

Função Exponencial

INTRODUÇÃO

Conta uma lenda que um rei havia prometido realizar qualquer desejo a quem executasse uma difícil tarefa. Quando um dos seus súditos conseguiu realizá-la, o rei viu-se obrigado a cumprir a sua promessa. O súdito pediu então que as 64 casas de um tabuleiro de xadrez, jogo muito apreciado no reino, fossem preenchidas com grãos de trigo, do seguinte modo: na primeira casa, seria colocado um grão de trigo e, em cada casa seguinte, seria colocado o dobro de grãos que havia na casa anterior. O rei suspirou aliviado, considerando o pedido fácil de ser atendido e ordenou que providenciassem o pagamento. Tal foi sua surpresa quando os seus conselheiros, alguns dias depois, anunciaram que o reino encontrava-se totalmente sem provisões de trigo, uma vez que apenas na última casa o total de grãos era de 2^{63} , o que corresponde a, aproximadamente, $9\,223\,300\,000\,000\,000\,000 = 9,2233 \cdot 10^{18}$. Essa quantidade, juntamente com a soma das quantidades colocadas nas outras casas, superava em muito não só a capacidade do reino, mas a de todos os outros de que se tinha notícia.

Essa lenda nos dá um exemplo de uma função exponencial, a função $y = 2^x$. As funções exponenciais crescem ou decrescem muito rapidamente, sendo extremamente importantes para descrever diversos fenômenos, tais como crescimento populacional, reprodução de bactérias, decaimento radioativo, juros compostos, entre outros. Seu estudo desenvolveu-se notadamente por volta do século XVI, com o trabalho de dois matemáticos: John Napier (1550-1617) e Henry Briggs (1561-1630).

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Considere uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Tal função é denominada **função exponencial**.

Exemplos:

1º) $f(x) = 3^x$

3º) $f(x) = 0,78^x$

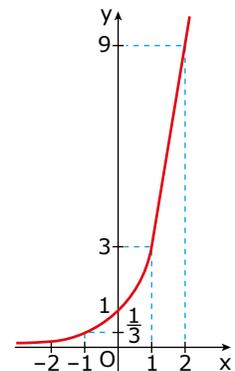
2º) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

4º) $f(x) = 2,23^x$

GRÁFICOS

Considere a função $y = 3^x$. Vamos atribuir alguns valores à variável, calcular a imagem correspondente e construir o gráfico. Assim, temos:

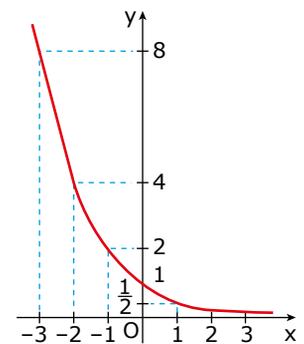
x	$y = 3^x$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27



Do mesmo modo, vamos obter o gráfico da função:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

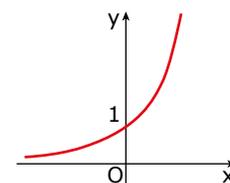


De modo geral, há dois tipos de gráfico para a função $f(x) = a^x$:

- i) Se $a > 1$, então a função $f(x) = a^x$ é **crenascente**.

Exemplo:

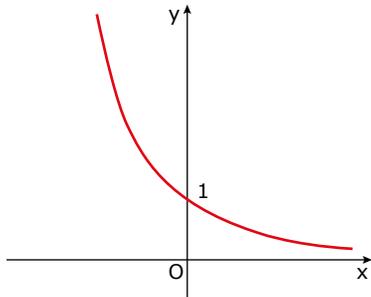
$$f(x) = 2^x$$



ii) Se $0 < a < 1$, então a função $f(x) = a^x$ é **decrecente**.

Exemplo:

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$



Com relação aos gráficos, podemos dizer que:

- i) Trata-se de uma função injetora, pois, a cada valor da imagem, corresponde um único valor do domínio.
- ii) O domínio de uma função exponencial é sempre igual ao conjunto dos números reais ($D = \mathbb{R}$).
- iii) A curva está toda acima do eixo das abscissas, pois $y = a^x$ é sempre maior que zero para todo x real. Portanto, a sua imagem Im é dada por $Im = \mathbb{R}_+^*$.
- iv) A curva corta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$. Isso ocorre porque, para $x = 0$, temos $y = a^0 = 1$.

