tenha a abscissa menor que B, concluímos que $A(-1, 0)$ e $B(3, 0)$.
O vértice V da parábola pode ser obtido representando-se a equação na forma reduzida:
$y = -4x^2 + 8x + 12 \Rightarrow y - 12 = -4x^2 + 8x$
$\therefore y - 12 - 4 = -4(x^2 - 2x + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow y - 16 = -4(x - 1)^2$
$\therefore (x - 1)^2 = -\dfrac{1}{4} \cdot (y - 16)$
Logo, $V(1, 16)$.

b) O ponto C é uma das soluções do sistema

$$\begin{cases} y = 3x + 6 \\ y = -4x^2 + 8x + 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x = 2 \text{ e } y = 12)$ ou $\left(x = -\dfrac{3}{4} \text{ e } y = \dfrac{15}{4}\right)$
Logo, $C(2, 12)$.

c) Admitindo que a área S pedida seja a do quadrilátero convexo determinado por esses pontos, podemos calculá-la como a soma da área S_{AVC}, do triângulo AVC, com a área S_{ACB}, do triângulo ACB, como ilustra a figura a seguir:



A área S_{AVC} é dada por:

$$S_{AVC} = \frac{|D_{AVC}|}{2}, \text{ em que } D_{AVC} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 16 & 1 \\ 2 & 12 & 1 \end{vmatrix} = -24$$

Logo, $S_{AVC} = \dfrac{|-24|}{2} = 12$.

A área S_{ACB} é dada por:

$$S_{ACB} = \frac{|D_{ACB}|}{2}, \text{ em que } D_{ACB} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 12 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -48$$

Logo, $S_{ACB} = \dfrac{|-48|}{2} = 24$.

Concluímos, então, que:
$S = S_{AVC} + S_{ACB} \Rightarrow S = 12 + 24 = 36$

40. I. Temos que E é uma elipse de focos $F_1\left(-\sqrt{3}, 0\right)$ e $F_2\left(\sqrt{3}, 0\right)$, em que a medida $2a$ do eixo real é 4.
Assim, deduzimos que:
- o eixo real de E é horizontal, pois contém o segmento $\overline{F_1F_2}$, que é horizontal;
- o centro da elipse é o ponto $C(0, 0)$, pois é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$;
- a distância focal $2c$ é dada por: $2c = F_1F_2 = 2\sqrt{3}$;
- a medida b do semieixo real é dada por: $b^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2^2$; portanto, $b = 1$.

Assim, temos a equação reduzida da elipse E:
$\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

II. Os pontos de intersecção de E com o eixo Oy são obtidos atribuindo-se o valor zero à variável x da equação da elipse, isto é:
$\dfrac{0^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

Logo, a elipse intercepta o eixo das ordenadas nos pontos $V(0, 1)$ e $U(0, -1)$, com o que deduzimos que a parábola C tem vértice $V(0, 1)$. Pelo fato de C ter o eixo de simetria vertical e a concavidade voltada para baixo, temos que sua equação reduzida é da forma $(x - 0)^2 = -2p(y - 1)$, em que p é o parâmetro da parábola.

Como $F_2\left(\sqrt{3}, 0\right)$ pertence a C, obtemos o valor de p:

$$\left(\sqrt{3} - 0\right)^2 = -2p(0 - 1) \Rightarrow p = \frac{3}{2}$$

Portanto, a equação de C é: $x^2 = -3(y - 1)$

III. Os pontos de intersecção entre E e C são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x^2 = -3(y - 1) \end{cases} \Rightarrow (x = 0 \text{ e } y = 1) \text{ ou}$$

$$\left(x = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ e } y = -\frac{1}{4}\right) \text{ ou } \left(x = -\frac{\sqrt{15}}{2} \text{ e } y = -\frac{1}{4}\right)$$

Concluímos, então, que os pontos de intersecção de E e C são:

$$(0, 1), \left(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{4}\right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

41. A reta e a parábola terão exatamente dois pontos distintos em comum se, e somente se, o sistema de equações abaixo tiver exatamente duas soluções distintas.

$$\begin{cases} cy = x & \text{(I)} \\ x^2 + 4y = -1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$(cy)^2 + 4y = -1 \Rightarrow c^2y^2 + 4y + 1 = 0$ (III)

Para $c = 0$, a reta e a parábola terão um único ponto em comum; logo, esse valor de c não nos convém.

