PROVA DE MATEMÁTICA

01) (ITA-90) Dadas as funções $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$, $X \in \Re - \{0\}$

$g(x) = x \operatorname{sen} x$, $x \in IR$, podemos afirmar que:
a) ambas são pares. b) f é par e g é ímpar.
c) f é ímpar e g é par. d) f não é par e nem ímpar e g é par.
e) ambas são ímpares.

Resolução
Para todo x real e $x \neq 0$, temos que:

$$f(-x) = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}} = \frac{e^x+1}{e^x-1} = -\frac{1+e^x}{1-e^x} = -f(x)$$

Para todo x real, temos que:
$g(-x) = (-x) \cdot sen(-x) = (-x)(-senx) = xsenx = g(x)$
Portanto, a função f é ímpar e a função g é par.

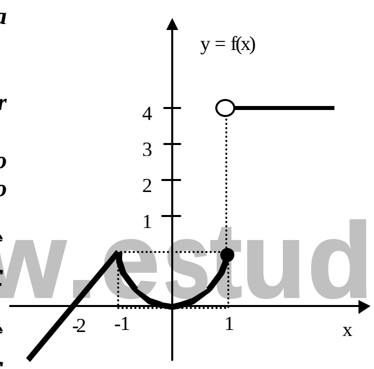
02) (ITA-90) Seja $f: \Re \to \Re$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{se } x \le -1 \\ x^2, \text{se } -1 < x \le 1 \\ 4, \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Lembrando que se $A \subset \Re$ então $f^{-1}(A) = \{x \in \Re : f(x) \in A\}$ considere as afirmações:
I- f não é injetora e $f^{-1}([3,5]) = \{4\}$
II- f não é sobrejetora e $f^{-1}([3,5]) = f^{-1}([2,6])$
III- f é injetora e $f^{-1}([0,4]) = [-2, +\infty[$

Então podemos garantir que:
a) Apenas as afirmações II e III são falsas;
b) As afirmações I e III são verdadeiras;
c) Apenas a afirmação II é verdadeira;
d) Apenas a afirmação III é verdadeira;
e) Todas as afirmações são falsas.

Resolução
Pelo esboço do gráfico da função f, conclui-se que:



f não é injetora, pois, por exemplo, $f(-1) = f(1) = 1$.
f não é sobrejetora, pois o conjunto imagem de f não é R.
$f^{-1}([3,5]) = \{x \in R: f(x) \in [3,5]\} = \{x \in R: 3 \le f(x) \le 5\} = \{x \in R \mid x > 1\}$
$f^{-1}([2,6]) = \{x \in R: f(x) \in [2,6]\} = \{x \in R: 2 \le f(x) \le 6\} = \{x \in R \mid x > 1\}$
Portanto, f não é sobrejetora e $f^{-1}([3,5]) = f^{-1}([2,6])$

03) (ITA-90) Seja a função $f: \Re - \{2\} \to \Re - \{3\}$ definida por $f(x) = \frac{2x-3}{x-2} + 1$. Sobre sua inversa podemos garantir que:
a) não está definida pois f é não injetora.
b) não está definida pois f não é sobrejetora.
c) está definida por $f^{-1}(y) = \frac{y-2}{y-3}$, $y \neq 3$.
d) está definida por $f^{-1}(y) = \frac{y+5}{y-3} - 1$, $y \neq 3$.
e) está definida por $f^{-1}(y) = \frac{2y-5}{y-3}$, $y \neq 3$.

Resolução
Sendo f(x) = y, segue que $y = \frac{2x-3}{x-2} + 1$
$y(x-2) = 2x-3+x-2$
$xy - 2y = 3x - 5$
$xy - 3x = 2y - 5$
$x(y-3) = 2y - 5$
Como $y \neq 3$, tem-se que $x = \frac{2y-5}{y-3}$.
Sendo f uma bijeção e f^{-1} a sua inversa, tem-se que $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.
Portanto, $f^{-1}(y) = $ $\frac{2y-5}{y-3}$, $y \neq 3$.

04)(ITA-90) Considere as equações $z^3 = i$ e $z^2 + (2+i)z + 2i = 0$, onde z é complexo. Seja S_1 o conjunto das raízes da primeira equação e S_2 o da segunda. Então
a) $S_1 \cap S_2$ é vazio;
b) $S_1 \cap S_2 \subset R$;
c) S_1 possui apenas dois elementos distintos;
d) $S_1 \cap S_2$ é unitário;
e) $S_1 \cap S_2$ possui dois elementos.

