Capítulo 3
Complementos sobre a teoria geral das funções

Para pensar

1. Resposta pessoal.
2. Cada 6° do ponteiro representa 1 minuto. Então, 30° representam 5 minutos.
3. 20 minutos representam 120°.

Exercícios propostos

1. $f(0) = 2^0 + 3 = 1 + 3 = 4$

$f(-1) = 2^{-1} + 3 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$

$f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

Portanto, $f(0) - f(-1) + f(2) = 4 - \frac{7}{2} + 3 = \frac{7}{2}$

Alternativa **e**.

2. a) Como $F = 40$ e $E = 80$, então $E > F$:

$N = \frac{4 \cdot 40 + 80}{5} = \frac{240}{5} = 48$

Assim, a nota final foi 48.

b) Como $F = 80$ e $E = 40$, então $E \leqslant F$:

$N = 80$

Assim, a nota final foi 80.

3. $T = \begin{cases} 40, \text{ se } p \leqslant 20 \\ 40 + \dfrac{3(p - 20)}{100}, \text{ se } 20 < p \leqslant 700 \end{cases}$

4. $V = \begin{cases} 10t, \text{ se } 0 \leqslant t \leqslant 5 \\ 50 + 8(t - 5), \text{ se } 5 < t \leqslant 9 \\ 82 + 5(t - 9), \text{ se } 9 < t \leqslant 12 \end{cases}$

5. a) $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$; logo, f é par.

b) $g(-x) = \frac{(-x)^3}{6} = -\frac{x^3}{6} = -g(x)$; logo, g é ímpar.

c) $h(-x) = (-x + 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$; logo,

h não é par nem ímpar.

d) $r(-x) = \sqrt[5]{-x} = -\sqrt[5]{x} = -r(x)$; logo, r é ímpar.

e) $q(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^4}{x^2 + 1} = q(x)$; logo, q é par.

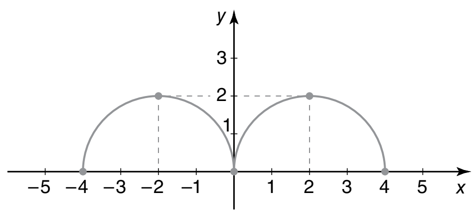
6. a) f é par, pois $f(-x) = f(x)$ para qualquer $x \in D$.

b) Pelo gráfico, para $x \geqslant 0$, a função é do 1º grau do tipo $f(x) = ax + b$. Como $f(0) = 0$ e $f(2) = 2$, temos:

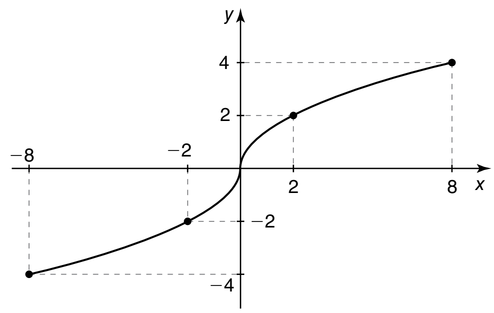
$\begin{cases} a \cdot 0 + b = 0 \\ a \cdot 2 + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ e } b = 0$

Portanto, $f(x) = \frac{1}{2}x$ e $f(5) = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$.

7. Como a função é par, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy, logo:



8. Como a função é ímpar, seu gráfico é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano, logo: $f: [-8, 8] \to \mathbb{R}$



9. Para uma função $f(x)$ ser par, devemos ter $f(-x) = f(x)$ para qualquer x pertencente ao domínio de f, e, para essa função ser ímpar, devemos ter $f(-x) = -f(x)$ (II), para qualquer x pertencente ao domínio de f.

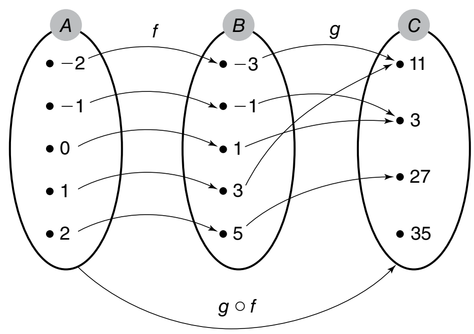
De (I) e (II), temos:

$f(x) = -f(x) \Rightarrow f(x) + f(x) = 0$

$\therefore\ 2 \cdot f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Logo a única função que é par e ímpar ao mesmo tempo é a função constante $f(x) = 0$.

10.



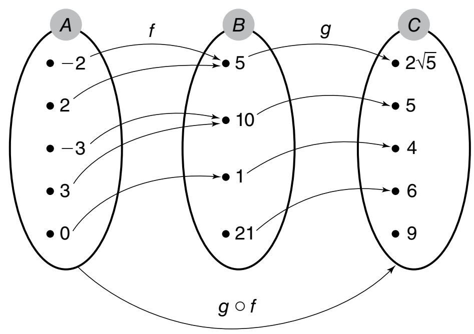
a) $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(-1) = 3$

b) $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 11$

c) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(5) = 27$

d) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 + 2 =$
$= (2x + 1)^2 + 2 = 4x^2 + 4x + 3$

11.



a) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(5) = 2\sqrt{5}$

b) $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 4$

c) $(g \circ f)(-3) = g(f(-3)) = g(10) = 5$

d) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) + 15} = \sqrt{x^2 + 16}$

