MATEMÁTICA

NOTAÇÕES

C : conjunto dos números complexos.
Q : conjunto dos números racionais.
R : conjunto dos números reais.
Z : conjunto dos números inteiros.
$N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
$N^* = \{0, 1, 2, 3, ...\}$.
$\varnothing$: conjunto vazio.
$A \backslash B = \{x \in A; x \notin B\}$.
$[a,b] = \{x \in R; a \le x \le b\}$.
$]a,b[= \{x \in R; a < x < b\}$.
i : unidade imaginária ; $i^2 = -1$.
$z = x + iy,\ x, y \in R$.
$\overline{z}$: conjugado do número complexo $z \in C$.
$|z|$: módulo do número complexo $z \in C$.
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B.
$m(\overline{AB})$: medida (comprimento) de $\overline{AB}$.

1. Considere os conjuntos $S = \{0, 2, 4, 6\}$, $T = \{1, 3, 5\}$ e $U = \{0, 1\}$ e as afirmações:

I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \varnothing$.
II. $\{2\} \subset S \backslash U$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.
III. Existe uma função $f : S \to T$ injetiva.
IV. Nenhuma função $g : T \to S$ é sobrejetiva.

Então, é(são) verdadeira(s)

A. ( ) apenas I. B. ( ) apenas IV. C. ( ) apenas I e IV.
D. ( ) apenas II e III. E. ( ) apenas III e IV.

Alternativa: B

I. $\{0\}$ não é elemento de S (F)
$S \cap U = \{0\} \neq \varnothing$ (V)
A afirmação completa é falsa.

II. $S \backslash U = S - U = \{2; 4; 6\}$, portanto $\{2\} \subset \{2; 4; 6\}$ (V)
$S \cap T \cap U = \varnothing \neq \{0; 1\}$ (F)
A afirmação completa é falsa.

III. Como o número de elementos de S é maior do que T, não é possível estabelecer uma função injetora entre S e T.
Portanto, a afirmação é falsa.

IV. Como o número de elementos de T é menor do que o de S, não é possível estabelecer uma função sobrejetora entre T e S.
Portanto, a afirmação é verdadeira.

2. Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de

A. ( ) R$ 17,50. B. ( ) R$ 16,50. C. ( ) R$ 12,50.
D. ( ) R$ 10,50. E. ( ) R$ 9,50.

Alternativa: D

Se S é o valor do sanduíche, C o do café, T o da torta:
$3S + 7C + T = 31{,}50$ (i)
$4S + 10C + T = 42{,}00$ (ii)

Fazendo $4\cdot$(i) – $3\cdot$(ii):
$28C - 30C + 4T - 3T = 126 - 126 \Rightarrow T = 2C$

Fazendo (ii) – (i):
$S + 3C = 10{,}5 \Rightarrow S + C = 10{,}5 - 2C \Rightarrow S + C + T = 10{,}5 + T - 2C \Rightarrow S + C + T = 10{,}50$

Portanto, o consumo solicitado totaliza o valor de R$ 10,50.

3. Uma circunferência passa pelos pontos $A = (0, 2)$, $B = (0, 8)$ e $C=(8, 8)$. Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são
A. ( ) (0, 5) e 6.
B. ( ) (5, 4) e 5.
C. ( ) (4, 8) e 5,5.
D. ( ) (4, 5) e 5.
E. ( ) (4, 6) e 5.

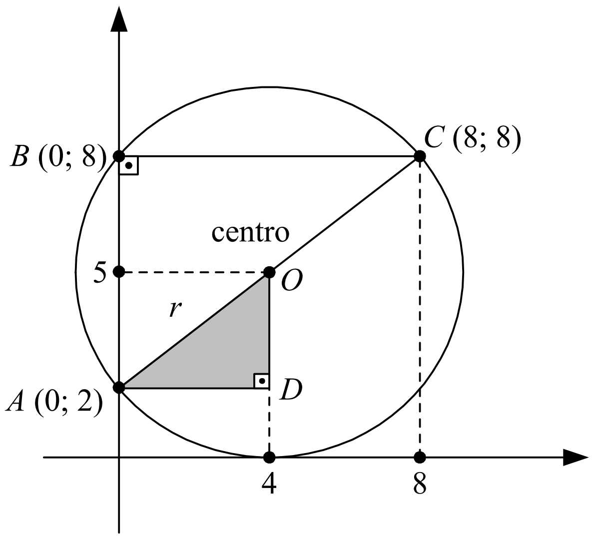
Alternativa: D

Do enunciado temos:

Como $AB \perp BC$, as coordenadas do centro O são o ponto médio de AC:

$$\left(\frac{0+8}{2}; \frac{2+8}{2}\right) = (4; 5)$$

Do Δ AOD temos: $r^2 = 3^2 + 4^2 \therefore r = 5$ (raio)



4. Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que
A. ( ) $x \in]0, 2[$.
B. ( ) x é racional.
C. ( ) $\sqrt{2x}$ é irracional.
D. ( ) x^2 é irracional.
E. ( ) $x \in]2, 3[$.

Alternativa: B

$$x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3} \therefore x = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{3} \therefore x = \left|2 - \sqrt{3}\right| + \sqrt{3} \therefore x = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} \therefore x = 2$$

Logo, x é um número racional.

