



## MATRIZES

### 1. NOÇÃO DE MATRIZ

Dados dois números  $m$  e  $n$  naturais e não nulos, chama-se de matriz  $m$  por  $n$  (indica-se  $m \times n$ ) toda tabela  $M$  formada por números reais distribuídos em  $m$  linhas e  $n$  colunas.

$$M = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m por n

### 2. MATRIZES ESPECIAIS

#### 2.1 MATRIZ LINHA

É toda matriz do tipo  $1 \times n$ , isto é, é uma matriz que tem uma única linha.

*Exemplo*

$$1^\circ) [1 \quad -1 \quad 0 \quad 1]$$

1 por 4

#### 2.2 MATRIZ COLUNA

É toda matriz do tipo  $m \times 1$ , isto é, é uma matriz que tem uma única coluna.

*Exemplo*

$$1^\circ) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4 por 1

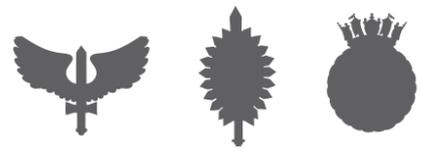
#### 2.3 MATRIZ NULA

É toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

*Exemplo*

$$1^\circ) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 por 3



## 2.4 MATRIZ QUADRADA

É a matriz do tipo  $n \times n$  ou matriz de ordem  $n$ , isto é, é uma matriz que tem igual número de linhas e colunas.

*Exemplos*

$$1^\circ) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

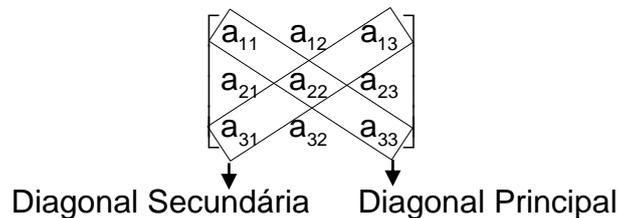
ordem 2

$$2^\circ) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

ordem 3

$$3^\circ) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ordem 4



## 2.5 MATRIZ DIAGONAL

É toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem a diagonal principal são iguais a zero.

*Exemplos*

$$1^\circ) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2^\circ) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3^\circ) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## 2.6 MATRIZ IDENTIDADE

A matriz unidade (ou matriz identidade) de ordem  $n$  (indica-se  $I_n$ ) é toda matriz diagonal em que os elementos que pertencem a diagonal principal são iguais a 1.

*Exemplos*

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 3. IGUALDADE

Para que duas matrizes sejam iguais é necessário que elas sejam de mesma ordem e todos os elementos correspondentes sejam iguais.

*Exemplo*

Determine  $x$  e  $y$  de modo que se tenha  $\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2y \\ 3 & y+4 \end{bmatrix}$ .

$$\text{Resolução} \begin{cases} 2x = x+1 \therefore \underline{x=1} \\ y+4 = 4 \therefore \underline{y=0} \end{cases}$$

## 4. ADIÇÃO

A soma de duas matrizes  $A$  e  $B$  do tipo  $m \times n$  é uma matriz  $C$  do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em  $A$  e  $B$ .

*Exemplo*

Determine os valores de  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\theta$  afim de que se tenha  $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \gamma & \theta \end{bmatrix}$ .

$$\text{Resolução} \begin{cases} \alpha + 2 = 3 \therefore \underline{\alpha = 1} \\ 1 + \beta = 2 \therefore \underline{\beta = 1} \\ 1 + 0 = \gamma \therefore \underline{\gamma = 1} \\ 2 - 1 = \theta \therefore \underline{\theta = 1} \end{cases}$$



## 5. PRODUTO DE NÚMERO POR MATRIZ

Multiplicar uma matriz  $A$  por um número  $k$  é construir uma matriz  $B$  formada pelos elementos de  $A$  todos multiplicados por  $k$ .

*Exemplo*

$$2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

## 6. MATRIZ OPOSTA

Chama-se matriz oposta de  $A$  (indica-se  $-A$ ) a matriz  $A'$  tal que  $A + A' = 0$ .