Resolução
Da equação $z^2 + (2+i)z + 2i = 0$, pelas relações de Girard, vem:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -(2+i) \\ z_1 \bullet z_2 = 2i \end{cases}$$

Assim: $S_2 = \{-2, -i\}$

Sendo $(-2)^3 \neq i$, concluímos que $-2 \notin S_1$
Sendo $(-i)^3 = i$, concluímos que $-i \in S_1$
Daí, $S_1 \cap S_2 = \{-i\}$
Logo, $S_1 \cap S_2$ é um conjunto unitário.

05) (ITA-90) A igualdade $1 + |z| = |1+z|$, onde $z \in C$, é satisfeita:
a) Para todo $z \in C$ tal que $Rez = 0$ e $Imz < 0$;
b) Para todo $z \in C$ tal que $Rez \ge 0$ e $Imz = 0$;
c) Para todo $z \in C$ tal que $|z| = 1$;

d) Para todo $z \in C$ tal que $\text{Im}z = 0$;
e) Para todo $z \in C$ tal que $|z| < 1$.

Resolução
Sendo $z = x + yi$, $\{x,y\} \in R$ e $i^2 = -1$, vem:
$1 + |x + yi| = |(x + 1) + yi|$

$$\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2$$

$$\cancel{1}+2\sqrt{x^2+y^2}+\cancel{x^2}+\cancel{y^2} = \cancel{x^2}+2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = x$$

Donde:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+y^2 = x^2 \therefore y^2 = 0 \therefore y = 0 \end{cases}$$

Assim: $\text{Re}(z) \geq 0$ e $\text{Im}(z) = 0$ para todo $z \in C$.

Nota : C denota o conjunto dos números complexos, Rez a parte real de z e Imz a parte imaginária de z.

06) (ITA-90) Seja $p(x) = 16x^5 - 78x^4 + \ldots + \alpha x - 5$ um polinômio de coeficientes reais tal que a equação $p(x) = 0$ admite mais do que uma raiz real e ainda, $a + bi$ é uma raiz complexa desta equação com $ab \neq 0$. Sabendo-se que $\frac{1}{a}$ é a razão da progressão geométrica formada pelas raízes reais de $p(x) = 0$ e que a soma destas raízes reais vale $\frac{7}{8}$ enquanto que o produto é $\frac{1}{6}$, o valor de α é:

a) 32 b) 56 c) 71 d) 11 e) 0

Resolução
A partir do enunciado e pelo teorema das raízes complexas, podemos afirmar que p(x) admite somente 3 raízes reais, x_1, x_2 e x_3 e as raízes imaginárias $x_4 = a + bi$ e $x_5 = a - bi$, com $\{a,b\} \in R$.
De Girard, temos as relações:
1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 78/16$
2) $x_1 . x_2 . x_3 . x_4 . x_5 = 5/16$
3) $x_1 . x_2 . x_3 (x_4 + x_5) + x_4 . x_5 (x_1 . x_2 + x_1 . x_3 + x_2 . x_3) = \alpha/16$
Como $x_1 + x_2 + x_3 = 7/8$, segue-se de (1): $x_4 + x_5 = 2a$ e $a = 2$
Como $x_1 . x_2 . x_3 = 1/64$, segue-se de (2): $x_4 . x_5 = 20$
Sendo $(x_1 . x_2 . x_3)$PG de razão $1/a$ e $x_1 . x_2 . x_3 = 1/64$, temos:
$x_2^3 = 1/64$; $x_2 = 1/4$, $x_1 = ax^2 = 1/2$ e $x_3 = x_2/a = 1/8$
Substituindo em (3), temos: $\alpha = 71$

07) (ITA-90) O conjunto das soluções reais da equação $|\ln(\text{sen}^2x)| = \ln(\text{sen}^2x)$ é dado por:

a) $\{x \in \Re : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$

b) $\{x \in \Re : x = \pi + k\frac{\pi}{2}, k \in Z\}$

c) $\{x \in \Re : x = 2k\pi, k \in Z\}$

d) $\{x \in \Re : -1 \leq x \leq 1\}$

e) $\{x \in \Re : x \geq 0\}$

Resolução
Lembrando que, para todo a real, $|a| = a \Leftrightarrow a \geq 0$, temos que:
$|\ell n(\text{sen}^2x)| = \ell n(\text{sen}^2x) \Leftrightarrow \ell n(\text{sen}^2x) \geq 0$
$\ell n(\text{sen}^2x) \geq 0 \Leftrightarrow \text{sen}^2x \geq 1$
Como não existe x real de modo que $\text{sen}^2x > 1$, devemos ter $\text{sen}^2x = 1$.
$\text{sen}^2x = 1 \Leftrightarrow \text{sen}x = \pm 1$
$\text{sen}x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pi/2 + k\pi, k \in Z$
Portanto, o conjunto das soluções reais da equação proposta é $\{x \in R: x = \pi/2 + k\pi, k \in Z\}$