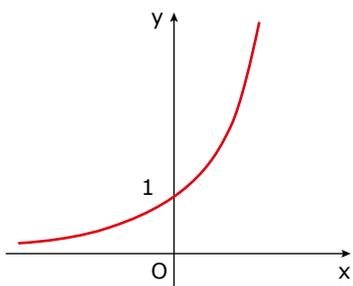
OBSERVAÇÃO

O número "e"

Trata-se de um número irracional, cujo valor é 2,71828... . Esse número é conhecido como número neperiano, uma referência ao matemático escocês John Napier (1550-1617), autor da primeira publicação sobre a Teoria dos Logaritmos.

O número **e** é extremamente importante no estudo de juros e de diversos fenômenos naturais, tais como crescimento populacional, decaimento radioativo, crescimento de bactérias, entre outros.

O gráfico da função $y = e^x$ é dado por:



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Determinar os valores de **k** para os quais a função $f(x) = \left(2 + \frac{3k}{5}\right)^x$ é crescente.

Resolução:

Para que a função seja crescente, é necessário que $2 + \frac{3k}{5} > 1$.

Portanto, temos:

$$2 + \frac{3k}{5} > 1 \Rightarrow \frac{3k}{5} > -1 \Rightarrow 3k > -5 \Rightarrow k > -\frac{5}{3}$$

02. (PUC-SP) Sobre a função $f(x) = e^x$ definida em \mathbb{R} , podemos afirmar que:

- A) tem um único zero no intervalo $[0, 2]$.
- B) $e^x < a^x$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}_+^*$.
- C) $e^x > a^x$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}_+^*$.
- D) assume valores de \mathbb{R} em \mathbb{R}_+^* .
- E) assume valores apenas em \mathbb{R}_+^* .

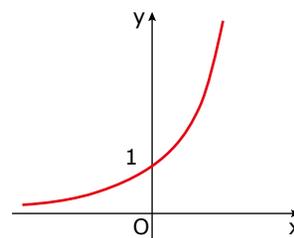
Resolução:

A função $f(x) = e^x$ não possui raízes, pois $e^x > 0$ para todo x real. Portanto, a alternativa A é falsa.

Para $0 < a < 1$, temos que $e^x > a^x$. Portanto, a alternativa B é falsa.

Para $a > e$, temos que $e^x < a^x$. Portanto, a alternativa C é falsa.

A função $f(x) = e^x$ possui o seguinte gráfico:



Observe que se trata de uma função com domínio \mathbb{R} e imagem \mathbb{R}_+^* . Portanto, a alternativa D é verdadeira. Conforme visto no item anterior, o domínio não se restringe ao conjunto \mathbb{R}_+^* . Portanto, a alternativa E é falsa.

08. (UEL-PR) O crescimento de uma colônia de bactérias é descrito por $P(t) = \alpha \cdot 4^{2t}$, em que $t \geq 0$ é o tempo, dado em horas, e $P(t)$ é a população de bactérias no instante t . Se, após 4 horas, a população inicial da colônia triplicou, após 8 horas o número de bactérias da colônia será:

- A) 6α
- B) 8α
- C) 9α
- D) $8\alpha - 4$
- E) $\alpha + 8$

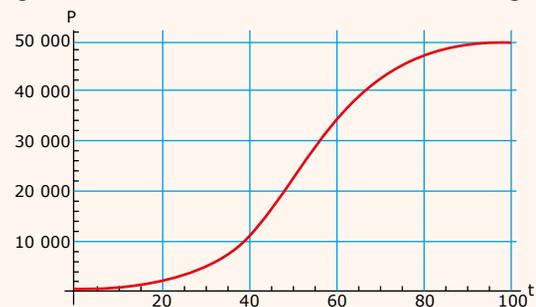
03. (UFPR) A análise de uma aplicação financeira ao longo do tempo mostrou que a expressão $V(t) = 1\,000 \cdot 2^{0,0625t}$ fornece uma boa aproximação do valor V (em reais) em função do tempo t (em anos), desde o início da aplicação. Depois de quantos anos o valor inicialmente investido dobrará?