Para $c \neq 0$, a reta e a parábola terão dois pontos distintos em comum se, e somente se, o discriminante da equação (III) for positivo, isto é:

$16 - 4c^2 > 0 \Rightarrow -2 < c < 2$

Alternativa **b**.

42. Os pontos comuns à parábola e à reta são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} y^2 = 12(x - 3) \\ 2x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x = 3 \text{ e } y = 0) \text{ ou } (x = 6 \text{ e } y = 6)$$

Assim, os extremos da corda que a parábola $\mathcal{P}$ determina na reta r são os pontos $A(3, 0)$ e $B(6, 6)$.

Concluímos, então, que o comprimento dessa corda é dado por:

$$AB = \sqrt{(6 - 3)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

43. Para que ABQ seja um triângulo, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow x + 2y + 14 - 2 - 7x - 2y \neq 0$$

$\therefore x \neq 2$

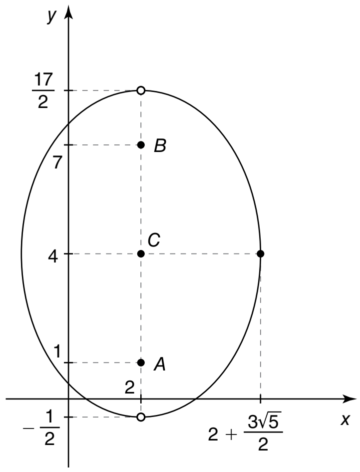
Além disso, $AB = |1 - 7| = 6$ e $AB + BQ + QA = 15$, ou seja, $BQ + QA = 9$. Como a soma das distâncias de Q a dois pontos fixos A e B é constante e maior que AB, o lugar geométrico dos pontos Q é uma elipse de focos $A(2, 1)$ e $B(2, 7)$, centro $C(2, 4)$, eixo maior $2a = 9$ e distância focal $2c = 6$. Temos, então:

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \Rightarrow b^2 = \frac{45}{4}$$

Logo, uma equação da elipse é:

$$\frac{(x - 2)^2}{\frac{45}{4}} + \frac{(y - 4)^2}{\frac{81}{4}} = 1$$

Como $x \neq 2$, o gráfico do L.G. dos pontos Q é:



44.
- Seja $Q(x, y)$ um ponto genérico do plano cartesiano.
- Impondo que as circunferências de centro Q passam por A e tangenciam r, temos $d_{QA} = d_{Qr}$, ou seja:

$$\frac{|1 \cdot x + 1 \cdot y|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x + y)^2}{2} = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$$

$\therefore x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 - 8x + 8 + 2y^2 - 4y + 2$

$\therefore x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 4y + 10 = 0$

Assim, uma equação do L.G. é:

$x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 4y + 10 = 0$

45. Seja $B(t, t^2)$ um ponto genérico da parábola. Os pontos médios dos segmentos de reta $\overline{AB}$ têm coordenadas $\left(\dfrac{t + 2}{2}, \dfrac{t^2}{2}\right)$.

Sejam $x = \dfrac{t + 2}{2}$ e $y = \dfrac{t^2}{2}$. Temos, então:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t + 2}{2} \\ y = \dfrac{t^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2x - 2 \\ y = \dfrac{(2x - 2)^2}{2} \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{4x^2 - 8x + 4}{2}$$

Logo, uma equação do lugar geométrico é:

$y = 2x^2 - 4x + 2$

46. Temos:
- $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$

  $\therefore y = \pm\sqrt{1 - x^2}$
- Para $y = \sqrt{1 - x^2}$, seja $B\left(t, \sqrt{1 - t^2}\right)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$ e $M\left(\dfrac{t + 4}{2}, \dfrac{\sqrt{1 - t^2}}{2}\right)$ o ponto médio de $\overline{AB}$. Temos,

então:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t+4}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{1-t^2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2x - 4 \\ y = \dfrac{\sqrt{1-(2x-4)^2}}{2} \end{cases}$$

$$\therefore\ y^2 = \frac{1 - 4(x-2)^2}{4} \Rightarrow 4(x-2)^2 + 4y^2 = 1$$

- Para $y = -\sqrt{1-x^2}$, seja $B\left(t, -\sqrt{1-t^2}\right)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$ e $M\left(\dfrac{t+4}{2}, -\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{2}\right)$ o ponto médio de $\overline{AB}$. Temos, então:

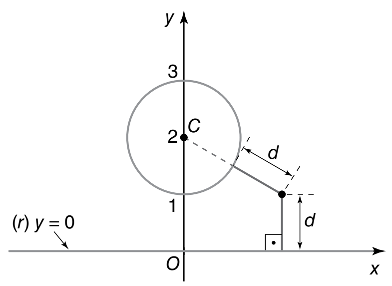
$$\begin{cases} x = \dfrac{t+4}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2x - 4 \\ y = -\dfrac{\sqrt{1-(2x-4)^2}}{2} \end{cases}$$

$$\therefore\ y^2 = \frac{1 - 4(x-2)^2}{4} \Rightarrow 4(x-2)^2 + 4y^2 = 1$$

Logo, uma equação do lugar geométrico é:
$4(x-2)^2 + 4y^2 = 1$

47. Sendo $P(x, y)$ um ponto genérico desse L.G., temos:
$PP_1 = PP_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + [y-(-1)]^2}$
Quadrando ambos os membros, obtemos:
$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-0)^2 + [y-(-1)]^2}\right)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = x^2 + (y+1)^2$
$\therefore\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + y^2 + 2y + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + 2y - 3 = 0$
Alternativa **b**.

48. Sendo $P(x, y)$ um ponto genérico desse L.G., esquematizamos:



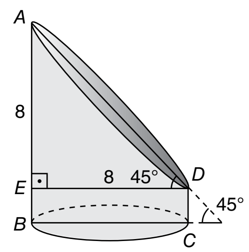
Pelo esquema, observamos que uma condição necessária para que o ponto $P(x, y)$ equidiste da reta e da circunferência é $y > 0$. Logo, a distância entre P e a reta é y (não é necessário o módulo).
Assim, equacionamos:
$y = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow y + 1 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}$
Elevando ambos os membros da equação acima ao quadrado, obtemos:
$(y+1)^2 = \left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2}\right)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 4y + 4$
$\therefore\ x^2 = 6y - 3$
Alternativa **a**.

49. $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [100] \Rightarrow \begin{bmatrix} 4x & 25y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [100]$
$\therefore\ [4x^2 + 25y^2] = [100] \Rightarrow 4x^2 + 25y^2 = 100$
Dividindo ambos os membros por 100, obtemos:
$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1$
Essa equação representa uma elipse cujas medidas a e b dos semieixos maior e menor são dadas por $a^2 = 25$ e $b^2 = 4$, ou seja, $a = 5$ e $b = 2$. Assim, a medida c da semidistância focal é dada por $c^2 + 2^2 = 5^2$, ou seja, $c = \sqrt{21}$; logo, a distância focal $2c$ é $2\sqrt{21}$.
Alternativa **b**.

50. A circunferência tem centro C(0, 0) e raio R = 2.
Seja Q(x, y) um ponto genérico do plano cartesiano. A distância entre Q e a circunferência é a diferença entre a distância QC e o raio R = 2. Impomos, então, que QC − R = QA, ou seja, QC − 2 = QA:
$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} - 2 = \sqrt{(x-0)^2 + (y-5)^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + (y-5)^2}\right)^2$
$\therefore\ x^2 + y^2 - 4\sqrt{x^2 + y^2} + 4 = x^2 + (y-5)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4\sqrt{x^2 + y^2} + 4 = x^2 + y^2 - 10y + 25$
$\therefore\ 10y - 21 = 4\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow (10y - 21)^2 = 16(x^2 + y^2)$
$\therefore\ 100y^2 - 420y + 441 = 16x^2 + 16y^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 84y^2 - 16x^2 - 420y + 441 = 0$
$\therefore\ -16x^2 + 84\left(y^2 - 5y + \dfrac{25}{4}\right) = -441 + 525$
$\therefore\ \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{x^2}{\left(\dfrac{21}{4}\right)} = 1$
Logo, uma equação do L.G. é $\left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{x^2}{\left(\dfrac{21}{4}\right)} = 1$.

Exercícios contextualizados

51. **a)** Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ as geratrizes maior e menor do tronco de cilindro, respectivamente, em que A e D pertencem à elipse. A reta que passa por D e é perpendicular a $\overline{AB}$, no ponto E, determina o triângulo retângulo isósceles ADE representado abaixo.