08) (ITA-90) Sabendo-se que $3x - 1$ é fator de $12x^3 - 19x^2 + 8x - 1$ então as soluções reais da equação $12(3^{3x}) - 19(3^{2x}) + 8(3^x) - 1 = 0$ somam:

a) $-\log_3 12$ b) 1 c) $-\frac{1}{3}\log_3 12$ d) -1 e) $\log_3 7$

Resolução
Efetuando a divisão de $12t^3 - 19t^2 + 8t - 1$ por $3t - 1$, conclui-se que:
$12t^3 - 19t^2 + 8t - 1 = (3t - 1)(12t^2 - 15t + 3)$
Consideremos a equação $12(3^{3x}) - 19(3^{2x}) + 8(3^x) - 1 = 0$.
Fazendo $(3^x) = t$, vem: $12t^3 - 19t^2 + 8t - 1 = 0$
ou ainda, $(3t - 1)(12t^2 - 15t + 3) = 0$
Devemos ter $3t - 1 = 0$ ou $12t^2 - 15t + 3 = 0$
Logo, $t = 1/3$ ou $t = 1$ ou $t = 1/4$
$3^x = 1/3 \Leftrightarrow x = \log_3 1/3 \therefore 3^x = 1 \Leftrightarrow x = \log_3 1 \therefore 3^x = 1/4 \Leftrightarrow x = \log_3 1/4$
A soma das raízes é, portanto
$\log_3 1/3 + \log_3 1 + \log_3 1/4 = \log_3 (1/3 . 1 . 1/4) = \log_3 1/12 = -\log_3 12$

09) (ITA-90) Numa progressão geométrica de três termos a razão é e^{-2a}, a soma dos termos é 7 enquanto que a diferença do último termo com o primeiro é 3. Nestas condições o valor de a é:

a) $\ln\sqrt{2}$ b) $-\ln\frac{5}{2}$ c) $\ln\sqrt{3}$ d) $-\ln\sqrt{2}$

e) não existe número real a nestas condições

Resolução
Supondo que a diferença do último com o primeiro seja o último menos o primeiro, temos:

$$\begin{cases} x.e^{2a} + x + \dfrac{x}{e^{2a}} = 7 \\ \dfrac{x}{e^{2a}} - x.e^{2a} = 3 \end{cases}$$

Dividindo membro a membro:

$$\frac{\cancel{x}.(e^{2a}+1+\frac{1}{e^{2a}})}{\cancel{x}.(\frac{1}{e^{2a}}-e^{2a})} = \frac{7}{3} \therefore 3e^{2a}+3+\frac{3}{e^{2a}} = \frac{7}{e^{2a}} - 7e^{2a} \therefore$$

$$\therefore 10e^{2a} + 3 - \frac{4}{e^{2a}} = 0$$

Fazendo $e^{2a} = y$, vem:
$10y + 3 - 4/y = 0 \therefore 10y^2 + 3y - 4 = 0$
$y = -4/5$ (não convém) ou $y = 1/2 \therefore e^{2a} = 2^{-1} \therefore e^a = (\sqrt{2})^{-1}$

a* = *ln $(\sqrt{2})^{-1}$ **∴ *a* = - *ln*** $\sqrt{2}$

10) (ITA-90) Sejam as funções f e g dadas por:

f: $\Re \to \Re$, f(x) = $\begin{cases} 1 \text{ se } |x|<1 \\ 0 \text{ se } |x| \geq 1 \end{cases}$

g: $\Re$ - {1}→ $\Re$, g(x) = $\frac{2x-3}{x-1}$

Sobre a composta (fog)(x) = f(g(x)) podemos garantir que:

a) se x ≥ $\frac{3}{2}$, f(g(x)) = 0 b) se 1 < x < $\frac{3}{2}$, f(g(x)) = 1

c) se $\frac{4}{3}$ < x < 2 , f(g(x)) = 1 d) se 1 < x ≤ $\frac{4}{3}$, f(g(x)) = 1

e) n.d.a

Resolução

f(g(x)) = $\begin{cases} 1, \text{se} |g(x)| < 1 \\ 0, \text{se} |g(x)| \geq 1 \end{cases}$