*Exemplo*

$$1^\circ) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

## 7. PRODUTO DE MATRIZES

Definição

Dadas duas matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{jk})_{n \times p}$  chama-se de produto  $AB$  a matriz  $C = (c_{ik})_{m \times p}$  tal que

*Exemplo*

$$1^\circ) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}}_{2 \times 3}$$

*Teorema*

Se  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  então  $A I_n = A$  e  $I_m A = A$

*Propriedades:*

- é associativa:  $(AB)C = A(BC)$
- é distributiva à direita  $(A+B)C = AC + BC$
- é distributiva à esquerda  $C(A+B) = CA + CB$
- $(kA)B = A(kB) = k(AB)$



Notas

- Para duas matrizes A e B não quadradas, temos:  
 $AB \neq BA$
- Para duas matrizes A e B quadradas geralmente, temos:  
 $AB \neq BA$
- Se duas matrizes A e B comutarem elas necessariamente são quadradas e de mesma ordem.
- A implicação  $AB = 0 \Rightarrow A = 0$  ou  $B = 0$  é falsa

Exemplo

$$1^o) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Quando A e B são tais que  $AB = BA$ , dizemos que A e B comutam. Notemos que uma *condição necessária para A e B comutarem é que sejam quadradas de mesma ordem.*

Se A e B são matrizes comutáveis então valem as igualdades:

$$\begin{cases} (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \\ (A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 \\ (A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 \\ (AB)^n = A^n B^n \end{cases}$$

**8. MATRIZ TRANSPOSTA**

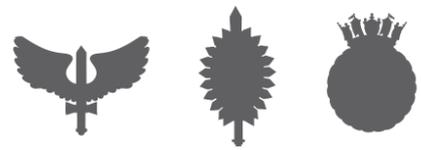
Para encontrarmos matriz transposta  $A^t$  de uma matriz A é só transformamos cada linha da matriz A em uma coluna.

Exemplo

$$1^o) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(kA)^t = kA^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$



## 9. MATRIZ SIMÉTRICA

Chama-se de matriz simétrica toda matriz quadrada  $A$ , de ordem  $n$ , tal que

$$A^t = A$$

Isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são iguais.

*Exemplo*

$$1^\circ) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

Define-se como matriz antissimétrica toda matriz quadrada  $A$ , de ordem  $n$ , tal que

$$A^t = -A$$

Isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos.

*Exemplo*

$$1^\circ) A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

## 10. MATRIZES INVERSÍES

Definição

Dada uma matriz inversível  $A$ , chama-se inversa de  $A$  a matriz  $A^{-1}$  (que é única) tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

$$A^{-1} \cdot A = I_n$$

É evidente que  $A^{-1}$  deve ser quadrada de ordem  $n$ , pois  $A^{-1}$  comuta com  $A$ .

Se  $A$  não é inversível, dizemos que  $A$  é uma *matriz singular*.

Aplicações

Sendo  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes inversíveis de ordem  $n$ , isole o  $X$  a partir de cada equação abaixo:

a)  $AX = B$

b)  $AXB = I_n$

c)  $(AX)^{-1} = B$

d)  $BAX = A$

e)  $(AX)^t = B$

f)  $(A + X)^t = B$

g)  $AXB = C$



## DETERMINANTES

### 1. DEFINIÇÃO DE DETERMINANTE DE ORDEM $\leq 3$

1.1 Se  $M$  é uma matriz de ordem  $n = 1$ , então o  $\det M$  é o único elemento de  $M$ .

$$M = [a_{11}] \Rightarrow \det M = |a_{11}| = a_{11}$$

*Exemplo*

$$M = [-2] \Rightarrow \det M = |-2| = -2$$

1.2 Se  $M$  é uma matriz de ordem  $n = 2$ , então o  $\det M$  é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det M = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