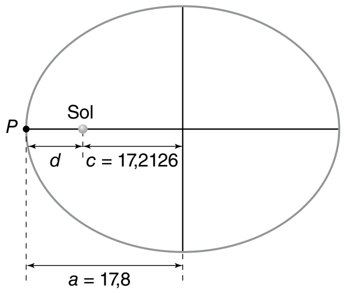
Pelo teorema de Pitágoras, temos:
$(AD)^2 = 8^2 + 8^2 \Rightarrow AD = 8\sqrt{2}$
Logo, o eixo maior da elipse mede $8\sqrt{2}$ cm.
A medida do eixo menor é a própria medida do diâmetro da base circular do tronco de cilindro, ou seja, 8 cm.

b) Indicando por c a semidistância focal, temos:
$\left(4\sqrt{2}\right)^2 = c^2 + 4^2 \Rightarrow c = 4$
Logo, a distância focal é 8 cm.

52. Indicando por a e c as medidas, em ua, do semieixo maior e da semidistância focal da elipse descrita pela órbita do cometa, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{c}{a} = 0{,}967 \\ 2a = 35{,}6 \end{cases} \Rightarrow a = 17{,}8 \text{ e } c = 17{,}2126$$

Sendo P o ponto da elipse mais próximo do Sol e d a distância, em ua, entre P e o Sol, esquematizamos:



Logo: $d = (17{,}8 - 17{,}2126)$ ua $= 0{,}5874$ ua

53. Indicando por a e b as medidas dos semieixos maior e menor, respectivamente, e por c a semidistância focal da elipse orbital da Lua em torno da Terra, temos:

$$\begin{cases} a = 387.000 \\ b = 386.500 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow c \approx 19.666$$

Portanto, a semidistância focal é 19.666 km, aproximadamente. Assim, concluímos que:

a) A maior distância entre a Terra e a Lua, $a + c$, é dada, aproximadamente, por:
$(387.000 + 19.666)$ km $= 406.666$ km

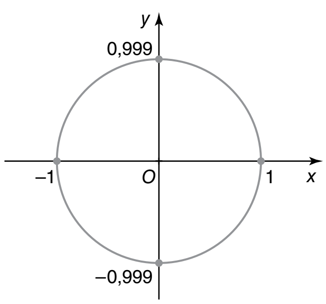
b) A menor distância entre a Terra e a Lua, $a - c$, é dada, aproximadamente, por:
$(387.000 - 19.666)$ km $= 367.334$ km

54. a) Indicando por a, b e c as medidas dos semieixos, maior e menor, e da semidistância focal, respectivamente, temos:

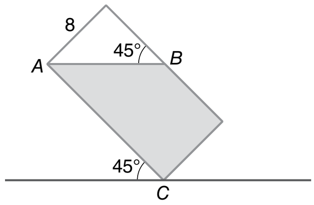
$$\begin{cases} \dfrac{c}{a} = 0{,}017 \\ a = 1 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b \approx 0{,}999 \text{ e } c = 0{,}017$$

Assim, a medida do semieixo menor é 0,999, aproximadamente.

b) **Professor!** O gráfico abaixo foi feito com o Winplot. Se puder, construa-o com os alunos usando esse *software* e comente a impossibilidade de diferenciá-lo, visualmente, de uma circunferência. $\left(\text{Foi usada a equação: } \dfrac{x^2}{1^2} + \dfrac{y^2}{(0{,}999)^2} = 1\right)$



55. a) Esquematizando uma secção meridiana do cilindro, temos:



A medida $2b$ do eixo menor da elipse é o diâmetro da base do cilindro; logo, $2b = 8$, ou seja, $b = 4$.

A medida $2a$ do eixo maior da elipse é o comprimento AB; logo:

$$\text{sen } 45° = \frac{8}{2a} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8}{2a}$$

$\therefore\ a = 4\sqrt{2}$

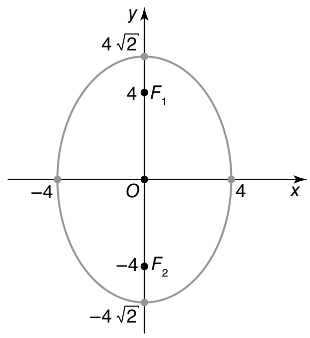
A semidistância focal c é dada por:

$$c^2 + 4^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow c = 4$$

Concluímos, então, que a excentricidade e da elipse é calculada por:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b) Representando a elipse no sistema cartesiano, conforme as condições do enunciado, temos:

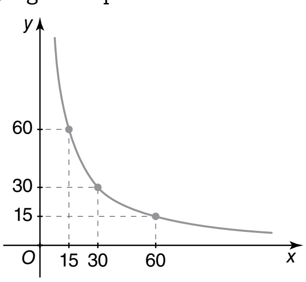


Logo, a equação reduzida da elipse é:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1$$

