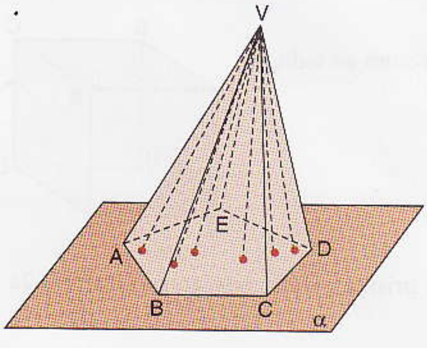
29 PIRÂMIDE

Conceito

Consideremos um polígono (ou região poligonal) ABCDE de cinco lados num plano α e um ponto V fora de α. Tomemos segmentos de reta, todos com uma extremidade em V e a outra extremidade num dos pontos de ABCDE. A reunião desses segmentos é um sólido chamado pirâmide, neste caso pirâmide pentagonal.

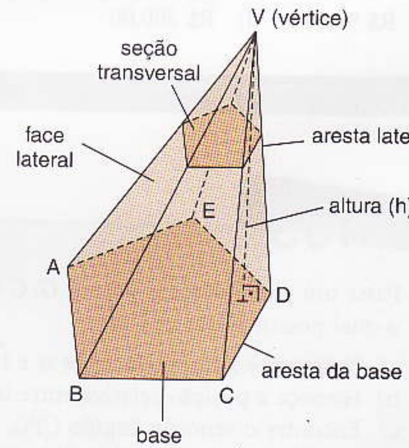
Tanto para conceituar pirâmide como para dar nome aos seus elementos, tomamos uma pirâmide pentagonal. Se, por exemplo, em vez de um pentágono, tivéssemos escolhido como base um triângulo, um quadrilátero, etc., teríamos, respectivamente, uma pirâmide triangular, uma pirâmide quadrangular, e assim por diante.



Elementos

Considerando a pirâmide representada a seguir, temos:

- V é o vértice da pirâmide;
- o polígono ABCDE é a base da pirâmide;
- os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$ são as arestas da base;
- os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$ e $\overline{VE}$ são as arestas laterais;
- os triângulos VAB, VBC, VCD, VDE e VEA são as faces laterais;
- a distância do vértice da pirâmide ao plano da base é a altura da pirâmide;
- seção transversal é qualquer interseção não vazia da pirâmide com um plano paralelo à base (desde que este não passe pelo vértice).



Classificação e número de faces

As pirâmides são classificadas de acordo com o número de arestas da base e, portanto, pelo número de faces laterais. Assim, temos:

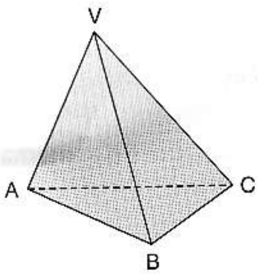
- pirâmide triangular: a base tem três arestas; a pirâmide possui três faces laterais e, portanto, contando com a base, a pirâmide possui quatro faces.

- pirâmide quadrangular: a base tem quatro arestas; a pirâmide possui quatro faces laterais e, portanto, contando com a base, a pirâmide possui cinco faces.

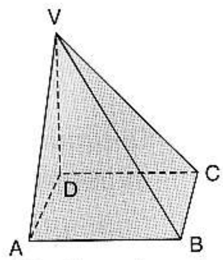
⋮

E assim por diante.

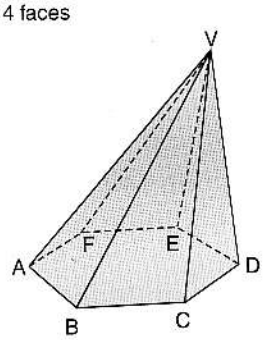
Vejamos alguns exemplos de pirâmides:



pirâmide triangular ou tetraedro
3 faces laterais
Total: 4 faces



pirâmide quadrangular
4 faces laterais
Total: 5 faces



pirâmide hexagonal
6 faces laterais
Total: 7 faces

exemplo 1

Seja uma pirâmide de base com x arestas. Vamos calcular o número total de vértices, arestas e faces.

Na base, há x vértices e, no total, a pirâmide tem $V = x + 1$.

De cada vértice da base parte uma aresta lateral; portanto, a pirâmide apresenta um total de arestas igual a $A = x + x = 2x$.

Quanto ao número de faces, há x faces laterais e a base. O total de faces é $F = x + 1$.

Como a pirâmide é um poliedro convexo, vale a relação de Euler:

$$V - A + F = x + 1 - 2x + x + 1 = 2, \forall x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant 3$$

Pirâmide regular

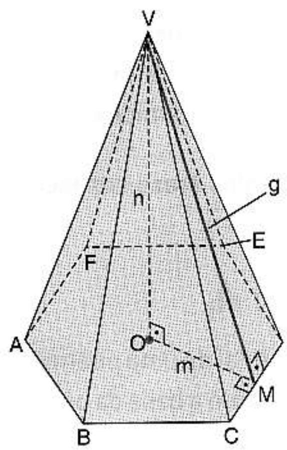
Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base.

Numa pirâmide regular, as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

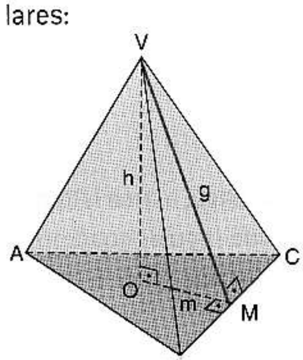
O apótema de uma pirâmide regular (indicado por g) é a altura de uma face lateral relativa à aresta da base.

Na figura abaixo temos uma pirâmide regular hexagonal em que h é a altura, m é o apótema da base e g é o apótema da pirâmide.

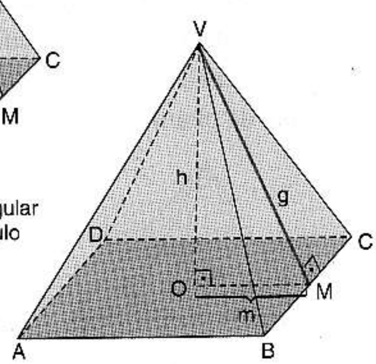
A base ABCDEF é um hexágono regular, O é o centro da base e $\overline{VO}$ é perpendicular ao plano da base.



