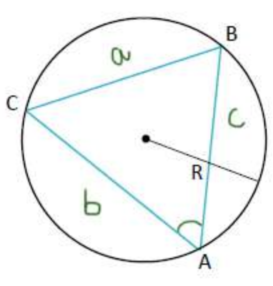
PROFESSOR FERRETTO

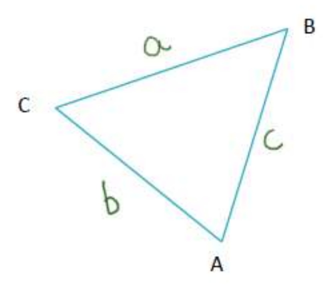
Para resolver esses exercícios, duas leis são muito importantes:



Expressão da Lei dos Senos:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} = 2R$$

* Utilizada quando tem-se 2 ângulos e 1 lado.

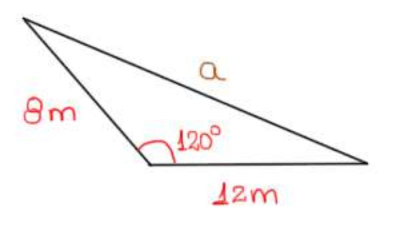


Expressão da Lei dos Cossenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot \cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot \cos\hat{C}$$

* Utilizada quando tem-se 2 lados e 1 ângulo.

1. Dois lados de um triângulo medem 8 m e 12 m e formam entre si um ângulo de 120°. Calcule o terceiro lado.



Temos 2 lados e 1 ângulo:

$a^2 = 8^2 + 12^2 - 2\cdot 8\cdot 12\cdot \cos 120°$

$a^2 = 64 + 144 - 192\cdot(-1/2)$

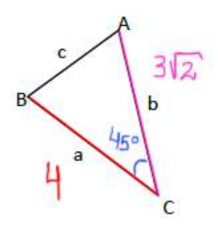
$a^2 = 64 + 144 + 96$

$a = \sqrt{304}$

$a = 4\sqrt{19}$ m

$\boxed{4\sqrt{19}\ m}$

2. Calcule c, sabendo que $a = 4, b = 3\sqrt{2}$ e $\hat{C} = 45°$.



Temos 2 lados e 1 ângulo:

$c^2 = 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2\cdot 4\cdot 3\sqrt{2}\cdot \cos 45°$

$c^2 = 16 + 18 - 24\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}/2)$

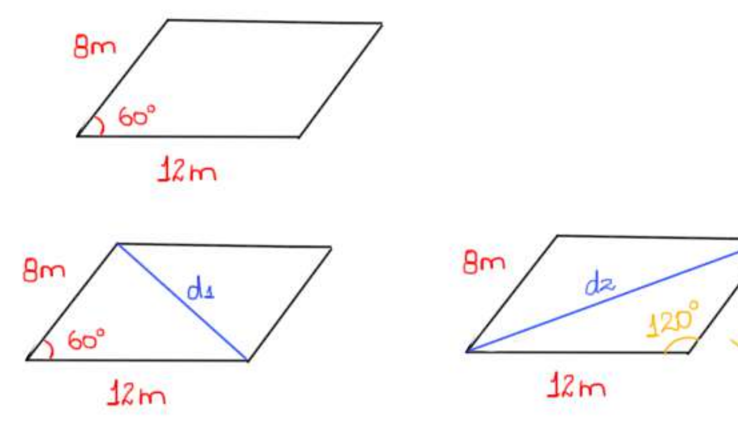
$c^2 = 16 + 18 - 24$

$c = \sqrt{34 - 24}$

$c = \sqrt{10}$

$\boxed{\sqrt{10}}$

3. Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8 m e 12 m e formam um ângulo de 60°. Calcule as diagonais.



os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares!

Temos 2 lados e 1 ângulo:

$d_1^2 = 8^2 + 12^2 - 2\cdot 8\cdot 12\cdot \cos 60°$

$d_1^2 = 64 + 144 - 96$

$d_1 = \sqrt{112}$

$d_1 = 4\sqrt{7}$ m

$d_2^2 = 8^2 + 12^2 - 2\cdot 8\cdot 12\cdot \cos 120°$

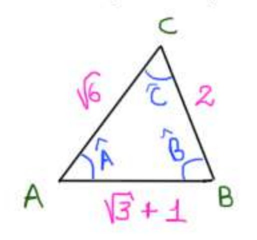
$d_2^2 = 64 + 144 + 96$

$d_2 = \sqrt{304}$

$d_2 = 4\sqrt{19}$ m

$\boxed{4\sqrt{7}\ m \text{ e } 4\sqrt{19}\ m}$

4. Calcule os três ângulos internos de um triângulo ABC sabendo que $a = 2, b = \sqrt{6}$ e $c = \sqrt{3} + 1$.



Temos apenas os 3 lados:

$2^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2\cdot\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\cos\hat{A}$

$4 = 6 + 3 + 2\sqrt{3} + 1 - (2\sqrt{18} + 2\sqrt{6})\cdot\cos\hat{A}$

$4 = 10 + 2\sqrt{3} - (6\sqrt{2} + 2\sqrt{6})\cos\hat{A}$

$\cos\hat{A} = \dfrac{6 + 2\sqrt{3}}{6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}$