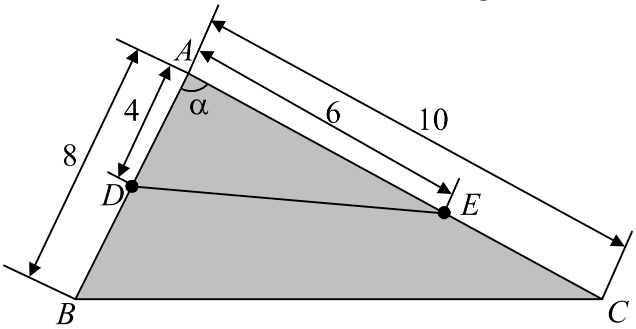
5. Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado $\overline{AB}$ e E um ponto do lado $\overline{AC}$. Se $m\left(\overline{AB}\right)=8$ cm, $m\left(\overline{AC}\right)=10$ cm, $m\left(\overline{AD}\right)=4$ cm e $m\left(\overline{AE}\right)=6$ cm, a razão das áreas dos triângulos ADE e ABC é

A. ( ) $\frac{1}{2}$. B. ( ) $\frac{3}{5}$. C. ( ) $\frac{3}{8}$.

D. ( ) $\frac{3}{10}$. E. ( ) $\frac{3}{4}$.

Alternativa: D

Conforme o enunciado, temos o triângulo ABC a seguir com $D \in \overline{AB}$ e $E \in \overline{AC}$.



Área $ADE = \dfrac{4 \cdot 6 \cdot sen\alpha}{2} = 12 \cdot sen\alpha$

Área $ABC = \dfrac{8 \cdot 10 \cdot sen\alpha}{2} = 40 \cdot sen\alpha$

Logo, a razão entre as áreas é dada por: $\dfrac{12 \cdot sen\alpha}{40 \cdot sen\alpha} = \dfrac{3}{10}$

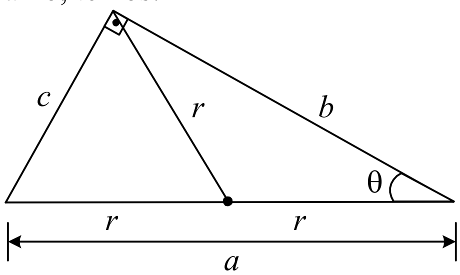
6. Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triangulo é igual a

A. ( ) $\frac{4}{5}$. B. ( ) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$. C. ( ) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

D. ( ) $\frac{1}{4}\sqrt{4+\sqrt{3}}$. E. ( ) $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Alternativa: C

Na figura abaixo, temos:



$$\begin{cases} a = 2r \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow b^2 + c^2 = 4r^2 \text{ (i)}$$

Do enunciado: $r^2 = b \cdot c$ (ii).

Substituindo (ii) em (i): $c^2 - 4bc + b^2 = 0$.

Resolvendo a equação em c, obtemos: $c = \dfrac{4b \pm \sqrt{12b^2}}{2} \Rightarrow c = b \cdot \left(2 \pm \sqrt{3}\right)$

Calculando r: $r^2 = b^2 \cdot \left(2 \pm \sqrt{3}\right) \Rightarrow r = b\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$

Logo, $\cos\theta = \dfrac{b}{2r} = \dfrac{b}{2b\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 \mp \sqrt{3}}$

Assim, um possível valor para cosθ é $\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

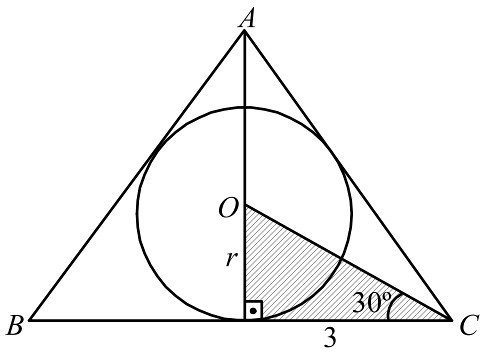
---

7. A circunferência inscrita num triângulo equilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)

A. ( ) $3\sqrt{3}$. B. ( ) 6. C. ( ) 5.
D. ( ) 4. E. ( ) $2\sqrt{5}$.

Alternativa: C

Determinação do raio do círculo inscrito no triângulo equilátero:

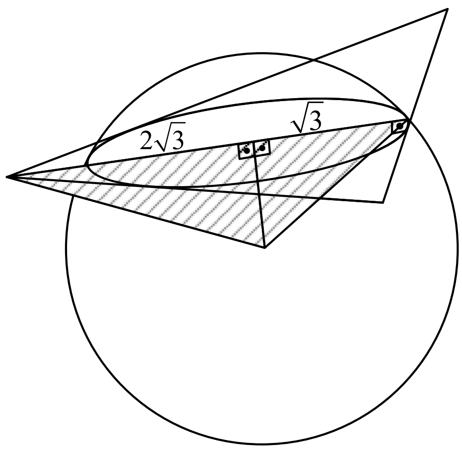


$\text{tg}30° = \dfrac{r}{3} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{r}{3} \Rightarrow r = \sqrt{3}$ cm

Como O é baricentro temos:

$AO = CO = BO = 2\sqrt{3}\ cm$

A esfera de raio 4 cm é seccionada pelo plano $\alpha(ABC)$ do triângulo.