12. a) $f(2) = 5 \cdot 2 - 4 = 6$

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(6) = 3 \cdot 6 + 6 = 24$

b) $g(2) = 3 \cdot 2 + 6 = 12$

$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(12) = 5 \cdot 12 - 4 = 56$

c) $f(1) = 5 \cdot 1 - 4 = 1$

$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(1) = 5 \cdot 1 - 4 = 1$

d) $g(3) = 3 \cdot 3 + 6 = 15$

$(g \circ g)(3) = g(g(3)) = g(15) = 3 \cdot 15 + 6 = 51$

e) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 3 \cdot f(x) + 6 =$

$= 3 \cdot (5x - 4) + 6 = 15x - 6$

f) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 5 \cdot g(x) - 4 =$

$= 5 \cdot (3x + 6) - 4 = 15x + 26$

g) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 5 \cdot f(x) - 4 =$

$= 5 \cdot (5x - 4) - 4 = 25x - 24$

h) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = 3 \cdot g(x) + 6 =$

$= 3 \cdot (3x + 6) + 6 = 9x + 24$

13. a) $f(0) = 4 = \dfrac{2a}{0 + b} = \dfrac{2a}{b} = 4 \Rightarrow 2a = 4b \Rightarrow a = 2b$

$g(0) = 4 = 0 + b \Rightarrow b = 4$

Então, $a = 2 \cdot 4 = 8$

Assim, $a = 8$ e $b = 4$.

b) Temos $f(x) = \dfrac{16}{x + 4}$ e $g(x) = x + 4$. Então:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{16}{g(x) + 4} = \dfrac{16}{x + 4 + 4} = \dfrac{16}{x + 8}$

$\therefore\ (f \circ g)(x) = \dfrac{16}{x + 8}$

c) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 4 = \dfrac{16}{x + 4} + 4$

$\therefore\ (g \circ f)(x) = \dfrac{32 + 4x}{x + 4}$

14. a) Ao determinar o valor de x para que $x + 5 = 7$, obtemos $x = 2$.

Assim, para $x = 2$:

$f(7) = f(2 + 5) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

b) $x + 5 = t \Rightarrow x = t - 5$

$f(t) = 2 \cdot (t - 5) + 1 = 2t - 9$

Logo, $f(x) = 2x - 9$.

15. a) $(m \circ h)(t) = m(h(t)) = 22 \cdot (h(t))^2 = 22 \cdot \left(\dfrac{4t + 3}{2t + 2}\right)^2$

Portanto, $m(t) = 22 \cdot \left(\dfrac{4t + 3}{2t + 2}\right)^2$

b) $m(4) = 22 \cdot \left(\dfrac{4 \cdot 4 + 3}{2 \cdot 4 + 2}\right)^2 = 22 \cdot \left(\dfrac{19}{10}\right)^2 = 22 \cdot (1{,}9)^2 =$

$= 22 \cdot 3{,}61 = 79{,}42$

Assim, a massa era 79,42 kg após 4 anos de acompanhamento.

16. a) Para $p = 100$, temos:

$x = 22 + \dfrac{600}{100} \Rightarrow x = 28$

Logo:

$y = 60 + 4 \cdot 28 \Rightarrow y = 172$

Portanto, o consumo médio diário é de 172 kWh.

b) Substituindo x por $22 + \dfrac{600}{p}$ em $y = 60 + 4x$, temos:

$y = 60 + 4 \cdot \left(22 + \dfrac{600}{p}\right) = 60 + 88 + \dfrac{2.400}{p} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 148 + \dfrac{2.400}{p}$

17. a) f é sobrejetora.

b) g é injetora.

c) h é bijetora.

d) i não é sobrejetora nem injetora.

18. a)
- f é injetora, pois toda reta paralela ao eixo Ox que intercepta o gráfico de f o faz em um único ponto.
- f é sobrejetora, pois toda reta paralela ao eixo Ox que passa por uma coordenada y, com $2 \leqslant y \leqslant 8$, intercepta o gráfico.
- Como f é injetora e sobrejetora, concluímos que f é bijetora.

b)
- f é injetora, pois toda reta paralela ao eixo Ox que intercepta o gráfico de f o faz em um único ponto.
- f não é sobrejetora, pois uma reta r, paralela ao eixo Ox e que passa por uma coordenada y, com $2 \leqslant y \leqslant 4$, não intercepta o gráfico.

c)
- f não é injetora, pois uma reta r, paralela ao eixo Ox, que passa por uma coordenada y, com $2 \leqslant y \leqslant 8$, intercepta o gráfico de f em dois pontos.
- f é sobrejetora, pois toda reta paralela ao eixo Ox que passa por uma coordenada y, com $2 \leqslant y \leqslant 8$, intercepta o gráfico.

d)
- f não é injetora, pois uma reta r, paralela ao eixo Ox, que passa por uma coordenada y, com $4 < y \leqslant 5$, intercepta o gráfico de f em dois pontos.
- f não é sobrejetora, pois uma reta r, que é paralela ao eixo Ox e passa por uma coordenada y, com $2 \leqslant y < 4$, não intercepta o gráfico.

19. a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 5$.

Seja k, com $k \in CD(f)$.

Resolvendo, na variável x, a equação $f(x) = k$, temos:

$x^2 - 5 = k \Rightarrow x = \pm\sqrt{k + 5}$

Portanto, x é real se, e somente se, $k \geqslant -5$.

Logo, $Im(f) = [-5, +\infty[$.

Como $CD(f) = \mathbb{R}$, temos que $Im(f) \neq CD(f)$.

Portanto, f não é sobrejetora.

Se $k > -5$, existem dois elementos distintos do domínio de f com a mesma imagem k:

$x_1 = \sqrt{k + 5}$ e $x_2 = -\sqrt{k + 5}$.

Logo, a função f não é injetora.

Concluímos, então, que f não é injetora nem sobrejetora.

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 3x + 2$.

Seja k, com $k \in \mathbb{R}$.

Resolvendo, na variável x, a equação $g(x) = k$, temos:

$3x + 2 = k \Rightarrow x = \dfrac{k - 2}{3}$.

Assim, para qualquer k do contradomínio da função g, a equação $g(x) = k$ tem uma única solução.

