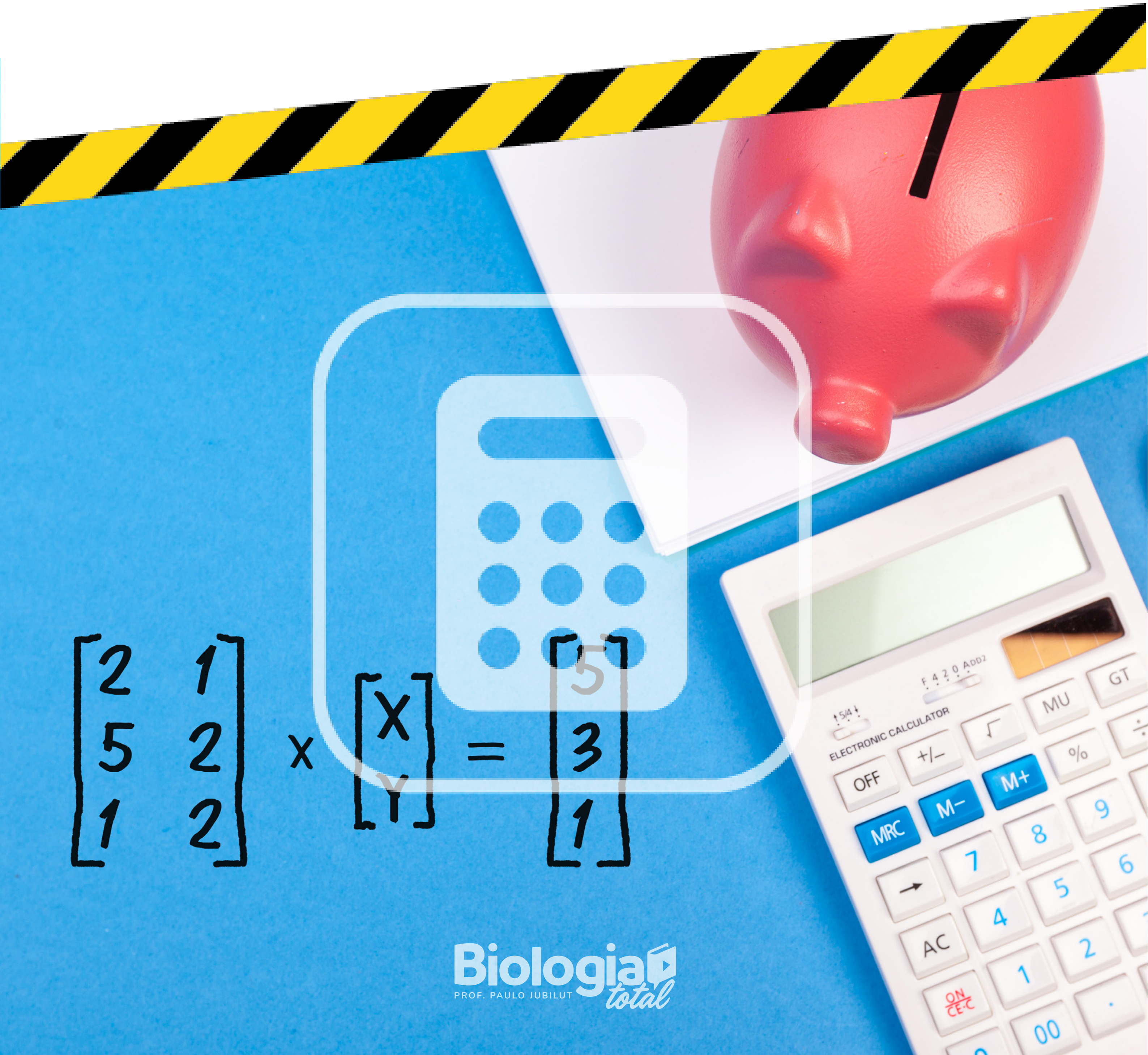
GUIA DE SOBREVIVÊNCIA

Matrizes



GUIA DE SOBREVIVÊNCIA

Matriz

Matriz nada mais é que uma tabela de números dispostos em linhas e colunas. Como em todas as áreas da matemática, em matrizes também temos uma notação própria, afim de padronizar e facilitar a comunicação. Eis as notações usadas para representar uma matriz:

A notação 3x2 simboliza o número de linhas e colunas da matriz. Esta é a ordem da matriz.

$$A_{3x2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

Representação entre chaves

Usamos uma letra maiúscula para nomear a matriz.

$$B_{2x2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Representação entre parênteses

Matriz cujos elementos estão representados de forma genérica.

$$C_{2x3} \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{Vmatrix}$$

Representação por barras duplas

Elementos da Matriz

Os elementos da matriz são representados da seguinte forma:

Usamos a mesma letra que dá nome a matriz, porém minúscula, para representar seus elementos.

Este elemento pertence a matriz A e está posicionado na linha i e coluna j.

$$a_{ij}$$

De forma subscrita escrevemos o número que representa a linha que este elementos ocupa na matriz, seguido do número que representa a coluna.

Lei de formação da matriz

A matriz pode apresentada através de uma lei de formação. Neste caso será apresentada através de uma equação, em que um elemento genérico a_{ij} acompanhado da ordem da matriz será igualado a uma lei de formação, conforme o exemplo abaixo:

$$(a_{ij})_{2x3}=\begin{cases} 3i-2j, se\ i<j \\ 5j, se\ i \geq j \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \quad i \geq j \quad\ i<j \quad\ i<j \\ \to A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \\ \quad i \geq j \quad\ i \geq j \quad\ i<j \end{array}$$

$$\to A = \begin{bmatrix} 5j & 3i-2j & 3i-2j \\ 5j & 5j & 3i-2j \end{bmatrix}$$

$$\to A = \begin{bmatrix} 5.1 & 3.1-2.2 & 3.1-2.3 \\ 5.1 & 5.2 & 3.2-2.3 \end{bmatrix}$$

$$\to A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 5 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

Tipos de Matrizes

Matriz Quadrada:

Número de linhas = número de colunas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Retangular:

Número de linhas ≠ número de colunas

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz Linha:

Número de linhas = 1

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz Coluna:

Número de colunas = 1

$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Diagonal:

Matriz quadrada em que $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriz Identidade:

Matriz quadrada em que $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ se $i = j$

$$I_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Nula:

Matriz em que $a_{ij} = 0$ para todo i e j

$$O_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular:

Matriz quadrada em que $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$ ou $i < j$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Triangular inferior

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Triangular superior

Matriz Transposta

A transposta de uma matriz é representada por A^t e indica a matriz que é obtida trocando ordenadamente as linhas e colunas de A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz Simétrica

Uma matriz é simétrica quando **A = A^t**

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \neq A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

A **não** é simétrica.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 7 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} = B^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 7 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

B é simétrica.

Matriz Antissimétrica

Uma matriz é antissimétrica quando **A = – A^t**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A é antissimétrica.

Igualdade entre matrizes

Duas matrizes são iguais se possuirem a mesma ordem e os seus termos, ordenadamente, forem iguais.

Exemplos:

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A = B$

2. $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}$

Soma e Subtração de Matrizes

A soma ou subtração de matrizes só pode ser calculada em matrizes que possuem a mesma ordem.

Para somar ou subtrair matrizes, deve-se fazer a operação para cada termo a_{ij} com seu correspondente b_{ij}.

Exemplos:

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 5+3 \\ 0+5 & -1+6 \\ 7-2 & 3-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6-1 & 5-2 & -1+3 \\ 0-5 & 4-3 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicação por escalar

Para multiplicar uma matriz por um número real devemos multiplicar este número por cada termo aij da matriz.