Estudemos a condição |g (x)| < 1, isto é, $\left|\frac{2x-3}{x-1}\right| < 1$

$\left|\frac{2x-3}{x-1}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|2x-3|}{|x-1|} < 1$

$\frac{|2x-3|}{|x-1|} < 1 \Leftrightarrow$ ***|2x - 3| < |x - 1| e x ≠ 1***

|2x - 3| < |x - 1| ⇔ ***|2x - 3| - |x - 1| < 0***

1 4/3 3/2 2

-	-	+	***2x - 3***
-	+	+	***x - 1***
-2x+3-(-x+1)<0 ***-x<2*** ***x>2***	***-2x+3-(x-1)<0*** ***-3x<-4*** ***x>4/3***	***(2x-3)-(x-1)<0*** ***x<2***	

Portanto, |g(x)| < 1 ⇔ 4/3 < x < 2
Logo, se 4/3 < x < 2, então f(g(x)) = 1

11) (ITA-90) Sejam os números reais α e x onde 0 < α < $\frac{\pi}{2}$ e x ≠ 0. Se no desenvolvimento de $((\cos\alpha)x + (\text{sen}\,\alpha)\frac{1}{x})^8$ o termo independente de x vale $\frac{35}{8}$, então o valor de α é:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{12}$ d) $\frac{\pi}{4}$ e) n.d.a.

Resolução
O termo geral fica:
T = $\binom{8}{p}$.(cosα)$^{8-p}$.x^{8-p}.(senα)^{p}.x^{-p}
= $\binom{8}{p}$.(cosα)$^{8-p}$. (sen α)^{p}.x^{8-2p}
O termo independente: {8 - 2p = 0 ∴ p = 4
Assim: T = $\binom{8}{4}$.cos^{4}α.sen^{4}α = 70.cos^{4}α.sen^{4}α
Igualando: 70.cos^{4}α.sen^{4}α = 35/8 ∴ 16sen^{4}α.cos^{4}α = 1
∴ (2senα.cosα)^4 = 1 ∴ sen^{4}2α = 1 ∴ sen2α = ± 1 ∴ 2α = π/2 + hπ, h ∈ Z ∴ α = π/4 + hπ/2, h ∈ Z.
Para 0 < α < π/2, temos: α = π/4.

12) (ITA-90) Sejam a e b constantes reais positivas. Considere x = a^2 tg t + 1 e y^2 = b^2 sec^{2}t - b^2 onde 0≤ t < $\frac{\pi}{2}$. Então uma relação entre x e y é dada por:

a) $y = \frac{b}{a}(x-1)^2, x \geq a$ b) $y = \frac{b^2}{a^4}(x-1)^2, x \geq 1$

c) $y = \frac{b}{a^2}(x-1), \forall x \in \Re$ d) $y = \frac{-b}{a^2}(x-1), x \geq 1$

e) $y = \frac{a^2}{b^2}(x-1), x \leq 1$

Resolução
Do enunciado:
x = a^{2}tgt + 1
a > 0
0 ≤ t < π/2
assim x ≥ 1
Ainda temos:

x = a^{2}tgt + 1 ∴ tgt = $\frac{x-1}{a^2}$

y^2 = b^2 (sec^{2}t - 1) = b^2 . tg^{2}t ∴ tgt = ± y/b

Igualando: $\pm\frac{y}{b} = \frac{x-1}{a^2} \therefore y = \pm\frac{b}{a^2}(x-1)$

Assim, uma relação entre x e y é dada por:

$y = \pm\frac{b}{a^2}(x-1)$ ***e x ≥ 1.***

13) (ITA-90) Sabendo-se que θ é um ângulo tal que 2 sen(θ - 60^o) = cos (θ + 60^o), então tg θ é um número da forma a + b$\sqrt{3}$ onde

a) a e b são reais negativos; b) a e b são inteiros;
c) a + b = 1; d) a e b são pares;
e) a^2 + b^2 = 1.