Logo, g é bijetora.

c) $h: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*;\ h(x) = \dfrac{1}{x}$

Seja k, com $k \in \mathbb{R}^*$.

$h(x) = k$

$\dfrac{1}{x} = k \Rightarrow x = \dfrac{1}{k}$

Assim, para qualquer k do contradomínio da função h, a equação $h(x) = k$ tem uma única solução.

Portanto, h é bijetora.

d) $t: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}^*;\ t(x) = \dfrac{5}{x - 1}$

Seja k, com $k \in \mathbb{R}^*$.

$t(x) = k$

$\dfrac{5}{x - 1} = k \Rightarrow x = \dfrac{5 + k}{k}$

Assim, para qualquer k do contradomínio da função t, a equação $t(x) = k$ tem uma única solução.

Logo, t é bijetora.

e) $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+;\ u(x) = x^2$

Seja k, com $k \in \mathbb{R}_+$

$k = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{k}$

Logo, para qualquer valor do contradomínio de u existe x no domínio tal que $u(x) = k$. Portanto, u é sobrejetora.

Note que u não é injetora, pois para $k > 0$ há dois valores distintos do domínio com a imagem k: $\sqrt{k}$ e $-\sqrt{k}$.

20. Considerando que o domínio e o contradomínio são representados pelo conjunto dos números reais e como toda reta paralela ao eixo Ox intercepta o gráfico em um único ponto, então a função é bijetora.

Alternativa **d**.

21. Como para cada elemento do domínio A há um único elemento do contradomínio $\mathbb{N}$, então a função é injetora.

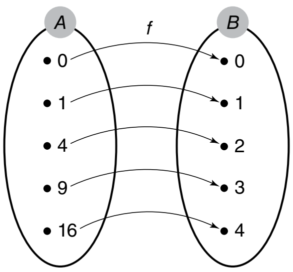
O contradomínio de f é o conjunto infinito $\mathbb{N}$. Como não há infinitos candidatos, então há elementos do contradomínio que não estão associados a elementos do domínio, logo, a função não é sobrejetora.

Alternativa **a**.

22. Como cada elemento do domínio A está associado a mais de um elemento do contradomínio B, então a função não é injetora.

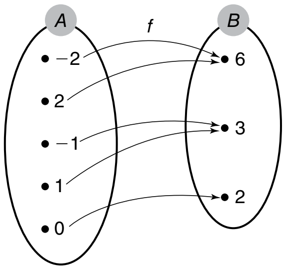
Já que todos os elementos do contra-domínio B estão associados a pelo menos um elemento do domínio A, então a função é sobrejetora.

23.



Sim, porque f é uma bijeção de A em B e, por isso, a relação inversa f^{-1} também é uma função.

24.



Não, pois f não é uma bijeção de A em B e, por isso, a relação inversa f^{-1} não é uma função.

25.
- f não é bijetora; logo, não é invertível.
- g é bijetora e, portanto, admite inversa.

26. a) I. Trocamos x por y e y por x, obtendo:

$x = 2y - 5$

II. Isolando a variável y: $x = 2y - 5 \Rightarrow y = \dfrac{x + 5}{2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x + 5}{2}$

b) I. Trocamos x por y e y por x, obtendo: $x = \dfrac{8}{y - 6}$

II. Isolando a variável y:

$x = \dfrac{8}{y - 6} \Rightarrow xy - 6x = 8$

$\therefore y = \dfrac{8 + 6x}{x}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{8 + 6x}{x}$

c) I. Trocamos x por y e y por x, obtendo:

$x = \dfrac{5y + 2}{1 - y}$

II. Isolando a variável y:

$x = \dfrac{5y + 2}{1 - y} \Rightarrow x - xy = 5y + 2$

$\therefore 5y + xy = x - 2 \Rightarrow y = \dfrac{x - 2}{5 + x}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x - 2}{5 + x}$

d) I. Trocamos x por y e y por x, obtendo: $x = \sqrt{y}$

II. Isolando a variável y: $x = \sqrt{y} \Rightarrow y = x^2$

$\therefore f^{-1}(x) = x^2$

e) I. Trocamos x por y e y por x, obtendo:

$x = 5 + \sqrt[3]{y - 3}$

II. Isolando a variável y:

$x = 5 + \sqrt[3]{y - 3} \Rightarrow \sqrt[3]{y - 3} = x - 5$

$y - 3 = (x - 5)^3 \Rightarrow y = (x - 5)^3 + 3$

$\therefore f^{-1}(x) = (x - 5)^3 + 3$

27. Primeiro é preciso saber qual é a função $f(x)$.

Sendo $t = 6x$, então $x = \dfrac{t}{6}$. Assim, $f\left(\dfrac{t}{6}\right) = 3 \cdot \dfrac{t}{6} + 2 = \dfrac{t}{2} + 2$

$\therefore f(x) = \dfrac{x}{2} + 2$

Vamos encontrar a inversa.

I. Trocamos x por y e y por x, obtendo: $x = \dfrac{y}{2} + 2$

II. Isolando a variável y: $x = \dfrac{y}{2} + 2 \Rightarrow y = 2x - 4$

$\therefore f^{-1}(x) = 2x - 4$

Alternativa **a**.

28. $C = \dfrac{5(F - 32)}{9} \Rightarrow 9C = 5F - 160$

$\therefore 5F = 9C + 160 \Rightarrow F = \dfrac{9C + 160}{5}$

Alternativa **c**.

