POSIÇÕES RELATIVAS À UMA CIRCUNFERÊNCIA

No estudo da Geometria Analítica, quando estudamos a circunferência, uma hora iremos tratar das posições relativas de uma circunferência, assim como as retas. Dentro desse assunto podemos relacionar posições de circunferências e pontos, circunferências e retas e circunferências com outras circunferências. Vamos falar primeiramente das posições relativas entre um ponto e uma circunferência.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA

Imagine que você trabalhe para uma equipe de demolição e precisam destruir uma construção abandonada que antes funcionara como uma fábrica localizada a alguns quilômetros de algumas cidades. Ao observarem o mapa, a fábrica estava localizado nas coordenadas $(-4\,,3)$ e as cidades E, G e F estavam localizadas nas coordenadas $(-10\,,9)$, $(-6\,,1)$ e $(2\,,3)$, respectivamente. A demolição será realizada com explosivos programados cujo os tremores podem ser sentidos à um raio de alcance de $6\ km$. Alguma das cidades sentirá os tremores provocados pela explosão?

Percebem que esse problema pode ser modelado utilizando uma circunferência, no qual o local da explosão é o centro e o raio de alcance é o raio da circunferência. O que precisamos determinar aqui é: as cidades estão a uma distância do centro maior que o raio, no alcance máximo do raio, ou dentro do raio. Exatamente, é isso mesmo que vamos fazer: calcular distância entre dois pontos. E cá entre nós, já estamos craques nisso, não é mesmo?

Seja $P=(x_P\,,y_P)$ um ponto qualquer no plano e $C=(a\,,b)$ o centro de uma circunferência de raio R. Temos três situações:

I. Se a $d(P,C)<R$ diremos que o ponto P é interior à circunferência de centro C e raio R;

II. Se a $d(P,C)=R$ diremos que o ponto P pertence à circunferência de centro C e raio R;

III. Se a $d(P,C)>R$ diremos que o ponto P é exterior à circunferência de centro C e raio R.

Para o nosso problema inicial, vamos calcular a distância entre o local da explosão e a localização da cidade.

Para a cidade E:

$$d(E,C) = \sqrt{(x_E - x_C)^2 + (y_E - y_C)^2} = \sqrt{(-10-(-4))^2 + (9-3)^2}$$

$$d(E,C) = \sqrt{(-6)^2 + 6^2}$$

$$d(E,C) = \sqrt{36 + 36}$$

$$d(E,C) = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

Portanto, como $d(E,C) = 6\sqrt{2}$ e $6\sqrt{2} > 6$, o ponto E é exterior à circunferência. Logo a cidade E não sentirá os tremores provocados pela explosão.

Para a cidade G:

$$d(G,C) = \sqrt{(x_G - x_C)^2 + (y_G - y_C)^2} = \sqrt{(-6-(-4))^2 + (1-3)^2}$$

$$d(G,C) = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}$$

$$d(G,C) = \sqrt{4 + 4}$$

$$d(G,C) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Portanto, como $d(G,C) = 2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2} < 6$, o ponto G é interior à circunferência. Logo a cidade G sentirá os tremores provocados pela explosão.

Para a cidade F: (2 ,3)

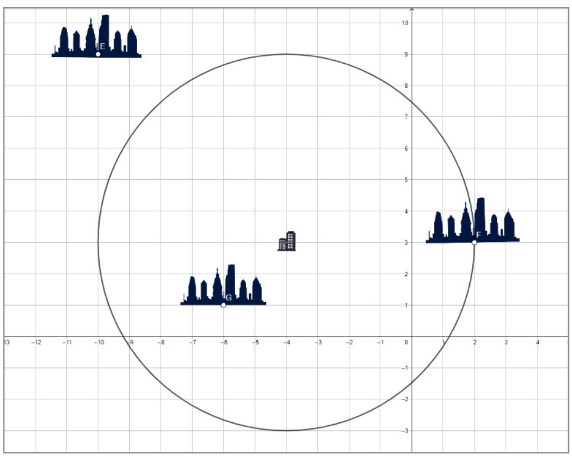
$$d(F,C) = \sqrt{(x_F - x_C)^2 + (y_F - y_C)^2} = \sqrt{(2-(-4))^2 + (3-3)^2}$$

$$d(F,C) = \sqrt{6^2 + 0^2}$$

$$d(F,C) = \sqrt{36}$$

$$d(F,C) = 6$$

Portanto, como $d(F,C)$=6, o ponto G pertence à circunferência. Logo a cidade F também sentirá os tremores provocados pela explosão.



POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

Vamos retomar agora a ideia de distância entre ponto e reta. Contudo, o ponto que iremos trabalhar é bem especial: ele será o centro de uma circunferência. Existem três possibilidades quando construímos uma reta e uma circunferência no plano cartesiano: a reta não intercepta a circunferência; a reta intercepta a circunferência em um único ponto; ou a reta intercepta a circunferência em dois pontos distintos. Faça alguns testes, desenhe uma circunferência e algumas retas no mesmo plano.

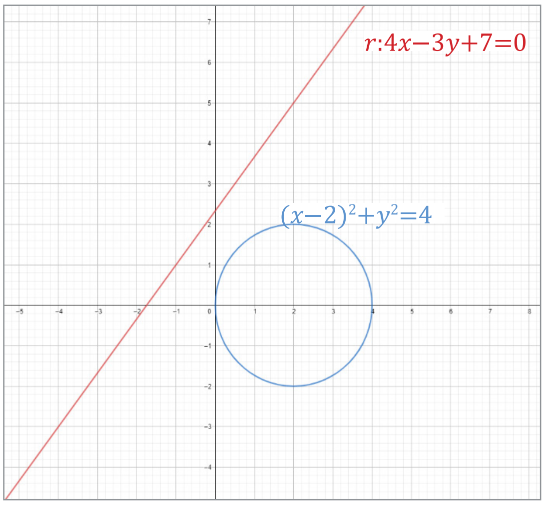
Para que uma reta r não intercepte a circunferência é necessário e suficiente que $d(C,r)>R$, ou seja, a distância do centro a reta seja maior o que tamanho do raio. Por exemplo, sejam $r:4x-3y+7=0$ e a circunferência $(x-2)^2+y^2=4$ de centro $(2,0)$ e raio $R=2$. A distância entre o centro e a reta será:

$$d(C,r)=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

$$d(C,r)=\left|\frac{4\cdot 2+(-3)\cdot 0+7}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right|$$

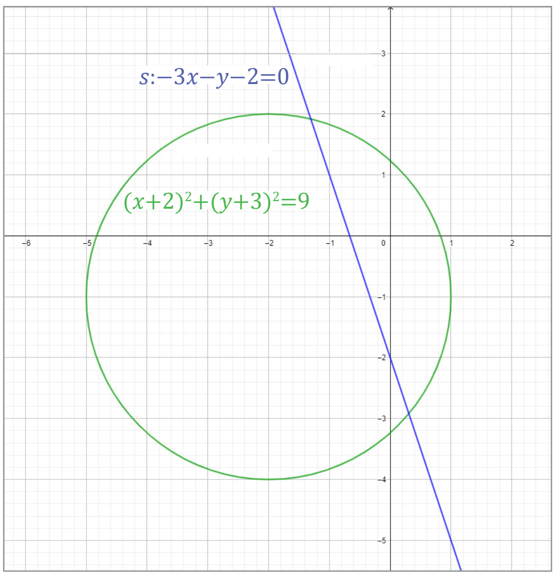
$$d(C,r)=\left|\frac{8+0+7}{\sqrt{16+9}}\right|=\left|\frac{15}{\sqrt{25}}\right|$$

$$d(C,r)=\left|\frac{15}{5}\right|=|3|=3$$



Como a $d(C,r)=3>2$ temos que a reta será externa a circunferência.

Outro exemplo é a circunferência $(x+2)^2+(y+3)^2=9$ e a reta $s:-3x-y-2=0$, sua distância será dada por:



$$d(C,s)=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

$$d(C,s)=\left|\frac{(-3)\cdot(-2)+(-1)\cdot(-3)+(-2)}{\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}}\right|$$