Resolução
2(senθ.cos60º - sen60º.cosθ) = cosθ.cos60º - senθ. sen60º
1/2 $\sqrt{3}$/2 1/2 $\sqrt{3}$/2

$\text{sen}\,\theta - \sqrt{3}\cos\theta = \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\,\theta \quad (.2)$

$2\,\text{sen}\,\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta = \cos\theta - \sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta$

$(2+\sqrt{3}).\,\text{sen}\,\theta = (2\sqrt{3}+1)\cos\theta \therefore \text{tg}\theta = \frac{2\sqrt{3}+1}{2+\sqrt{3}}.\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} =$

$= \frac{4\sqrt{3}-6+2-\sqrt{3}}{4-3} = -4+3\sqrt{3}$

Então: a = -4 e b = 3
Assim, a e b são inteiros.

14) (ITA-90) Considere a matriz A = $\begin{bmatrix} \text{sen}x & 2 \\ \log_3 10 & 2\text{sen}x \end{bmatrix}$ onde x é real. Então podemos afirmar que:

a) A é inversível apenas para x > 0;
b) A é inversível apenas para x = 0;
c) A é inversível para qualquer x;
d) A é inversível apenas para x da forma (2k + 1)π, k inteiro;
e) A é inversível apenas para x da forma 2kπ, k inteiro.

Resolução
$\det A = 2\,\text{sen}^2 x - 2\log_3 10$
$\det A = 2(\text{sen}^2 x - \log_3 10)$
Como $0 \leq \text{sen}^2 x \leq 1$ e $\log_3 10 > 2$, tem-se $\text{sen}^2 x - \log_3 10 < 0$
Portanto, $\det A < 0$, $\forall x \in R$
Como $\det A \neq 0$ para qualquer x, segue-se que A é inversível para qualquer x.

---

15) (ITA-90) Sejam A, B e C matrizes quadradas n x n tais que A e B são inversíveis e $ABCA = A^t$, onde A^t é a transposta da matriz A. Então podemos afirmar que:
a) C é inversível e $\det C = \det(AB)^{-1}$;
b) C não é inversível pois $\det C = 0$;
c) C é inversível e $\det C = \det B$;
d) C é inversível e $\det C = (\det A)^2 . \det B$;
e) C é inversível e $\det C = \dfrac{\det A}{\det B}$.
Nota: det X denota o determinante da matriz quadrada X.

Resolução
Na resolução, usaremos as seguintes propriedades:
Sendo E e F matrizes quadradas de mesma ordem, tem-se:
P_1) $\det(E.F) = \det E . \det F$
P_2) $\det(E^t) = \det E$
P_3) $\exists E^{-1} \Leftrightarrow \det E \neq 0$
P_4) $\det(E^{-1}) = \dfrac{1}{\det E}$ $(\det E \neq 0)$
P_5) A multiplicação de matrizes é associativa.
Resolução: $ABCA = A^t \Rightarrow \det(ABCA) = \det(A^t)$
Por P_1, P_2, e P_5 temos: $\det A . \det B . \det C . \det A = \det A$
Como A e B são inversíveis, temos por P_3:

$$\det C = \frac{1}{\det A . \det B}$$

Logo, C é inversível (pois $\det C \neq 0$) e por P_1 e P_4, temos:
$\det C = \det(AB)^{-1}$

---

16) (ITA-90) Dizemos que dois sistemas de equações lineares são equivalentes se, e somente se, toda solução de um qualquer dos sistemas for também uma solução do outro. Considere as seguintes afirmações:
I- Dois sistemas de equações lineares 3x3, ambos homogêneos, são equivalentes.
II- Dois sistemas de equações lineares, 3x3, ambos indeterminados, não são equivalentes.
III- Os dois sistemas de equações lineares dados a seguir são equivalentes:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 8 \\ x + y + z = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x - y + z = 4 \\ 4x - y + 2z = 14 \end{cases}$$

De acordo com a definição dada podemos dizer que:
a) As três afirmações são verdadeiras;
b) Apenas a afirmação (I) é verdadeira;
c) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
d) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
e) As três afirmações são falsas.

Resolução
(I) ***Falsa, pois um dos sistemas pode ter uma única solução e o outro, infinitas soluções.***
(II) ***Falsa, pois os dois sistemas podem ter o mesmo conjunto solução, isto é, toda solução de um qualquer dos sistemas é também uma solução do outro.***
(III) ***Falsa, pois se x = 2, y = 3 e z = 5, o terno (2,3,5) é solução do primeiro sistema mas não é solução do segundo.***
Portanto, as três afirmações são falsas.