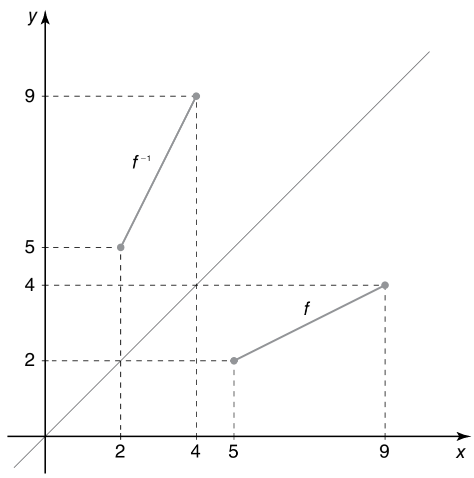
29. $Im(f^{-1}) = D(f)$
$x^5 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^5 \neq 1$
$\therefore\ x \neq 1;\ D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$
Logo, $Im(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\}$

30. **a)** Vamos determinar $f^{-1}(x)$.
I. Trocamos x por y e y por x, obtendo:
$$x = a + \frac{by}{100 - y}$$
II. Isolando a variável y:
$$x = a + \frac{by}{100 - y} \Rightarrow x - a = \frac{by}{100 - y}$$
$$\therefore\ 100x - xy - 100a + ay = by \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 100x - 100a = by + xy - ay$$
$$\therefore\ 100(x - a) = y(b + x - a) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{100(x - a)}{b + x - a}$$
$$\therefore\ f^{-1}(x) = \frac{100(x - a)}{b + x - a}$$
Pelo gráfico, temos que:
$$f^{-1}(200) = 0 \Rightarrow \frac{100(200 - a)}{b + x - a} = 0$$
$$\therefore\ 100(200 - a) = 0 \Rightarrow a = 200$$
Então: $f^{-1}(x) = \dfrac{100(x - 200)}{b + x - 200}$
Como, ainda pelo gráfico, $f^{-1}(5.200) = 50$, então:
$$\frac{100(5.200 - 200)}{b + 5.200 - 200} = 50 \Rightarrow \frac{100 \cdot 5.000}{b + 5.000} = 50$$
$\therefore\ b = 5.000$
Assim, $a = 200$ e $b = 5.000$.

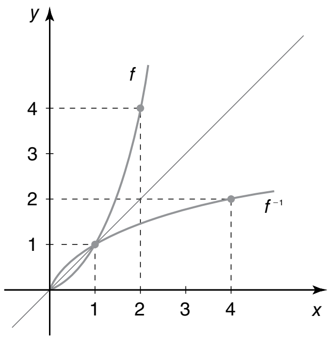
b) Temos que: $f(x) = 200 + \dfrac{5.000x}{100 - x}$. Então:
$$f(36) = 200 + \frac{5.000 \cdot 36}{100 - 36} = 200 + 2.812,50 =$$
$$= 3.012,50$$
O valor cobrado será R\$ 3.012,50.

c) $200 + \dfrac{5.000x}{100 - x} = 15.200 \Rightarrow \dfrac{5.000x}{100 - x} = 15.000$
$\therefore\ 5.000x = 1.500.000 - 15.000x$
$\therefore\ 20.000x = 1.500.000 \Rightarrow x = 75$
O volume retirado foi 75 m^3.

31. O gráfico de f^{-1} deve ser simétrico ao gráfico de f em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Assim:



32. **a)** O gráfico de f^{-1} deve ser simétrico ao gráfico de f em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Assim:



b) $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$, pois $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
Assim, $f^{-1}(x) = \sqrt{y}$.

Exercícios complementares

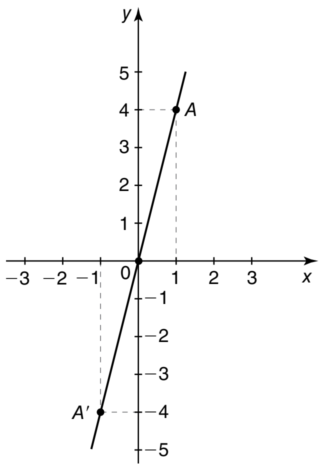
Exercícios técnicos

1. Temos que calcular $f(x) = 0$.
- Supondo $x \leqslant 1$, temos:
  $0 = x^3 - 4x \Rightarrow x \cdot (x^2 - 4) = 0$
  $\therefore\ x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -2$
  Mas supomos que $x \leqslant 1$, então $x = 2$ não serve.
- Supondo $x > 1$, temos:
  $0 = x - 5 \Rightarrow x = 5$

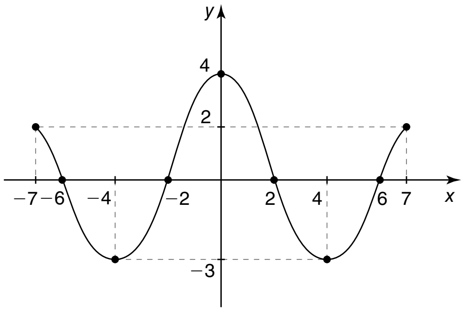
Logo, os zeros da função são 0, -2 e 5.

2. **a)** $s(-x) = (-x)^6 + (-x)^2 = x^6 + x^2 = s(x)$; logo, s é par.
b) $t(-x) = (-x)^5 + (-x) = -(x^5 + x) = -t(x)$; logo, t é ímpar.
c) $p(-x) = \sqrt{-x}$; p não está definida para $x > 0$; logo, p não é par nem ímpar.
d) $u(-x) = \dfrac{(-x)^3}{-x - 1} = \dfrac{-x^3}{-x - 1} = \dfrac{x^3}{x + 1}$
$u(-x) \neq u(x)$ e $u(-x) \neq -u(x)$; logo, u não é par nem ímpar.
e) $v(-x) = \sqrt[3]{-x} + (-x) = -\left(\sqrt[3]{x} + x\right) = -v(x)$; logo, v é ímpar.

