MATEMÁTICA APLICADA

1 Walter tinha dinheiro na poupança e distribuiu uma parte aos três filhos.
Ao mais velho deu 1/5 do que tinha na poupança.
Do que sobrou, deu 1/4 ao filho do meio.
Ao mais novo deu 1/3 do que restou.

A Que porcentagem da quantia inicial foi distribuída?

B Qual dos filhos recebeu mais?

Resolução

Seja o dinheiro da poupança de Valter igual a 1.

O filho mais velho recebeu $\frac{1}{5}$ e sobraram $\frac{4}{5}$.

O filho do meio recebeu $\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$. Como foram distribuídos $\frac{2}{5}$ sobraram $\frac{3}{5}$.

O filho mais novo recebeu $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$. Assim, foram distribuídos $\frac{3}{5}$ da poupança.

Respostas:

A Foi distribuída 60% da quantia inicial da poupança.

B Os três filhos receberam quantias iguais.

2 Bruno e Carlos são irmãos e possuem juntos 78 moedas de 1 real. Bruno, que possuía mais moedas, deu a Carlos o dobro do número de moedas que Carlos possuía. Nesse momento, Carlos ficou com mais moedas que o irmão e deu a Bruno 10 moedas. No final dessas duas transações, Bruno ficou com duas moedas a mais do que Carlos.
Determine quantas moedas cada um tinha inicialmente.

Resolução

Como eles tinham juntos, 78 moedas, no final Bruno terminou com 40 moedas e Carlos com 38 moedas.
Sejam x e y os números de moedas que Bruno e Carlos tinham, respectivamente, no início.
De acordo com o enunciado, Carlos inicialmente triplicou seu número de moedas e depois deu 10 ao irmão. Então $3y-10=38$, ou seja, $y=16$.

Consequentemente, $x=78-16=62$.
Inicialmente Bruno tinha 62 moedas e Carlos tinha 16 moedas.

3 Na gaveta da cozinha, Maria tinha guardado duas notas de 10 reais, duas notas de 20 reais e duas notas de 50 reais. Durante a noite, no escuro, Francisco, o filho de Maria retirou ao acaso duas notas.
Determine a probabilidade de que Francisco tenha retirado menos de 50 reais.

Resolução 1

Retirando uma nota após outra, Francisco não pode retirar nenhuma nota de 50 reais em nenhuma das duas retiradas.
Na primeira retirada a probabilidade de que Francisco, não tenha pegado uma nota de 50 reais é de $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Na segunda retirada a probabilidade de que Francisco, não tenha pegado uma nota de 50 reais, dado que a primeira não foi de 50 reais, é de $\frac{3}{5}$.

A probabilidade de que Francisco, não tenha pegado uma nota de 50 reais em nenhuma das duas retiradas é $p=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2}{5}=40\%$.

Resolução 2

Sejam A1 e A2 as notas de 10 reais, B1 e B2 as notas de 20 reais e C1 e C2 as notas de 50 reais.
O número de maneiras de retirar duas dessas seis notas é $C_6^2=15$.

Para retirar menos de 50 reais Francisco deve pegar duas notas entre A1, A2, B1 e B2. O número de maneiras de Francisco retirar duas dessas notas é $C_4^2=6$.

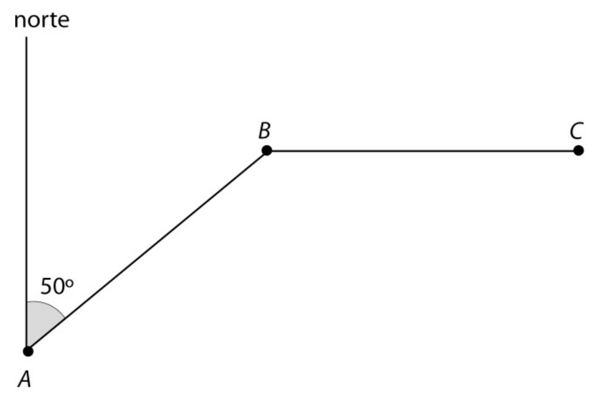
A probabilidade pedida é $p=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}=40\%$.

4 Uma vela, com 25 cm de altura, é fabricada de tal modo que, ao ser acesa, ela derrete o primeiro centímetro em 30 segundos, o segundo centímetro em 60 segundos, o terceiro centímetro em 90 segundos, e assim sucessivamente, gastando sempre 30 segundos a mais para derreter o próximo centímetro do que gastou para derreter o centímetro anterior.
Calcule o tempo total, em horas, minutos e segundos, necessário para que a vela derreta toda após ser acesa.