Vejamos mais dois exemplos de pirâmides regulares:



pirâmide triangular regular
(a base é um triângulo eqüilátero)



pirâmide quadrangular regular
(a base é um quadrado)

Relação notável

Notamos que em uma pirâmide regular qualquer:

$$\boxed{h^2 + m^2 = g^2}$$

em que *h* é a altura, *m* é o apótema da base e *g* é o apótema da pirâmide.

Áreas

Área da base: A_b

A área da base de uma pirâmide é a área do polígono da base e é indicada por A_b.

Área lateral: A_ℓ

A superfície lateral de uma pirâmide é a reunião das suas faces laterais. A área dessa superfície é chamada área lateral da pirâmide e é indicada por A_ℓ.

$$\boxed{A_\ell = \text{soma das áreas das faces laterais}}$$

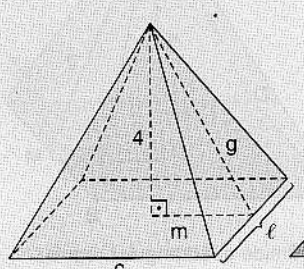
Área total: A_t

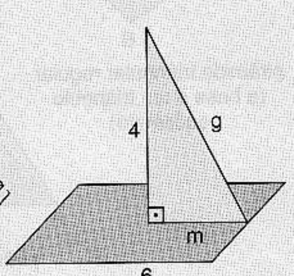
A superfície total de uma pirâmide é a reunião da superfície lateral com a base da pirâmide. A área dessa superfície é chamada área total da pirâmide e é indicada por A_t.

$$\boxed{A_t = A_\ell + A_b}$$

exemplo 2

Vamos calcular a área da base, a área lateral e a área total de uma pirâmide regular quadrangular, sabendo que a aresta da base mede 6 cm e a altura da pirâmide mede 4 cm.





- Área da base

$$A_b = \ell^2 = 6^2 \Rightarrow A_b = 36 \text{ cm}^2$$

- Área lateral

A superfície lateral é composta de quatro triângulos isósceles, congruentes entre si, todos de base 6 cm e altura *g*. O apótema da base (*m*) da pirâmide é:

$$m = \frac{\ell}{2} \Rightarrow m = 3 \text{ cm}$$

Calculamos a altura da face, que é o apótema da pirâmide:

$$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow g^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow g = 5 \text{ cm}$$

Assim:

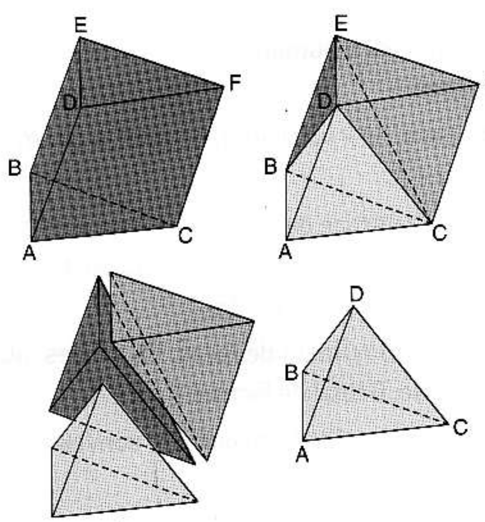
$$A_\ell = 4 \cdot \frac{\ell \cdot g}{2} = 2 \cdot 6 \cdot 5 \Rightarrow A_\ell = 60 \text{ cm}^2$$

- Área total

$$A_t = A_b + A_\ell = 36 + 60 \Rightarrow A_t = 96 \text{ cm}^2$$

Volume: *V*

O volume de uma pirâmide triangular vale um terço do volume de um prisma triangular de mesma base e mesma altura. As figuras abaixo mostram a decomposição de um prisma triangular em três tetraedros de mesmo volume:



Assim, a pirâmide DABC, por exemplo, corresponde a um terço do volume do prisma ABCDEF.

O procedimento é análogo para qualquer tipo de pirâmide (quadrangular, pentagonal, etc.). Portanto, o volume de uma pirâmide qualquer é dado pela fórmula:

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\text{área da base}) \cdot (\text{medida da altura})$$

$$\boxed{V = \frac{1}{3} A_b \cdot h}$$

exemplo 3

Um pentágono regular de aresta ℓ e apótema m é a base de uma pirâmide de altura H.

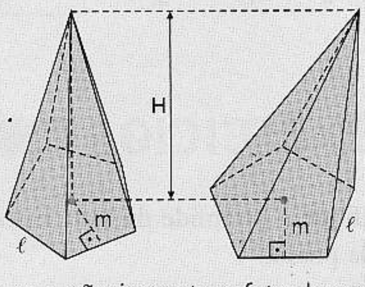
Para determinar o volume da pirâmide, devemos inicialmente encontrar a área da base.

Como se trata de uma base regular, podemos aplicar a fórmula que contém o semiperímetro: $A_b = p \cdot a$. Assim:

$$A_b = \frac{5\ell}{2} \cdot m$$

Finalmente:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} m\ell H \Rightarrow V = \frac{5}{6} m\ell H$$

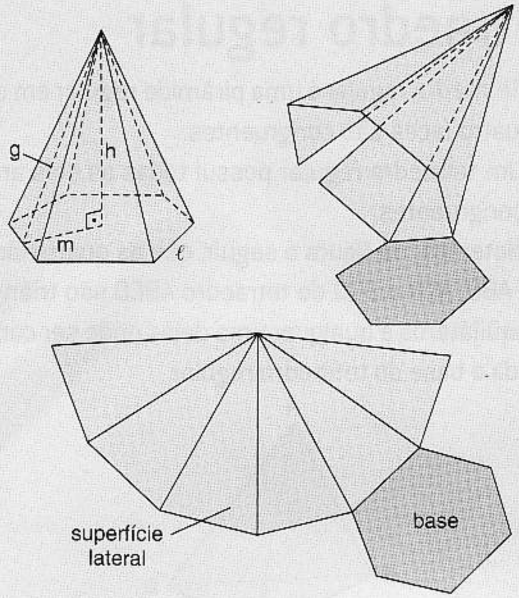


Note que não importa o fato de a pirâmide ser regular, ou não. Nos dois casos o volume é o mesmo.

exemplo 4

Seja uma pirâmide regular hexagonal de altura 30 cm e aresta da base medindo 20 cm. Vamos determinar A_b, A_ℓ, A_t e V.