3. Como a função é ímpar, seu gráfico é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano, logo:



4. Como a função é par, seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy, logo:



5. A condição para que a função $f(x)$ seja ímpar é que $f(-x) = -f(x)$, para qualquer x pertencente ao domínio de f. Então devemos ter:

$$\frac{(-x)^n}{(-x)^3 - (-x)} = -\left(\frac{x^n}{x^3 - x}\right) \Rightarrow \frac{(-x)^n}{-x^3 + x} = -\left(\frac{x^n}{x^3 - x}\right)$$

$$\therefore \frac{(-x)^n}{(-1)\cdot(x^3 - x)} = -\left(\frac{x^n}{x^3 - x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(-x)^n}{(-1)\cdot(x^3 - x)} = \frac{x^n}{(-1)\cdot(x^3 - x)}$$

$$\therefore (-x)^n = x^n$$

Para que $(-x)^n = x^n$, devemos ter n par. Como n é o menor número natural não nulo e n deve ser par, concluímos que $n = 2$.

6. Para que a função $f(x)$ seja par, devemos ter: $f(x) = f(-x)$. Logo:

$$\frac{ax + b}{x + c} = \frac{a\cdot(-x) + b}{-x + c} \Rightarrow -ax^2 - bx + acx + bc =$$

$$= -ax^2 + bx - acx + bc$$

$$\therefore -bx + acx = bx - acx \Rightarrow x(-b + ac) = x(b - ac)$$

$$\therefore 2b = 2ac \Rightarrow b = ac$$

Assim, para $-c < x < c$:

$$f(x) = \frac{ax + ac}{x + c} = \frac{a(x + c)}{x + c} = a$$

Alternativa **e**.

7. a) $f(1) = 1^2 - 1 = 0$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = \frac{0}{0 + 2} = 0$$

b) $g(3) = \dfrac{3}{3 + 2} = \dfrac{3}{5}$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f\left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = \frac{9}{25} - 1 =$$

$$= -\frac{16}{25}$$

c) $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(0) = 0^2 - 1 = -1$

d) $g(1) = \dfrac{1}{1 + 2} = \dfrac{1}{3}$

$$(g \circ g)(1) = g(g(1)) = g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{1}{7}$$

e) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 1 + 2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

f) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\dfrac{x}{x + 2}\right)^2 - 1 = \dfrac{x^2}{(x + 2)^2} - 1 =$

$$= \frac{x^2 - (x + 2)^2}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 - (x^2 + 4x + 4)}{(x + 2)^2} = \frac{-4x - 4}{(x + 2)^2}$$

g) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 +$
$+ 1 - 1 = x^4 - 2x^2$

h) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \dfrac{\frac{x}{x + 2}}{\frac{x}{x + 2} + 2} = \dfrac{\frac{x}{x + 2}}{\frac{x + 2x + 4}{x + 2}} =$

$$= \frac{x}{x + 2} \cdot \frac{x + 2}{3x + 4} = \frac{x}{3x + 4}$$

8. a) $(h \circ g \circ f)(8) = (h \circ g)(f(8))$

$f(8) = \sqrt[3]{8} = 2$

Assim:

$(h \circ g)(f(8)) = (h \circ g)(2) = h(g(2))$

$g(2) = 2 + 1 = 3$

Logo:

$h(g(2)) = h(3) = 3 \cdot 3 + 2 = 11$

b) $(f \circ g \circ h)(1) = (f \circ g)(h(1))$

$h(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

Assim:

$(f \circ g)(h(1)) = (f \circ g)(5) = f(g(5))$

$g(5) = 5 + 1 = 6$

Logo:

$f(g(5)) = f(6) = \sqrt[3]{6}$

c) $(f \circ h \circ g)(0) = (f \circ h)(g(0))$

$g(0) = 0 + 1 = 1$

Assim:

$(f \circ h)(g(0)) = (f \circ h)(1) = f(h(1))$

$h(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

Logo:

$f(h(1)) = f(5) = \sqrt[3]{5}$

d) $(g \circ h \circ f)(-1) = (g \circ h)(f(-1))$

$f(-1) = \sqrt[3]{-1} = -1$

Assim:

$(g \circ h)(f(-1)) = (g \circ h)(-1) = g(h(-1))$

$h(-1) = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$

Logo:

$g(h(-1)) = g(-1) = -1 + 1 = 0$

e) $[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)\left(\sqrt[3]{x}\right) =$

$= h\left(g\left(\sqrt[3]{x}\right)\right) = h\left(\sqrt[3]{x} + 1\right) = 3\left(\sqrt[3]{x} + 1\right) + 2 =$

$= 3\sqrt[3]{x} + 5$

f) $[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g)(3x + 2) =$

$= f(g(3x + 2)) = f(3x + 2 + 1) = f(3x + 3) =$

$= \sqrt[3]{3x + 3}$

g) $[(f \circ h) \circ g](x) = (f \circ h)(g(x)) = (f \circ h)(x + 1) =$

$= f(h(x + 1)) = f[3(x + 1) + 2] = f(3x + 5) =$

$= \sqrt[3]{3x + 5}$

h) $[(g \circ h) \circ f](x) = (g \circ h)(f(x)) = (g \circ h)\left(\sqrt[3]{x}\right) =$
$= g\left(h\left(\sqrt[3]{x}\right)\right) = g\left(3\sqrt[3]{x} + 2\right) = 3\sqrt[3]{x} + 2 + 1 =$
$= 3\sqrt[3]{x} + 3$

9. $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = k \cdot f(x) + 1 =$
$= k \cdot (kx + 1) + 1 = k^2x + k + 1$
Como $(f \circ f)(x) = 4x - 1$, temos:
$k^2x + k + 1 = 4x - 1$
Identificando os coeficientes, obtemos:
- $k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$
- $k + 1 = -1 \Rightarrow k = -2$

Logo, $k = -2$.