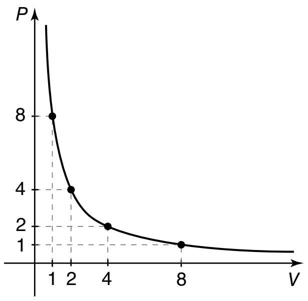
56. a) Sendo k uma constante real não nula, temos que o gráfico de toda equação do tipo $xy = k$ é uma hipérbole equilátera, com o centro na origem O do sistema de eixos, cujas assíntotas são os eixos coordenados (veja o exercício proposto 21). Se $k > 0$, então o eixo real da hipérbole está contido na bissetriz dos quadrantes ímpares; se $k < 0$, então o eixo real está contido na bissetriz dos quadrantes pares.

Assim, a equação $xy = 900$, com $x > 0$ e $y > 0$, tem como gráfico o ramo do primeiro quadrante da hipérbole $\mathcal{H}$ de equação $xy = 900$, com $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^*$. Portanto, o gráfico pedido é:

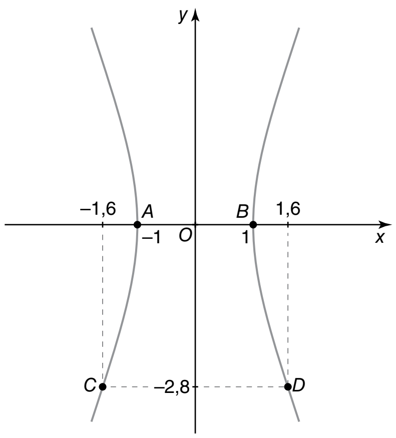


b) Os vértices da hipérbole $\mathcal{H}$ que contém o ramo representado no item **a** são os pontos $A_1(-30, -30)$ e $A_2(30, 30)$; logo, as medidas $2a$ e $2b$ dos eixos real e imaginário, respectivamente, são dadas por $2a = 2b = A_1A_2 = 60\sqrt{2}$. Como a semidistância focal c satisfaz a equação $c^2 = a^2 + b^2$, temos que:
$c^2 = \left(30\sqrt{2}\right)^2 + \left(30\sqrt{2}\right)^2$, ou seja, $c = 60$
Concluímos, então, que a excentricidade e da hipérbole é dada por:
$$e = \frac{c}{a} = \frac{60}{30\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

57. Como as grandezas pressão e volume são inversamente proporcionais, o produto delas é uma constante. Assim, temos:
$P \cdot V = 1 \cdot 8 \Rightarrow PV = 8$
O gráfico cartesiano dessa equação, para $P > 0$ e $V > 0$, é:



58. a) Uma escolha conveniente para o sistema cartesiano é fixá-lo de modo que o eixo das abscissas contenha o eixo real da hipérbole $\mathcal{H}$ cujo centro é a origem O do sistema. Assim, temos o gráfico:

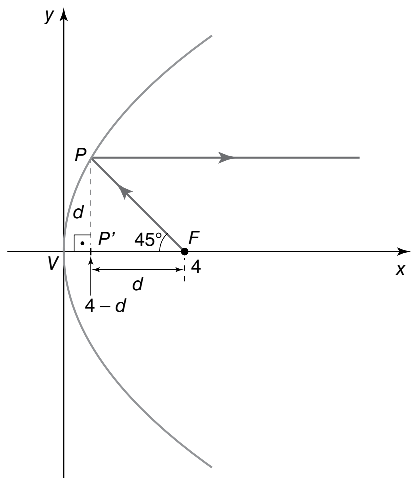


Assim, sendo b a medida do eixo imaginário da hipérbole, temos que a equação reduzida de $\mathcal{H}$ tem a forma:
$$\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
Como o ponto $D(1{,}6; -2{,}8)$ pertence a $\mathcal{H}$, temos que:
$$\frac{(1{,}6)^2}{1^2} - \frac{(-2{,}8)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{784}{156} = \frac{196}{39}$$
A semidistância focal obedece à equação $c^2 = a^2 + b^2$; logo:
$$c^2 = 1 + \frac{196}{39} \Rightarrow c \approx 2{,}45$$
Concluímos, então, que a excentricidade e é dada por:
$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e \approx 2{,}45$$

b) A imagem vista pelo fotógrafo no momento em que tirou a foto é semelhante à imagem reproduzida na fotografia. Como a razão entre comprimentos correspondentes em figuras semelhantes é constante, temos que a razão entre a semidistância focal e o semieixo real é a mesma na foto e na realidade.