Inicialmente aproveitamos este exemplo para visualizar as superfícies lateral e total da pirâmide.



- Área da base

  É a área de um hexágono regular de lado $\ell = 20$ cm:

  $$A_b = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot 20^2\sqrt{3}}{4}$$
  $$A_b = 600\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

- Área lateral

  $$A_\ell = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \ell \cdot g\right) = 3\ell g \quad (*)$$

  Cálculo de m (o apótema da base é a altura de um triângulo eqüilátero):

  $$m = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$
  $$m = 10\sqrt{3}\ \text{cm}$$

  O apótema g da pirâmide é dado por:

  $$g^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow g^2 = 30^2 + (10\sqrt{3})^2 = 1\,200$$
  $$g = 20\sqrt{3}\ \text{cm}$$

  Substituindo em (*):

  $$A_\ell = 3 \cdot 20 \cdot 20\sqrt{3} \Rightarrow A_\ell = 1\,200\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

- Área total

  $$A_t = A_b + A_\ell = 600\sqrt{3} + 1\,200\sqrt{3}$$
  $$A_t = 1\,800\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

- Volume

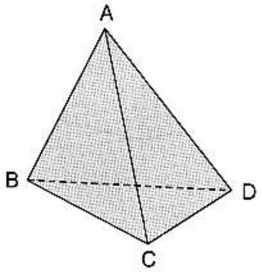
  $$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} 600\sqrt{3} \cdot 30$$
  $$V = 6\,000\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

Tetraedro regular

Tetraedro regular é uma pirâmide regular em que as quatro faces são congruentes.

Um tetraedro regular possui todas as seis arestas congruentes.

Notemos, na figura a seguir, que as quatro faces ABC, ABD, ACD e BCD do tetraedro ABCD são triângulos eqüiláteros e qualquer uma delas pode ser considerada a base do tetraedro regular.



Vejamos como obter a área total A_t, a altura *h* e o volume *V* de um tetraedro regular de aresta *a*.

- Área total

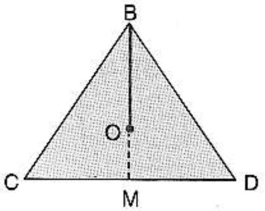
  A área total vale o quádruplo da área da face. Cada face é um triângulo eqüilátero de lado *a*.

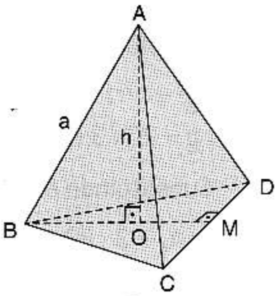
$$A_t = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{A_t = a^2\sqrt{3}}$$

- Altura

  A projeção do vértice *A* sobre a base BCD é o centro *O* dessa face.

  Sendo *M* o ponto médio de $\overline{CD}$, vamos calcular BO na base e a altura *h* no triângulo AOB, retângulo em *O*:





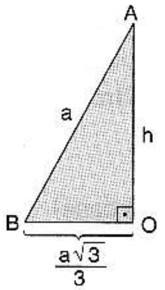
$$BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$BO = \frac{2}{3} \cdot BM$$

$$BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$OM = \frac{1}{3} \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot BO = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

que é expressão do apótema do $\triangle$ eqüilátero.



No $\triangle AOB$, sendo $AB = a$, $BO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ e $AO = h$, temos:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9}$$

$$h^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

- Volume

  A área da base é a área de uma face: $A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$$

exercícios

1. Classifique a pirâmide de cada caso, sabendo que ela possui:
   a) 6 faces
   b) 12 arestas
   c) 8 vértices
   d) a soma dos ângulos das faces igual a 16 retos

2. Em cada caso classifique a pirâmide de acordo com a informação apresentada sobre quantidades *A* de arestas, *F* de faces ou *V* de vértices.
   a) V = 11
   b) F = 11
   c) A = 11
   d) V + F = 12
   e) V = F

3. Determine a área total e o volume de um tetraedro regular de aresta de 12 cm.

4. Em uma pirâmide triangular regular, a aresta da base mede 6 m e a altura, $\sqrt{6}$ m. Determine:

a) a área total da pirâmide;

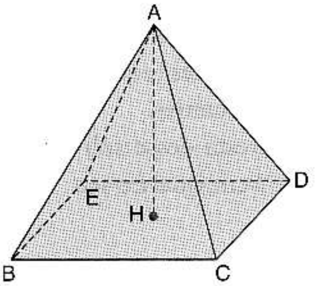
b) a aresta lateral da pirâmide.

5. Em uma pirâmide regular de base quadrada, a área da base mede 16 cm^2 e a área total, $8(2 + \sqrt{29})$ cm^2. Qual é o volume da pirâmide?

6. Determine a área total e o volume de uma pirâmide quadrangular regular que tem 8 arestas medindo 8 cm cada uma.

7. Há algum tempo as embalagens de achocolatados tinham a forma de tetraedros regulares. Sabendo que o volume de cada embalagem era $144\sqrt{2}$ cm^3, determine, em centímetros quadrados, a quantidade de material necessária para confeccionar uma dessas embalagens.

8. ABCDE é uma pirâmide quadrangular regular de altura $\overline{AH}$.



Em cada caso, determine a área total da pirâmide, dados:

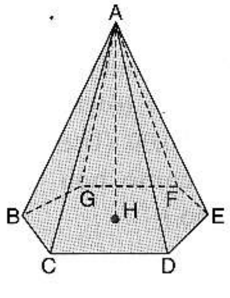
a) $BH = 3\sqrt{2}$ cm e $AH = 4$ cm

b) $AH = 8$ cm e $AC = 10$ cm

c) $AB = BE = 5$ cm

d) $AC = CE = 6$ cm

9. A pirâmide ABCDEFG abaixo é regular, e *H* é o centro da base.



Em cada caso, determine o volume da pirâmide, dados:

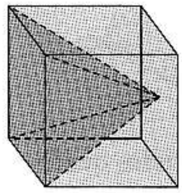
a) $BC = 6$ cm e $AH = 5$ cm

b) $BE = 8$ cm e $AD = 5$ cm

c) $CD = 8$ cm e $C\hat{D}A = 60°$

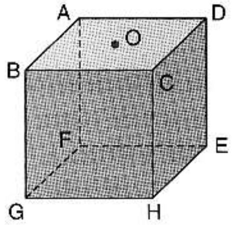
d) $AH = 3HC = 6$ cm

10. O cubo abaixo tem aresta de 7 cm.



Determine o volume da parte do cubo não ocupada pela pirâmide.