- A) 8
- B) 12
- C) 16
- D) 24
- E) 32

04. (UEL-PR-2019) Os vírus dependem de uma célula hospedeira susceptível para se multiplicarem. Seja $e > 2$ uma constante real. Suponha que $P : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ represente a quantidade de partículas virais no interior de uma célula hospedeira no instante $t \geq 0$, de forma que

$$P(t) = \frac{5 \cdot 10^4}{1 + 200e^{-\frac{t}{10}}}$$

O gráfico de P no intervalo $0 \leq t \leq 100$ é dado a seguir.



Com base no texto, na equação e no gráfico, atribua (V) verdadeiro ou (F) falso às afirmativas a seguir.

- () De acordo com a função, o número de partículas virais nunca atinge $5 \cdot 10^4$.
- () No instante inicial $t = 0$, existem 25 partículas virais dentro da célula.
- () P é uma função decrescente.
- () O número de partículas virais atinge 10 000 unidades antes do instante $t = 60$.
- () A função $P : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetora.

Assinale a alternativa que contém, de cima para baixo, a sequência correta.

- A) V, V, F, V, F.
- B) V, F, F, V, F.
- C) V, F, F, V, V.
- D) F, V, V, F, F.
- E) F, F, V, F, V.

05. (UECE-2019) Se $f : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$ é a função real de variável real definida por $f(x) = e^{19x}$, pode-se afirmar corretamente que a imagem ou conjunto de valores de f é o conjunto de todos os números

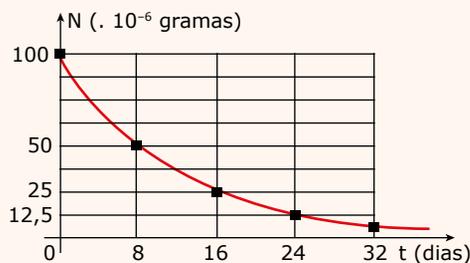
- A) reais.
- B) reais maiores do que zero e menores do que um.
- C) reais menores do que um.
- D) reais positivos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS



01. (PUC RS-2018) Em hospitais de grande porte das principais cidades do país são realizados tratamentos que utilizam radioisótopos emissores de radiações alfa, beta e gama.

O iodo 131, por exemplo, é um radioisótopo utilizado no tratamento de hipertireoidismo. O gráfico a seguir representa a massa residual de iodo 131 (N) presente em uma amostra em função do tempo (t).



A função que melhor descreve a massa residual de iodo 131 presente na amostra, em função do tempo, é $N(t) = N_0 e^{kt}$, onde

- A) $N_0 > 0$ e $k > 0$
- B) $N_0 < 0$ e $k > 0$
- C) $N_0 > 0$ e $k < 0$
- D) $N_0 < 0$ e $k < 0$

02. (UEL-PR) A mitose é uma divisão celular, na qual uma célula duplica o seu conteúdo, dividindo-se em duas, ditas células-filhas. Cada uma destas células-filhas se divide, dando origem a outras duas, totalizando quatro células-filhas e, assim, o processo continua se repetindo sucessivamente.

Assinale a alternativa que corresponde, corretamente, à função que representa o processo da mitose.

- A) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por $f(x) = x^2$
- B) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por $f(x) = 2^x$
- C) $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, dada por $f(x) = 2^x$
- D) $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = 2^x$
- E) $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = 2x$

06. (EsPCEx-SP) Na pesquisa e desenvolvimento de uma nova linha de defensivos agrícolas, constatou-se que a ação do produto sobre a população de insetos em uma lavoura pode ser descrita pela expressão $N(t) = N_0 \cdot 2^{kt}$, sendo N_0 a população no início do tratamento, $N(t)$ a população após t dias de tratamento e k uma constante que descreve a eficácia do produto. Dados de campo mostraram que, após dez dias de aplicação, a população havia sido reduzida à quarta parte da população inicial. Com estes dados, podemos afirmar que o valor da constante de eficácia deste produto é igual a:

- A) 5^{-1} C) 10 E) -10^{-1}
 B) -5^{-1} D) 10^{-1}

07. (Unemat-MT-2018) Certa substância se desintegra obedecendo à seguinte expressão: $Q(t) = k \cdot 2^{-0,5t}$, em que t é o tempo (em horas), k é uma constante real e $Q(t)$ é a quantidade da substância (em gramas), no tempo t .