59. a) Vamos associar um sistema cartesiano ao plano da parábola $\mathcal{P}$ geradora desse paraboloide tal que:
- o vértice de $\mathcal{P}$ coincida com a origem O do sistema de eixos;
- o eixo de simetria de $\mathcal{P}$ esteja contido no eixo das abscissas;
- a concavidade de $\mathcal{P}$ esteja voltada para o sentido positivo do eixo das abscissas;
- a unidade adotada nos eixos seja o centímetro.

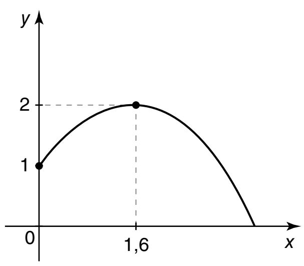
Assim, sendo P' a projeção ortogonal de P sobre o eixo das abscissas, temos que o triângulo retângulo FPP' é isósceles de base $\overline{FP}$. Logo, se d é a distância entre o raio refletido e o eixo de simetria de $\mathcal{P}$, então $PP' = FP' = d$ e, por consequência, o ponto P é da forma $P(4 - d, d)$.



Como a equação de $\mathcal{P}$ é $y^2 = 16x$ e $P(4 - d, d)$ pertence a $\mathcal{P}$, temos:
$d^2 = 16(4 - d) \Rightarrow d^2 + 16d - 64 = 0$
$\therefore\ d = 8\sqrt{2} - 8$ ou $d = -8\sqrt{2} - 8$ (não convém)
Concluímos, então, que a distância d entre o raio refletido e o eixo de simetria é dada por:
$d = 8\left(\sqrt{2} - 1\right)$ cm

b) No triângulo retângulo FPP', temos:
$d^2 + d^2 = (PF)^2$; logo, $PF = d\sqrt{2}$, ou seja:
$PF = 8\left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot \sqrt{2}$ cm $\Rightarrow PF = 8\left(2 - \sqrt{2}\right)$ cm

60. a) Num sistema de coordenadas cartesianas, temos a seguinte situação:



Assim, o vértice da parábola é $V(1{,}6; 2)$ e, sendo p seu parâmetro, sua equação é dada por:
$(x - 1{,}6)^2 = -2p(y - 2)$
Como a parábola passa pelo ponto $(0, 1)$, temos:
$(0 - 1{,}6)^2 = -2p(1 - 2) \Rightarrow p = 1{,}28$
Logo, a diretriz da parábola passa a uma altura de:

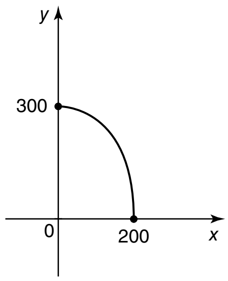
$2 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}28 = 2{,}64$

Ou seja, 2,64 m do solo.

b) O foco está a uma altura de: $2 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}28 = 1{,}36$

Ou seja, 1,36 m do solo.

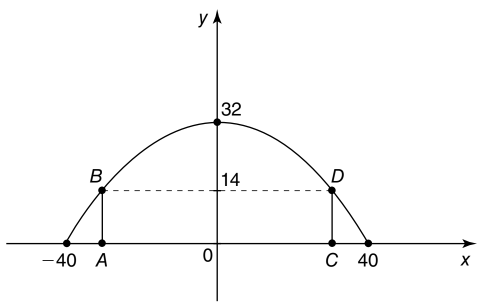
61. **a)** Num sistema de coordenadas cartesianas, temos a seguinte situação:



Assim, o vértice da parábola é $V(0, 300)$ e, sendo p seu parâmetro, sua equação é dada por:
$x^2 = -2p(y - 300)$
Como a parábola passa pelo ponto $(200, 0)$, temos:
$200^2 = -2p(0 - 300) \Rightarrow p = \frac{200}{3}$
Assim, a diretriz da parábola passa a uma altura de:
$\left(300 + \frac{1}{2} \cdot \frac{200}{3}\right) \text{m} = \frac{1.000}{3}$ m ou, aproximadamente, 333,33 m do solo

b) O foco da parábola está a:
$\left(300 - \frac{1}{2} \cdot \frac{200}{3}\right) \text{m} = \frac{800}{3}$ m ou, aproximadamente, 266,67 m do solo