11. Na figura abaixo, *O* é o centro da face ABCD do cubo ABCDEFGH.



Sabendo que $GE = 9\sqrt{2}$ m, determine:

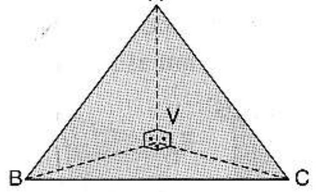
a) a área total e o volume da pirâmide de base EFGH e vértice *O*;

b) o volume da pirâmide ABGFE.

12. Uma pirâmide quadrangular regular tem 4 m de altura e sua aresta lateral mede 5 m. Determine o volume da pirâmide e sua área total.

13. A altura de um tetraedro regular mede $6\sqrt{2}$ cm. Determine a área total e o volume desse tetraedro.

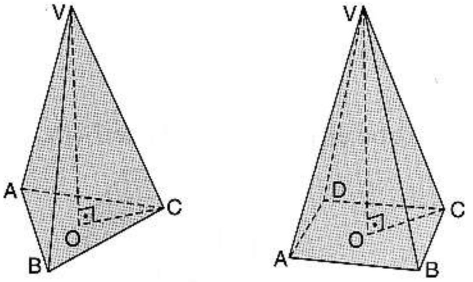
14. (UF-PE) Os segmentos VA, VB e VC são dois a dois perpendiculares no espaço, como ilustrado abaixo.



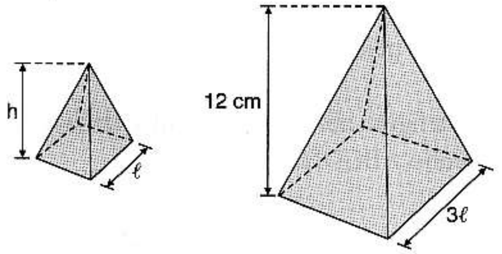
Se $VA = 5$, $VB = 6$, $VC = 7$, qual o volume da pirâmide triangular ABCV?

15. Em cada uma das pirâmides regulares de vértice V abaixo, O é o centro da base. Determine a área total e o volume de cada pirâmide.

a) VO = 20; BC = 10 b) VC = 20; OC = 10

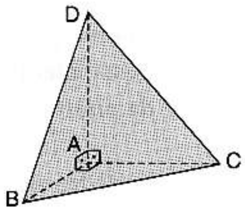


16. Duas pirâmides quadrangulares semelhantes são representadas abaixo:



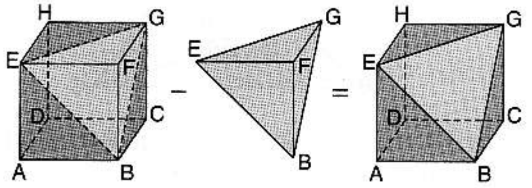
a) Calcule a razão de semelhança entre as arestas de uma e de outra.
b) Determine a altura h.
c) Sendo $\ell = 3$ cm, ache as áreas totais das pirâmides e a razão entre elas.
d) Qual é a razão entre os volumes das pirâmides?

17. O ponto A é eqüidistante de todos os outros vértices do tetraedro abaixo.



Sabendo que $\overline{BC}$ mede $6\sqrt{2}$ cm, determine o volume do tetraedro e sua área total.

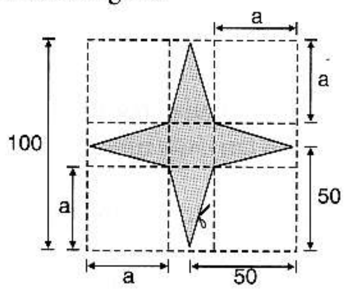
18. (U. F. Ouro Preto-MG) De um cubo de 2 cm de aresta (ABCDEFGH), retirou-se uma pirâmide (EFGB), resultando num sólido ABCDEGH, conforme ilustram as figuras abaixo.



Para o sólido resultante (ABCDEGH), determine:

a) a área total;
b) o volume.

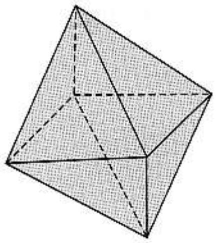
19. (UF-MG) Uma pirâmide de base quadrada é construída recortando-se e dobrando-se uma cartolina quadrada de 100 cm de lado, como mostrado nesta figura:



Determine:

a) a altura da pirâmide em função de a;
b) o volume da pirâmide em função de a;
c) os valores de a para os quais se pode construir uma pirâmide dessa maneira.

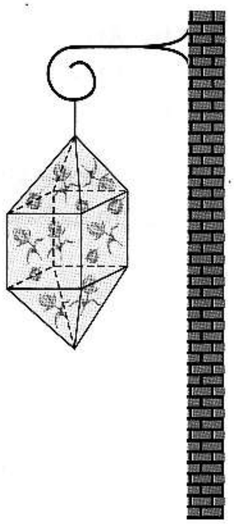
20. O octaedro regular é um poliedro com doze arestas de mesma medida e oito faces triangulares (eqüiláteras) congruentes. Se uma aresta desse sólido mede 3 cm, qual é o seu volume?



21. Cada uma das doze arestas de um poliedro regular mede 4 cm. Qual é o volume do sólido? Qual é sua área total?

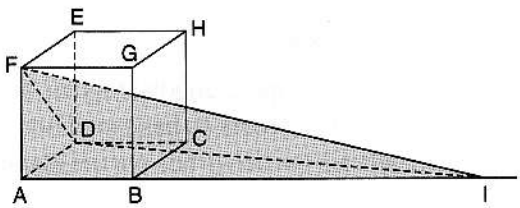
22. Todas as arestas da lanterna oriental da ilustração ao lado medem 5 cm.

Determine o volume de ar contido na lanterna e o gasto com a seda utilizada na sua fabricação, sabendo que o metro quadrado desse tecido custa R$ 1 000,00. (Use $\sqrt{3} = 1{,}7$ como boa aproximação.)