Resolução

Os tempos gastos para derreter cada centímetro formam uma PA de primeiro termo 30 segundos e razão 30 segundos. Assim, para derreter o último centímetro o tempo necessário é $30+24\times30=750$ segundos. O tempo total é, portanto, $\frac{(30+750)\times25}{2}=9750$ segundos, ou seja, 2 horas, 42 minutos e 30 segundos.

5 A figura abaixo mostra a trajetória de Renato com seu barco.

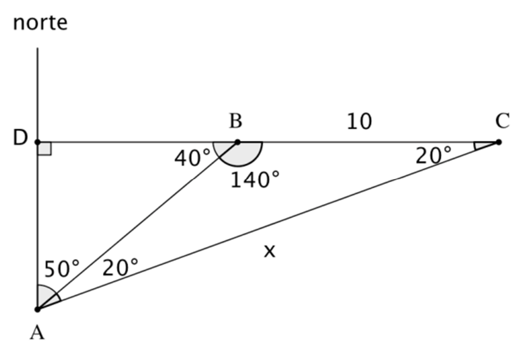


Renato saiu do ponto *A* e percorreu 10 km em linha reta, até o ponto B, numa trajetória que faz 50° com a direção norte. No ponto *B*, virou para o leste e percorreu mais 10 km em linha reta, chegando ao ponto *C*.

Calcule a distância do ponto *A* ao ponto *C*.
Dados: sen $20^o = 0{,}342$, $\cos 20^o = 0{,}940$.

Resolução

Observando a figura abaixo temos
$D\hat{B}A = 50^o$, $A\hat{B}C = 140^o$ e $C\hat{A}B = B\hat{C}A = 20^o$.



Fazendo $AC = x$ temos, pela lei dos senos,

$$\frac{x}{sen 140^o} = \frac{10}{sen 20^o}$$

$$\frac{x}{sen 40^o} = \frac{10}{sen 20^o}$$

$$\frac{x}{2 \cdot sen 20^o \cdot \cos 20^o} = \frac{10}{sen 20^o}$$

Assim, $x = 20 \cos 20^o = 20 \cdot 0{,}94 = 18{,}8$.

$AC = 18{,}8$ km.

6 Em um departamento de uma universidade, trabalham 4 professoras e 4 professores e, entre eles, estão Astreia e Gastão, que são casados. Um grupo de 3 desses professores(as) deverá ir a um congresso, sendo, pelo menos, um homem. Obrigatoriamente, um dos elementos do casal deverá estar no grupo, mas não ambos.
De quantas maneiras diferentes esse grupo poderá ser organizado?

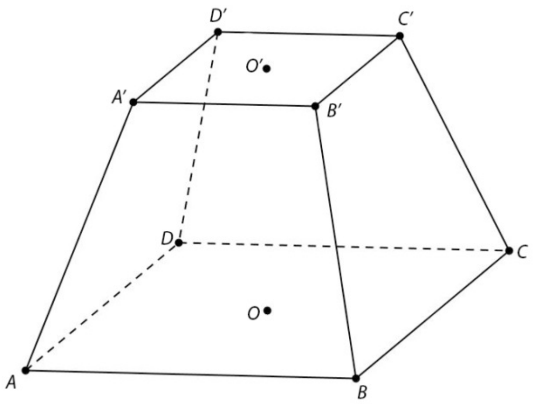
Resolucão

Listamos, a seguir, todas as possibilidades.

a) Astreia + homem + mulher: $3 \cdot 3 = 9$ possibilidades.
b) Astreia + homem + homem: $C_3^2 = 3$ possibilidades.
c) Gastão + homem + homem: $C_3^2 = 3$ possibilidades.
d) Gastão + homem + mulher: $3 \cdot 3 = 9$ possibilidades.
e) Gastão + mulher + mulher: $C_3^2 = 3$ possibilidades.

Há 27 maneiras do grupo ser formado.

7 A figura abaixo mostra um tronco de pirâmide regular formado por dois quadrados $ABCD$ e $A'B'C'D'$ de centros O e O' contidos em planos paralelos e quatro trapézios congruentes. Os quadrados são as bases do tronco e a sua altura é a distância $OO' = h$ entre os planos paralelos.



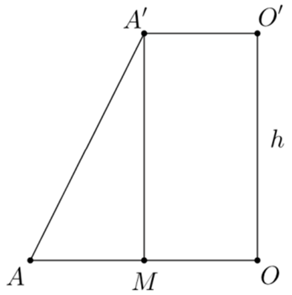
Se S e S' são as áreas das bases de um tronco de pirâmide de altura h, o volume desse tronco é dado pela fórmula $V = \frac{h}{3}(S + S' + \sqrt{SS'})$.

São dadas, em decímetros, as medidas das arestas: $AB = 12$, $A'B' = 6$, $AA' = 9$.

Calcule o volume desse poliedro em decímetros cúbicos e dê um valor aproximado usando algum dos dados abaixo.

