MATRIZES

1. NOÇÃO DE MATRIZ

Dados dois números m e n naturais e não nulos, chama-se de matriz m por n (indica-se m x n) toda tabela M formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.

$$M = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{m \text{ por } n}$$

2. MATRIZES ESPECIAIS

2.1 MATRIZ LINHA

É toda matriz do tipo 1 x n, isto é, é uma matriz que tem uma única linha.

Exemplo

1°) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{1 \text{ por } 4}$

2.2 MATRIZ COLUNA

É toda matriz do tipo m x 1, isto é, é uma matriz que tem uma única coluna.

Exemplo

1°) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{4 \text{ por } 1}$

2.3 MATRIZ NULA

É toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

Exemplo

1°) $\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{2 \text{ por } 3}$

2.4 MATRIZ QUADRADA

É a matriz do tipo n x n ou matriz de ordem n, isto é, é uma matriz que tem igual número de linhas e colunas.

Exemplos

1°) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

ordem 2

2°) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

ordem 3

3°) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

ordem 4

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonal Secundária   Diagonal Principal

2.5 MATRIZ DIAGONAL

É toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem a diagonal principal são iguais a zero.

Exemplos

1°) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

2°) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

3°) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.6 MATRIZ IDENTIDADE

A matriz unidade (ou matriz identidade) de ordem n (indica-se I_n) é toda matriz diagonal em que os elementos que pertencem a diagonal principal são iguais a 1.

Exemplos

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. IGUALDADE

Para que duas matrizes sejam iguais é necessário que elas sejam de mesma ordem e todos os elementos correspondentes sejam iguais.

Exemplo

Determine x e y de modo que se tenha $\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2y \\ 3 & y+4 \end{bmatrix}$.

$$\text{Resolução} \begin{cases} 2x = x + 1 \therefore \underline{x = 1|} \\ y + 4 = 4 \therefore \underline{y = 0|} \end{cases}$$

4. ADIÇÃO

A soma de duas matrizes A e B do tipo m x n é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

Exemplo

Determine os valores de α, β, γ e θ afim de que se tenha $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \gamma & \theta \end{bmatrix}$.

$$\text{Resolução} \begin{cases} \alpha + 2 = 3 \therefore \underline{\alpha = 1|} \\ 1 + \beta = 2 \therefore \underline{\beta = 1|} \\ 1 + 0 = \gamma \therefore \underline{\gamma = 1|} \\ 2 - 1 = \theta \therefore \underline{\theta = 1|} \end{cases}$$

5. PRODUTO DE NÚMERO POR MATRIZ

Multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k.

Exemplo

$$2\cdot\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6. MATRIZ OPOSTA

Chama-se matriz oposta de A (indica-se –A) a matriz A’ tal que $A + A' = 0$.

Exemplo

$$1°)\ A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

7. PRODUTO DE MATRIZES

Definição

Dadas duas matrizes $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ e $B = \left(b_{jk}\right)_{n \times p}$ chama-se de produto AB a matriz $C = \left(c_{ik}\right)_{m \times p}$ tal que

Exemplo

$$1°)\ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{2\ \text{x}\ \boxed{2}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{\boxed{2}\ \text{x}\ 3} = \begin{bmatrix} 1\cdot1+2\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot1 & 1\cdot1+2\cdot3 \\ 3\cdot1+1\cdot2 & 3\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+1\cdot3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}}_{2\ \text{x}\ 3}$$

Teorema

Se $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ então $\boxed{AI_n = A \text{ e } I_m A = A}$

Propriedades:

$\circ$ é associativa: $(AB)C = A(BC)$

$\circ$ é distributiva à direita $(A + B)C = AC + BC$

$\circ$ é distributiva à esquerda $C(A + B) = CA + CB$

$\circ$ $(kA)B = A(kB) = k(AB)$

Notas

- Para duas matrizes A e B não quadradas, temos:
$AB \neq BA$

- Para duas matrizes A e B quadradas geralmente, temos:
$AB \neq BA$

- Se duas matrizes A e B comutarem elas necessariamente são quadradas e de mesma ordem.