$\cos\hat{A} = \dfrac{6 + 2\sqrt{3}}{6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}} \cdot \dfrac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}} = \dfrac{6\cdot 6\sqrt{2} - 6\cdot 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{6}}{(6\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{6})^2}$

Racionalização

$4\cdot\sqrt{3^2\cdot 2} = 4\cdot 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

$\cos\hat{A} = \dfrac{36\cdot\sqrt{2} - 12\sqrt{6} + 12\sqrt{6} - 4\sqrt{18}}{36\cdot 2 - 4\cdot 6} = \dfrac{24\sqrt{2}^{:24}}{48^{:24}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\hat{A} = \cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45°$

$\dfrac{2}{sen\,45°} = \dfrac{\sqrt{6}}{sen\,\hat{B}} \Rightarrow 2\cdot sen\,\hat{B} = sen\,45°\cdot\sqrt{6}$

$2\cdot sen\,\hat{B} = (\sqrt{2}/2)\cdot\sqrt{6}$

$2\cdot sen\,\hat{B} = \cancel{2}\sqrt{3}/\cancel{2}$

$\hat{B} = sen^{-1}(\sqrt{3}/2) = 60°$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

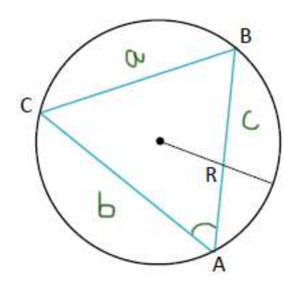
$45° + 60° + \hat{C} = 180°$

$\hat{C} = 180° - 105°$

$\hat{C} = 75°$

$\boxed{\hat{A} = 45°;\ \hat{B} = 60°\ e\ \hat{C} = 75°}$

5. Calcule o raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC em que $a = 15\ cm$ e $\hat{A} = 30°$.



Temos 1 lado e 1 ângulo:

$\dfrac{a}{sen\,\hat{A}} = 2\cdot R$

$\dfrac{15}{sen\,30°} = 2R$

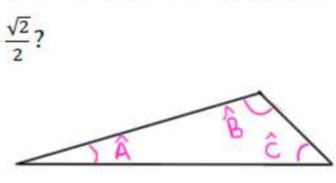
$2\cdot sen\,30°\,R = 15$

$2\cdot(1/2)\cdot R = 15$

$R = 15$ cm

$\boxed{15\ cm}$

6. Quais são os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC para o qual $\hat{A} = 15°, sen\,\hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $sen\,\hat{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$?



$sen^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 60°$ ou $120°$

Ou seja $\hat{B} = 60°$ ou $120°$

$sen^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 45°$ ou $135°$

Ou seja $\hat{C} = 45°$ ou $135°$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

$15° + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

$\hat{B} + \hat{C} = 165°$

Testando as quatro possibilidades:

$\hat{B} + \hat{C} = 165°$

$60° + 45° = 105°$

$60° + 135° = 195°$

$120 + 45° = 165° \longrightarrow$ OK!

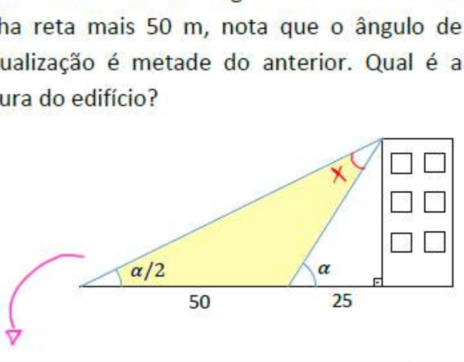
$120 + 135° = 255°$

Portanto: $\hat{B} = 120°$

$\hat{C} = 45°$

$\boxed{\hat{B} = 120°\ e\ \hat{C} = 45°}$

7. Um observador colocado a 25 m de um prédio vê o edifício sob certo ângulo. Afastando-se em linha reta mais 50 m, nota que o ângulo de visualização é metade do anterior. Qual é a altura do edifício?



Teorema do ângulo externo: Fixado um triângulo, a medida de cada ângulo externo é igual a soma das medidas dos seus internos não adjacentes.

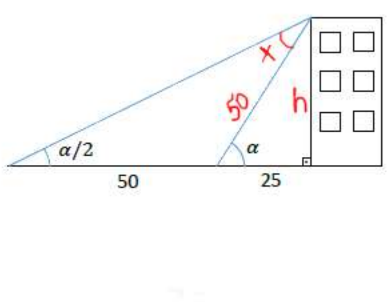
Assim é possível dizer que:

$\alpha = \alpha/2 + x$

$x = \alpha - \alpha/2$

$x = \alpha/2$

Por isso fica claro que este é um triângulo isósceles!
(dois lados e dois ângulos iguais)



Portanto: $h^2 + 25^2 = 50^2$

$h^2 = 50^2 - 25^2$

$h = \sqrt{1875}$

$h = 25\sqrt{3}$ m

$\boxed{25\sqrt{3}\ m}$