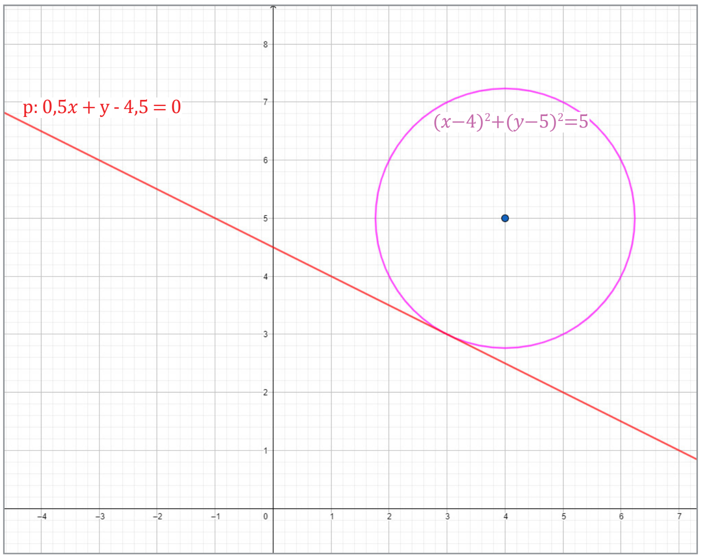
$$d(C,s)=\left|\frac{6+3-2}{\sqrt{9+1}}\right|=\left|\frac{7}{\sqrt{10}}\right|$$

$$d(C,s)=\frac{7}{\sqrt{10}}=\frac{7\sqrt{10}}{10}$$

Como a $d(C,s) = \frac{7\sqrt{10}}{10} < 3$ temos que a reta será interna a circunferência.

O último dos casos é com certeza um dos mais importantes, veremos na sequência que a reta cuja intercessão com a circunferência tem um único ponto, é bem especial e em diversos problemas da ciência são resolvidos pelo estudo desta. Newton que o diga! Para este último, vamos considerar a reta $p: \frac{1}{2}x + y - \frac{9}{2} = 0$ e a circunferência $(x-4)^2+(y-5)^2=5$, logo:

$$d(C,p) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$



$$d(C,p) = \left|\frac{\frac{1}{2} \cdot 4 + 1 \cdot 5 + \left(-\frac{9}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}}\right|$$

$$d(C,p) = \left|\frac{2 + 5 - \frac{9}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1}}\right| = \left|\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\right|$$

$$d(C,p) = \frac{5\sqrt{4}}{2\sqrt{5}} = \frac{10}{2\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{10} = \sqrt{5}$$

Como a $d(C,s) = \sqrt{5}$ que é exatamente o tamanho do raio, temos que a reta estará no limite da circunferência.

De modo geral, dada uma reta r: $Ax+By+C=0$ e um circunferência de raio de centro $C=(a\,,b)$ e raio R, existem três posições relativas entre a reta e a circunferência:

I. Se a $d(C,r)>R$, então a reta é externa a circunferência e não intercepta ela em nenhum ponto;

II. Se a $d(C,r)<R$, então a reta intercepta a circunferência em dois pontos distintos. Essa reta é chamada de **secante;**

III. Se a $d(C,r)=R$, então a reta intercepta a circunferência em um único ponto. Essa reta é chamada de **tangente**.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE CIRCUNFERÊNCIAS

No final desse módulo resta saber apenas as posições relativas entre circunferências, dessa forma, suponha uma circunferência C_1 de centro $c_1=(0,\ 0)$ e $R_1=4$ e outra C_2:$(x-6)^2+y^2=4$. Sabemos que o centro de C_1 é $c_1=(0,0)$ e o centro de C_2 é $c_2=(6,0)$, assim, observando a distância entre o centro de cada circunferência obtemos:

$$d(c_1, c_2) = \sqrt{(6-0)^2 + (0-0)^2}$$

$$d(c_1, c_2) = \sqrt{36}$$

$$d(c_1, c_2) = \pm 6$$

Como a distância entre dois pontos é uma unidade de medida, então a distância entre os centros da circunferência é positiva e, logo, é 6. Observe agora os raios dessas circunferências: o raio da circunferência C_1 é 4, e o raio da circunferência C_2 é