- A implicação $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$ é falsa

Exemplo

1º) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

- Quando A e B são tais que AB = BA, dizemos que A e B comutam. Notemos que uma *condição necessária para A e B comutarem é que sejam quadradas de mesma ordem*.

Se A e B são matrizes comutáveis então valem as igualdades:

$$\begin{cases} (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \\ (A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 \\ (A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 \\ (AB)^n = A^nB^n \end{cases}$$

8. MATRIZ TRANSPOSTA

Para encontrarmos matriz transposta A^t de uma matriz A é só transformamos cada linha da matriz A em uma coluna.

Exemplo

1°) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Propriedades:

$\circ (A^t)^t = A$

$\circ (A+B)^t = A^t + B^t$

$\circ (kA)^t = kA^t$

$\circ (AB)^t = B^tA^t$

9. MATRIZ SIMÉTRICA

Chama-se de matriz simétrica toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que

$$\boxed{A^t = A}$$

Isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são iguais.

Exemplo

$$1°)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

Define-se como matriz antissimétrica toda matriz quadrada A, de ordem n, tal que

$$\boxed{A^t = -A}$$

Isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos.

Exemplo

$$1°)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

10. MATRIZES INVERSÍES

Definição

Dada uma matriz inversível A, chama-se inversa de A a matriz A^{-1} (que é única) tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

$$\boxed{A^{-1} \cdot A = I_n}$$

É evidente que A^{-1} deve ser quadrada de ordem n, pois A^{-1} comuta com A.,

Se A não é inversível, dizemos que A é uma *matriz singular*.

Aplicações

Sendo A, B e C matrizes inversíveis de ordem n, isole o X a partir de cada equação abaixo:

a) $AX = B$

b) $AXB = I_n$

c) $(AX)^{-1} = B$

d) $BAX = A$

e) $(AX)^t = B$

f) $(A + X)^t = B$

g) $AXB = C$

DETERMINANTES

1. DEFINIÇÃO DE DETERMINANTE DE ORDEM ≤ 3

1.1 Se M é uma matriz de ordem n = 1, então o det M é o único elemento de M.

$$\boxed{M = [a_{11}] \Rightarrow \det M = |a_{11}| = a_{11}}$$

Exemplo

$$M = [-2] \Rightarrow \det M = |-2| = -2$$

1.2 Se M é uma matriz de ordem n = 2, então o det M é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\det M = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = \underline{4|}$$

1.3 Se M é uma matriz de ordem n = 3, então o det M é calculado pela Regra de Sarrus.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det M = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Exemplo

$$1°)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 3 + 4 + 6 - 6 - 3 - 4 = \underline{0|}$$

2. MATRIZ VANDERMONDE (OU DAS POTÊNCIAS)

Chamamos de matriz de Wandermonde, ou das potências, toda matriz de ordem $n \geq 2$, do tipo, por exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{bmatrix} \quad \det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{x \quad y \quad z \quad w} \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{vmatrix} = \boxed{(y-x)\cdot(z-x)\cdot(z-y)\cdot(w-x)\cdot(w-y)\cdot(w-z)}$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = (3-2)\cdot(4-2)\cdot(4-3) = \underline{2|}$$

3. TEOREMA FUNDAMENTAL (DE LAPLACE)

O determinante da matriz M, de ordem $n \geq 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\det M = a_{1n}C_{1n} + a_{2n}C_{2n} + ... + a_{nn}C_{nn}}$$

Exemplo

$$1°)\ M = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 1 \quad 3} \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det M = 1\cdot\underbrace{(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{cofator de } a_{11}} + 2\cdot\underbrace{(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{cofator de } a_{12}} + 1\cdot\underbrace{(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{cofator de } a_{13}} + 3\cdot\underbrace{(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{cofator de } a_{14}}$$

Nota

O Teorema de Laplace torna-se prático quando pegamos uma fila qualquer (linha ou coluna) com a maior quantidade de zeros possíveis.

4. PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

4.1 Matriz transposta

Se M é uma matriz de ordem n e M^t sua transposta, então

$$\boxed{\det M^t = \det M}$$

Exemplos

1°) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \underline{-3|}$

2°) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \underline{9|}$

4.2 Fila nula

Se os elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) de uma matriz M de ordem n forem todos nulos, então

$$\boxed{\det M = 0}$$

Exemplos

1°) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \underline{0|}$

2°) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & x & 0 \\ 3 & 7 & y & 0 \\ 4 & -2 & z & 0 \\ 2 & 3 & t & 0 \end{vmatrix} = \underline{0|}$

4.3 Multiplicação de uma fila por uma constante

Se multiplicarmos uma fila qualquer de uma matriz M de ordem n por um número K, o determinante da nova matriz M’ obtida será o produto K pelo determinante de M, isto é,

$$\boxed{\det M' = k \det M}$$

Exemplos

1°) $\begin{vmatrix} 7 & 14 & 49 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

2°) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 10 & 28 & 8 \\ 15 & 7 & 16 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 140 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

Nota

Se A é uma matriz de ordem n, então

$$\boxed{\det\left(k\cdot A\right)=k^n\cdot \det M}$$

4.4 Trocas de filas paralelas

Seja M uma matriz de ordem $n\geq 2$. Se trocarmos de posição duas filas paralelas (duas linhas ou colunas), obteremos uma nova matriz M’ tal que

$$\boxed{\det M'=-\det M}$$

Exemplos

1°) $\begin{vmatrix}3 & 4\\ 7 & 2\end{vmatrix}=\underline{22|}\Rightarrow\begin{vmatrix}7 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=\underline{-22|}$

2°) $\begin{vmatrix}1 & 4 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}=\underline{-37|}\Rightarrow\begin{vmatrix}-1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}=\underline{37|}$

4.5 Filas paralelas iguais

Se uma matriz M de ordem $n\geq 2$ tem duas filas paralelas (duas linhas ou colunas) formadas por elementos respectivamente iguais, então

$$\boxed{\det M=0}$$

Exemplos

1°) $\begin{vmatrix}3 & 2 & 3\\ 1 & 8 & 1\\ 7 & 2 & 7\end{vmatrix}=\underline{0|}$

2°) $\begin{vmatrix}a & b & c\\ 1 & 4 & 7\\ a & b & c\end{vmatrix}=\underline{0|}$

4.6 Filas proporcionais

Se uma matriz M de ordem $n\geq 2$ tem duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) formadas por elementos respectivamente proporcionais, então

$$\boxed{\det M=0}$$

Exemplo

1°) $\begin{vmatrix}1 & 2x & x\\ 2 & 2y & y\\ 3 & 2z & z\end{vmatrix}=\underline{0|}$

4.7 Matriz Triangular

Chamamos de *matriz triangular* a matriz M quadrada de ordem n cujos elementos situados "de um mesmo lado" da diagonal principal são iguais a zero. O determinante da matriz triangular é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Aplicando-se sucessivamente o teorema de Laplace, através da 1ª linha, é imediato que:

$$\det M = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exemplos

$$1^{\text{o}})\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 1 = \underline{15|}$$

$$2^{\text{o}})\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = \underline{36|}$$

Nota

O determinante de uma matriz diagonal é calculado da mesma forma que o determinante da matriz triangular.

Exemplos

$$1^{\text{o}})\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 1 = \underline{15|}$$

4.8 Teorema de Binet

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então:

$$\boxed{\det (A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)}$$

Consequência

$$A^{-1} \cdot A = I_n \Rightarrow \det (A^{-1} \cdot A) = \det I_n \therefore \det (A^{-1}) \cdot \det (A) = 1$$

$$\boxed{\det (A^{-1}) = \frac{1}{\det (A)}}$$

Desse modo, uma matriz A só admite inversa se e somente si o $\boxed{\det (A) \neq 0}$.