Considerando que no instante inicial, $t = 0$, a de substância é de 800 g, assinale a alternativa que corresponde ao tempo necessário para que a quantidade dessa substância esteja reduzida a 25% do seu valor inicial.

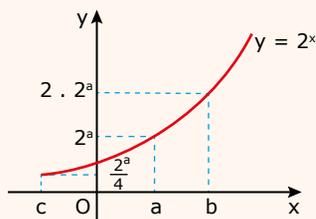
- A) 2 h C) 6 h E) 10 h
 B) 4 h D) 8 h

08. (ULBRA-RS) Em um experimento de laboratório, 400 indivíduos de uma espécie animal foram submetidos a testes de radiação, para verificar o tempo de sobrevivência da espécie. Verificou-se que o modelo matemático que determinava o número de indivíduos sobreviventes, em função do tempo era $N(t) = C \cdot A^t$, com o tempo t dado em dias e A e C dependiam do tipo de radiação. Três dias após o início do experimento, havia 50 indivíduos.

Quantos indivíduos vivos existiam no quarto dia após o início do experimento?

- A) 40 C) 25 E) 10
 B) 30 D) 20

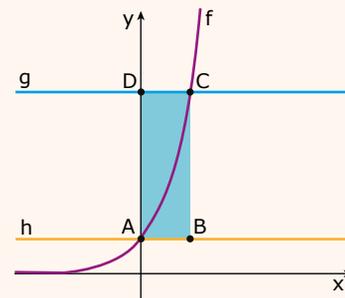
09. (UFRN) No plano cartesiano a seguir, estão representados o gráfico da função $y = 2^x$, os números a , b , c e suas imagens.



Observando-se a figura, pode-se concluir que, em função de a , os valores de b e c são, respectivamente:

- A) $\frac{a}{2}$ e $4a$ C) $2a$ e $\frac{a}{4}$
 B) $a - 1$ e $a + 2$ D) $a + 1$ e $a - 2$

10. (UERJ-2017) Observe o plano cartesiano a seguir, no qual estão representados os gráficos das funções definidas por $f(x) = 2^{x+1}$, $g(x) = 8$ e $h(x) = k$, sendo $x \in \mathbb{R}$ e k uma constante real.



No retângulo ABCD, destacado no plano, os vértices **A** e **C** são as interseções dos gráficos $f \cap h$ e $f \cap g$, respectivamente. Determine a área desse retângulo.

11. (UEPA) Os dados estatísticos sobre violência no trânsito nos mostram que é a segunda maior causa de mortes no Brasil, sendo que 98% dos acidentes de trânsito são causados por erro ou negligência humana e a principal falha cometida pelos brasileiros nas ruas e estradas é usar o celular ao volante. Considere que em 2012 foram registradas 60 000 mortes decorrentes de acidentes de trânsito e destes, 40% das vítimas estavam em motos.

VEJA, 19 ago. 2013 (Adaptação).

A função $N(t) = N_0 \cdot (1,2)^t$ fornece o número de vítimas que estavam de moto a partir de 2012, sendo t o número de anos e N_0 o número de vítimas que estavam em moto em 2012. Nessas condições, o número previsto de vítimas em moto para 2015 será de

- A) 41 472. C) 62 208. E) 103 680.
 B) 51 840. D) 82 944.

12. (Unifor-CE) Num período prolongado de seca, a variação da quantidade de água de certo reservatório é dada por $q(t) = q_0 \cdot 2^{-0,2t}$, q_0 quantidade inicial de água no reservatório e $q(t)$ a quantidade de água no reservatório após t meses.

A quantidade de meses que a água do reservatório se reduzirá a 25% do que era no início é de

- A) 4. C) 8. E) 12.
 B) 6. D) 10.