$$R_2^2 = 4$$

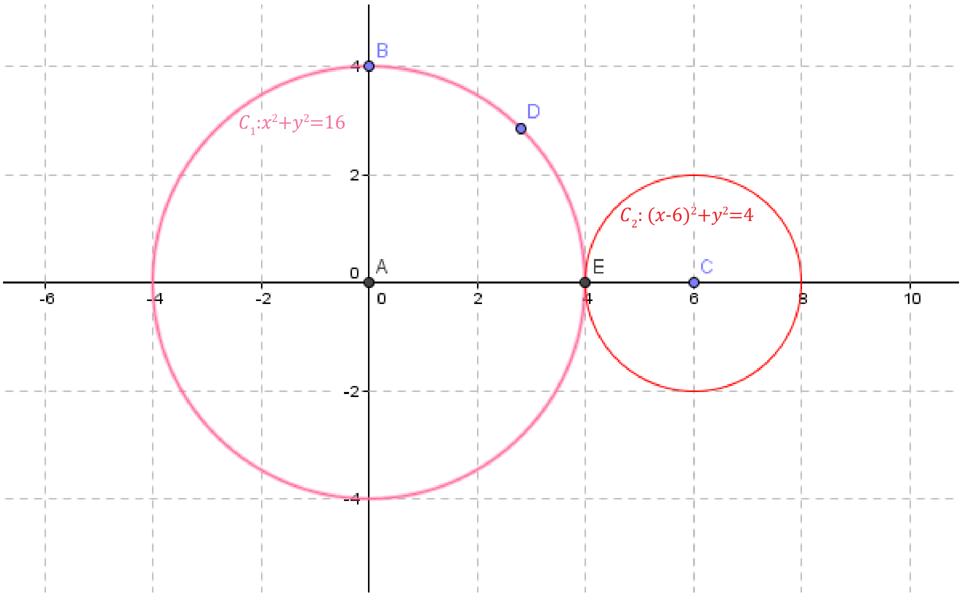
$$R_2 = \sqrt{4}$$

$$R_2 = \pm 2$$

Da mesma forma, a medida do raio é uma distância, então deve ser positivo, portanto o raio de C_2 é 2. Com essas informações, podemos perceber que a soma dos raios R_1 e R_2 é exatamente igual a distância dos centros c_1 e c_2, ou seja:

$$d(c_1,c_2)=R_1+R_2$$

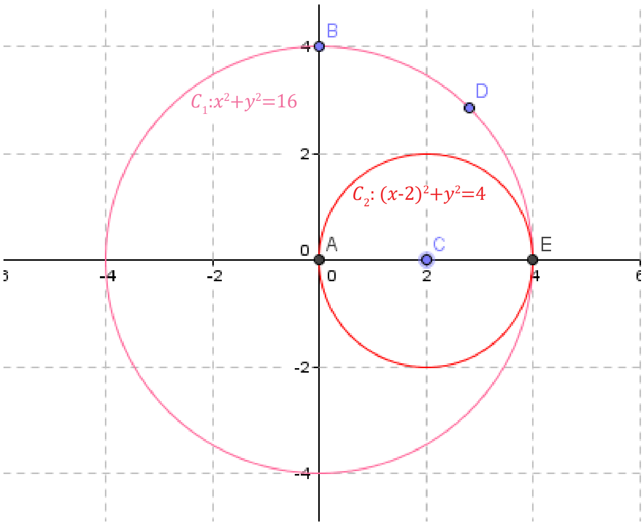
Se isso acontecer, temos duas circunferências que se **tangenciam externamente**, isto é, elas se tocam em apenas um ponto e uma não está dentro da outra.



Na situação anterior, falamos sobre circunferências que se tangenciam externamente, porém é possível que elas sejam tangentes e ainda uma fique no interior de outra? Mas é claro que sim! Vamos supor que a circunferência C_1 seja a mesma do exemplo anterior ($c_1=(0,0)$ e $R_1=4$), porém a circunferência C_2 tenha centro $c_2=(2,0)$ e $R_2=2$. Como os centros estão sobre o eixo x, a distância entre eles é exatamente duas unidades, ou seja, $d(c_1,c_2)=2$. Você conseguiu notar alguma relação entre a distância e os raios? Isso mesmo, a distância dos centros é exatamente a diferença dos raios das duas circunferências, veja melhor abaixo:

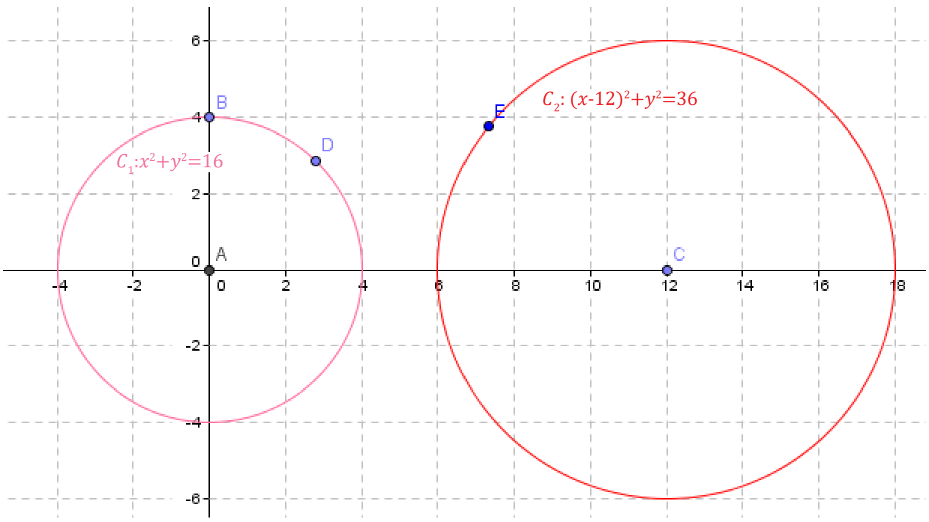
$$d(c_1, c_2) = |R_1 - R_2|$$

Quando a situação acima acontece, dizemos que as circunferências são **tangentes internas**, isto é, uma está no interior de outra intersectando-se em apenas um ponto.

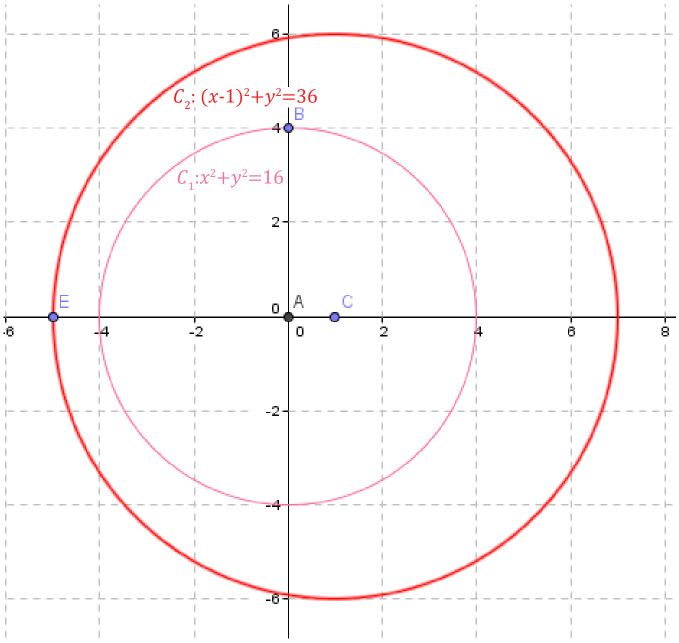


Esses são os casos principais, porém há, ainda, outros quatro casos que vale a pena você saber, são as posições: **externas**, **internas**, **secantes** e, por último, **concêntricas**.

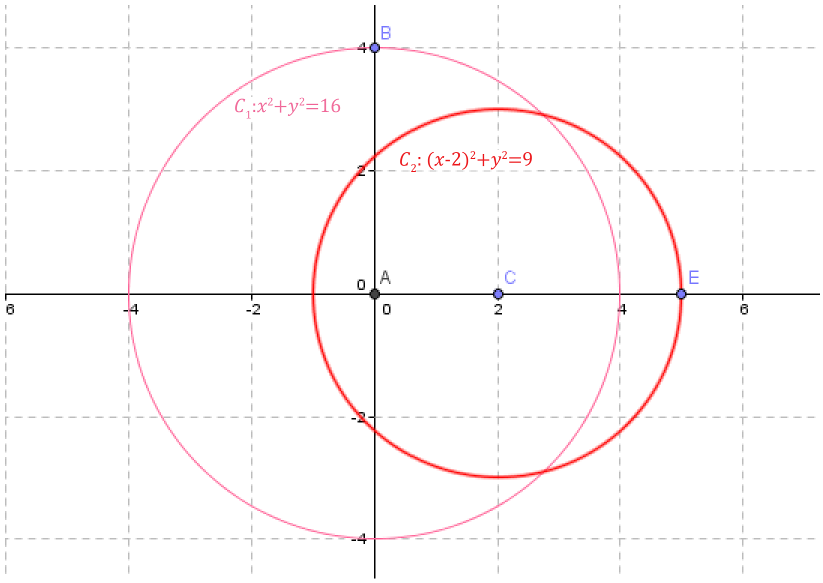
As **externas** são as circunferências que não se tocam em nenhum ponto e a distância dos seus centros é maior que a soma de seus raios, ou seja, $d(c_1,c_2)>R_1+R_2$. Veja a imagem abaixo para identificar com mais praticidade:



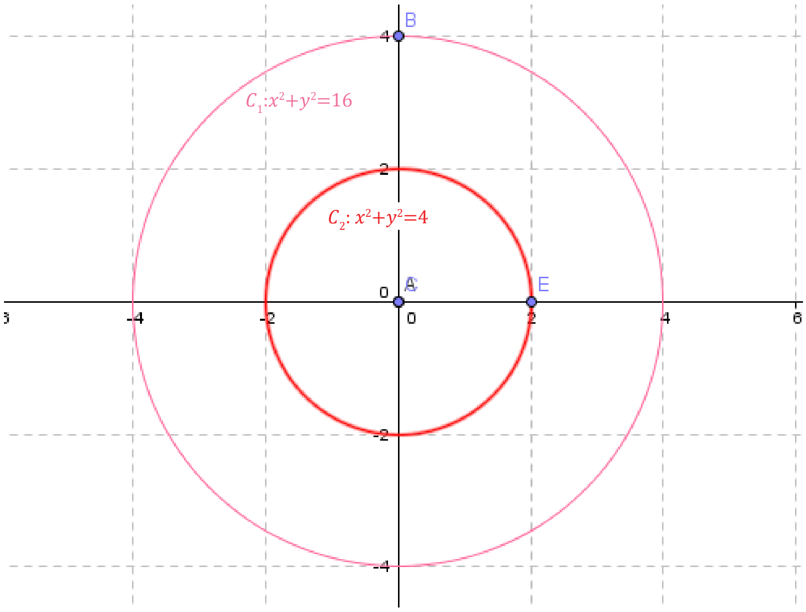
As **internas** é o caso em que as circunferências não se tocam em nenhum ponto, assim como as externas, porém uma está no interior da outra, dessa forma, a distância dos centros é menor que a diferença dos raios, em outras palavras, $d(c_1,c_2)<|R_1-R_2|$. Veja o exemplo a seguir:



Quando duas circunferências são **secantes**, é porque elas se intersectam em dois pontos, único caso em que isso acontece. Para saber se elas são secantes, temos que a distância dos centros das circunferências é menor que a soma dos raios e, ainda, maior que a diferença dos raios, ou seja, $d(c_1,c_2)<R_1+R_2$ e $d(c_1,c_2)>|R_1-R_2|$, podemos colocar em uma única notação: $|R_1-R_2|<d(c_1,c_2)<R_1+R_2$. Observe abaixo a relação entre elas:



O último caso é o mais simples de identificar, para duas circunferências serem **concêntricas**, temos que a distância de seus centros ser igual a 0, ou seja, o centro delas devem possuir coordenadas iguais. Algebricamente falando, temos $d(c_1,c_2)=0$. A imagem seguinte demonstra duas circunferências concêntricas:



Em resumo, todas as posições relativas entre duas circunferências C_1 e C_2, de raio R_1 e R_2 e centros c_1 e c_2, podem ser identificadas por uma das situações baixo:

I. Se a $d(c_1,c_2)=R_1+R_2$, então as circunferências são **tangentes externas**;

II. Se a $d(c_1,c_2)=|R_1-R_2|$, então as circunferências são **tangentes internas**;

III. Se a $d(c_1,c_2)>R_1+R_2$, então as circunferências são **externas**;

IV. Se a $d(c_1,c_2)<|R_1-R_2|$, então as circunferências são **internas**;

V. Se a $|R_1-R_2|<d(c_1,c_2)<R_1+R_2$, então as circunferências são **secantes**;

VI. Se a $d(c_1,c_2)=0$, então as circunferências são **concêntricas**;

ANOTAÇÕES