5. TEOREMA DE JACOBI

Adicionando a uma fila de uma matriz M, de ordem n, uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz M', tal que

$$\boxed{\det M' = \det M}$$

Exemplos

$$1^{o})\ -3C_1 + C_2\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1\cdot(-3)+3 & 5 \\ 4 & 4\cdot(-3)+2 & 7 \\ 4 & 4\cdot(-3)+1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & -10 & 7 \\ 4 & -11 & -6 \end{vmatrix}$$

$$2^{o})\ \begin{array}{r} -L_4+L_1 \\ -3L_4+L_2 \\ -2L_4+L_3 \\ \ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\cdot(-1)+1 & 3\cdot(-1)+2 & 3\cdot(-1)+3 & 5\cdot(-1)+4 \\ 1\cdot(-3)+3 & 3\cdot(-3)-2 & 3\cdot(-3)+5 & 5\cdot(-3)+7 \\ 1\cdot(-2)+2 & 3\cdot(-2)+1 & 3\cdot(-2)+4 & 5\cdot(-2)+6 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -11 & -4 & -8 \\ 0 & -5 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

6. REGRA DE CHIÓ

Como consequência do teorema de Jacobi, veremos agora um processo útil bastante prático, para reduzirmos em uma unidade a ordem de um determinante de ordem $n \geq 2$ e que apresenta pelo menos um elemento igual a 1, sem alterá-lo, e facilitar seu cálculo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underset{a_{11}}{1} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1-2\cdot 1 & 2-1\cdot 1 & 1-3\cdot 1 \\ 1-2\cdot 2 & 1-1\cdot 2 & 2-3\cdot 2 \\ 2-2\cdot 1 & 1-1\cdot 1 & 1-3\cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \underline{-8|}$$

SISTEMAS LINEARES

1. INTRODUÇÃO

1.1 Equação linear

Chamamos de equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ toda equação do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b.$
Os números $a_{11}, a_{12}, a_{13}, ... a_{1n}$, todos reais, são chamados de *coeficientes* n e b, também real, é o termo independente da equação.

Exemplos

1°) $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 = 5$
2°) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$
3°) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 4$
4°) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$

1.2 Solução de uma equação linear

Dizemos que a sequência ou ênupla ordenada de números reais é solução da equação linear

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$$

É uma solução da equação linear

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b.$$

se $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + ... + a_{1n}\alpha_n = b$ for uma sentença verdadeira.

Exemplos

1°) Seja a equação linear $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3$
Tem como solução a sequência $(1,2,3,-2) \Rightarrow 2(1) + 3(2) - (3) + (-2) = 3$ é setença verdadeira

2°) Seja a equação linear $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$
Tem como solução qualqer tripla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \Rightarrow 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0$

3°) Seja a equação linear $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2$
Qualqer quadrupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ não satisfaz a equação $\Rightarrow 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4 = 2$

1.3 Sistema linear

É um conjunto de m $(m \geq 1)$ equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Assim, o sistema

$$S\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ . \; . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

é linear. Notemos que o sistema S pode ser escrito na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplos

1°) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

2°) $\begin{cases} 3x + y - z = 4 \\ 2x + 5y + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

1.4 Solução de um sistema linear

Dizemos que a sequência ou ênupla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ é solução de um sistema S, se for solução de todas as equações de S.

Exemplos

1°) $S\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$

Admite como solução a tripla ordenada $(1, 2, 3)$, pois $\begin{cases} 1 + 2 + 3 = 6 \\ 2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1 \\ 3 \cdot 1 - 2 + 3 = 4 \end{cases}$

2°) $S\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x - y + 4z = 1 \\ 0x - 0y + 0z = 6 \end{cases}$

Não admite como solução a tripla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, pois a última equação não é satisfeita.

Nota

Se um sistema admite pelo menos uma solução ele é ***possível*** e caso não tenha nenhuma solução ele é ***impossível***.

1.5 Sistema linear homogêneo

Chamamos de sistema linear homogêneo todo aquele que o termo independente de todas as equações vele ***zero***.

Exemplo

$$1^\circ)\ S\begin{cases} 3x + 4y + z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Notas

Um sistema linear homogêneo admite sempre como solução Trivial a sequência (0,0,0,...,0). Logo este sistema nunca será impossível.