23. Qual deve ser a aresta de um octaedro regular para que seu volume seja igual a $\frac{4}{3}$ m³?

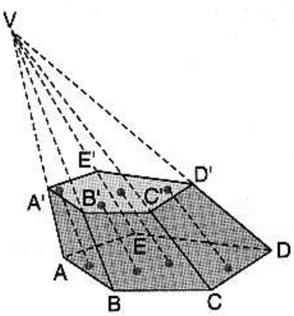
24. (UFF-RJ) Considere ABCDEFGH um cubo cuja aresta mede 1 cm e I um ponto no prolongamento da aresta $\overline{AB}$, de tal modo que o volume do tetraedro ADFI tenha o mesmo volume do cubo ABCDEFGH.



Determine a medida do segmento $\overline{BI}$.

Tronco de pirâmide

Tronco de pirâmide de bases paralelas é a reunião da base de uma pirâmide com uma seção transversal e com o conjunto dos pontos da pirâmide compreendidos entre o plano da base e o plano da seção transversal.



A pirâmide é, então, repartida, pela seção transversal, em dois sólidos: uma nova pirâmide — semelhante à primeira e igualmente com vértice V — e um tronco de pirâmide de bases paralelas.

Elementos

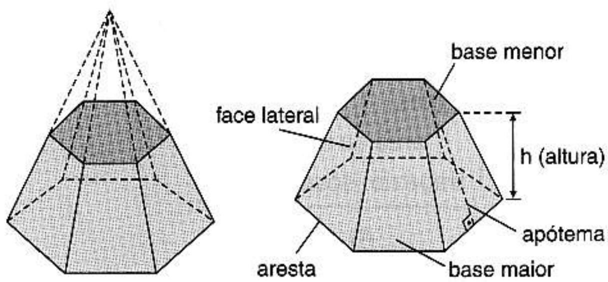
- base maior do tronco: é a base da pirâmide.
- base menor do tronco: é a seção transversal da pirâmide.
- altura do tronco: é a distância entre os planos das bases.

Tronco de pirâmide regular

Tronco de pirâmide regular é o tronco de bases paralelas obtido de uma pirâmide regular.

Num tronco de pirâmide regular:

- as arestas laterais são congruentes entre si;
- as bases são polígonos regulares semelhantes;
- as faces laterais são trapézios isósceles, congruentes entre si;
- a altura de qualquer face lateral chama-se apótema do tronco.



Áreas e volume

Áreas das bases: A_B e A_b

A área da base maior é indicada por A_B e a área da base menor é indicada por A_b. Ambas são áreas de polígonos.

Área lateral: A_ℓ

A superfície lateral de um tronco de pirâmide é a reunião das faces laterais do tronco. A área dessa superfície é chamada área lateral e é indicada por A_ℓ.

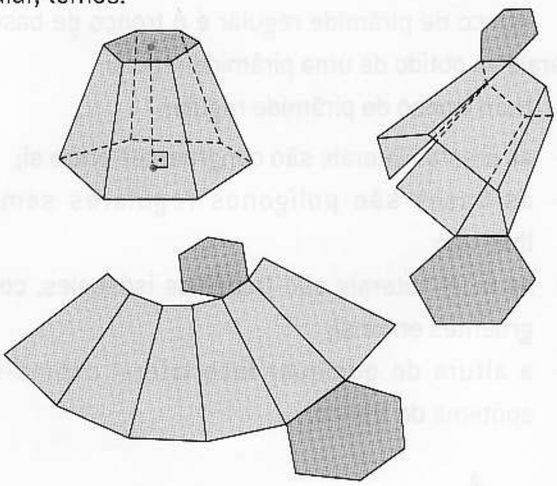
$$\boxed{A_\ell = \text{soma das áreas das faces laterais}}$$

Área total: A_t

A superfície total de um tronco de pirâmide é a reunião da superfície lateral com a base maior e com a base menor. A área dessa superfície é chamada área total e é indicada por A_t.

$$\boxed{A_t = A_\ell + A_B + A_b}$$

No caso de um tronco de pirâmide hexagonal regular, temos:

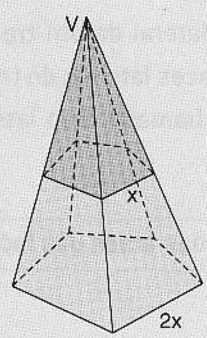


$A_\ell = 6 \cdot$ (área de uma face lateral) $= 6 \cdot$ (área de um trapézio isósceles)

$$A_t = 6 \cdot \underbrace{\left(\text{área de um trapézio isósceles}\right)}_{A_\ell} + \underbrace{\left(\text{área de um hexágono regular}\right) + \left(\text{área de outro hexágono regular}\right)}_{A_B + A_b}$$

exemplo 5

Seja uma pirâmide regular cuja base tem aresta medindo 2x. Por um plano paralelo à base secionamos a pirâmide de modo que a aresta da base da nova pirâmide meça x.



Nessas condições, a razão de semelhança entre as duas pirâmides (da maior para a menor) vale $k = \frac{2x}{x} = 2$.

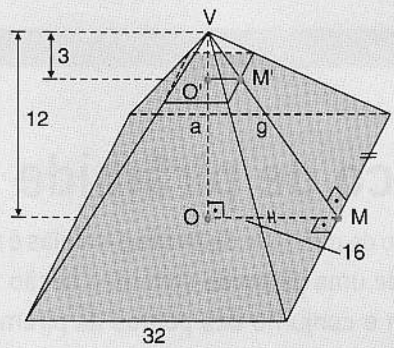
Evidentemente, as áreas das bases são relacionadas por $\frac{A_B}{A_b} = k^2 = 4$, o mesmo ocorrendo com as áreas laterais $\left(\frac{A_\ell}{a_\ell} = k^2 = 4\right)$ e com as áreas totais $\left(\frac{A_t}{a_t} = k^2 = 4\right)$.

Quanto aos volumes, a razão de semelhança entre eles é $\frac{V}{v} = k^3 = 8$.

exemplo 6

Uma pirâmide quadrangular regular, de altura medindo 12 cm e aresta da base medindo 32 cm, é secionada a 3 cm do vértice por um plano paralelo à base.

Vamos determinar a área total do tronco obtido.



Cálculo do apótema VM da pirâmide original:

$$VM^2 = 12^2 + 16^2 \Rightarrow VM = 20 \text{ cm}$$

$\triangle VO'M' \sim \triangle VOM$:

$$\frac{VO}{VO'} = \frac{VM}{VM'} = \frac{OM}{O'M'}$$

$$\frac{12}{3} = \frac{20}{VM'} = \frac{16}{\frac{a}{2}} \Rightarrow \begin{cases} VM' = 5 \text{ cm} \\ a = 8 \text{ cm} \end{cases}$$

Temos:

$$g = MM' = VM - VM' = 20 - 5$$

$$g = 15 \text{ cm (apótema do tronco)}$$

A área lateral do tronco é dada por:

$$A_\ell = 4 \cdot \frac{32 + 8}{2} \cdot 15 = 1\,200$$

$$A_\ell = 1\,200 \text{ cm}^2$$

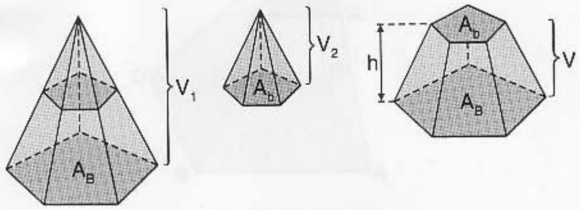
Daí:

$$A_t = A_B + A_b + A_\ell$$

$$A_t = 32^2 + 8^2 + 1\,200 \Rightarrow A_t = 2\,288 \text{ cm}^2$$

Volume

O volume de um tronco de pirâmide qualquer de bases paralelas é obtido pela diferença entre os volumes de duas pirâmides: a de base A_B e a de base A_b.



$$\boxed{V = V_1 - V_2}$$

Sejam x a altura de V_2 e h a altura do tronco. Por T_2, temos:

$$\frac{x^2}{(x+h)^2} = \frac{A_b}{A_B} \Rightarrow \frac{x}{x+h} = \frac{\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \sqrt{A_B} = x \cdot \sqrt{A_b} + h \cdot \sqrt{A_b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{h\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}} \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}}$$

Desenvolvendo a diferença $V_1 - V_2$, vem:

$$V = \frac{1}{3} A_B \cdot (x+h) - \frac{1}{3} A_b \cdot x = \frac{1}{3} (A_B x + A_B h - A_b x) =$$

$$= \frac{1}{3} [A_B \cdot h + x(A_B - A_b)] = \frac{h}{3} \left[A_B + \frac{x}{h} (A_B - A_b) \right] =$$

$$= \frac{h}{3} \left[A_B + \frac{\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}} \cdot (A_B - A_b) \right] =$$

$$= \frac{h}{3} [A_B + \sqrt{A_B} \cdot (\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b})]$$

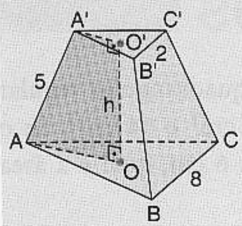
Finalmente:

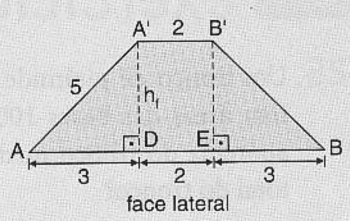
$$\boxed{V = \frac{h}{3} (A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b)}$$

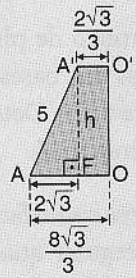
fornece o volume do tronco, em função da sua altura e das áreas das suas bases.

exemplo 7

Vamos calcular a área lateral, a área total e o volume de um tronco de pirâmide triangular regular cuja aresta lateral mede 5 cm e os lados das bases medem 2 cm e 8 cm.







- Área lateral

Cálculo da altura da face no $\triangle ADA'$:

$$h_f^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow h_f = 4 \text{ cm}$$

A área lateral vale três vezes a área de uma face lateral, ou seja:

$$A_\ell = 3 \cdot A_{\text{trapézio}}$$

$$A_\ell = 3 \cdot \left(\frac{2+8}{2} \cdot 4 \right) \Rightarrow A_\ell = 60 \text{ cm}^2$$

- Área total

$$A_t = A_\ell + A_B + A_b$$

$$A_t = 60 + \frac{8^2\sqrt{3}}{4} + \frac{2^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_t = (60 + 17\sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

- Volume

Inicialmente devemos determinar a altura do tronco, usando o triângulo AFA':

$$h^2 = 5^2 - (2\sqrt{3})^2 = 13 \Rightarrow h = \sqrt{13} \text{ cm}$$

Daí:

$$V = \frac{h}{3} [A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b]$$

$$V = \frac{\sqrt{13}}{3} \left[\frac{64\sqrt{3}}{4} + \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{4} + \frac{4\sqrt{3}}{4} \right]$$

$$V = \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot 21\sqrt{3} \Rightarrow V = 7\sqrt{39} \text{ cm}^3$$

exercícios

25. Um tronco de pirâmide quadrangular regular tem áreas das bases 100 cm^2 e 64 cm^2. Se o apótema do tronco mede 6 cm, qual é a área total do tronco?

26. O apótema de um tronco de pirâmide regular mede 4 cm; as arestas das bases quadradas do tronco medem 6 cm e 8 cm. Determine o volume do tronco e sua área total.

27. Cada trapézio que serve como face lateral de um tronco de pirâmide regular quadrangular tem bases de 3 cm e 5 cm. Sabendo que a altura do tronco mede 4 cm, quais são a área total e o volume do tronco?

28. A área de uma seção transversal de uma pirâmide mede 8 m^2, enquanto a base da pirâmide tem área de 32 m^2. Se a distância entre os planos das bases é de 1 m, qual é a altura da pirâmide?

29. A que distância do vértice de uma pirâmide de altura h deve passar um plano paralelo à base de modo que o volume do tronco meça sete vezes mais que o volume da pirâmide obtida?

30. (UF-SC) A base quadrada de uma pirâmide tem 144 m^2 de área. A 4 m do vértice traça-se um plano paralelo à base e a seção assim feita tem 64 m^2 de área. Qual é a altura da pirâmide?