*Exemplo*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 4$$

1.3 Se  $M$  é uma matriz de ordem  $n = 3$ , então o  $\det M$  é calculado pela Regra de Sarrus.

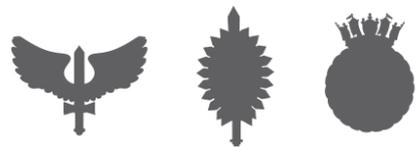
$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det M = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

*Exemplo*

$$1^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 3 + 4 + 6 - 6 - 3 - 4 = 0$$



## 2. MATRIZ VANDERMONDE (OU DAS POTÊNCIAS)

Chamamos de matriz de Vandermonde, ou das potências, toda matriz de ordem  $n \geq 2$ , do tipo, por exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{bmatrix} \quad \det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{vmatrix} = (y-x) \cdot (z-x) \cdot (z-y) \cdot (w-x) \cdot (w-y) \cdot (w-z)$$

*Exemplo*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = (3-2) \cdot (4-2) \cdot (4-3) = 2$$

## 3. TEOREMA FUNDAMENTAL (DE LAPLACE)

O determinante da matriz  $M$ , de ordem  $n \geq 2$ , é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det M = a_{1n} C_{1n} + a_{2n} C_{2n} + \dots + a_{nn} C_{nn}$$

*Exemplo*

$$1^\circ) M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det M = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

cofator de  $a_{11}$ 
cofator de  $a_{12}$ 
cofator de  $a_{13}$ 
cofator de  $a_{14}$

*Nota*

O Teorema de Laplace torna-se prático quando pegamos uma fila qualquer (linha ou coluna) com a maior quantidade de zeros possíveis.



## 4. PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

### 4.1 Matriz transposta

Se  $M$  é uma matriz de ordem  $n$  e  $M^t$  sua transposta, então

$$\det M^t = \det M$$

*Exemplos*

$$1^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \underline{-3}$$

$$2^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \underline{9}$$

### 4.2 Fila nula

Se os elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) de uma matriz  $M$  de ordem  $n$  forem todos nulos, então

$$\det M = 0$$

*Exemplos*

$$1^\circ) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \underline{0}$$

$$2^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 5 & x & 0 \\ 3 & 7 & y & 0 \\ 4 & -2 & z & 0 \\ 2 & 3 & t & 0 \end{vmatrix} = \underline{0}$$

### 4.3 Multiplicação de uma fila por uma constante

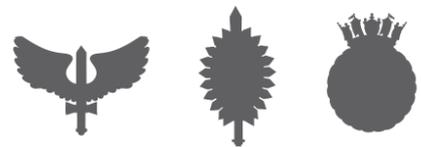
Se multiplicarmos uma fila qualquer de uma matriz  $M$  de ordem  $n$  por um número  $K$ , o determinante da nova matriz  $M'$  obtida será o produto  $K$  pelo determinante de  $M$ , isto é,

$$\det M' = k \det M$$

*Exemplos*

$$1^\circ) \begin{vmatrix} 7 & 14 & 49 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$2^\circ) \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 10 & 28 & 8 \\ 15 & 7 & 16 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 140 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$



Nota

Se  $A$  é uma matriz de ordem  $n$ , então

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det M$$

#### 4.4 Trocas de filas paralelas

Seja  $M$  uma matriz de ordem  $n \geq 2$ . Se trocarmos de posição duas filas paralelas (duas linhas ou colunas), obteremos uma nova matriz  $M'$  tal que

$$\det M' = -\det M$$

Exemplos

$$1^\circ) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = \underline{22} \Rightarrow \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \underline{-22}$$

$$2^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \underline{-37} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \underline{37}$$

#### 4.5 Filas paralelas iguais

Se uma matriz  $M$  de ordem  $n \geq 2$  tem duas filas paralelas (duas linhas ou colunas) formadas por elementos respectivamente iguais, então

$$\det M = 0$$

Exemplos

$$1^\circ) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 7 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \underline{0}$$

$$2^\circ) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 4 & 7 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \underline{0}$$

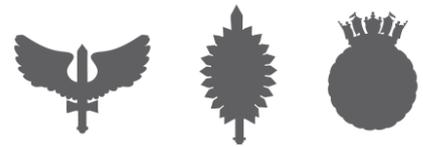
#### 4.6 Filas proporcionais

Se uma matriz  $M$  de ordem  $n \geq 2$  tem duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) formadas por elementos respectivamente proporcionais, então

$$\det M = 0$$

Exemplo

$$1^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 2x & x \\ 2 & 2y & y \\ 3 & 2z & z \end{vmatrix} = \underline{0}$$



### 4.7 Matriz Triangular

Chamamos de *matriz triangular* a matriz  $M$  quadrada de ordem  $n$  cujos elementos situados “de um mesmo lado” da diagonal principal são iguais a zero. O determinante da matriz triangular é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Aplicando-se sucessivamente o teorema de Laplace, através da 1ª linha, é imediato que:

$$\det M = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

*Exemplos*

$$1^{\circ}) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 1 = \underline{15}$$

$$2^{\circ}) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = \underline{36}$$

*Nota*

O determinante de uma matriz diagonal é calculado da mesma forma que o determinante da matriz triangular.

*Exemplos*

$$1^{\circ}) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 1 = \underline{15}$$

### 4.8 Teorema de Binet

Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas de ordem  $n$ , então:

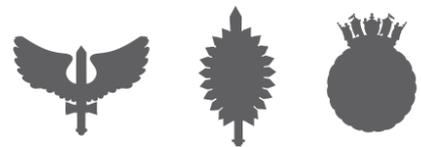
$$\boxed{\det (A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)}$$

*Consequência*

$$A^{-1} \cdot A = I_n \Rightarrow \det (A^{-1} \cdot A) = \det I_n \therefore \det (A^{-1}) \cdot \det (A) = 1$$

$$\boxed{\det (A^{-1}) = \frac{1}{\det (A)}}$$

Desse modo, uma matriz  $A$  só admite inversa se e somente si o  $\boxed{\det (A) \neq 0}$ .



### 5. TEOREMA DE JACOBI

Adicionando a uma fila de uma matriz  $M$ , de ordem  $n$ , uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz  $M'$ , tal que

$$\boxed{\det M' = \det M}$$

*Exemplos*

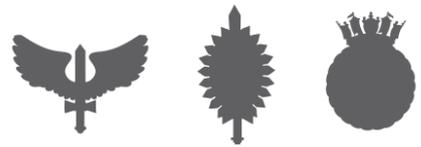
$$1^{\circ}) -3C_1 + C_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \cdot (-3) + 3 & 5 \\ 4 & 4 \cdot (-3) + 2 & 7 \\ 4 & 4 \cdot (-3) + 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & -10 & 7 \\ 4 & -11 & -6 \end{vmatrix}$$

$$2^{\circ}) \begin{matrix} -L_4 + L_1 \\ -3L_4 + L_2 \\ -2L_4 + L_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \cdot (-1) + 1 & 3 \cdot (-1) + 2 & 3 \cdot (-1) + 3 & 5 \cdot (-1) + 4 \\ 1 \cdot (-3) + 3 & 3 \cdot (-3) - 2 & 3 \cdot (-3) + 5 & 5 \cdot (-3) + 7 \\ 1 \cdot (-2) + 2 & 3 \cdot (-2) + 1 & 3 \cdot (-2) + 4 & 5 \cdot (-2) + 6 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -11 & -4 & -8 \\ 0 & -5 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

### 6. REGRA DE CHIÓ

Como consequência do teorema de Jacobi, veremos agora um processo útil bastante prático, para reduzirmos em uma unidade a ordem de um determinante de ordem  $n \geq 2$  e que apresenta pelo menos um elemento igual a 1, sem alterá-lo, e facilitar seu cálculo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1-2 \cdot 1 & 2-1 \cdot 1 & 1-3 \cdot 1 \\ 1-2 \cdot 2 & 1-1 \cdot 2 & 2-3 \cdot 2 \\ 2-2 \cdot 1 & 1-1 \cdot 1 & 1-3 \cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \underline{-8}$$



## SISTEMAS LINEARES

### 1. INTRODUÇÃO

#### 1.1 Equação linear

Chamamos de equação linear, nas incógnitas  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  toda equação do tipo  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b$ .