Um sistema linear homogêneo pode ser classificado apenas como:
Possível e determinado*:* tem como única solução a sequência (0,0,0,...,0)
Possível e indeterminado*:* infinitas soluções

2. TEOREMA DE CRAMER

Consideremos um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas. Nestas condições a matriz incompleta é quadrada.

Para facilitar a compreensão do Teorema de Cramer, vamos usar o sistema abaixo:

$$S\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{D_x}{D},\ y = \frac{D_y}{D},\ z = \frac{D_z}{D}}$$

De acordo com o Teorema de Cramer um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas poderá ser

$$\text{Sistema}\begin{cases}\text{Possível Determinado}\left(\text{Única solução}\right)\Rightarrow D\neq 0\\ \text{Possível Indeterminado}\left(\text{Infinitas soluções}\right)\Rightarrow D=D_x=D_y=D_z=0\\ \text{Impossível}\left(\text{Nenhuma solução}\right)\Rightarrow D=0 \text{ e } D_x\neq 0, D_y\neq 0 \text{ e } D_z\neq 0\end{cases}$$

T.01 (EFOMM) O determinante da matriz $A = (a_{ij})$, de ordem 2, onde: $a_{ij} = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2i - j}\right), & i = j \\ tg\left(\dfrac{\pi}{i + j}\right), & i \neq j \end{cases}$ é igual a:

a) 1/3
b) – 1/3
c) – 3
d) 3
e) – 1

T.02 (EFOMM) Seja $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ uma matriz quadrada de ordem 3, onde cada termo é dado pela lei $a_{ij} = \begin{cases} -i + j, \text{ se } i + j \text{ é par} \\ i - j, \text{ se } i + j \text{ é ímpar} \end{cases}$. Pode-se afirmar que o valor de det A é:

a) 0
b) – 12
c) 12
d) 4
e) – 4

T.03 (EFOMM) Sejam A, B e C matrizes de ordem 3 x 3 imersíveis tais que $\det A^{-1} = 3$ e $\det\left((AB)^{-1} + \frac{1}{2}I\right) = 4$. Sabendo-se que I é a matriz identidade de ordem 3, tal que $I = -3C^{-1}\left(2B^{-1} + A\right)^t$, o determinante de C é igual a

a) $-8/3$
b) $-32/3$
c) -9
d) -54
e) -288

T.04 (AFA) Sejam a e b números positivos tais que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ vale 24. Dessa forma o determinante da matriz $\begin{bmatrix} \sqrt{b} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{a} \end{bmatrix}$ é igual a:

a) 0
b) 6
c) -6
d) $\sqrt{6}$

T.05 (AFA) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ \cos x & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Considere a função $f: \Re \to \Re$ definida por f(x) = det A Sobre a função $g: \Re \to \Re$ definida por $g(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot |f(x)|$, em que $|f(x)|$ é o módulo de f(x), é correto afirmar que

a) possui período π

b) seu conjunto imagem é $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$

c) é par.

d) é crescente no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

T.06 (AFA) A solução do sistema $\begin{cases} \frac{x-y}{2} - \frac{x-y}{6} + \frac{x-y}{18} + \ldots = -1 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$ é tal que x + y é igual a

a) $\frac{11}{3}$

b) $\frac{10}{3}$

c) $-\frac{7}{3}$

d) $-\frac{8}{3}$

T.07 (AFA) Considere A, B, C e X matrizes quadradas de ordem n e inversíveis. Assinale a alternativa FALSA.

a) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

b) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

c) $AXC = B \Rightarrow X = A^{-1}C^{-1}B$

d) $\det\left(2AB^{-1}\right) = 2^n \frac{\det A}{\det B}$

T.08 (AFA) Seja A a matriz $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ Sabe-se que $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{n vezes}}$. Então, o determinante da matriz S = A + A^2 + A^3 + ... + A^{11} é igual a

a) 1

b) -31

c) -875

d) -11

T.09 (AFA) Considere as funções reais f e g definidas por: $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\det\begin{bmatrix} 2 & \cos(2x) \\ 2\operatorname{sen}(2x) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

$g(x)=\frac{1}{2}-f(x)$ e marque a alternativa INCORRETA.