Exemplo:

$$3.\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3.(-1) & 3.2 & 3.5 \\ 3.0 & 3.1 & 3.3 \\ 3.1 & 3.(-2) & 3.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 15 \\ 0 & 3 & 9 \\ 3 & -6 & 21 \end{pmatrix}$$

Propriedades

As operações estudadas nesta aula obedecem as seguintes propriedades:

P_1) A + B = B + A **(Comutativa)**

P_2) A + (B + C) = (A + B) + C **(Associativa)**

P_3) A·(B + C) = A·B + A·C **(Distributiva)**

P_4) $A_{mxn} + 0_{mxn} = A_{mxn}$ **(Elemento Nulo)**

P_5) $(A + B)^t = A^t + B^t$ **(Transposta)**

Multiplicação de Matrizes

Multiplicam-se ordenadamente as linhas da primeira matriz pelas colunas da segunda matriz.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cdot r + b\cdot t & a\cdot s + b\cdot u \\ c\cdot r + d\cdot t & c\cdot s + d\cdot u \end{bmatrix}$$

Potências de Matrizes

Potência de uma matriz nada mais é que multiplicar a matriz por ela mesma, de acordo com a potência da matriz.

Exemplos:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -16 & -25 \\ 75 & 34 \end{pmatrix}$$

Determinantes

Ordem 1:

O determinante de uma matriz, formada apenas por uma linha e uma coluna, é o valor do seu único elemento. Exemplos:

$$|3| = 3$$

Um determinante é indicado por um par de barras verticais.

$$|7| = 7$$

$$|-2| = -2$$

$$|0| = 0$$

Ordem 2:

O determinante de uma matriz, quadrada de ordem dois, é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

Ordem 3 – Regra de Sarrus:

Repetem-se as duas primeiras linhas ou as duas primeiras colunas ao lado da matriz e efetuam-se os produtos paralelos à diagonal principal menos os produtos paralelos à diagonal secundária.

$$det\ A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 0 \end{matrix} \quad - \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

$$det\ A = (7 + 4 + 0) - \big(14 + 0 + (-5)\big)$$

$$det\ A = 7 + 4 - 14 + 5 = 2$$

Ordem 3 – Regra da Borboleta:

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$det = 2 + 2 - 30 + 0 - 9$$

$$det = -35$$

Determinante da matriz triangular

O determinante de uma matriz triangular será sempre o produtos dos elementos da diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 17 & 4 & 0 \\ -5 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 2.4.5 = 40$$

Teorema de Laplace

Usado para determinantes de qualquer ordem, especialmente utilizado em matrizes 4x4. É dado pelo somatório de cada termo a_{ij} de uma linha escolhida, multiplicado pelo seu cofator e pela matriz que sobra excluindo a linha e a coluna de cada termo.

$$\sum \underbrace{a_{ij}}_{\text{termo}} \cdot \underbrace{\overbrace{D_{ij}}^{\text{Menor complementar}} \cdot \overbrace{(-1)^{i+j}}^{\text{Fator de correção}}}_{\text{Cofator}}$$

Dica: Escolha a linha que houver mais zeros!

Menor Complementar: É o determinante que sobra excluindo a linha e a coluna do elemento.

Cofator: Menor complementar multiplicado pelo fator de correção $(-1)^{i+j}$

Teorema de Chió

Consiste em montar uma matriz com ordem menor do que a matriz de interesse, porém com o mesmo determinante da matriz dada. Para ser aplicado, a matriz precisa ter pelo menos um elemento que vale 1. Para:

1. Escolhemos um elemento $a_{ij} = 1$ e excluímos a linha e a coluna deste elemento.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Matrizes

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 7 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

2. Subtraímos cada termo restante do produto ortogonal dos elementos que foram excluídos.

$$A = \begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{0} \\ \cancel{3} & -1 & 2 & 3 \\ \cancel{5} & 1 & 7 & -3 \\ \cancel{0} & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = \begin{bmatrix} -1-(3\cdot 2) & 2-(3\cdot 3) & 3-(3\cdot 0) \\ 1-(5\cdot 2) & 7-(5\cdot 3) & -3-(5\cdot 0) \\ 3-(0\cdot 2) & 1-(0\cdot 3) & -5-(0\cdot 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-6 & 2-9 & 3-0 \\ 1-10 & 7-15 & -3-0 \\ 3-0 & 1-0 & -5-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -7 & 3 \\ -9 & -8 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