Os números  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ , todos reais, são chamados de *coeficientes* e  $b$ , também real, é o termo independente da equação.

#### Exemplos

1º)  $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 = 5$

2º)  $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$

3º)  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 4$

4º)  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$

#### 1.2 Solução de uma equação linear

Dizemos que a sequência ou ênupla ordenada de números reais é solução da equação linear

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

É uma solução da equação linear

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b.$$

se  $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b$  for uma sentença verdadeira.

#### Exemplos

1º) Seja a equação linear  $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3$

Tem como solução a sequência  $(1, 2, 3, -2) \Rightarrow 2(1) + 3(2) - (3) + (-2) = 3$  é sentença verdadeira

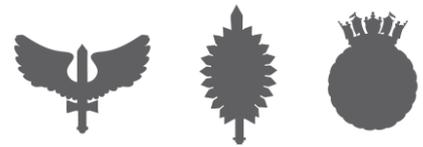
2º) Seja a equação linear  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$

Tem como solução qualquer tripla ordenada  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \Rightarrow 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0$

3º) Seja a equação linear  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2$

Qualquer quadrupla ordenada  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  não satisfaz a equação  $\Rightarrow 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4 = 2$





Nota

Se um sistema admite pelo menos uma solução ele é **possível** e caso não tenha nenhuma solução ele é **impossível**.

**1.5 Sistema linear homogêneo**

Chamamos de sistema linear homogêneo todo aquele que o termo independente de todas as equações vale **zero**.

Exemplo

$$1^\circ) S \begin{cases} 3x + 4y + z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Notas

Um sistema linear homogêneo admite sempre como solução Trivial a sequência (0,0,0,...,0). Logo este sistema nunca será impossível.

Um sistema linear homogêneo pode ser classificado apenas como:

**Possível e determinado:** tem como única solução a sequência (0,0,0,...,0)

**Possível e indeterminado:** infinitas soluções

**2. TEOREMA DE CRAMER**

Consideremos um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas. Nestas condições a matriz incompleta é quadrada.

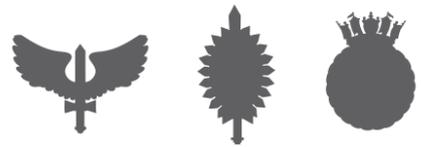
Para facilitar a compreensão do Teorema de Cramer, vamos usar o sistema abaixo:

$$S \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D}}$$



De acordo com o Teorema de Cramer um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas poderá ser

$$\text{Sistema} \begin{cases} \text{Possível Determinado (Única solução)} \Rightarrow D \neq 0 \\ \text{Possível Indeterminado (Infinitas soluções)} \Rightarrow D = D_x = D_y = D_z = 0 \\ \text{Impossível (Nenhuma solução)} \Rightarrow D = 0 \text{ e } D_x \neq 0, D_y \neq 0 \text{ e } D_z \neq 0 \end{cases}$$



**T.01 (EFOMM)** O determinante da matriz  $A = (a_{ij})$ , de ordem 2, onde:  $a_{ij} = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2i-j}\right), i = j \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{i+j}\right), i \neq j \end{cases}$  é

igual a:

- a)  $1/3$
- b)  $-1/3$
- c)  $-3$
- d)  $3$
- e)  $-1$

**T.02 (EFOMM)** Seja  $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$  uma matriz quadrada de ordem 3, onde cada termo é dado pela lei  $a_{ij} = \begin{cases} -i+j, \text{ se } i+j \text{ é par} \\ i-j, \text{ se } i+j \text{ é ímpar} \end{cases}$ . Pode-se afirmar que o valor de  $\det A$  é:

- a) 0
- b)  $-12$
- c) 12
- d) 4
- e)  $-4$

**T.03 (EFOMM)** Sejam A, B e C matrizes de ordem  $3 \times 3$  inversíveis tais que  $\det A^{-1} = 3$  e  $\det\left((AB)^{-1} + \frac{1}{2}I\right) = 4$ . Sabendo-se que I é a matriz identidade de ordem 3, tal que