$\Delta MOO' : (MO')^2 = (MO)^2 + (OO')^2$

$\Rightarrow (4)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (OO')^2 \Rightarrow (OO')^2 = 13$

$\Delta COO' : (CO')^2 = (CO)^2 + (OO')^2$

$\Rightarrow (CO')^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 13 = 12 + 13$

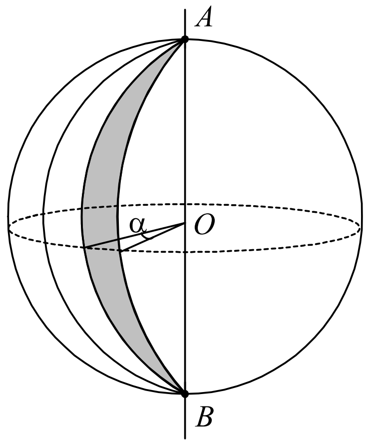
$\Rightarrow (CO')^2 = 25 \Rightarrow CO' = 5\ cm$

---

8. Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semi-esfera formam uma progressão aritmética de razão $\dfrac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\dfrac{\pi r^3}{18}$, então n é igual a:

A. ( ) 4. B. ( ) 3. C. ( ) 6.
D. ( ) 5. E. ( ) 7.

Alternativa: C



$\text{PA}(V_1;\ V_2;\ V_3;\ ...;\ V_n)$,

com $V_1 = \dfrac{\pi r^3}{18}$, razão $= \dfrac{\pi r^3}{45}$ e $\sum_{i=1}^{n} V_i = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \dfrac{2}{3}\pi r^3$

Pelo termo geral da PA, temos: $V_n = \dfrac{\pi r^3}{18} + (n-1)\dfrac{\pi r^3}{45}$

Soma dos termos: $\dfrac{(V_1 + V_n)n}{2} = \dfrac{2}{3}\pi r^3$

Assim: $\left[\dfrac{\pi r^3}{18} + \dfrac{\pi r^3}{18} + (n-1)\dfrac{\pi r^3}{45}\right].\dfrac{n}{2} = \dfrac{2}{3}\pi r^3$

Simplificando, temos a equação: $n^2 + 4n - 60 = 0 \Rightarrow n = -10$ (não convém) e $n = 6$.

O número de planos meridianos é 6.

---

9. Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é 7200º. O número de vértices deste prisma é igual a

A. ( ) 11. B. ( ) 32. C. ( ) 10.
D. ( ) 20. E. ( ) 22.

Alternativa: E

Seja n o número de vértices da base do prisma.

Assim, para a base do prisma temos que a soma dos ângulos é dada por: $S_1 = (n - 2)\cdot 180º$

Para as faces laterais, temos: $S_2 = n\cdot 360º$

Logo, a soma total dos ângulos é: $S_T = 2\cdot S_1 + S_2 = 7200º \Rightarrow (n - 2)\cdot 360º + n\cdot 360º = 7200º$
$\Rightarrow n - 2 + n = 20 \Rightarrow n = 11$

Assim, o número total de vértices do prisma é a soma dos vértices das 2 bases: $N = 2n$
Portanto: $\boxed{N = 22 \text{ vértices}}$

---

10. Em relação a um sistema de eixos cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$ e $C = (1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$. O volume do tetraedro é

A. ( ) $\dfrac{8}{3}$. B. ( ) 3. C. ( ) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

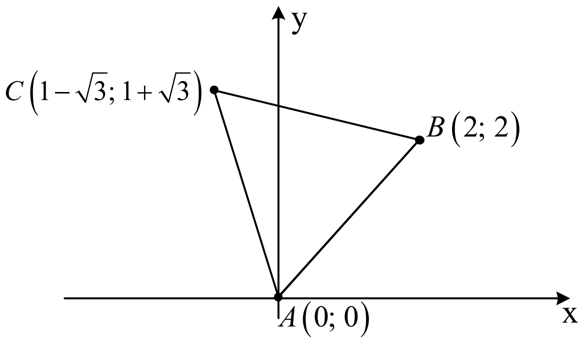
D. ( ) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. E. ( ) 8.

Alternativa: A

No sistema cartesiano, temos:

O lado do tetraedro regular é dado por:
$\ell = AB = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$

Assim, o volume do tetraedro regular é dado por: $V = \dfrac{\ell^3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{(2\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \dfrac{8}{3}$



---

11. No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio $p(x)$ cujos coeficientes somam 32. Se 0 e –1 são raízes de $p(x)$, então a soma $a + b + c$ é igual a

A. ( ) $-\dfrac{1}{2}$. B. ( ) $-\dfrac{1}{4}$. C. ( ) $\dfrac{1}{2}$.
D. ( ) 1. E. ( ) $\dfrac{3}{2}$.

Alternativa: A

Temos 0 e –1 como raízes, então:
$p(0) = 0 \therefore (c + 1)^5 = 0 \therefore c = -1$
$p(-1) = 0 \therefore (a + 2b + c + 1)^5 = 0 \therefore a + 2b + c = -1$

Soma dos coeficientes do polinômio: $p(1) = 32 \therefore (a - 2b + c + 1)^5 = 32$
$(a - 2b - 1 + 1)^5 = 32 \therefore a - 2b = \sqrt[5]{32}$, admitindo o valor real da raiz quinta de 32 temos: $a - 2b = 2$

Assim, obtemos o sistema:
$$\begin{cases} a - 2b = 2 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a = 1 \\ b = -1/2 \end{cases}$$

A soma dos valores reais de a, b e c é: $1 - \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$

---

12. O menor inteiro positivo n para o qual a diferença $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é
A. ( ) 2499. B. ( ) 2501. C. ( ) 2500.
D. ( ) 3600. E. ( ) 4900.

Alternativa: B

Temos:
$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < 0{,}01 \Rightarrow (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot \frac{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} < 0{,}01$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} < \frac{1}{100} \Rightarrow \sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 100$$

Mas, $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} < 2\sqrt{n} \Rightarrow 2\sqrt{n} > 100 \Rightarrow n > 2500 \Rightarrow \boxed{n = 2501}$

13. Seja $D = R \setminus \{1\}$ e $f : D \to D$ uma função dada por

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Considere as afirmações:
I. f é injetiva e sobrejetiva.
II. f é injetiva, mas não sobrejetiva.
III. $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$ para todo $x \in D, x \neq 0.$
IV. $f(x) \cdot f(-x) = 1,$ para todo $x \in D.$
Então, são verdadeiras
A. ( ) apenas I e III.
B. ( ) apenas I e IV.
C. ( ) apenas II e III.
D. ( ) apenas I, III e IV.
E. ( ) apenas II, III e IV.

Alternativa: A

I. (V)
II. (F)

$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Se $f(x_1) = f(x_2) \therefore \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow (x_1+1)\cdot(x_2-1) = (x_2+1)\cdot(x_1-1)$

$\Rightarrow x_1 \cdot x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1 \cdot x_2 - x_2 + x_1 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

Logo, f é injetora.

Seja $y \in R$. Se $y = f(x)$ $\therefore$ $y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow yx - y = x + 1$

$\Rightarrow (y-1)x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1}, \ \forall\, y \in D.$

Logo, f é sobrejetora.

III. (V) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{x+1}{x-1} + \frac{x+1}{1-x} = 0,$ para todo $x \in D, x \neq 0.$

IV. (F) $f(-x)$ não está definida para todo $x \in D$, pois para $x = -1$, temos $f(-x) = f(1)$

---

14. O número complexo $2 + i$ é raiz do polinômio

$$f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q,$$

com $p, q \in R$. Então, a alternativa que mais se aproxima da soma das raízes reais de f é
A. ( ) 4.
B. ( ) –4.
C. ( ) 6.
D. ( ) 5.
E. ( ) –5.

Alternativa: E

$f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q$, p e $q \in R$ tem como raiz $2 + i$, logo $2 - i$ também é raiz.

Do enunciado, temos que as outras duas raízes são reais.

Da relação de Girard: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a}$, temos:

$2 + i + 2 - i + x_3 + x_4 = -1 \therefore x_3 + x_4 = -5$

Observação: Podemos provar que as raízes x_3 e x_4 são reais.

Dividindo $x^4 + x^3 + px^2 + x + q$ por $x^2 - 4x + 5$ (cujas raízes são $2 \pm i$) obtemos:

Resto $(4p + 36)x + q - 5p - 75$ e Quociente $x^2 + 5x + (p + 15)$

O resto é idêntico a zero, logo $p = -9$ e $q = 30$.

O quociente $x^2 + 5x + 6$ contém as raízes $x_3 = -3$ e $x_4 = -2$, que são reais.

---

15. Considere a equação em x

$$a^{x+1} = b^{1/x},$$

onde a e b são números reais positivos, tais que $\ln b = 2\ln a > 0$. A soma das soluções da equação é

A. ( ) 0. B. ( ) –1. C. ( ) 1.
D. ( ) ln 2. E. ( ) 2.

Alternativa: B

$a^{x+1} = b^{1/x} \therefore \ln a^{x+1} = \ln b^{1/x} \therefore (x+1)\ln a = \dfrac{1}{x}\cdot \ln b$

$\Rightarrow (x+1)\ln a = \dfrac{1}{x}\cdot 2\ln a \therefore (x+1) = \dfrac{2}{x} \therefore x^2 + x - 2 = 0$

E a soma das soluções: $S = -\dfrac{b}{a} = -1$

---

16. O intervalo $I \subset$ R que contém todas as soluções da inequação

$$\arctan\frac{1+x}{2} + \arctan\frac{1-x}{2} \geq \frac{\pi}{6}$$

é

A. ( ) [–1, 4]. B. ( ) [–3, 1]. C. ( ) [–2, 3].
D. ( ) [0, 5]. E. ( ) [4, 6].

Alternativa: C

$\underbrace{\arctan\dfrac{1+x}{2}}_{\alpha} + \underbrace{\arctan\dfrac{1-x}{2}}_{\beta} \geq \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \dfrac{1+x}{2}$ e $\text{tg}\,\beta = \dfrac{1-x}{2}$

Assim, $\alpha + \beta \geq \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \text{tg}\,(\alpha+\beta) \geq \text{tg}\,\dfrac{\pi}{6}$

Portanto, $\dfrac{\dfrac{1+x}{2} + \dfrac{1-x}{2}}{1 - \left(\dfrac{1+x}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{1-x}{2}\right)} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \dfrac{4}{3+x^2} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow |x| \leq \sqrt{4\sqrt{3} - 3}$

Mas: $48 < 49 \Rightarrow 4\sqrt{3} < 7 \Rightarrow 4\sqrt{3} - 3 < 4 \Rightarrow \sqrt{4\sqrt{3} - 3} < 2 \Rightarrow |x| < 2$

Logo, o intervalo [–2; 3] contém todas as soluções.

---

17. Seja $z \in C$ com $|z| = 1$. Então, a expressão $\left|\dfrac{1 - \bar{z}\omega}{z - \omega}\right|$ assume valor

A. ( ) maior que 1, para todo ω com $|\omega| > 1$.
B. ( ) menor que 1, para todo ω com $|\omega| < 1$.
C. ( ) maior que 1, para todo ω com $\omega \neq z$.
D. ( ) igual a 1, independente de ω com $\omega \neq z$.
E. ( ) crescente para $|\omega|$ crescente, com $|\omega| < |z|$.

Alternativa: D

Como $|z| = 1$, temos que $z \cdot \bar{z} = 1$ e, assim, $\left|\dfrac{1 - \bar{z} \cdot \omega}{z - \omega}\right| = \dfrac{|z \cdot \bar{z} - \bar{z} \cdot \omega|}{|z - \omega|} = \dfrac{|\bar{z}| \cdot |z - \omega|}{|z - \omega|} = |\bar{z}|$, se $z \neq \omega$.

Como $|\bar{z}| = 1$, podemos afirmar que $\left|\dfrac{1 - \bar{z} \cdot \omega}{z - \omega}\right|$ é igual a 1, independente de ω, com $\omega \neq z$.

---

18. O sistema linear

$$\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$$

não admite solução se e somente se o número real b igual a

A. ( ) –1. B. ( ) 0. C. ( ) 1.
D. ( ) 2. E. ( ) –2.

Alternativa: A

Calculando o determinante do sistema: $\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$

Temos: $D = \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = b^3 + 1$, cuja raiz real é –1.

Substituindo $b = -1$ no sistema, obtemos: $\begin{cases} -x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$

Somando as 3 equações: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 3$, que é um absurdo.

Logo, para $b = -1$ o sistema não admite solução.

19. Retiram-se 3 bolas de uma urna que contém 4 bolas verdes, 5 bolas azuis e 7 bolas brancas. Se P_1 é a probabilidade de não sair bola azul e P_2 é a probabilidade de todas as bolas saírem com a mesma cor, então a alternativa que mais se aproxima de $P_1 + P_2$ é

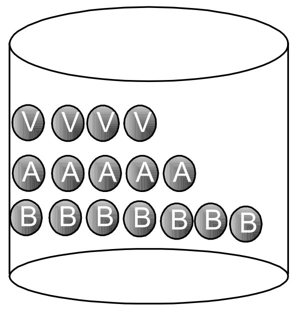
A. ( ) 0,21. B. ( ) 0,25. C. ( ) 0,28.
D. ( ) 0,35. E. ( ) 0,40.

Alternativa: E

Do enunciado temos:

i) Cálculo de P_1 (3 bolas dentre as 11 não azuis):

$$P_1 = \frac{C_{11}^3}{C_{16}^3} = \frac{165}{560} \cong 0,29$$



ii) Cálculo de P_2 (3 verdes ou 3 azuis ou 3 brancas):

$$P_2 = \frac{C_4^3}{C_{16}^3} + \frac{C_5^3}{C_{16}^3} + \frac{C_7^3}{C_{16}^3} \Rightarrow P_2 = \frac{4}{560} + \frac{10}{560} + \frac{35}{560} \cong 0,087$$

Portanto: $P_1 + P_2 \cong 0,38$

20. A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos (1, 0) e (0, –2) são, respectivamente,

A. ( ) $\sqrt{3}$ e $\frac{1}{2}$. B. ( ) $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$. C. ( ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$.
D. ( ) $\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$. E. ( ) $2\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Alternativa: E

Admitindo-se que os eixos desta elipse sejam paralelos aos eixos coordenados, temos do enunciado que $a = 2$ e $b = 1$. Assim: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2^2 = 1^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{3}$

Então a distância focal desta elipse é $2c = 2\sqrt{3}$ e sua excentricidade é $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Observação:
Existem infinitas outras elipses com centro na origem que passam pelos pontos (0; –2) e (1; 0), e cada uma delas tem suas respectivas distância focal e excentricidade. A banca examinadora não especificou a relação entre os eixos da elipse e os eixos coordenados.

21. Seja $a_1, a_2, \ldots$ uma progressão aritmética infinita tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2, \text{ para } n \in N^*.$$

Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

Resolução:

Calculando o somatório para:

n = 1 : $a_3 = \sqrt{2} + \pi$

n = 2 : $a_3 + a_6 = 2\sqrt{2} + \pi \cdot 2^2$

Então podemos escrever (r: razão da PA)

$a_3 = a_1 + 2r = \sqrt{2} + \pi$

$a_3 + a_6 = a_1 + 2r + a_1 + 5r = 2\sqrt{2} + 4\pi$

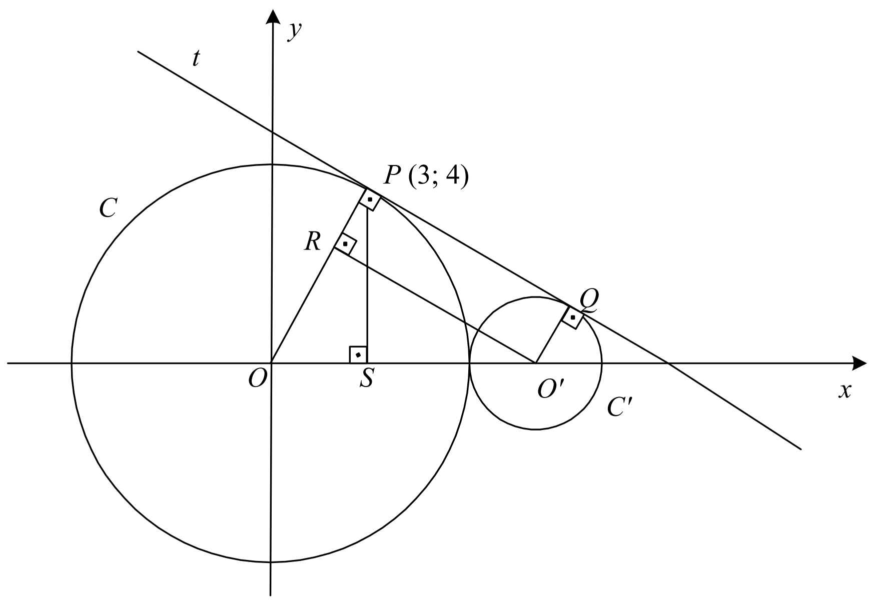
Portanto: $\begin{cases} a_1 + 2r = \sqrt{2} + \pi & \text{(i)} \\ 2a_1 + 7r = 2\sqrt{2} + 4\pi & \text{(ii)} \end{cases}$

Fazendo (ii) – 2·(i), temos: $3r = 2\pi \ \therefore \ \boxed{r = \dfrac{2\pi}{3} \text{ e } a_1 = \sqrt{2} - \dfrac{\pi}{3}}$

22. Seja C a circunferencia de centro na origem, passando pelo ponto $P = (3, 4)$. Se t é a reta tangente a C por P, determine a circunferencia C' de menor raio, com centro sobre o eixo x e tangente simultaneamente à reta t e à circunferencia C.

Resolução:

Temos a figura:



Da figura:

$\begin{cases} OP = 5 \\ O'Q = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OR = 5 - r \\ OO' = 5 + r \end{cases}$

$\Delta OPS \sim \Delta OO`R$:

$\dfrac{OS}{OP} = \dfrac{OR}{OO`} \ \Rightarrow \ \dfrac{3}{5} = \dfrac{5-r}{5+r} \ \Rightarrow \ 15 + 3r = 25 - 5r \ \Rightarrow \ 8r = 10 \ \Rightarrow \ r = \dfrac{5}{4}$

Logo: $O` = (5 + r,\ 0) = \left(\dfrac{25}{4},\ 0\right)$, e a equação de C' é: $\boxed{\left(x - \dfrac{25}{4}\right)^2 + y^2 = \dfrac{25}{16}}$

23. Sejam A e B matrizes 2×2 tais que $AB = BA$ e que satisfazem à equação matricial $A^2 + 2AB - B = 0$. Se B é inversível, mostre que
$(a) AB^{-1} = B^{-1}A$ e que (b) A é inversível.

Resolução:

(a) Multiplicando-se à direita e à esquerda $AB = BA$ por B^{-1}, vem: $B^{-1}(AB)B^{-1} = B^{-1}(BA)B^{-1}$

$\Rightarrow (B^{-1}A)(BB^{-1}) = (B^{-1}B)(AB^{-1}) \Rightarrow (B^{-1}A)I = I(AB^{-1}) \therefore AB^{-1} = B^{-1}A$

(b) Multiplicando-se à direita $A^2 + 2AB = B$ por B^{-1}, vem: $\Rightarrow A^2B^{-1} + 2ABB^{-1} = BB^{-1}$

$\Rightarrow AAB^{-1} + 2AI = I \Rightarrow A(AB^{-1} + 2I) = I \Rightarrow \det\left[A(AB^{-1} + 2I)\right] = \det I$

$\Rightarrow \det A \,.\, \det(AB^{-1} + 2I) = 1$

Assim, $\det A \neq 0$ e $\det(AB^{-1} + 2I) \neq 0$. Logo A é inversível.

---

24. Seja n o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de $n - 1$ ângulos (internos) do polígono é 2004°, determine o número n de lados do polígono.

Resolução:

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dada por: $S = (n - 2)\cdot 180º$

Chamando o ângulo desconhecido de α, temos: $2004º + \alpha = (n - 2)\cdot 180º$
Como $0 < \alpha < 180º$, temos: $2004º < 2004º + \alpha < 2184º$
$\Rightarrow 2004º < (n - 2)\cdot 180º < 2184º \Rightarrow 11{,}1 < (n - 2) < 12{,}1 \Rightarrow n - 2 = 12 \Rightarrow \boxed{n = 14}$

---

25. (a) Mostre que o número real $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.
(b) Conclua de (a) que α é um número racional.

Resolução:

(a) $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha^3 = \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3$

$\Rightarrow \alpha^3 = 2+\sqrt{5} + 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)^2 \cdot \left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) + 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^2 + 2 - \sqrt{5}$

$\Rightarrow \alpha^3 = 4 + 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)\left[\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right]$

$\Rightarrow \alpha^3 = 4 + 3\left(\sqrt[3]{4-5}\right)\alpha \Rightarrow \alpha^3 = 4 - 3\alpha \Rightarrow \alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0.$

Portanto α é raiz da equação dada.

(b) Fatorando:

$x^3 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x^3 - x + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) + 4(x - 1) = 0$
$(x - 1)(x^2 + x + 4) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x^2 + x + 4 = 0$ ($\Delta < 0$: não possui raízes reais)

Assim $x = \alpha = 1$, que é racional.

---

26. Considere a equação em $x \in R$.

$$\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx},$$

Sendo m um parâmetro real.
(a) Resolva a equação em função do parâmetro m.
(b) Determine todos os valores de m para os quais a equação admite solução não nula.

Resolução:

(a) $\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx} \therefore \sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx} = x$

$\therefore \left(\sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx}\right)^2 = x^2 \therefore 1 + mx - 2\sqrt{1-m^2x^2} + 1 - mx = x^2$

$2 - 2\sqrt{1-m^2x^2} = x^2 \therefore \left(2 - x^2\right)^2 = \left(2\sqrt{1-m^2x^2}\right)^2 \therefore 4 - 4x^2 + x^4 = 4(1 - m^2x^2)$

$4 - 4x^2 + x^4 = 4 - 4m^2x^2 \therefore x^4 + \left(4m^2 - 4\right)x^2 = 0$

As raízes são: $x_1 = x_2 = 0$ e $x_{3;4} = \pm\sqrt{4-4m^2} = \pm 2\sqrt{1-m^2}$

Condição de existência das raízes $1 - m^2 \geq 0 \therefore m^2 \leq 1 \therefore |m| \leq 1$

Verificação das raízes:

$x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \sqrt{1} = 0 + \sqrt{1} \therefore 1 = 1$ (V)

$x_{3;4} = \pm 2\sqrt{1-m^2} \Rightarrow \sqrt{1 \pm 2m\sqrt{1-m^2}} = \pm 2\sqrt{1-m^2} + \sqrt{1 \mp 2m\sqrt{1-m^2}} \therefore$

$\sqrt{\left(m \pm \sqrt{1-m^2}\right)^2} = \pm 2\sqrt{1-m^2} + \sqrt{\left(m \mp \sqrt{1-m^2}\right)^2} \therefore \left|m \pm \sqrt{1-m^2}\right| = \pm 2\sqrt{1-m^2} + \left|m \mp \sqrt{1-m^2}\right|$

Como $|m| \geq \left|\sqrt{1-m^2}\right|$, temos: $m \pm \sqrt{1-m^2} = \pm 2\sqrt{1-m^2} + m \mp \sqrt{1-m^2} \therefore$

$$m \pm \sqrt{1-m^2} = m \pm \sqrt{1-m^2} \text{ (V)}$$

Então, as raízes da equação são: $\boxed{x_1 = x_2 = 0 \text{ e } x_{3;4} = \pm\sqrt{4-4m^2} = \pm 2\sqrt{1-m^2}}$

(b) A condição para obtermos raízes não nulas seria

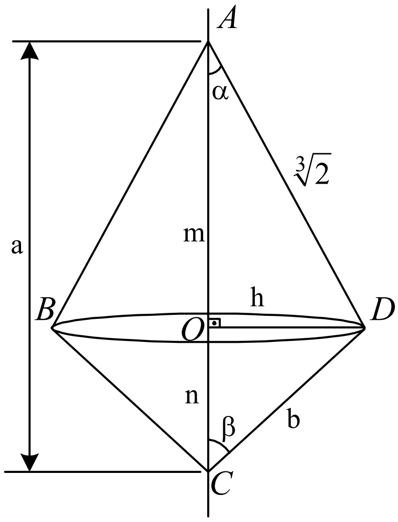
$|m| < 1$ e $|m| \geq \left|\sqrt{1-m^2}\right| \therefore m^2 \geq 1 - m^2 \therefore 2m^2 \geq 1 \therefore m^2 \geq \frac{1}{2} \therefore |m| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |m| < 1}$

---

27. Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa é π cm^3. Determine os ângulos deste triângulo.

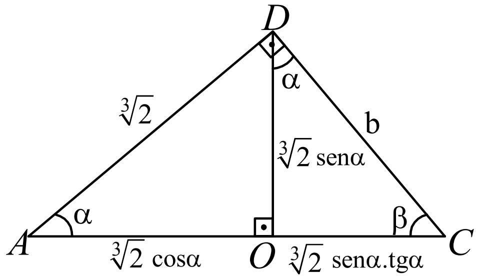
Resolução:

O triângulo ADC foi rotacionado em torno do eixo $\overleftrightarrow{AC}$:



No ΔADO temos: $\begin{cases} sen\alpha = \dfrac{DO}{AD} \therefore DO = \sqrt[3]{2} \cdot sen\alpha \\ \cos\alpha = \dfrac{AO}{AD} \therefore AO = \sqrt[3]{2} \cdot \cos\alpha \end{cases}$

No ΔCDO temos: $tg\alpha = \dfrac{OC}{DO} \therefore OC = \sqrt[3]{2} \cdot sen\alpha \cdot tg\alpha$



Sendo: $V = \pi\ \text{cm}^3$

Temos: $\frac{1}{3}.\pi h^2.m + \frac{1}{3}\pi h^2.n = \pi \Rightarrow \frac{1}{3}h^2(m+n) = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}.(\sqrt[3]{2}\text{sen}\alpha)^2(\sqrt[3]{2}\cos\alpha + \sqrt[3]{2}\text{sen}\alpha \cdot \text{tg}\alpha) = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}.\sqrt[3]{4}.\text{sen}^2\alpha.\sqrt[3]{2}(\cos\alpha + \text{sen}\alpha \cdot \text{tg}\alpha) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}.2.\text{sen}^2\alpha(\cos\alpha + \text{sen}\alpha \cdot \text{tg}\alpha) = 1 \Rightarrow (1-\cos^2\alpha)\left[\cos\alpha + \frac{(1-\cos^2\alpha)}{\cos\alpha}\right] = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow (1-\cos^2\alpha)\cdot(\cos^2\alpha + 1 - \cos^2\alpha) = \frac{3}{2}\cos\alpha \Rightarrow 1-\cos^2\alpha = \frac{3}{2}\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\alpha + 3\cos\alpha - 2 = 0$$

Logo: $\cos\alpha = \frac{-3\pm 5}{4}$. Portanto: $\begin{cases} \cos\alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \cos\alpha_2 = -2 \text{ (não convém)} \end{cases}$

Então α = 60º. $\boxed{\text{Os ângulos do triângulo são 30º, 60º e 90º.}}$

---

28. São dados dois cartões, sendo que um deles tem ambos os lados na cor vermelha, enquanto o outro tem um lado na cor vermelha e o outro lado na cor azul. Um dos cartões é escolhido ao acaso e colocado sobre uma mesa. Se a cor exposta é vermelha, calcule a probabilidade de o cartão escolhido ter a outra cor também vermelha.

Resolução:

Probabilidade de ter tirado o primeiro cartão (V/V) e a cor exposta ser vermelha: $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2} = \frac{1}{2}$

Probabilidade de ter tirado o segundo cartão (V/A) e a cor exposta ser vermelha: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Logo, sabendo que a cor exposta é vermelha, a probabilidade de ter tirado o primeiro cartão (V/V) é:

$$P = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{P = \frac{2}{3}}$$

---

29. Obtenha todos os pares (x, y), com $x, y \in [0, 2\pi]$, tais que

$$\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y) = \frac{1}{2}$$
$$\text{sen}x + \cos y = 1$$

Resolução:

$$\begin{cases} \text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y) = \frac{1}{2} & \text{(i)} \\ \text{sen}x + \cos y = 1 & \text{(ii)} \end{cases}$$

Desenvolvendo (i) : $2\text{sen}x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen}x = \frac{1}{4\cos y}$

Substituindo em (ii): $\frac{1}{4\cos y} + \cos y = 1 \Rightarrow 4\cos^2 y - 4\cos y + 1 = 0$

$\Rightarrow (2\cos y - 1)^2 = 0 \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow senx = \frac{1}{2}$

Como $x, y \in [0;\ 2\pi] \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{3} \text{ ou } y = \frac{5\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$

$$\boxed{S = \left\{\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right)\right\}}$$

30. Determine todos os valores reais de a para os quais a equação

$$(x-1)^2 = |x-a|$$

admita exatamente três soluções distintas.

Resolução:

$(x-1)^2 = |x-a|$

i) Para $x \geq a$ temos:

$x^2 - 2x + 1 = x - a \Rightarrow x^2 - 3x + (a+1) = 0$ (1)

$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(a+1)}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5 - 4a}}{2}$

ii) Para $x < a$ temos:

$x^2 - 2x + 1 = a - x \Rightarrow x^2 - x + (1-a) = 0$ (2)

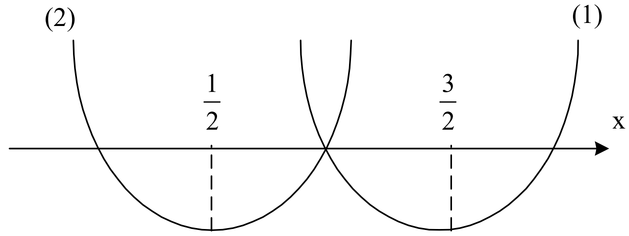
$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1-a)}}{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}$

Existem 3 casos para os quais temos exatamente 3 soluções:

Caso (a): $\Delta_1 = 0 \Rightarrow 5 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$

Caso (b): $\Delta_2 = 0 \Rightarrow 4a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

Caso (c):



A maior raiz da equação (2) deve ser igual à menor raiz da equação (1):

Portanto,

$$\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}=\frac{3-\sqrt{5-4a}}{2}\Rightarrow\left(\sqrt{5-4a}+\sqrt{4a-3}\right)^2=2^2\Rightarrow 5-4a+4a-3+2\sqrt{(5-4a)(4a-3)}=4$$

$$2+2\sqrt{(5-4a)(4a-3)}=4\;\Rightarrow\;\left(\sqrt{(5-4a)(4a-3)}\right)=1\;\Rightarrow\;(5-4a)(4a-3)=1$$

$$20a-15-16a^2+12a=1\;\Rightarrow\;16a^2-32a+16=0\;\Rightarrow\;a^2-2a+1=0\;\Rightarrow\;(a-1)^2=0\;\Rightarrow\;a=1$$

Portanto, os valores de a são: 1, $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{4}$.

Comentários

A prova de matemática do ITA de 2004 apresentou um grau de dificuldade inferior, se comparado aos dos anos anteriores.

As questões 8; 26 e 27 se destacaram pela manipulação algébrica, ao lado de questões que exigiam boa assimilação de conceitos matemáticos como 1; 12; 13; 15; 17; 19; 23; 28; 29 e 30.

Houve também questões tradicionais em vestibulares como 3; 5; 9; 11; 18; 22 e 25.

A questão 20 não menciona que os eixos da elipse são paralelos aos eixos coordenados.
De um modo geral, a prova selecionará os candidatos mais bem preparados.

Parabenizamos a banca examinadora pela clareza e coerência da sua prova.