62. Num sistema de coordenadas cartesianas, temos a seguinte situação:



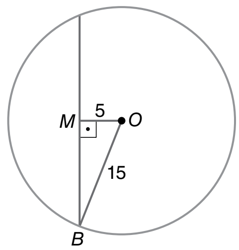
Assim, o vértice da parábola é $V(0, 32)$ e, sendo p seu parâmetro, sua equação é dada por:
$x^2 = -2p(y - 32)$
Como a parábola passa pelo ponto $(40, 0)$, temos:
$40^2 = -2p(0 - 32) \Rightarrow p = 25$
Logo, uma equação da parábola é: $x^2 = -50(y - 32)$

As abscissas de B e D são soluções da equação:
$x^2 = -50(14 - 32) \Rightarrow x^2 = 900$
$\therefore x = -30$ ou $x = 30$
Dessa forma, temos $B(-30, 14)$, $D(30, 14)$, e a distância entre os pilares é: $|-30 - 30|$ m $= 60$ m

63. Pelo teorema de Pitágoras, calculamos a medida g, em centímetro, da geratriz do cone:
$g^2 = 36^2 + 15^2 \Rightarrow g = 39$
com o que deduzimos que $PA' = 26$.
Pela semelhança entre os triângulos VAA' e PMA', temos:

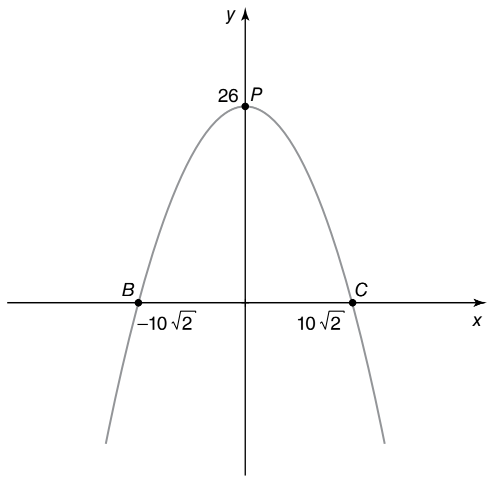
$\frac{VA'}{PA'} = \frac{VA}{PM} = \frac{AA'}{MA'} \Rightarrow \frac{39}{26} = \frac{39}{PM} = \frac{30}{MA'}$

$\therefore PM = 26$ e $MA' = 20$
com o que deduzimos que:
$MO = 20 - 15 = 5$
No triângulo OMB, aplicamos o teorema de Pitágoras, obtendo o comprimento MB:



$(MB)^2 + 5^2 = 15^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow MB = 10\sqrt{2}$

Assim, esboçamos o gráfico da parábola $\mathcal{P}$ de acordo com as condições do enunciado:



O vértice de $\mathcal{P}$ é o ponto $V(0, 26)$, o eixo de simetria é vertical e a concavidade é voltada para o sentido negativo do eixo Oy. Assim, sendo p o parâmetro da parábola, temos que a equação de $\mathcal{P}$ é da forma:
$(x - 0)^2 = -2p(y - 26)$
Como o ponto $C(10\sqrt{2}, 0)$ pertence a $\mathcal{P}$, temos que:
$(10\sqrt{2} - 0)^2 = -2p(0 - 26) \Rightarrow 200 = -2p \cdot (-26)$

$\therefore -\frac{100}{13} = -2p$

Concluímos, então, que a equação da parábola é:

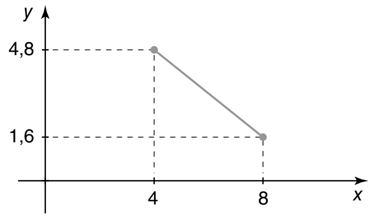
$x^2 = -\frac{100}{13} \cdot (y - 26)$

64. A soma das áreas dos vidros deve ser igual à área do vão da janela, isto é:

$$xy + \frac{x(8 - y)}{2} + \frac{y(10 - x)}{2} = \frac{10 \cdot 8}{2} \Rightarrow 8x + 10y = 80$$

$\therefore\ 4x + 5y - 40 = 0$

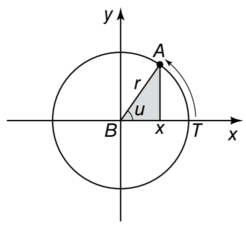
Representando no plano cartesiano o gráfico dessa equação, para $4 \leqslant x \leqslant 8$, concluímos que:



65. Produzidas x unidades, o custo variável para a empresa é: $x\left(5 - \frac{x}{100}\right) = 5x - \frac{x^2}{100}$

Assim, o custo total é: $y = 10.000 + 5x - \frac{x^2}{100}$, que representa um arco de parábola com $x \geqslant 0$.