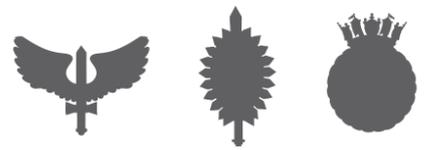
$I = -3C^{-1}(2B^{-1} + A)^t$ , o determinante de C é igual a

- a)  $-8/3$
- b)  $-32/3$
- c)  $-9$
- d)  $-54$
- e)  $-288$

**T.04 (AFA)** Sejam a e b números positivos tais que o determinante da matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

vale 24. Dessa forma o determinante da matriz  $\begin{bmatrix} \sqrt{b} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{a} \end{bmatrix}$  é igual a:

- a) 0
- b) 6
- c)  $-6$
- d)  $\sqrt{6}$



**T.05 (AFA)** Seja a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ \cos x & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & 2 & 1 \end{pmatrix}$  Considere a função  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por

$f(x) = \det A$  Sobre a função  $g: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por  $g(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot |f(x)|$ , em que  $|f(x)|$  é o módulo de  $f(x)$ , é correto afirmar que

- a) possui período  $\pi$
- b) seu conjunto imagem é  $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$
- c) é par.
- d) é crescente no intervalo  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

**T.06 (AFA)** A solução do sistema  $\begin{cases} \frac{x-y}{2} - \frac{x-y}{6} + \frac{x-y}{18} + \dots = -1 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$  é tal que  $x + y$  é igual a

- a)  $\frac{11}{3}$
- b)  $\frac{10}{3}$
- c)  $-\frac{7}{3}$
- d)  $-\frac{8}{3}$

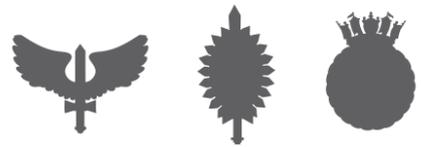
**T.07 (AFA)** Considere  $A, B, C$  e  $X$  matrizes quadradas de ordem  $n$  e inversíveis. Assinale a alternativa FALSA.

- a)  $(A^{-1})^{-1} = A$
- b)  $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
- c)  $AXC = B \Rightarrow X = A^{-1}C^{-1}B$
- d)  $\det(2AB^{-1}) = 2^n \frac{\det A}{\det B}$

**T.08 (AFA)** Seja  $A$  a matriz  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$  Sabe-se que  $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ vezes}}$ . Então, o determinante da

matriz  $S = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{11}$  é igual a

- a) 1
- b) -31
- c) -875
- d) -11



**T.09 (AFA)** Considere as funções reais  $f$  e  $g$  definidas por:  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & \cos(2x) \\ 2\text{sen}(2x) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ,

$g(x) = \frac{1}{2} - f(x)$  e marque a alternativa INCORRETA.

- a) O conjunto imagem da função  $f$  é o intervalo  $[0,1]$
- b) A função  $g$  é ímpar.
- c) A função real  $h$  definida por  $h(x) = -\frac{1}{2} + g(x)$  possui duas raízes no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- d) O período da função real  $j$  definida por  $j(x) = \left| -\frac{1}{2} + g(x) \right|$  é  $\frac{\pi}{2}$

**T.10 (AFA)** O sistema linear nas incógnitas  $x$ ,  $y$  e  $z$  abaixo possui uma infinidade de soluções.

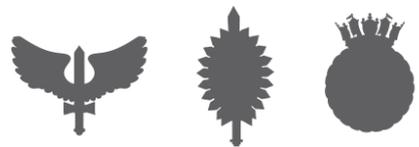
$$\begin{cases} (\text{sena})x + y - z = 0 \\ x - (\text{sena})y + z = 1 \\ x + y = \text{cosa} \end{cases}$$