---

17) (ITA-90) Considere o sistema linear homogêneo nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ dado por

$$\begin{cases} a_1x_1 + (a_1+1)x_2 + ... + (a_1+n-1)x_n = 0 \\ a_2x_1 + (a_2+1)x_2 + ... + (a_2+n-1)x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_nx_1 + (a_n+1)x_2 + ... + (a_n+n-1)x_n = 0 \end{cases}$$

onde a_1, a_2, ..., a_n são números reais dados. Sobre a solução deste sistema podemos afirmar que:
a) Se $a_i > 0$, i = 1, 2, ..., n o sistema possui uma única solução;
b) Se $a_i < 0$, i = 1, 2, ..., n o sistema possui uma única solução;
c) Se $a_i > 0$, i = 1, 2, ..., n o sistema é impossível;
d) Se $a_i < 0$, i = 1, 2, ..., n o sistema é impossível;
e) O sistema possui infinitas soluções quaisquer que sejam os valores dos números a_1, ..., a_n dados.

Resolução
Temos o determinante

$$\rho = \begin{vmatrix} a_1 & (a_1+1) & (a_1+2) & \cdots & (a_1+n-1) \\ a_2 & (a_2+1) & (a_2+2) & \cdots & (a_2+n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & (a_n+1) & (a_n+2) & \cdots & (a_n+n-1) \end{vmatrix}$$

Observando que a terceira coluna é combinação linear das duas primeiras colunas, então D = 0.
Portanto, o sistema possui infinitas soluções, quaisquer que sejam os valores dos números a_1, ..., a_n dados.

---

18) (ITA-90) Há muito tempo atrás, quando poucas pessoas eram versadas na arte de contar, houve uma grande tempestade no oceano. Um navio, colhido pelo tufão, foi salvo graças ao trabalho excepcional de dois marinheiros. Terminada a borrasca, o capitão, decidido a recompensar seus dois comandados pelo serviço bem executado, anunciou que dividiria entre eles no dia seguinte o conteúdo de um pequeno baú com moedas de ouro, tendo encarregado o seu imediato desta tarefa. Acontece que os dois marinheiros eram muito amigos e, querendo evitar o constrangimento de uma partilha pública, um deles teve a idéia na madrugada de pegar a sua parte do prêmio. Indo ao baú, este marinheiro separou as moedas em dois grupos idênticos e, para sua surpresa, sobrou uma moeda. Não sabendo como proceder, jogou-a ao mar para agradecer aos deuses a sua sobrevivência e pegou a parte que lhe cabia. Porém, mais tarde o segundo marinheiro teve exatamente a mesma idéia. Indo ao baú, ele separou as moedas em dois montes iguais e, para surpresa sua, sobrou uma moeda. Jogou-a ao mar como agradecimento pela sua sorte e tomou a parte que lhe cabia da recompensa. Pela manhã os dois marinheiros se sentiram constrangidos em comunicar o procedimento noturno. Assim, o imediato separou as moedas em dois grupos e verificou que sobrava

uma. Deu a cada marinheiro a sua parte do prêmio e tomou para si a moeda restante como paga pelos seus cálculos.
Sabendo-se que a razão entre as moedas ganhas pelo primeiro e pelo segundo marinheiros foi de 29/17 então o número de moedas que havia originalmente no baú era:
a) 99 b) 95 c) 135 d) 87 e) n.d.a.

Resolução
Seja x o número de moedas do baú, vem:

$\frac{x-1}{2}$ → ***retirado pelo 1º marinheiro (A)***

$\frac{\frac{x-1}{2}-1}{2}=\frac{x-3}{4}$ → ***retirado pelo 2º marinheiro (B)***

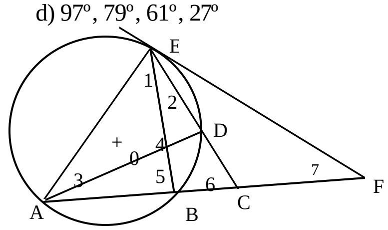
$\frac{\frac{x-3}{4}-1}{2}=\frac{x-7}{8}$ → ***distribuído pelo imediato***

Retirada total de A $\left\{\frac{x-1}{2}+\frac{x-7}{8}=\frac{5x-11}{8}\right.$

Retirada total de B $\left\{\frac{x-3}{4}+\frac{x-7}{8}=\frac{3x-11}{8}\right.$

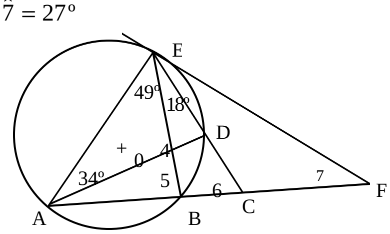
Assim: $\frac{\frac{5x-11}{8}}{\frac{3x-13}{8}}=\frac{29}{17}\Leftrightarrow x=95$ ***havia originalmente o baú 95 moedas.***