13. (ESPM-SP) Um novo aparelho eletrônico foi lançado no mercado em janeiro de 2014, quando foram vendidas cerca de 3 milhões de unidades. A partir de então, esse número teve um crescimento exponencial, dado pela expressão $v = n \cdot k^t$, onde n e k são constantes reais e t é o número de meses após o lançamento (jan = 0, fev = 1, etc.). Se, em fevereiro desse ano foram vendidos 4,5 milhões de aparelhos, podemos concluir que, no mês seguinte, esse número passou para

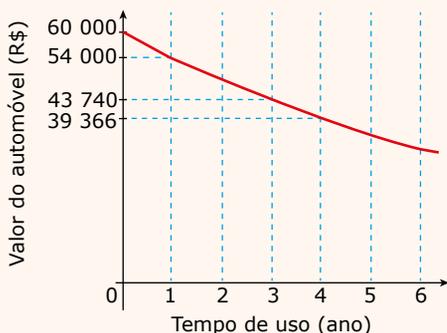
- A) 5,63 milhões. D) 8,67 milhões.
 B) 10,13 milhões. E) 6,75 milhões.
 C) 4,96 milhões.

14. (UFTM-MG) A população **P** de um país no ano **t** pode ser estimada através da função $P(t) = m \cdot n^{t-2011}$, para $n \neq 0$. Sabendo-se que a população atual desse país é de 15,3 milhões de habitantes, e que sua taxa anual de crescimento é de 2%, então, $\frac{m}{n}$ é igual a:

- A) $1,2 \cdot 10^6$
- B) $1,5 \cdot 10^6$
- C) $1,2 \cdot 10^7$
- D) $1,5 \cdot 10^7$
- E) $1,2 \cdot 10^8$

SEÇÃO ENEM

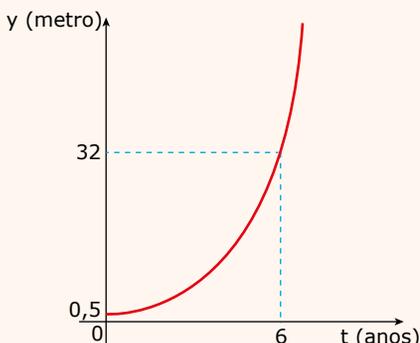
01. (Enem-2017) Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b \cdot a^t$, com **t** em ano. Essa função está representada no gráfico.



Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

- A) 48 000,00
- B) 48 114,00
- C) 48 600,00
- D) 48 870,00
- E) 49 683,00

02. (Enem) Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual **y** representa a altura da planta em metro, **t** é considerado em ano, e **a** é uma constante maior do que 1. O gráfico representa a função **y**.



Admita ainda que $y(0)$ forneça a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio.

O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a:

- A) 3
- B) 4
- C) 6
- D) $\log_2 7$
- E) $\log_2 15$

03. (Enem) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R\$ 1 800,00 propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (**s**), em função do tempo de serviço (**t**), em anos, é $s(t) = 1 800 \cdot (1,03)^t$.

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de tempo de serviço será, em reais,

- A) 7 416,00.
- B) 3 819,24.
- C) 3 709,62.
- D) 3 708,00.
- E) 1 909,62.

04. Sob certas condições, o número **N** de bactérias de uma cultura, em função do tempo **t**, medido em horas, é dado por $N(t) = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{12}}$. Isso significa que, após 6 dias, o número inicial de bactérias terá sido multiplicado por:

- A) $\sqrt{2}$
- B) 2
- C) 16
- D) 1 024
- E) 4 096

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP



GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei _____ Errei _____

- 01. E
- 02. B
- 03. A
- 04. B
- 05. C
- 06. B
- 07. C
- 08. C

Propostos

Acertei _____ Errei _____

- 01. C
- 02. C
- 03. C
- 04. B
- 05. D
- 06. B
- 07. B
- 08. C
- 09. D
- 10. 12 u.a.
- 11. A
- 12. D
- 13. E
- 14. D

Seção Enem

Acertei _____ Errei _____

- 01. C
- 02. B
- 03. E
- 04. E



Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %