

Para a fabricação de bicicletas, uma empresa comprou unidades do produto A, pagando R\$ 96,00, e unidades do produto B, pagando R\$ 84,00. Sabendo-se que o total de unidades compradas foi de 26 e que o preço unitário do produto A excede em R\$ 2,00 o preço unitário do produto B, determine o número de unidades de A que foi comprado.

Resolução

Sejam a e b as quantidades dos produtos A e B, respectivamente, e $(x + 2)$ e x , os preços, em reais, de cada unidade desses produtos.

Das condições propostas, tem-se:

$$\begin{cases} a \cdot (x + 2) = 96 \\ b \cdot x = 84 \\ a + b = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{96}{x + 2} & (I) \\ b = \frac{84}{x} & (II) \\ \frac{96}{x + 2} + \frac{84}{x} = 26 & (III) \end{cases}$$

Da equação (III), tem-se

$$\frac{96}{x + 2} + \frac{84}{x} = 26 \Leftrightarrow 48x + 42(x + 2) = 13x(x + 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 13x^2 - 64x - 84 = 0 \Leftrightarrow x = 6, \text{ pois } x > 0$$

Substituindo nas equações (I) e (II), conclui-se que $a = 12$ e $b = 14$. Foram adquiridos 12 produtos A, por R\$ 8,00 cada um e 14 produtos B, por R\$ 6,00 cada um.

Resposta: 12 unidades

2

Diz-se que a matriz quadrada A tem posto 1 se uma de suas linhas é não-nula e as outras são múltiplas dessa linha. Determine os valores de a , b e c para os quais a matriz 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 3a - b + 2c & 1 & 6 \\ b + c - 3a & \frac{1}{2} & c - 2a + b \end{bmatrix}$$

tem posto 1.

Resolução

Para que a matriz quadrada A tenha **posto 1**, devemos ter:

$$\begin{cases} \frac{3a - b + 2c}{2} = \frac{1}{2} = \frac{6}{3} \\ \frac{b + c - 3a}{2} = \frac{1}{2} = \frac{c - 2a + b}{3} \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b + 2c = 4 \\ -3a + b + c = 2 \\ -2a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ -3a + b + c = 2 \\ -2a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ -3a + b + c = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = 3 \\ a = 1 \end{cases}$$

Resposta: $a = 1$, $b = 3$ e $c = 2$

Uma seqüência de números reais a_1, a_2, a_3, \dots satisfaz à lei de formação

$$a_{n+1} = 6a_n, \text{ se } n \text{ é ímpar}$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n, \text{ se } n \text{ é par.}$$

Sabendo-se que $a_1 = \sqrt{2}$,

a) escreva os oito primeiros termos da seqüência.

b) determine a_{37} e a_{38} .

Resolução

1) Se (a_n) é uma seqüência tal que

$$a_{n+1} = \begin{cases} 6 a_n, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{3} a_n, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

então os termos de ordem ímpar formam uma progressão geométrica de razão 2 e os termos de ordem par formam outra progressão geométrica de razão 2, pois:

$$\left. \begin{aligned} n = 2m - 1 &\Rightarrow a_{2m} = 6a_{2m-1} \\ n = 2m &\Rightarrow a_{2m+1} = \frac{1}{3} a_{2m} \\ n = 2m + 1 &\Rightarrow a_{2m+2} = 6a_{2m+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{2m+2} = 2a_{2m} \\ a_{2m+1} = 2a_{2m-1} \end{cases}, \text{ com } m \in \mathbb{N}^*$$

2) Para $n = 1 \Rightarrow a_2 = 6a_1 \Rightarrow a_2 = 6\sqrt{2}$

3) A seqüência (a_n) é $(\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 12\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 24\sqrt{2}, 8\sqrt{2}, 48\sqrt{2}, \dots)$

4) a_{37} de (a_n) é o décimo nono termo de $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \dots)$, ou seja, $\sqrt{2} \cdot 2^{18} = 2^{\frac{37}{2}}$

5) a_{38} de (a_n) é o décimo nono termo de $(6\sqrt{2}, 12\sqrt{2}, 24\sqrt{2}, 48\sqrt{2}, \dots)$, ou seja, $6\sqrt{2} \cdot 2^{18} = 3 \cdot 2^{\frac{39}{2}}$

Respostas:

a) Os 8 primeiros termos de (a_n) são $\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 12\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 24\sqrt{2}, 8\sqrt{2}$ e $48\sqrt{2}$.

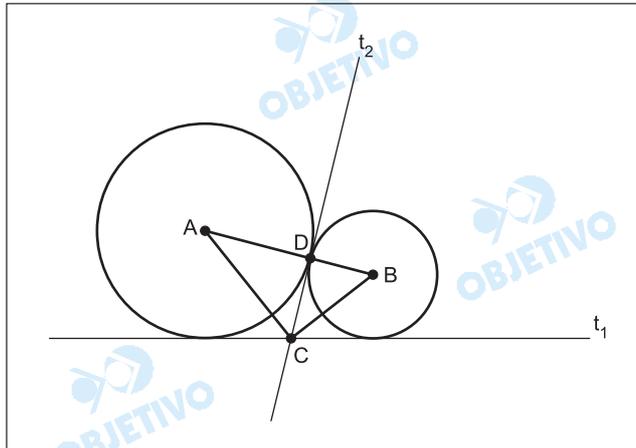
b) O termo de ordem 37 é $2^{\frac{37}{2}} = \sqrt{2^{37}}$.

O termo de ordem 38 é $3 \cdot 2^{\frac{39}{2}} = 3\sqrt{2^{39}}$.

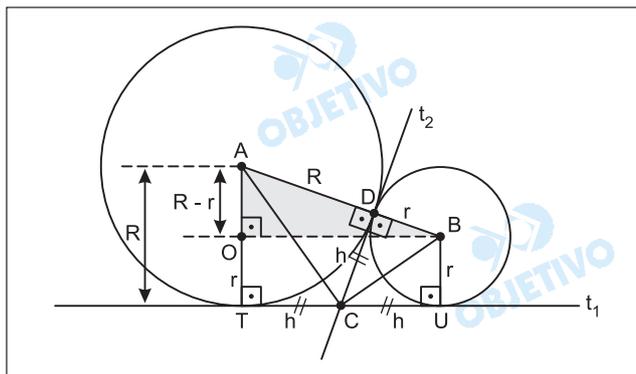
4

A figura representa duas circunferências de raios R e r com centros nos pontos A e B , respectivamente, tangenciando-se externamente no ponto D . Suponha que:

- As retas t_1 e t_2 são tangentes a ambas as circunferências e interceptam-se no ponto C .
- A reta t_2 é tangente às circunferências no ponto D .
Calcule a área do triângulo ABC , em função dos raios R e r .



Resolução



Seja $h = DC$ a altura relativa ao lado \overline{AB} do triângulo ABC .

No triângulo AOB , de acordo com o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$(AB)^2 = (AO)^2 + (OB)^2 \Leftrightarrow (R + r)^2 = (R - r)^2 + (2h)^2 \Leftrightarrow 4Rr = 4h^2 \Leftrightarrow h = \sqrt{Rr}$$

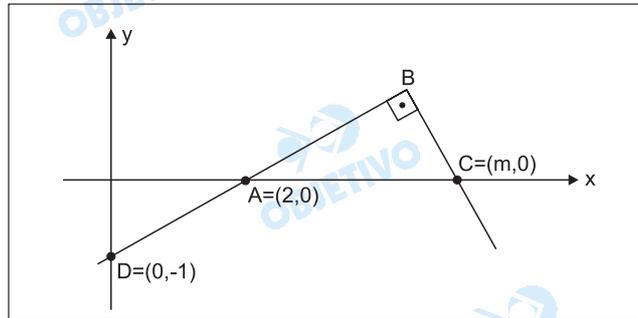
Assim, a área S do triângulo ABC é dada por:

$$S = \frac{AB \cdot h}{2} \Leftrightarrow S = \frac{(R + r) \sqrt{Rr}}{2}$$

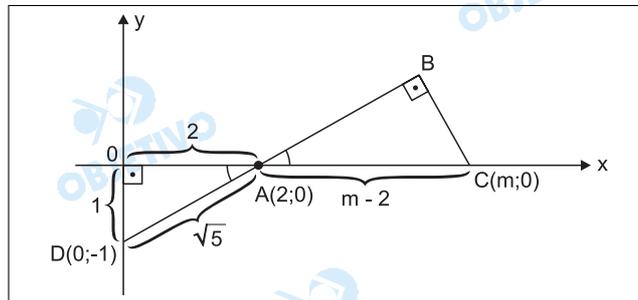
Resposta: $\frac{(R + r) \sqrt{Rr}}{2}$

5

Na figura abaixo A, B e D são colineares e o valor da abscissa m do ponto C é positivo. Sabendo-se que a área do triângulo retângulo ABC é $\frac{5}{2}$, determine o valor de m .



Resolução



Pela figura, temos $\triangle ABC \sim \triangle AOD$, então:

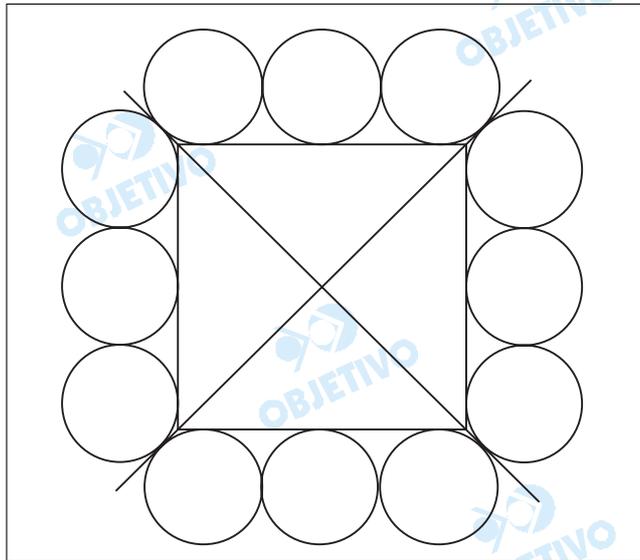
$$\frac{A_{\triangle ABC}}{A_{\triangle AOD}} = \left(\frac{AC}{AD} \right)^2$$

$$\frac{5/2}{1} = \left(\frac{m-2}{\sqrt{5}} \right)^2 \Leftrightarrow (m-2)^2 = \frac{25}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m-2 = \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = 2 + \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ (pois } m > 0)$$

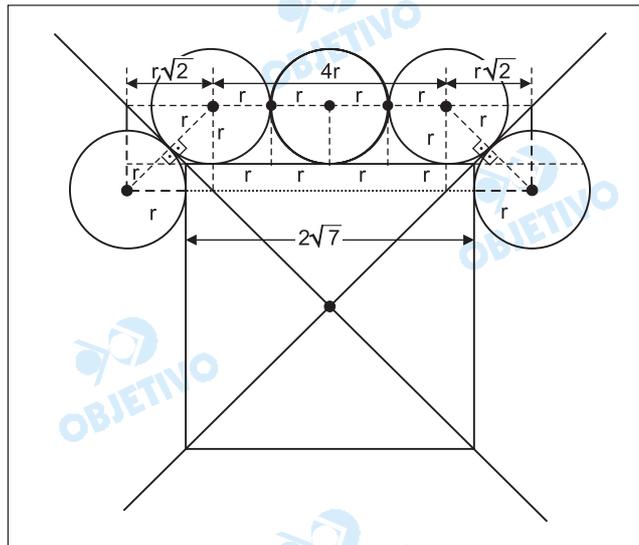
Resposta: $m = 2 + \frac{5\sqrt{2}}{2}$

6



Na figura acima, as 12 circunferências têm todas o mesmo raio r ; cada uma é tangente a duas outras e ao quadrado. Sabendo-se que cada uma das retas suporte das diagonais do quadrado tangencia quatro das circunferências (ver figura), e que o quadrado tem lado $2\sqrt{7}$, determine r .