19- (ITA-90) Na figura abaixo 0 é o centro de uma circunferência. Sabendo-se que a reta que passa por E e F é tangente a esta circunferência e que a medida dos ângulos 1, 2 e 3 são dadas, respectivamente, por 49º, 18º, 34º, determinar a medida dos ângulos 4, 5, 6 e 7. Nas alternativas abaixo considere os valores dados iguais às medidas de 4, 5, 6 e 7, respectivamente.
a) 97º, 78º , 61º, 26º b) 102º, 79º, 58º, 23º
c) 92º, 79º, 61º, 30º d) 97º, 79º, 61º, 27º
e) 97º, 80º, 62º, 29º



Resolução
DAEG:
$\hat{4}+49º+34º=180º\therefore\hat{4}=97º$

DÂC = $\hat{2}$ ***= 18º (determinam o mesmo arco)***
DEAB:
$\hat{5}+49º+(34º+18167)=180º\therefore\hat{5}=79º$
CÊF = EÂD = 34º (determinam o mesmo arco)
DCEF:
$\hat{6}=\hat{7}+C\hat{E}F$
$61º=\hat{7}+34º\therefore\hat{7}=27º$



20) (ITA-90) Sejam as retas (r) e (s) dadas respectivamente pelas equações 3x - 4y + 12 = 0 e 3x - 4y + 4 = 0. Considere (λ) o lugar geométrico dos centros das circunferências que tangenciam simultaneamente (r) e (s). Uma equação que descreve (λ) é dada por:
a) 3x - 4y + 8 = 0 b) 3x + 4y + 8 = 0 c) x - y + 1 = 0
d) x + y = 0 e) 3x - 4y - 8 = 0

Resolução
Sendo P(x, y) um ponto qualquer do λ***.g., temos dist (P,r) = dist (P,s) = raio*** $\therefore\frac{|3x-4y+12|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|3x-4y+4|}{\sqrt{9+16}}$
Então: 3x - 4y + 12 = 3x - 4y + 4 (não convém)
ou 3x - 4y + 12 = -3x + 4y - 4
logo, uma equação λ***.g. é dada por 3x - 4y + 8 = 0***

21) (ITA-90) Seja C o centro da circunferência $x^2+y^2-6\sqrt{2}\,y=0$. Considere A e B os pontos de interseção desta circunferência com a reta $y=\sqrt{2}\,x$. Nestas condições o perímetro do triângulo de vértices A, B e C é:
a) $6\sqrt{2}+\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}+\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$
d) $5\sqrt{3}+\sqrt{2}$ e) n.d.a.

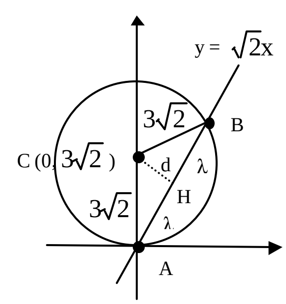
Resolução
A circunferência tem centro C(0, $3\sqrt{2}$ ***), raio =*** $3\sqrt{2}$ ***e passa pela origem.***
A distância d do centro C à reta y = $\sqrt{2}$ ***x é***

$d=\frac{|\sqrt{2}.0-3\sqrt{2}|}{\sqrt{2+1}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

No DBCH temos:

$\lambda^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2$

$\therefore\lambda=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$



perímetro do DABC é
2p = 3 $\sqrt{2}$ ***+ 3*** $\sqrt{2}$ ***+ 4*** $\sqrt{3}$
Logo, 2p = 6 $\sqrt{2}$ ***+ 4*** $\sqrt{3}$

22) (ITA-90) Considere a reta (r) mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta 2x - 3y + 7 = 0 intercepta os eixos coordenados. Então a distância do ponto $(\frac{1}{4},\frac{1}{6})$ à reta (r) é:

a) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{4}{\sqrt{13}}$ c) $3\sqrt{13}$ d) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$ e) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Resolução
A reta (s) de equação 2x - 3y + 7 = 0 intercepta os eixos coordenados nos pontos A (0,7/3), B (-7/2, 0).
A reta (r) passa pelo ponto médio M (-7/4, 7/6) de AB e m_r ***= -1/*** m_s ***= -3/2.***