a) O conjunto imagem da função fé o intervalo [0,1]
b) A função g é ímpar.
c) A função real h definida por $h(x)=-\frac{1}{2}+g(x)$ possui duas raízes no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$
d) O período da função real j definida por $j(x)=\left|-\frac{1}{2}+g(x)\right|$ é $\frac{\pi}{2}$

T.10 (AFA) O sistema linear nas incógnitas x, y e z abaixo possui uma infinidade de soluções.

$$\begin{cases} (\operatorname{sen} a)x+y-z=0 \\ x-(\operatorname{sen} a)y+z=1 \\ x+y=\cos a \end{cases}$$

Sobre o parâmetro a, $a\in\Re$, pode-se afirmar que
a) $a=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
b) $a=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
c) $a=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
d) $a=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

T.11(AFA) Considere as matrizes A e B, inversíveis e de ordem n, bem como a matriz identidade I. Sabendo que det (A) = 5 e $\det\left(I.B^{-1}.A\right)=\frac{1}{3}$,então o $\det\left[3\left(B^{-1}.A^{-1}\right)^{t}\right]$ é igual a

a) $5\cdot 3^{n}$
b) $\frac{3^{n-1}}{5^{2}}$
c) $\frac{3^{n}}{15}$
d) 3^{n-1}

T.12 (AFA) Uma montadora de automóveis prepara três modelos de carros, a saber:

MODELO	1	2	3
CILINDRADA (em litro)	1.0	1.4	1.8

Essa montadora divulgou a matriz abaixo em que cada termo a_{ij} representa a distância percorrida, em km, pelo modelo i, com um litro de combustível, à velocidade 10j km/ h.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7,6 & 7,2 & 8,9 & 8,2 & 11 & 10 & 12 & 11,8 \\ 5 & 7,5 & 7 & 8,5 & 8 & 10,5 & 9,5 & 11,5 & 11 \\ 3 & 2,7 & 5,9 & 5,5 & 8,1 & 7,4 & 9,8 & 9,4 & 13,1 \end{bmatrix}$$

Com base nisso, é correto dizer que

a) para motoristas que somente trafegam a 30 km/ h, o carro 1.4 é o mais econômico.

b) se durante um mesmo período de tempo um carro 1.4 e um 1.8 trafegam a 50 km/ h, o 1.4 será o mais econômico.

c) para motoristas que somente trafegam a velocidade de 70 km/ h, o carro 1.8 é o de maior consumo.

d) para motoristas que somente trafegam a 80 km/ h, o carro 1.0 é o mais econômico.

T.13 (AFA) Sejam A uma matriz quadrada de ordem 3, det A = d, $\det(2A \cdot A^t) = 4k$, onde A^t é a matriz transposta de A, e d é a ordem da matriz quadrada B. Se det B = 2 e det 3B = 162, então o valor de k + d é:

a) 4

b) 8

c) 32

d) 36

T.14 (AFA) O valor do determinante de uma matriz de ordem n é 21. Se dividirmos a segunda linha desta matriz por 7 e multiplicarmos a matriz por 3, o valor do novo determinante será:

a) 3n

b) 3^{n+1}

c) 3^n

d) 3^{n+3}

T.15 (EN) A equação

$$\begin{vmatrix} \text{sen}^2 x & 1 & \sec^2 x \\ 1 & \cos^2 x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{31}{16}$$

Com $x \in \left]0, \pi/2\right[$ possui como solução o volume de uma pirâmide com base hexagonal de lado **l** e altura $h = \sqrt{3}$. Sendo assim, é correto afirmar que o valor de l é igual **a:**

a) $\sqrt{\frac{2\pi^2}{9}}$

b) $\sqrt{\frac{\pi}{18}}$

c) $\sqrt{\frac{8\pi}{9}}$

d) $\sqrt{\frac{32\pi}{9}}$

e) $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$

T.16 (EN) Se $a = \sqrt{3+\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{3-\sqrt{2}}$ seja k o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{bmatrix}$, sendo assim, é correto afirmar que o coeficiente de x^{k-1} no desenvolvimento de $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3$ é

a) 21
b) 22
c) 23
d) 24
e) 25