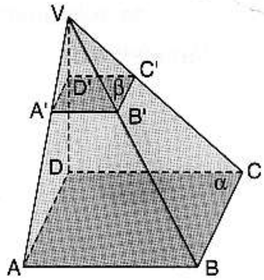
31. Uma pirâmide regular hexagonal de altura 6 cm é secionada por um plano paralelo à base e distante 4 cm dela.

a) Quantas vezes o volume da nova pirâmide cabe no tronco?

b) Sabendo que a área da base da pirâmide obtida é $16\sqrt{3}$ cm^2, determine a área da base da pirâmide original.

c) Se a aresta da base da pirâmide original mede 6 cm, qual é o volume do tronco obtido?

32. O plano α contém a base ABCD da pirâmide a seguir. A seção transversal A'B'C'D', de área 18 cm^2, está contida num plano β, distante 6 cm de α.



Se V dista 3 cm de β, qual é o volume da pirâmide?

33. As arestas das bases de um tronco de pirâmide regular hexagonal medem 10 cm e 15 cm. Sendo 20 cm a medida da altura do tronco, determine a área total e o volume do tronco.

34. No preparo da terra de um vaso para plantio de uma muda de árvore, um funcionário da prefeitura enche-o completamente de terra para iniciar o trabalho. O vaso tem a forma de um tronco de pirâmide quadrangular regular cujas arestas das bases medem 80 cm e 120 cm. Qual é o volume de terra utilizado na operação, se a distância entre duas arestas de mesma face do tronco é de 140 cm?

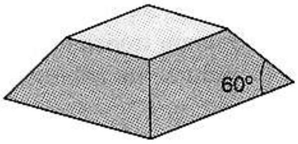
35. Um triângulo eqüilátero de lado 3 cm está apoiado num plano α, paralelo ao plano β, que contém um triângulo eqüilátero de lado 6 cm, de modo a formar um tronco de pirâmide regular.

a) Verifique a relação de Euler para esse sólido.

b) Note que, nas condições do enunciado, seria formada também uma pirâmide regular. Supondo que sua altura fosse de 3 cm, qual seria a distância entre α e β?

36. Uma caçamba de entulho tem a forma de tronco de pirâmide regular quadrangular de 1 m de altura. A superfície apoiada no solo tem área de 4 m^2. Se o volume de entulho necessário para encher completamente a caçamba é 6 m^3, qual é a medida da aresta da superfície superior da caçamba?

37. Na fundição de alumínio para a indústria automobilística são reaproveitados motores usados, latinhas de refrigerantes, panelas, etc. Fundidos, esses materiais produzem uma liga "suja", que deve ser purificada com alumínio puro. Os lingotes de alumínio usados nesse processo apresentam a forma mostrada na figura ao lado, com bases quadradas de lados 30 cm e 20 cm.



Determine o volume de alumínio utilizado em cada peça.

38. (Cefet-PR) Uma pirâmide hexagonal regular, com aresta da base e aresta lateral medindo, respectivamente, 9 cm e 15 cm, foi secionada por dois planos paralelos à base, os quais dividiram a altura da pirâmide em três partes iguais. Calcule o volume da parte da pirâmide, compreendida entre esses planos.

testes de vestibulares

1. (Mackenzie-SP) Uma barraca de lona tem forma de uma pirâmide regular de base quadrada com 1 metro de lado e altura igual a 1,5 metro. Das alternativas abaixo, a que indica a menor quantidade suficiente de lona, em m^2, para forrar os quatro lados da barraca é:

a) 2
b) 2,5
c) 4,5
d) 3,5
e) 4

2. (PUC-MG) A pirâmide de Quéops, em Gizé, no Egito, tem aproximadamente $90\sqrt{2}$ metros de altura, possui uma base quadrada e suas faces laterais são triângulos eqüiláteros. Nessas condições, pode-se afirmar que, em metros, cada uma de suas arestas mede:

a) 90
b) 120
c) 160
d) 180

3. (UFF-RJ) A grande pirâmide de Quéops, antiga construção localizada no Egito, é uma pirâmide regular de base quadrada, com 137 m de altura. Cada face dessa pirâmide é um triângulo isósceles cuja altura relativa à base mede 179 m. A área da base dessa pirâmide, em metros quadrados, é:

a) 13 272
b) 26 544
c) 39 816
d) 53 088
e) 79 432

4. (Puccamp-SP) Talvez não seja inútil conhecer as dimensões de pirâmides do antigo Egito. A maior delas, Quéops, é uma pirâmide regular de base quadrada, com 138 m de altura e 230 m na aresta da base. Esses dados permitiram que fosse calculado o volume de uma pirâmide, semelhante à de Quéops, para ser usada como um peso para papel. Se a área da base dessa pequena pirâmide é 100 cm^2, o seu volume, em centímetros cúbicos, é:

a) 200
b) 250
c) 300
d) 360
e) 400

5. (FMU/Fiam/Faam-SP) Uma pirâmide regular tem apótema medindo 5 cm e a sua base é um quadrado cujo lado mede 8 cm. O volume dessa pirâmide, em centímetros cúbicos, é:

a) 256
b) 64
c) 40
d) 80
e) 20

6. (Mackenzie-SP) Um objeto, que tem a forma de um tetraedro regular reto de aresta 20 cm, será recoberto com placas de ouro nas faces laterais e com placa de prata na base. Se o preço do ouro é R$ 30,00 por cm^2 e o da prata, R$ 5,00 por cm^2, das alternativas dadas, indique o valor mais próximo, em reais, do custo desse recobrimento.

a) 12 000
b) 14 000
c) 16 000
d) 18 000
e) 24 000

7. (Fuvest-SP) Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8 m e a altura da pirâmide 3 m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem 1 m^2. Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é:

a) 90
b) 100
c) 110
d) 120
e) 130

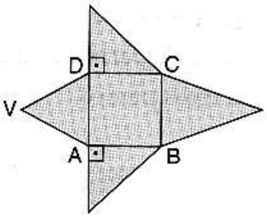
8. (Cefet-MG) Uma caixa, na forma de um paralelepípedo de base quadrada, contém uma pirâmide, cujos vértices da base são os pontos médios das arestas do fundo da caixa. O vértice superior da pirâmide toca a tampa da caixa. A razão entre os volumes da pirâmide e da caixa é igual a:

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{6}$
d) $\frac{1}{8}$
e) $\frac{1}{12}$

9. (UF-RN) Nas faces de um cubo de aresta L, são colocadas pirâmides de altura também L e bases iguais às faces do cubo. O volume do sólido obtido é:

a) $6L^3$
b) $5L^3$
c) $4L^3$
d) $3L^3$

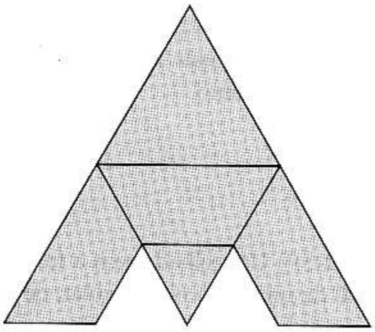
10. (UF-RS) A figura abaixo representa a planificação de uma pirâmide de base quadrada com AB = 6 cm, sendo ADV triângulo eqüilátero.