Sobre o parâmetro  $a$ ,  $a \in \mathfrak{R}$ , pode-se afirmar que

- a)  $a = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- b)  $a = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- c)  $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- d)  $a = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**T.11(AFA)** Considere as matrizes  $A$  e  $B$ , inversíveis e de ordem  $n$ , bem como a matriz identidade  $I$ . Sabendo que  $\det(A) = 5$  e  $\det(I \cdot B^{-1} \cdot A) = \frac{1}{3}$ , então o  $\det \left[ 3(B^{-1} \cdot A^{-1})^t \right]$  é igual a

- a)  $5 \cdot 3^n$
- b)  $\frac{3^{n-1}}{5^2}$
- c)  $\frac{3^n}{15}$
- d)  $3^{n-1}$



**T.12 (AFA)** Uma montadora de automóveis prepara três modelos de carros, a saber:

MODELO	1	2	3
CILINDRADA (em litro)	1.0	1.4	1.8

Essa montadora divulgou a matriz abaixo em que cada termo  $a_{ij}$  representa a distância percorrida, em km, pelo modelo  $i$ , com um litro de combustível, à velocidade  $10j$  km/h.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7,6 & 7,2 & 8,9 & 8,2 & 11 & 10 & 12 & 11,8 \\ 5 & 7,5 & 7 & 8,5 & 8 & 10,5 & 9,5 & 11,5 & 11 \\ 3 & 2,7 & 5,9 & 5,5 & 8,1 & 7,4 & 9,8 & 9,4 & 13,1 \end{bmatrix}$$

Com base nisso, é correto dizer que

- a) para motoristas que somente trafegam a 30 km/h, o carro 1.4 é o mais econômico.
- b) se durante um mesmo período de tempo um carro 1.4 e um 1.8 trafegam a 50 km/h, o 1.4 será o mais econômico.
- c) para motoristas que somente trafegam a velocidade de 70 km/h, o carro 1.8 é o de maior consumo.
- d) para motoristas que somente trafegam a 80 km/h, o carro 1.0 é o mais econômico.

**T.13 (AFA)** Sejam  $A$  uma matriz quadrada de ordem 3,  $\det A = d$ ,  $\det(2A \cdot A^t) = 4k$ , onde  $A^t$  é a matriz transposta de  $A$ , e  $d$  é a ordem da matriz quadrada  $B$ . Se  $\det B = 2$  e  $\det 3B = 162$ , então o valor de  $k + d$  é:

- a) 4
- b) 8
- c) 32
- d) 36

**T.14 (AFA)** O valor do determinante de uma matriz de ordem  $n$  é 21. Se dividirmos a segunda linha desta matriz por 7 e multiplicarmos a matriz por 3, o valor do novo determinante será:

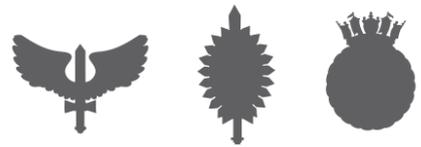
- a)  $3n$
- b)  $3^{n+1}$
- c)  $3^n$
- d)  $3^{n+3}$

**T.15 (EN)** A equação

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \sec^2 x \\ 1 & \cos^2 x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{31}{16}$$

Com  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  possui como solução o volume de uma pirâmide com base hexagonal de lado  $l$  e altura  $h = \sqrt{3}$ . Sendo assim, é correto afirmar que o valor de  $l$  é igual a:

- a)  $\sqrt{\frac{2\pi^2}{9}}$
- b)  $\sqrt{\frac{\pi}{18}}$
- c)  $\sqrt{\frac{8\pi}{9}}$
- d)  $\sqrt{\frac{32\pi}{9}}$
- e)  $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$



T.16 (EN) Se  $a = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$  e  $b = \sqrt{3 - \sqrt{2}}$  seja  $k$  o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{bmatrix},$$

sendo assim, é correto afirmar que o coeficiente de  $x^{k-1}$  no desenvolvimento de

$$\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3 \text{ é}$$

- a) 21
- b) 22
- c) 23
- d) 24
- e) 25