Resolução



De acordo com a figura acima, pode-se afirmar que:
 $4r + 2r\sqrt{2} = 2r + 2\sqrt{7}$

Assim:

$$2r(\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2} + 1} \Leftrightarrow r = \sqrt{7}(\sqrt{2} - 1)$$

Resposta: $\sqrt{7}(\sqrt{2} - 1)$

7

Determine todos os valores de x pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfazem a equação

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2} - \sin^2 x.$$

Resolução

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2} - \sin^2 x \Leftrightarrow (1 - 2 \sin^2 x)^2 = \frac{1}{2} - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 8 \sin^4 x - 6 \sin^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin x = \pm \frac{1}{2}$$

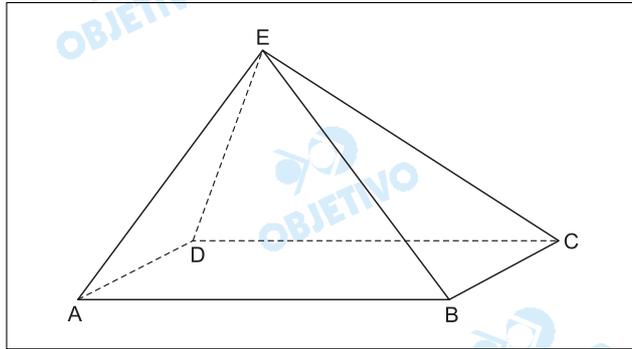
Os valores de x , $x \in [0; 2\pi]$ são:

$\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4, \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6$ e $11\pi/6$

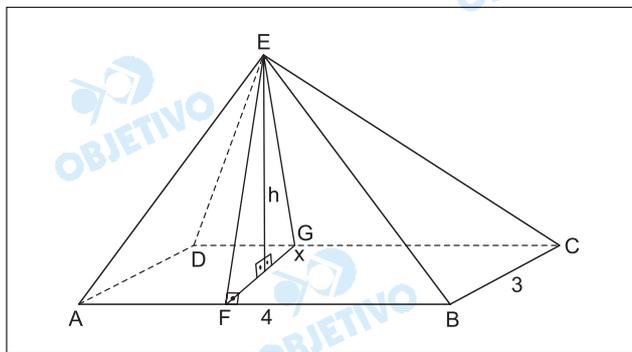
Resposta: $\pi/6, \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/6, 7\pi/6, 5\pi/4, 7\pi/4$ e $11\pi/6$

A base ABCD da pirâmide ABCDE é um retângulo de lados $AB = 4$ e $BC = 3$.

As áreas dos triângulos ABE e CDE são, respectivamente, $4\sqrt{10}$ e $2\sqrt{37}$. Calcule o volume da pirâmide.



Resolução



- 1) A área do triângulo $\triangle ABE$ é $4\sqrt{10}$ e assim a altura FE relativa ao lado AB desse triângulo é tal que:

$$\frac{4 \cdot FE}{2} = 4\sqrt{10} \Leftrightarrow FE = 2\sqrt{10}$$

- 2) A área do triângulo $\triangle CDE$ é $2\sqrt{37}$ e assim a altura GE relativa ao lado DC desse triângulo é tal que:

$$\frac{4 \cdot GE}{2} = 2\sqrt{37} \Leftrightarrow GE = \sqrt{37}$$

- 3) Sendo h a altura da pirâmide e também do triângulo $\triangle EFG$, em relação ao lado FG e x a projeção ortogonal de GE sobre FG , tem-se:

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = 37 \\ h^2 + (3 - x)^2 = 40 \end{cases}$$

Assim: $x = 1$ e, portanto: $h^2 + 1^2 = 37 \Leftrightarrow h = 6$

- 4) O volume V da pirâmide é dado por um terço do produto da área do retângulo $ABCD$ pela altura h .

$$\text{Assim: } V = \frac{1}{3} \cdot (4 \cdot 3) \cdot 6 \Leftrightarrow V = 24$$

Resposta: 24 unidades de volume

9

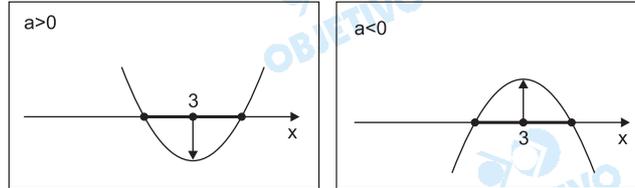
Seja $f(x) = ax^2 + (1 - a)x + 1$, onde a é um número real diferente de zero.

Determine os valores de a para os quais as raízes da equação $f(x) = 0$ são reais e o número $x = 3$ pertence ao intervalo fechado compreendido entre as raízes.

Resolução

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$f(x) = ax^2 + (1 - a)x + 1$, com $a \neq 0$, deve ter raízes reais, e o número **3** deve pertencer ao intervalo fechado compreendido entre as raízes.



Assim sendo:

$$a \cdot f(3) \leq 0 \text{ e } a \neq 0 \Rightarrow$$

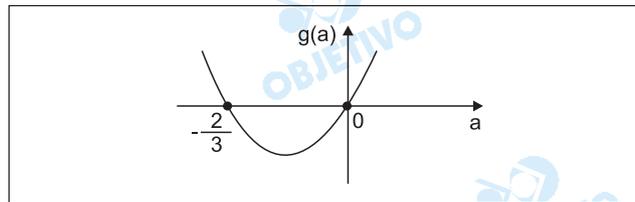
$$\Rightarrow a \cdot [a \cdot 3^2 + (1 - a) \cdot 3 + 1] \leq 0 \text{ e } a \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(9a + 3 - 3a + 1) \leq 0 \text{ e } a \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(6a + 4) \leq 0 \text{ e } a \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(3a + 2) \leq 0 \text{ e } a \neq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq a < 0,$$

pois o gráfico de $g(a) = a(3a + 2)$ é do tipo



Resposta: $-\frac{2}{3} \leq a < 0$

Uma pessoa dispõe de um dado honesto, que é lançado sucessivamente quatro vezes. Determine a probabilidade de que nenhum dos números sorteados nos dois primeiros lançamentos coincida com algum dos números sorteados nos dois últimos lançamentos.

Resolução

Supondo que o dado honesto tenha seis faces e os seis números dessas faces sejam diferentes, temos:

- 1) A probabilidade de se obter dois números iguais no

lançamento de 2 dados é $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ e a de se

obter dois números diferentes é $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

- 2) Se os dois primeiros números forem iguais, a probabilidade de os dois últimos números serem

diferentes dos dois primeiros é $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

- 3) Se os dois primeiros números forem diferentes, a probabilidade de os dois últimos números serem

diferentes dos dois primeiros é $\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36}$.

- 4) A probabilidade pedida é, portanto,

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{25}{36} + \frac{5}{6} \cdot \frac{16}{36} = \frac{25 + 80}{216} = \frac{105}{216} = \frac{35}{72}$$

Resposta: $\frac{35}{72}$

Comentário

Com cinco questões de álgebra, três de geometria, uma de trigonometria e uma de geometria analítica, a banca examinadora elaborou uma excelente prova de Matemática, na qual podemos destacar a clareza e a precisão dos enunciados, o equilíbrio quanto ao grau de dificuldade dos exercícios e a originalidade de algumas questões, tais como as de geometria e a de probabilidade.