O volume dessa pirâmide, em centímetros cúbicos, é:

a) $12\sqrt{3}$
b) $27\sqrt{3}$
c) $36\sqrt{3}$
d) $72\sqrt{3}$
e) $108\sqrt{3}$

11. (UF-RS) A figura abaixo, formada por trapézios congruentes e triângulos eqüiláteros, representa a planificação de um sólido.



Esse sólido é um:
a) tronco de pirâmide.
b) tronco de prisma.
c) poliedro regular.
d) prisma trapezoidal.
e) prisma triangular.

12. (Fatec-SP) Uma pirâmide regular, de 8 cm de altura, tem por base um quadrado cujos lados medem 12 cm. Ela é secionada por um plano paralelo à base que intercepta a altura no seu ponto médio. A área total do tronco de pirâmide obtido, em centímetros quadrados, é igual a:

a) 180
b) 240
c) 300
d) 324
e) 360

13. (Cefet-PR) Quando a área da base de uma pirâmide quadrangular regular de 12 m de altura mede 100 m^2, sua área total, em metros quadrados, é:

a) 440
b) 360
c) 165
d) 340
e) 460

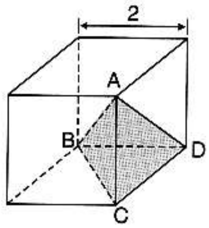
14. (Unisa-SP) Uma pirâmide reta tem altura de 12 cm e sua base é um quadrado de lado 8 cm. Um plano paralelo a sua base intercepta a sua altura no ponto médio, separando-a em dois sólidos: uma pirâmide p e um tronco de pirâmide T. O volume de p, em centímetros cúbicos, é:

a) 25
b) 28
c) 30
d) 32
e) 35

15. (UF-PR) Uma pirâmide de base quadrada, feita de madeira maciça, tem 675 g e 12 cm de altura. Pretende-se fazer um corte paralelo à base, para obter uma pirâmide menor. Quantos gramas terá essa pirâmide se o corte for feito a 4 cm da base?

a) 200
b) 225
c) 250
d) 300
e) 350

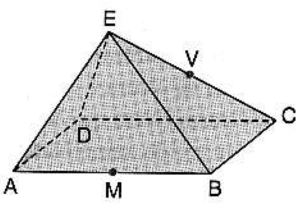
16. (Mackenzie-SP) A partir do cubo da figura, remove-se a pirâmide triangular ABCD.



Obtém-se, dessa forma, um sólido de volume:

a) $\frac{14}{3}$
b) $\frac{11}{5}$
c) $\frac{18}{5}$
d) $\frac{20}{3}$
e) $\frac{16}{5}$

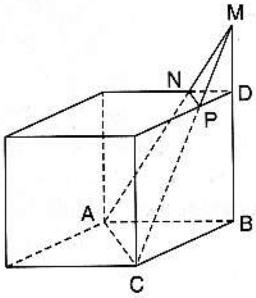
17. (Fuvest-SP) A pirâmide de base retangular ABCD e vértice E representada na figura abaixo tem volume 4.



Se M é o ponto médio da aresta $\overline{AB}$ e V é o ponto médio da aresta $\overline{EC}$, então o volume da pirâmide de base AMCD e vértice V é:

a) 1
b) 1,5
c) 2
d) 2,5
e) 3

18. (UF-MG) Observe a figura abaixo:



Nela estão representados um cubo, cujas arestas medem, cada uma, 3 cm, e a pirâmide MABC, que possui três vértices em comum com o cubo. O ponto M situa-se sobre o prolongamento da aresta $\overline{BD}$ do cubo. Os segmentos $\overline{MA}$ e $\overline{MC}$ interceptam arestas desse cubo, respectivamente, nos pontos N e P, e o segmento $\overline{ND}$ mede 1 cm.

Considerando-se essas informações, é correto afirmar que o volume da pirâmide MNPD, em centímetros cúbicos, é:

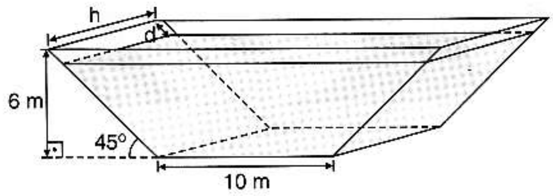
a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{2}$

19. (Mackenzie-SP) A figura abaixo representa uma caçamba com água, na qual as laterais oblíquas e o piso são retangulares e as laterais paralelas têm o formato de trapézios isósceles.



Se d = $\sqrt{2}$ m, a razão entre o volume de água e o volume total da caçamba é:

a) $\frac{17}{25}$

b) $\frac{21}{32}$

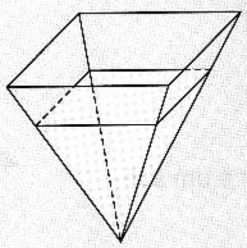
c) $\frac{25}{28}$

d) $\frac{17}{28}$

e) $\frac{25}{32}$

desafios

1. O tanque em forma de pirâmide quadrangular regular, representado abaixo, contém água com profundidade de 2 m, apresentando metade de sua capacidade ociosa.



Nessas condições, qual é a altura do tanque?

2. É dada uma progressão aritmética crescente de soma 18, em que a soma dos dois primeiros termos supera cada um dos outros dois. Os termos da P.A. correspondem às medidas, em números inteiros de centímetros, dos lados da base triangular de uma pirâmide e da sua altura. Um plano, distante da base a mesma medida do menor lado desta, corta a base. Determine o volume:

a) da pirâmide obtida;

b) do tronco resultante.