10. $(f \circ g)(x) = 2 \Rightarrow f(x^2 - 2x + 2) = 2$
$\therefore x^2 - 2x + 2 + 3 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 0$
$\therefore \Delta = -8$
Logo, não existe x tal que $(f \circ g)(x) = 2$.

11. $f(0,5) = \dfrac{1 - 0,5}{1 + 0,5} = \dfrac{0,5}{1,5} = \dfrac{1}{3}$

$f(f(0,5)) = f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1 - \dfrac{1}{3}}{1 + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{1}{2}$

$g(0,5) = \dfrac{1}{f(f(0,5))} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2}} = 2$

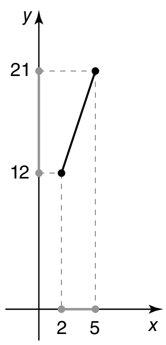
Alternativa **a**.

12. **a)** $g(f(x)) = g\left(x + \sqrt{2}\right) = 3^{x + \sqrt{2}} + x + \sqrt{2}$

b) $g(f(0)) = 3^{0 + \sqrt{2}} + 0 + \sqrt{2} \approx 4,729 + 1,414 \approx 6,143$

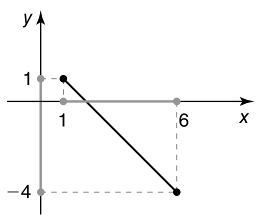
13. $\begin{cases} f(2) = 3 \cdot 2 + 6 = 12 \\ f(5) = 3 \cdot 5 + 6 = 21 \end{cases}$

Como f é bijetora e $a < b$, temos: $a = 12$ e $b = 21$.



14. $\begin{cases} f(1) = 2 - 1 = 1 \\ f(6) = 2 - 6 = -4 \end{cases}$

Como f é bijetora e $a < b$, temos: $a = -4$ e $b = 1$.



15. **a)** V, pois b pertence ao contradomínio e, já que a função é sobrejetora, não há nenhum elemento do contradomínio que não esteja relacionado com pelo menos um elemento do domínio.

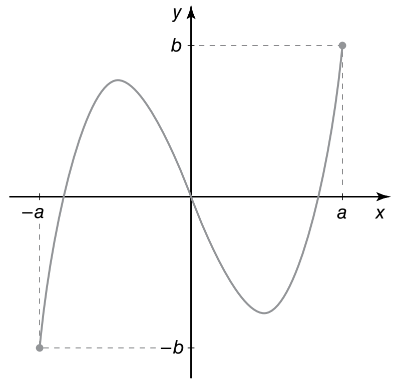
b) V, pois a função não é injetora, o que significa que existem elementos distintos do domínio relacionados a um mesmo elemento do contradomínio.

c) F, pois a função deve ser decrescente em uma parte do domínio, já que não é injetora.

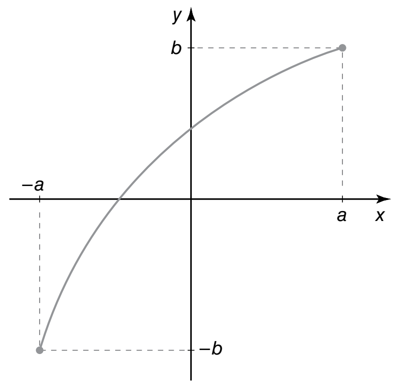
d) F, pois a função não é injetora, ou seja, há elementos distintos do domínio relacionados a um mesmo elemento do contradomínio.

16. **a)** F, pois se a função é par, $f(x) = f(-x)$, ou seja, há dois elementos distintos do domínio relacionados a um mesmo elemento do contradomínio.

b) F, pois a função pode ser simétrica em relação à origem (0,0), que é a representação gráfica de toda função ímpar; porém podem existir valores distintos do domínio relacionados a um mesmo valor do contradomínio, como no exemplo:



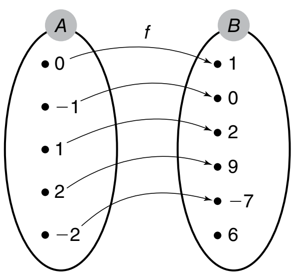
c) F, pois a função pode ser injetora e não ter o gráfico simétrico em relação ao ponto (0,0). Como no exemplo:



d) F, pois para ser bijetora, é preciso ser injetora e, como visto no item **b** é possível que ela seja ímpar e não injetora.

e) F, pois, como visto no exemplo **b**, tem-se que $f(-a) = -b$ e a função não é injetora.

17.



Não, pois f não é bijetora e, por isso, a relação inversa f^{-1} não é uma função.

18. Não, pois não há função de A em B que seja bijetora, já que $n(A) \neq n(B)$.

19. **a)** Não, pois ela não é bijetora.
b) Sim, porque ela é bijetora.

20. **a)** **I.** Trocamos x por y e y por x e obtemos:
$x = 2y - 1$
II. Isolando a variável y:
$x = 2y - 1 \Rightarrow y = \dfrac{x + 1}{2}$
$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x + 1}{2}$

b) **I.** Trocamos x por y e y por x e obtemos:
$x = 4y + 2$
II. Isolando a variável y: $x = 4y + 2 \Rightarrow y = \dfrac{x - 2}{4}$
$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x - 2}{4}$

c) **I.** Trocamos x por y e y por x e obtemos:
$x = \dfrac{8}{3y + 2}$
II. Isolando a variável y:
$x = \dfrac{8}{3y + 2} \Rightarrow 3yx + 2x = 8$
$\therefore y = \dfrac{8 - 2x}{3x}$
$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{8 - 2x}{3x}$

d) **I.** Trocamos x por y e y por x e obtemos:
$x = \dfrac{y + 1}{2y - 4}$
II. Isolando a variável y:
$x = \dfrac{y + 1}{2y - 4} \Rightarrow 2xy - 4x = y + 1$
$\therefore 2xy - y = 4x + 1 \Rightarrow y = \dfrac{4x + 1}{2x - 1}$
$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{4x + 1}{2x - 1}$

e) **I.** Trocamos x por y e y por x e obtemos:
$x = \dfrac{1}{1 + \sqrt{y}}$
II. Isolando a variável y:
$x = \dfrac{1}{1 + \sqrt{y}} \Rightarrow x + x\sqrt{y} = 1$
$\therefore \sqrt{y} = \dfrac{1 - x}{x} \Rightarrow y = \left(\dfrac{1 - x}{x}\right)^2$
$\therefore f^{-1}(x) = \left(\dfrac{1 - x}{x}\right)^2$

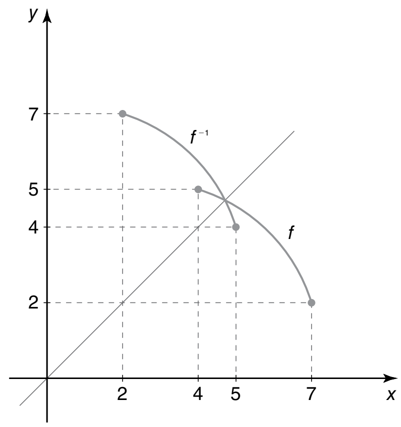
f) **I.** Trocamos x por y e y por x e obtemos:
$x = \dfrac{1 + \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{y}}$
II. Isolando a variável y:
$x = \dfrac{1 + \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{y}} \Rightarrow x\sqrt[3]{y} = 1 + \sqrt[3]{y}$
$\therefore \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{y} = \dfrac{1}{x - 1}$
$\therefore y = \left(\dfrac{1}{x - 1}\right)^3$
$\therefore f^{-1}(x) = \left(\dfrac{1}{x - 1}\right)^3$

21. $f(x + 3) = 2x - 1$
$x + 3 = t$
$\therefore x = t - 3$
$f(t) = 2(t - 3) - 1$
$f(t) = 2t - 7$ ou $f(x) = 2x - 7$

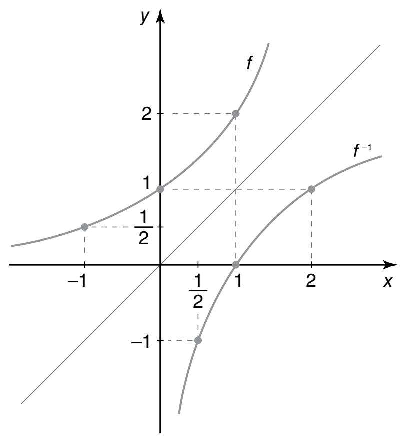
Vamos determinar $f^{-1}(x)$:
I. Trocamos x por y e y por x e obtemos: $x = 2y - 7$
II. Isolando a variável y: $x = 2y - 7 \Rightarrow y = \dfrac{x + 7}{2}$
$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x + 7}{2}$
Alternativa **a**.

22. Como $f(g(x)) = 3x + 4$, temos:
$6 \cdot g(x) + 7 = 3x + 4 \Rightarrow 6 \cdot g(x) = 3x - 3$
$\therefore g(x) = \dfrac{x - 1}{2}$
Vamos determinar $g^{-1}(x)$:
I. Trocamos x por y e y por x e obtemos: $x = \dfrac{y - 1}{2}$
II. Isolando a variável y: $2x = y - 1 \Rightarrow y = 2x + 1$
$\therefore g^{-1}(x) = 2x + 1$
Alternativa **c**.

23.



24.



Exercícios contextualizados

25. Se $x = 45$, o valor é: $110 + 2{,}60 \cdot 45 = 227$
$P(x) = \begin{cases} 110 + 2{,}60x, \text{ se } 0 < x \leqslant 45 \\ 227 + 2{,}30(x - 45), \text{ se } x > 45 \end{cases}$

26. Se $x = 3$, a temperatura é $40 + 3 \cdot 100 = 340$
$T(x) = \begin{cases} 40 + 100x, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 340, \text{ se } 3 < x \leqslant 18 \end{cases}$

27. $C(Q(t)) = 10 \cdot \left(6t - \dfrac{1}{2}t^2\right) = 60t - 5t^2$

28. a) Temos que $H = 12{,}02$. Então:

$12{,}02 = 12 + 0{,}01t \Rightarrow t = 2$

Como $S = 20(1{,}01)^t$ e $t = 2$:

$S = 20 \cdot (1{,}01)^2 = 20{,}402$

A área alagada era $20{,}402$ km^2.

b) $H = 12 + 0{,}01t \Rightarrow t = \dfrac{H - 12}{0{,}01}$

$\therefore t = 100H - 1.200$

$S = 20(1{,}01)^t \Rightarrow S = 20(1{,}01)^{100H - 1.200}$

29. a) Temos que $t = 1.200$. Então:

$x = 6t \Rightarrow x = 7.200$

$y = \dfrac{x}{2} \Rightarrow y = 3.600$

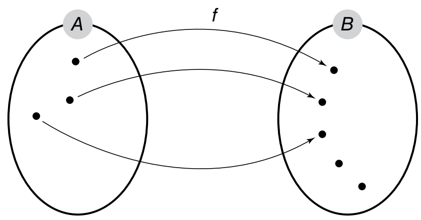
Logo, foram plantados 3.600 pés de eucalipto.

b) Sejam $x = f(t) = 6t$ e $y = g(x) = \dfrac{x}{2}$.

Então temos que: $g(f(t)) = \dfrac{6t}{2} = 3t$

30. É apenas sobrejetora, pois todo livro é identificado e, de acordo com o exemplo, existe mais de um exemplar com o mesmo título.