Dados: $\sqrt{2} \cong 1{,}41$, $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, $\sqrt{5} \cong 2{,}24$, $\sqrt{7} \cong 2{,}65$.

Resolução

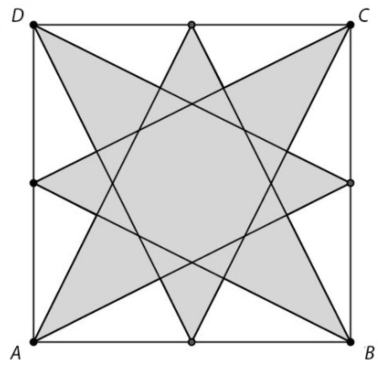


$OO'A'A$ é um trapézio retângulo onde $OA = 6\sqrt{2}$ e $O'A' = 3\sqrt{2}$. Traçando $A'M$ perpendicular a OA e fazendo $OO' = h = MA'$ o triângulo retângulo $A'MA$ fornece $h = \sqrt{9^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7} \cong 7{,}95$.

O volume do tronco é

$$V = \frac{7{,}95}{3}(12^2 + 6^2 + \sqrt{12^2 \cdot 6^2}) = \frac{7{,}95}{3} \cdot 252 = 7{,}95 \cdot 84 \cong 668 \text{ dm}^3.$$

8 A figura abaixo mostra um quadrado $ABCD$ e os pontos médios de cada um dos lados. Traçando os segmentos que unem cada ponto médio aos dois vértices do lado oposto do quadrado, forma-se a "estrela" que está sombreada na figura a seguir

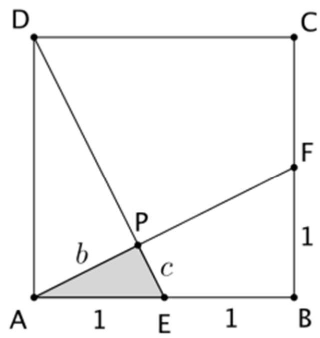


A área da estrela representa que porcentagem da área do quadrado?

Resolução 1

Escolhemos como unidade de medida, a metade do lado do quadrado.

Sendo E e F os pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente, considere os segmentos DE e AF que se cortam em P (figura abaixo).



Os triângulos DAE e ABF são congruentes. Assim, $\angle DEA + \angle FAB = \angle DEA + \angle EDA = 90^\circ$ e, portanto, os segmentos DE e AF são perpendiculares.

Os triângulos APE e ABF são semelhantes. Daí, como $AF = \sqrt{5}$ e fazendo $PA = b$ e $PE = c$ temos $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{b}{2} = \frac{c}{1}$, ou sejam, $b = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Assim, a área do triângulo APE é $s = \frac{bc}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$ e a área S da estrela é igual a $S = 2^2 - 8 \cdot \frac{1}{5} = 4 - \frac{8}{5} = \frac{12}{5}$.

A razão que esse valor representa da área do quadrado é $\frac{12/5}{4} = \frac{3}{5} = 60\%$.

Resolução 2

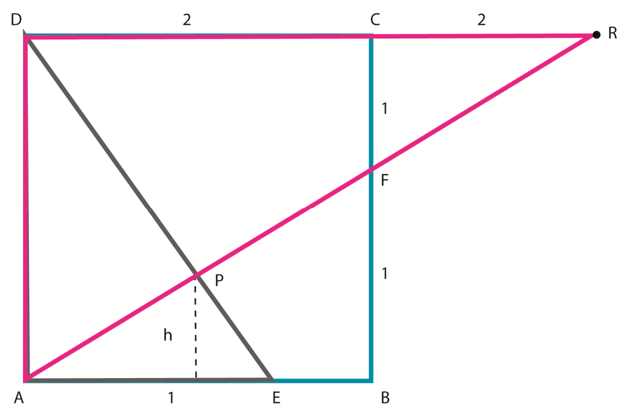
Podemos adotar um sistema de coordenadas cartesianas com a origem em A, eixo X sobre AB e eixo Y sobre AD. Os coeficientes angulares das retas AF e DE são $m=\frac{1}{2}$ e $m'=\frac{-2}{1}=-2$, respectivamente. Assim, a reta AF tem equação $y=\frac{x}{2}$ e a reta DE tem equação $y=-2x+2$ e a interseção delas é o ponto P.

Como, da primeira equação $x=2y$ temos, substituindo na segunda, $y=-2\cdot 2y+2$ e, portanto, $y=\frac{2}{5}$.

A área do triângulo APE é $s=\frac{AE\cdot y}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.

A área da estrela segue como na primeira solução.