66. Observe a figura:



Para qualquer posição do ponto *A*, temos:

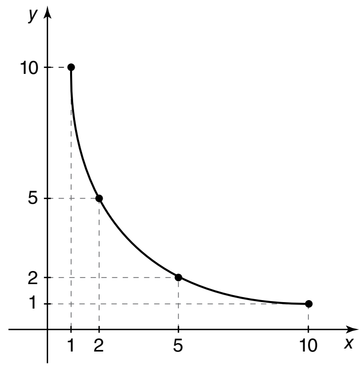
$\cos u = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos u,\ 0 \leqslant u \leqslant 2\pi$

que é a equação do L.G. (lugar geométrico) no sistema *uOx*.

67. Lembrando que a velocidade é a razão entre a distância e o tempo, temos:

$y = \frac{10}{x} \Rightarrow xy = 10$, com $1 \leqslant x \leqslant 10$

Temos, então, o seguinte gráfico:



Pré-requisitos para o capítulo 6

1. a) $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$

Logo:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = -1$$

Assim, concluímos que: $S = \{3, -1\}$

b) $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$

Como $\Delta < 0$, concluímos que a equação não possui raiz real; logo, $S = \varnothing$.

2. A equação não possui raiz real se, e somente se, $\Delta < 0$, isto é:

$2^2 - 4 \cdot 3 \cdot k < 0 \Rightarrow k > \frac{1}{3}$

3. **a)** A equação $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 9$ representa uma circunferência.
b) A equação $(x + 6)^2 + y^2 = 0$ representa um ponto.
c) A equação $\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{9} = 1$ representa uma elipse.
d) A equação $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ representa uma hipérbole.
e) A equação $(x - 2)^2 = 4(y + 3)$ representa uma parábola.
f) A equação $x^2 - y^2 = 0$ representa um par de retas concorrentes (as bissetrizes dos quadrantes).

4. $\begin{cases} \text{sen } 3\alpha = \frac{1}{2} \\ \cos 3\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{18} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}$, com $k \in \mathbb{Z}$

Logo, o conjunto solução S da equação é dado por:

$S = \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \frac{\pi}{18} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

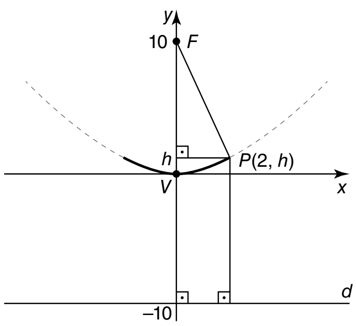
Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. Seja h a distância, em metro, entre o vértice V e o plano da borda do espelho.
Consideremos um sistema cartesiano de eixos associado ao plano da parábola geradora da superfície do espelho tal que:

- o vértice V coincida com a origem O do sistema;
- a unidade adotada nos eixos seja o metro;
- a parábola tenha a concavidade voltada para o sentido positivo do eixo Oy.

Assim, como no esquema abaixo:



Como o ponto P pertence à parábola, temos que P equidista de F e d, ou seja:

$\sqrt{(2 - 0)^2 + (10 - h)^2} = |h + 10|$

Quadrando ambos os membros, obtemos:

$(2 - 0)^2 + (10 - h)^2 = (h + 10)^2 \Rightarrow 4 + 100 - 20h + h^2 = h^2 + 20h + 100$

$\therefore h = 0{,}1$

Logo, a distância do vértice V ao plano da borda do espelho é 0,1 m, ou seja, 10 cm.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: A resolução está errada, pois o aluno supôs que os gráficos não têm nenhum ponto em comum no primeiro quadrante, o que é um equívoco.

Resolução correta:
Os pontos comuns à parábola $\mathcal{P}$ e à reta r, se existem, são soluções do sistema:

$\begin{cases} y = 4x - 4 & \text{(I)} \\ (x - 3)^2 = 4(y + 1) & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$(x - 3)^2 = 4(4x - 4 + 1) \Rightarrow x^2 - 22x + 21 = 0$

$\Delta = (-22)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21 = 400$

$x = \frac{22 \pm 20}{2} \Rightarrow x = 21$ ou $x = 1$

Substituindo esses valores de x em (I), concluímos que:

- $x = 21 \Rightarrow y = 80$
- $x = 1 \Rightarrow y = 0$

Logo, a reta e a parábola têm em comum os pontos (21, 80) e (1, 0).