31.
- f é injetora, pois não existem números diferentes de CPF associados a um mesmo cidadão brasileiro que vive no Brasil.
- f não é sobrejetora, pois existem cidadãos brasileiros que vivem no Brasil e não têm CPF.
- f não é bijetora, pois não é sobrejetora.



32. I. Incorreto, pois após 7 horas já é menor que 20 mg/l.

II. Correto, pois pelo gráfico é possível notar que a concentração cresce nas primeiras 3 horas e leva da terceira à décima segunda hora para decrescer.

III. Correto. Pelo gráfico é possível verificar que o ponto máximo da função é em 3 horas.

IV. Incorreto, pois há tempos distintos com mesma concentração, o que significa que a função não é injetora.

Alternativa **b**.

33. a) A 10 °C o comprimento da coluna de mercúrio aumentou $10 \cdot 2$ mm $= 20$ mm em relação à temperatura 0 °C. Então, a 0 °C, o comprimento da coluna de mercúrio é de

122 mm $-$ 20 mm $=$ 102 mm.

Logo, $f(x) = 102 + 2x$, $-20 \leqslant x \leqslant 50$ e x representa a temperatura.

b) **I.** Trocamos x por y e y por x e obtemos:

$x = 102 + 2y$

II. Isolando a variável y:

$x = 102 + 2y \Rightarrow y = \dfrac{x - 102}{2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x - 102}{2}$

c) A função do item **b** determina a temperatura em função do comprimento x da coluna de mercúrio no termômetro.

34. a) $y = 50 + 0{,}46x$

b) **I.** Trocamos x por y e y por x e obtemos:

$x = 50 + 0{,}46y$

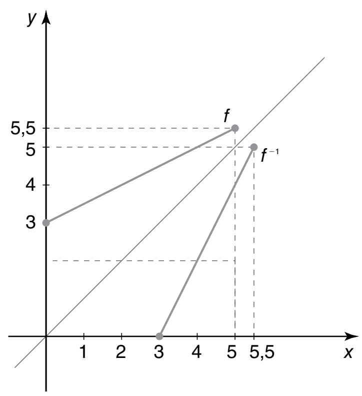
II. Isolando a variável y:

$x = 50 + 0{,}46y \Rightarrow y = \dfrac{x - 50}{0{,}46}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x - 50}{0{,}46}$

c) A função do item **b** determina o número de quilômetros rodados y em relação ao preço x cobrado.

35. Basta construir o gráfico da função inversa, considerando a simetria:



Pré-requisitos para o capítulo 4

1. a) $y = x^3$

Se $x = 2$, então $y = 8$

Se $x = 5$, então $y = 125$

Então, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{125 - 8}{5 - 2} = \dfrac{117}{3} = 39$

b) $y = 3x$

Se $x = 1$, então $y = 3$

Se $x = 8$, então $y = 24$

Então, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{24 - 3}{8 - 1} = \dfrac{21}{7} = 3$

c) $y = 4x + 1$

Se $x = 3$, então $y = 13$

Se $x = 10$, então $y = 41$

Então, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{41 - 13}{10 - 3} = \dfrac{28}{7} = 4$

2. a) V c) V e) F
b) F d) V

3. a) F c) V e) V
b) F d) F

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. De acordo com o texto, quando o volume do tanque varia de 0 a 60 litros, o ponteiro faz um ângulo de 90°.

Assim, podemos montar a seguinte relação:

60 L —— 90°
20 L —— y

$60y = 20 \cdot 90°$

$y = \frac{20 \cdot 90°}{60}$

$y = \frac{1.800°}{60}$

$y = 30°$

Portanto, a medida do arco, quando o volume do combustível varia de 0 a 20 litros, é 30°.

2. De acordo com o texto, quando o volume do tanque varia de 0 a 60 litros, o ponteiro também varia proporcionalmente de 0 a 1.

Assim, podemos montar a seguinte relação:

60 L —— 1
20 L —— y

$60y = 20 \cdot 1$

$y = \frac{20 \cdot 1}{60}$

$y = \frac{1}{3}$

Portanto, quando o volume do combustível for de 20 litros, a extremidade do ponteiro estará associada ao número $\frac{1}{3}$ do mostrador.

3. De acordo com o texto, quando o volume do tanque varia de 0 a 60 litros, o ponteiro faz um ângulo de 90°.

Assim, podemos montar a seguinte relação:

60 L —— 90°
x L —— $d(x)$

$60 \cdot d(x) = x \cdot 90$

$d(x) = \frac{x \cdot 90}{60}$

$d(x) = \frac{3 \cdot x}{2}$

4. De acordo com o texto, quando o volume do tanque varia de 0 a 60 litros, o ponteiro faz um ângulo de 90° e também varia proporcionalmente de 0 a 1.

Assim, podemos montar a seguinte relação:

90° —— 1
$d(x)$ —— $n(d(x))$

$90 \cdot n(d(x)) = d(x) \cdot 1$

$n(d(x)) = \frac{d(x) \cdot 1}{90}$

$n(d(x)) = \frac{d(x)}{90}$

Pelo item anterior, temos que $d(x) = \frac{3x}{2}$.

Logo, $n(d(x)) = \frac{\frac{3x}{2}}{90} = \frac{x}{60}$.

Análise da resolução

COMENTÁRIO: O aluno errou ao não considerar os intervalos de domínio nas sentenças da função composta, uma vez que deveremos ter:

Resolução correta:

Na primeira sentença: $g(x) \geqslant 2$, ou seja, $x + 2 \geqslant 2 \Rightarrow x \geqslant 0$

Na segunda sentença: $g(x) < 2$, ou seja, $x + 2 < 2 \Rightarrow x < 0$

Logo, a função composta é:

$$f(g(x)) = \begin{cases} x^2 + 7x + 4, \text{ se } x \geqslant 0 \\ 4x + 7, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$