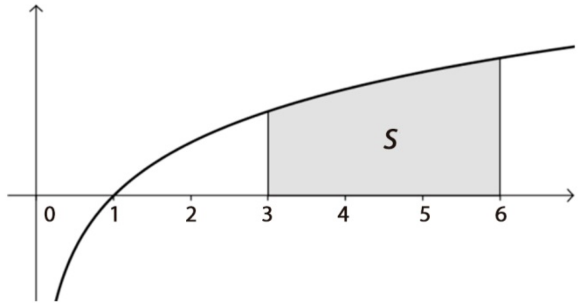
Resolução 3



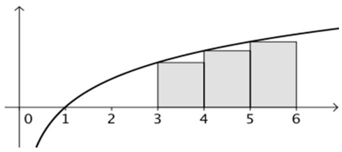
Seja o ponto R em que o prolongamento de AF corta o lado CD. Da semelhança de PRD e APE, a altura de APE é tal que $\frac{h}{1}=\frac{2-h}{4}$. Logo, $h=\frac{2}{5}$. A área de APE é $\frac{1}{2}\times 1\times \frac{2}{5}\times \frac{1}{5}$.

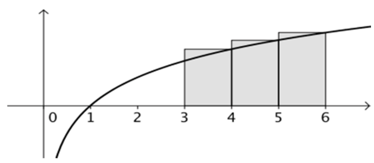
Logo a fração da área sombreada é $\frac{4-8\times \frac{1}{5}}{4}=\frac{12}{20}=60\ \%$.

9 Um aluno precisava estimar a área S da região sob o gráfico da função $y=\log x$ (logaritmo decimal de x) entre as abscissas $x=3$ e $x=6$ que se vê na figura a seguir.



Para obter um valor aproximado de S, o aluno pensou na estratégia que as figuras abaixo mostram. Ele calculou a área S_1 dos três retângulos da figura da esquerda, e calculou a área S_2 dos três retângulos da figura da direita.





Ele imaginou que uma boa aproximação para a área que deseja obter é $S=\frac{S_1+S_2}{2}$.

Dados $\log 2=0{,}301$ e $\log 3=0{,}477$, obtenha um valor para S, usando a estratégia descrita acima.

Resolução

Todos os retângulos possuem base igual a 1. Assim,

$S_1=\log 3+\log 4+\log 5=\log 3\cdot 4\cdot 5=\log 60$.

$S_2=\log 4+\log 5+\log 6=\log 4\cdot 5\cdot 6=\log 120$.

Portanto,

$$S=\frac{S_1+S_2}{2}=\frac{1}{2}(\log 60+\log 120)=\frac{1}{2}\log 60\cdot 120=\frac{1}{2}\log 7200$$

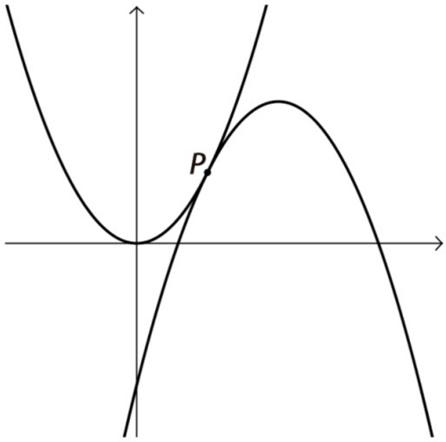
$$S=\frac{1}{2}(\log 100+\log 72)=\frac{1}{2}(2+\log 2^3\cdot 3^2)=$$

$$\frac{1}{2}(2+3\log 2+2\log 3)=\frac{1}{2}(2+0{,}903+0{,}954)$$

$S=1{,}93$.

10 A figura abaixo mostra os gráficos de duas funções quadráticas *f* e *g* que são simétricos em relação ao ponto $P = (1, 1)$.

Sabendo que $f(x) = x^2$, determine uma expressão para $g(x)$.



Resolução 1

Os gráficos são simétricos então são congruentes.
Como o coeficiente de x^2 em f é igual a 1 então o coeficiente de x^2 em g é igual a -1. Assim, $g(x) = -x^2 + bx + c$.

Como o vértice do gráfico de f é a origem então o vértice do gráfico de g é o ponto $(2, 2)$. Assim $-\dfrac{b}{2(-1)} = 2$ e, portanto, $b = 4$.
Como o gráfico da função $g(x) = -x^2 + 4x + c$ passa pelo ponto $P = (1,1)$ conclui-se que $c = -2$.
Assim, $g(x) = -x^2 + 4x - 2$.

Resolução 2

$$g(x) = 1 - [f(1-(x-1)) - 1] = 2 - f(2-x) = 2 - (2-x)^2 =$$
$$= 2 - 4 + 4x - x^2 = -x^2 + 4x - 2.$$

Fim da Prova de Matemática Aplicada