3. Calculamos o determinante e multiplica-se pelo fator de correção $(-1)^{i+j}$, sendo que i e j refere-se a linha e a coluna do elemento escolhido no primeiro passo.

$$\Rightarrow \text{Det A} = \text{Det A}' = \begin{vmatrix} -7 & -7 & 3 \\ -9 & -8 & -3 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 176\,.\,(-1)^2 = 176$$

Matriz de Vandermonde

Dada uma matriz em que os elementos da primeira linha ou coluna são números reais elevados a 0 e, ainda, as próximas linhas ou colunas são esses números reais elevados a 1, 2, 3 e assim sucessivamente, temos uma Matriz de Vandermonde ou matriz de potências. Esse tipo de matriz tem a segunda linha ou coluna como base, pois são nelas em que se encontram os números elevados ao expoente 1, resultando em seus próprios valores. O determinante dessa matriz é calculado usando apenas a linha ou coluna base e, para isso, deve-se multiplicar todas as diferenças entre os elementos dessa linha ou coluna.

Observação: As subtrações não podem ocorrer entre os elementos localizados em linhas ou colunas inferiores a elementos localizados em linhas ou colunas superiores.

Exemplo:

$$\begin{array}{r} \\ \text{Linha base} \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 25 & 9 \end{vmatrix} \begin{array}{l} x^0 \\ x = (5-2).(3-2).(3-5) \\ x^2 \end{array}$$

$$= 3.1.(-2) = -6$$

Matriz Inversa

Método 01:

A matriz A^{-1} é a matriz inversa da matriz A se ao multiplicarmos as duas matrizes encontramos a matriz Identidade. Ou seja:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Exemplo:

No exemplo abaixo a segunda matriz é a inversa da primeira, pois o resultado da multiplicação de ambas resulta na matriz identidade:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Método 02:

$$A^{-1} = \frac{\bar{A}}{|A|}$$

$\bar{A}$ é a matriz adjunta, que é a transposta da matriz dos cofatores.

|A| é o determinante da matriz A

1. Calculamos a matriz dos cofatores, isto é, para cada elemento de linha i e coluna j da matriz A, deve-se eliminar todos os elementos de sua respectiva linha e coluna e, após isso, fazer o determinante dos elementos que sobraram da matriz A. Por fim, multiplicar o determinante pelo fator de correção $(-1)^{i+j}$, em que i e j representam a linha e a coluna de cada elemento.

2. Fazemos a transposta dessa matriz.

3. Dividimos tudo pelo determinante da matriz original.

Propriedades dos Determinantes

Determinante NULO:

O determinante de uma matriz é zero, se acontecer uma das propriedades abaixo.

1. Uma fila completa de zeros.

$$\begin{vmatrix} 17 & 0 & 1 \\ 32 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

2. Duas filas iguais.

$$\begin{vmatrix} 31 & 7 & 31 \\ -25 & 13 & -25 \\ 12 & 45 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

3. Duas filas proporcionais.

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{2}{c}{\overset{x3}{\curvearrowright}} & \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 5 & 15 & -1 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Uma fila que seja combinação linear de outras duas.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Linha 1 + Linha 2 = Linha 3.

Demais Propriedades:

1. Dada uma matriz A, ao multiplicar uma linha ou coluna por um número k, então o determinante dessa nova matriz é $k.detA$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A' = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 6 & 4 & -4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$detA' = 2 \times detA$$

2. Dada uma matriz A, ao multiplicar a matriz inteira por um número k, então o determinante dessa nova matriz é $k^n.detA$, sendo n a ordem da matriz.

3. O determinante de uma matriz A é o mesmo da sua transposta, $detA = detA^t$.

4. Dada uma matriz A, caso alterne uma linha ou coluna com outra, o seu determinante vira o oposto da original.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A' = -\det A$$

5. O determinante do produto de duas matrizes A e B é o produto dos determinantes das matrizes separadamente, ou seja, $det(AB)=det(A)\times det(B)$.

ANOTAÇÕES

contato@biologiatotal.com.br
/biologiajubilut
Biologia Total com Prof. Jubilut
@paulojubilut
@Prof_jubilut
biologiajubilut
+biologiatotalbrjubilut