Logo, a equação de (r) é: y - 7/6 = -3/2 (x + 7/4) ⇒ 36x + 24y + 35 = 0

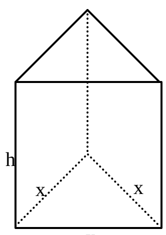
Assim, a distância do ponto (1/4, 1/6) à reta (r) é:

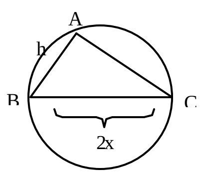
$$d = \frac{\left|36.\frac{1}{4} + 24.\frac{1}{6} + 35\right|}{\sqrt{36^2 + 24^2}} \Rightarrow d = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

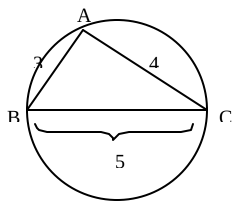
23) (ITA-90) Considere um prisma triangular regular cuja aresta da base mede x cm. Sua altura é igual ao menor lado de um triângulo ABC inscritível num círculo de raio x cm. Sabendo-se que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm, o volume do prisma em cm^3 é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}x^3$ b) $\frac{2\sqrt{2}}{5}x^3$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{10}x^3$ d) $\frac{\sqrt{3}}{10}x^3$ e) n.d.a.

Resolução







ΔABC ~ ΔA'B'C'

Daí, $\frac{h}{3} = \frac{2x}{5} \therefore h = \frac{6x}{5}$

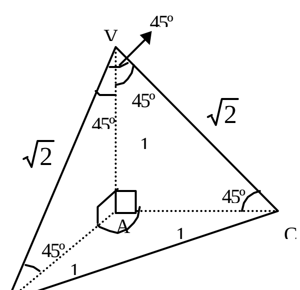
Volume do prisma:

$$V = A_{base}.h = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.\frac{6x}{5} \therefore V = \frac{3\sqrt{3}x^3}{10}$$

24) (ITA-90) Seja V o vértice de uma pirâmide com base triangular ABC. O segmento AV, de comprimento unitário, é perpendicular à base. Os ângulos das faces laterais, no vértice V, são todos de 45 graus. Deste modo, o volume da pirâmide será igual a:

a) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$ b) $\frac{1}{6}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

d) $\frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$ e) n.d.a.



Resolução

ΔVAC:

$\overline{VC}^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \therefore \overline{VC} = \sqrt{2}$

ΔVAB = ΔVAC ∴ $\overline{VB} = \sqrt{2}$

ΔVBC: (Teorema dos co-senos)

$\overline{BC}^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 - 2.\sqrt{2}.\sqrt{2}\cos 45° \Rightarrow \overline{BC}^2 = 4 - 2\sqrt{2}$

ΔBAC: (Teorema dos co-senos)

$4 - 2\sqrt{2} = 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{2} - 1$

$\mathrm{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\mathrm{sen}^2\,\alpha + \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 1 \Rightarrow \mathrm{sen}\,\alpha = \sqrt{2\sqrt{2} - 2}$

Volume da pirâmide:

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1.1}{2}.\mathrm{sen}\,\alpha\right)1 = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{2}.1 = \frac{1}{6}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

25) (ITA-90) Considere a região do plano cartesiano xOy definida pelas desigualdades x-y ≤ 1, x+y ≥ 1 e $(x-1)^2 + y^2 \le 2$. O volume do sólido gerado pela rotação desta região em torno do eixo x é igual a:

a) $\frac{4}{3}\pi$ b) $\frac{8}{3}\pi$ c) $\frac{4}{3}(2-\sqrt{2})\pi$ d) $\frac{8}{3}(\sqrt{2}-1)\pi$ e) n.d.a.

Resolução

A região definida pelas desigualdades

x - y ≤ 1 ⇔ y ≥ x - 1 (semi-plano),

x + y ≥ 1 ⇔ y ≥ - x + 1 (semi-plano) e

$(x - 1)^2 + y^2 \le 2$ (círculo de centro (1,0) e raio R = $\sqrt{2}$)

Representa um setor circular, conforme figura:

A rotação completa deste setor circular em torno do eixo dos x gera um setor esférico de raio R = $\sqrt{2}$ e altura $\overline{AB} = 2$.

O volume deste setor esférico é V = 2/3π.R²h ($\overline{AB} = h$) ou seja V = 2/3π($\sqrt{2}$)².2 ∴ V = 8/3π