



MATRIZES

1. NOÇÃO DE MATRIZ

Dados dois números m e n naturais e não nulos, chama-se de matriz m por n (indica-se $m \times n$) toda tabela M formada por números reais distribuídos em m linhas e n colunas.

$$M = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m por n

2. MATRIZES ESPECIAIS

2.1 MATRIZ LINHA

É toda matriz do tipo $1 \times n$, isto é, é uma matriz que tem uma única linha.

Exemplo

$$1^\circ) [1 \quad -1 \quad 0 \quad 1]$$

1 por 4

2.2 MATRIZ COLUNA

É toda matriz do tipo $m \times 1$, isto é, é uma matriz que tem uma única coluna.

Exemplo

$$1^\circ) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4 por 1

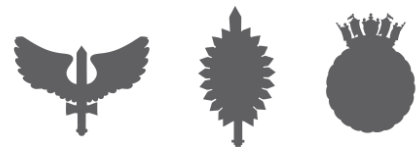
2.3 MATRIZ NULA

É toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

Exemplo

$$1^\circ) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 por 3



2.4 MATRIZ QUADRADA

É a matriz do tipo $n \times n$ ou matriz de ordem n , isto é, é uma matriz que tem igual número de linhas e colunas.

Exemplos

$$1^\circ) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

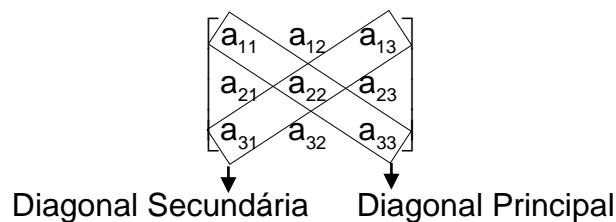
ordem 2

$$2^\circ) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

ordem 3

$$3^\circ) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ordem 4



2.5 MATRIZ DIAGONAL

É toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem a diagonal principal são iguais a zero.

Exemplos

$$1^\circ) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2^\circ) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3^\circ) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



2.6 MATRIZ IDENTIDADE

A matriz unidade (ou matriz identidade) de ordem n (indica-se I_n) é toda matriz diagonal em que os elementos que pertencem a diagonal principal são iguais a 1.

Exemplos

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. IGUALDADE

Para que duas matrizes sejam iguais é necessário que elas sejam de mesma ordem e todos os elementos correspondentes sejam iguais.

Exemplo

Determine x e y de modo que se tenha $\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2y \\ 3 & y+4 \end{bmatrix}$.

$$\text{Resolução} \begin{cases} 2x = x+1 \therefore \underline{x=1} \\ y+4 = 4 \therefore \underline{y=0} \end{cases}$$

4. ADIÇÃO

A soma de duas matrizes A e B do tipo $m \times n$ é uma matriz C do mesmo tipo em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B .

Exemplo

Determine os valores de α, β, γ e θ afim de que se tenha $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & \beta \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \gamma & \theta \end{bmatrix}$.

$$\text{Resolução} \begin{cases} \alpha + 2 = 3 \therefore \underline{\alpha = 1} \\ 1 + \beta = 2 \therefore \underline{\beta = 1} \\ 1 + 0 = \gamma \therefore \underline{\gamma = 1} \\ 2 - 1 = \theta \therefore \underline{\theta = 1} \end{cases}$$



5. PRODUTO DE NÚMERO POR MATRIZ

Multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k .

Exemplo

$$2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

6. MATRIZ OPOSTA

Chama-se matriz oposta de A (indica-se $-A$) a matriz A' tal que $A + A' = 0$.

Exemplo

$$1^\circ) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

7. PRODUTO DE MATRIZES

Definição

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{jk})_{n \times p}$ chama-se de produto AB a matriz $C = (c_{ik})_{m \times p}$ tal que

Exemplo

$$1^\circ) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{2 \times 2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}}_{2 \times 3}$$

Teorema

Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ então $\boxed{A I_n = A \text{ e } I_m A = A}$

Propriedades:

- é associativa: $(AB)C = A(BC)$
- é distributiva à direita $(A+B)C = AC + BC$
- é distributiva à esquerda $C(A+B) = CA + CB$
- $(kA)B = A(kB) = k(AB)$



Notas

- Para duas matrizes A e B não quadradas, temos:
 $AB \neq BA$
- Para duas matrizes A e B quadradas geralmente, temos:
 $AB \neq BA$
- Se duas matrizes A e B comutarem elas necessariamente são quadradas e de mesma ordem.
- A implicação $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$ é falsa

Exemplo

$$1^o) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Quando A e B são tais que $AB = BA$, dizemos que A e B comutam. Notemos que uma *condição necessária para A e B comutarem é que sejam quadradas de mesma ordem.*

Se A e B são matrizes comutáveis então valem as igualdades:

$$\begin{cases} (A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \\ (A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 \\ (A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 \\ (AB)^n = A^n B^n \end{cases}$$

8. MATRIZ TRANSPOSTA

Para encontrarmos matriz transposta A^t de uma matriz A é só transformamos cada linha da matriz A em uma coluna.

Exemplo

$$1^o) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(kA)^t = kA^t$
- $(AB)^t = B^t A^t$



9. MATRIZ SIMÉTRICA

Chama-se de matriz simétrica toda matriz quadrada A , de ordem n , tal que

$$A^t = A$$

Isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são iguais.

Exemplo

$$1^\circ) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} = A$$

Define-se como matriz antissimétrica toda matriz quadrada A , de ordem n , tal que

$$A^t = -A$$

Isto é, os elementos simetricamente dispostos em relação à diagonal principal são opostos.

Exemplo

$$1^\circ) A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \\ -5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

10. MATRIZES INVERSÍES

Definição

Dada uma matriz inversível A , chama-se inversa de A a matriz A^{-1} (que é única) tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

$$A^{-1} \cdot A = I_n$$

É evidente que A^{-1} deve ser quadrada de ordem n , pois A^{-1} comuta com A .

Se A não é inversível, dizemos que A é uma *matriz singular*.

Aplicações

Sendo A , B e C matrizes inversíveis de ordem n , isole o X a partir de cada equação abaixo:

a) $AX = B$

b) $AXB = I_n$

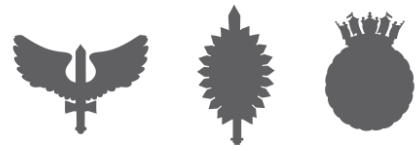
c) $(AX)^{-1} = B$

d) $BAX = A$

e) $(AX)^t = B$

f) $(A + X)^t = B$

g) $AXB = C$



DETERMINANTES

1. DEFINIÇÃO DE DETERMINANTE DE ORDEM ≤ 3

1.1 Se M é uma matriz de ordem $n = 1$, então o $\det M$ é o único elemento de M .

$$M = [a_{11}] \Rightarrow \det M = |a_{11}| = a_{11}$$

Exemplo

$$M = [-2] \Rightarrow \det M = |-2| = -2$$

1.2 Se M é uma matriz de ordem $n = 2$, então o $\det M$ é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\det M = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 4$$

1.3 Se M é uma matriz de ordem $n = 3$, então o $\det M$ é calculado pela Regra de Sarrus.

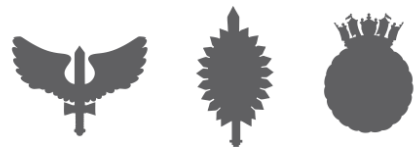
$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det M = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Exemplo

$$1^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{matrix} = 3 + 4 + 6 - 6 - 3 - 4 = 0$$



2. MATRIZ VANDERMONDE (OU DAS POTÊNCIAS)

Chamamos de matriz de Vandermonde, ou das potências, toda matriz de ordem $n \geq 2$, do tipo, por exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{bmatrix} \quad \det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{vmatrix} = (y-x) \cdot (z-x) \cdot (z-y) \cdot (w-x) \cdot (w-y) \cdot (w-z)$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = (3-2) \cdot (4-2) \cdot (4-3) = 2$$

3. TEOREMA FUNDAMENTAL (DE LAPLACE)

O determinante da matriz M , de ordem $n \geq 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det M = a_{1n} C_{1n} + a_{2n} C_{2n} + \dots + a_{nn} C_{nn}$$

Exemplo

$$1^\circ) M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det M = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

cofator de a_{11}
cofator de a_{12}
cofator de a_{13}
cofator de a_{14}

Nota

O Teorema de Laplace torna-se prático quando pegamos uma fila qualquer (linha ou coluna) com a maior quantidade de zeros possíveis.



4. PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

4.1 Matriz transposta

Se M é uma matriz de ordem n e M^t sua transposta, então

$$\det M^t = \det M$$

Exemplos

$$1^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \underline{-3}$$

$$2^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \underline{9}$$

4.2 Fila nula

Se os elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) de uma matriz M de ordem n forem todos nulos, então

$$\det M = 0$$

Exemplos

$$1^\circ) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \underline{0}$$

$$2^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 5 & x & 0 \\ 3 & 7 & y & 0 \\ 4 & -2 & z & 0 \\ 2 & 3 & t & 0 \end{vmatrix} = \underline{0}$$

4.3 Multiplicação de uma fila por uma constante

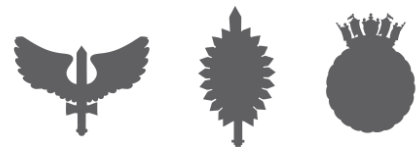
Se multiplicarmos uma fila qualquer de uma matriz M de ordem n por um número K , o determinante da nova matriz M' obtida será o produto K pelo determinante de M , isto é,

$$\det M' = k \det M$$

Exemplos

$$1^\circ) \begin{vmatrix} 7 & 14 & 49 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$2^\circ) \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 10 & 28 & 8 \\ 15 & 7 & 16 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 140 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$



Nota

Se A é uma matriz de ordem n , então

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det M$$

4.4 Trocas de filas paralelas

Seja M uma matriz de ordem $n \geq 2$. Se trocarmos de posição duas filas paralelas (duas linhas ou colunas), obteremos uma nova matriz M' tal que

$$\det M' = -\det M$$

Exemplos

$$1^\circ) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = \underline{22} \Rightarrow \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \underline{-22}$$

$$2^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \underline{-37} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \underline{37}$$

4.5 Filas paralelas iguais

Se uma matriz M de ordem $n \geq 2$ tem duas filas paralelas (duas linhas ou colunas) formadas por elementos respectivamente iguais, então

$$\det M = 0$$

Exemplos

$$1^\circ) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & 1 \\ 7 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \underline{0}$$

$$2^\circ) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 4 & 7 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \underline{0}$$

4.6 Filas proporcionais

Se uma matriz M de ordem $n \geq 2$ tem duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) formadas por elementos respectivamente proporcionais, então

$$\det M = 0$$

Exemplo

$$1^\circ) \begin{vmatrix} 1 & 2x & x \\ 2 & 2y & y \\ 3 & 2z & z \end{vmatrix} = \underline{0}$$



4.7 Matriz Triangular

Chamamos de *matriz triangular* a matriz M quadrada de ordem n cujos elementos situados “de um mesmo lado” da diagonal principal são iguais a zero. O determinante da matriz triangular é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Aplicando-se sucessivamente o teorema de Laplace, através da 1ª linha, é imediato que:

$$\det M = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Exemplos

$$1^{\circ}) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 1 = \underline{15}$$

$$2^{\circ}) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 = \underline{36}$$

Nota

O determinante de uma matriz diagonal é calculado da mesma forma que o determinante da matriz triangular.

Exemplos

$$1^{\circ}) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot 1 = \underline{15}$$

4.8 Teorema de Binet

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n , então:

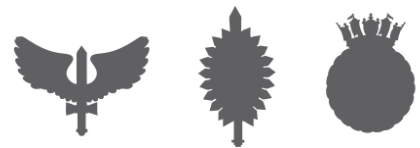
$$\boxed{\det (A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)}$$

Consequência

$$A^{-1} \cdot A = I_n \Rightarrow \det (A^{-1} \cdot A) = \det I_n \therefore \det (A^{-1}) \cdot \det (A) = 1$$

$$\boxed{\det (A^{-1}) = \frac{1}{\det (A)}}$$

Desse modo, uma matriz A só admite inversa se e somente si o $\boxed{\det (A) \neq 0}$.



5. TEOREMA DE JACOBI

Adicionando a uma fila de uma matriz M , de ordem n , uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz M' , tal que

$$\det M' = \det M$$

Exemplos

$$1^{\circ}) -3C_1 + C_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \cdot (-3) + 3 & 5 \\ 4 & 4 \cdot (-3) + 2 & 7 \\ 4 & 4 \cdot (-3) + 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & -10 & 7 \\ 4 & -11 & -6 \end{vmatrix}$$

$$2^{\circ}) \begin{matrix} -L_4 + L_1 \\ -3L_4 + L_2 \\ -2L_4 + L_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \cdot (-1) + 1 & 3 \cdot (-1) + 2 & 3 \cdot (-1) + 3 & 5 \cdot (-1) + 4 \\ 1 \cdot (-3) + 3 & 3 \cdot (-3) - 2 & 3 \cdot (-3) + 5 & 5 \cdot (-3) + 7 \\ 1 \cdot (-2) + 2 & 3 \cdot (-2) + 1 & 3 \cdot (-2) + 4 & 5 \cdot (-2) + 6 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -11 & -4 & -8 \\ 0 & -5 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

6. REGRA DE CHIÓ

Como consequência do teorema de Jacobi, veremos agora um processo útil bastante prático, para reduzirmos em uma unidade a ordem de um determinante de ordem $n \geq 2$ e que apresenta pelo menos um elemento igual a 1, sem alterá-lo, e facilitar seu cálculo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1-2 \cdot 1 & 2-1 \cdot 1 & 1-3 \cdot 1 \\ 1-2 \cdot 2 & 1-1 \cdot 2 & 2-3 \cdot 2 \\ 2-2 \cdot 1 & 1-1 \cdot 1 & 1-3 \cdot 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \underline{-8}$$



SISTEMAS LINEARES

1. INTRODUÇÃO

1.1 Equação linear

Chamamos de equação linear, nas incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ toda equação do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b$.

Os números $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$, todos reais, são chamados de *coeficientes* e b , também real, é o termo independente da equação.

Exemplos

1º) $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 = 5$

2º) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$

3º) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 4$

4º) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$

1.2 Solução de uma equação linear

Dizemos que a sequência ou ênupla ordenada de números reais é solução da equação linear

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

É uma solução da equação linear

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b.$$

se $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b$ for uma sentença verdadeira.

Exemplos

1º) Seja a equação linear $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3$

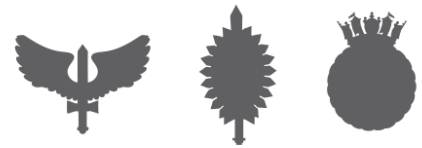
Tem como solução a sequência $(1, 2, 3, -2) \Rightarrow 2(1) + 3(2) - (3) + (-2) = 3$ é sentença verdadeira

2º) Seja a equação linear $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$

Tem como solução qualquer tripla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \Rightarrow 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0$

3º) Seja a equação linear $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2$

Qualquer quadrupla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ não satisfaz a equação $\Rightarrow 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + 0\alpha_4 = 2$



Nota

Se um sistema admite pelo menos uma solução ele é **possível** e caso não tenha nenhuma solução ele é **impossível**.

1.5 Sistema linear homogêneo

Chamamos de sistema linear homogêneo todo aquele que o termo independente de todas as equações vale **zero**.

Exemplo

$$1^\circ) S \begin{cases} 3x + 4y + z = 0 \\ 3x - y - 3z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Notas

Um sistema linear homogêneo admite sempre como solução Trivial a sequência (0,0,0,...,0). Logo este sistema nunca será impossível.

Um sistema linear homogêneo pode ser classificado apenas como:

Possível e determinado: tem como única solução a sequência (0,0,0,...,0)

Possível e indeterminado: infinitas soluções

2. TEOREMA DE CRAMER

Consideremos um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas. Nestas condições a matriz incompleta é quadrada.

Para facilitar a compreensão do Teorema de Cramer, vamos usar o sistema abaixo:

$$S \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D}}$$



De acordo com o Teorema de Cramer um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas poderá ser

$$\text{Sistema} \begin{cases} \text{Possível Determinado (Única solução)} \Rightarrow D \neq 0 \\ \text{Possível Indeterminado (Infinitas soluções)} \Rightarrow D = D_x = D_y = D_z = 0 \\ \text{Impossível (Nenhuma solução)} \Rightarrow D = 0 \text{ e } D_x \neq 0, D_y \neq 0 \text{ e } D_z \neq 0 \end{cases}$$



T.01 (EFOMM) O determinante da matriz $A = (a_{ij})$, de ordem 2, onde: $a_{ij} = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2i-j}\right), i = j \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{i+j}\right), i \neq j \end{cases}$ é

igual a:

- a) $1/3$
- b) $-1/3$
- c) -3
- d) 3
- e) -1

T.02 (EFOMM) Seja $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ uma matriz quadrada de ordem 3, onde cada termo é dado pela lei $a_{ij} = \begin{cases} -i+j, \text{ se } i+j \text{ é par} \\ i-j, \text{ se } i+j \text{ é ímpar} \end{cases}$. Pode-se afirmar que o valor de $\det A$ é:

- a) 0
- b) -12
- c) 12
- d) 4
- e) -4

T.03 (EFOMM) Sejam A, B e C matrizes de ordem 3×3 inversíveis tais que $\det A^{-1} = 3$ e $\det\left((AB)^{-1} + \frac{1}{2}I\right) = 4$. Sabendo-se que I é a matriz identidade de ordem 3, tal que

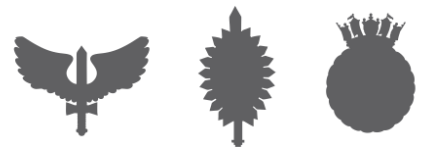
$I = -3C^{-1}(2B^{-1} + A)^t$, o determinante de C é igual a

- a) $-8/3$
- b) $-32/3$
- c) -9
- d) -54
- e) -288

T.04 (AFA) Sejam a e b números positivos tais que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

vale 24. Dessa forma o determinante da matriz $\begin{bmatrix} \sqrt{b} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{a} \end{bmatrix}$ é igual a:

- a) 0
- b) 6
- c) -6
- d) $\sqrt{6}$



T.05 (AFA) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ \cos x & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Considere a função $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por

$f(x) = \det A$ Sobre a função $g: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $g(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot |f(x)|$, em que $|f(x)|$ é o módulo de $f(x)$, é correto afirmar que

- a) possui período π
- b) seu conjunto imagem é $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$
- c) é par.
- d) é crescente no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

T.06 (AFA) A solução do sistema $\begin{cases} \frac{x-y}{2} - \frac{x-y}{6} + \frac{x-y}{18} + \dots = -1 \\ 3x - y = -2 \end{cases}$ é tal que $x + y$ é igual a

- a) $\frac{11}{3}$
- b) $\frac{10}{3}$
- c) $-\frac{7}{3}$
- d) $-\frac{8}{3}$

T.07 (AFA) Considere A, B, C e X matrizes quadradas de ordem n e inversíveis. Assinale a alternativa FALSA.

- a) $(A^{-1})^{-1} = A$
- b) $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
- c) $AXC = B \Rightarrow X = A^{-1}C^{-1}B$
- d) $\det(2AB^{-1}) = 2^n \frac{\det A}{\det B}$

T.08 (AFA) Seja A a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ Sabe-se que $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ vezes}}$. Então, o determinante da

matriz $S = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{11}$ é igual a

- a) 1
- b) -31
- c) -875
- d) -11



T.09 (AFA) Considere as funções reais f e g definidas por: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & \cos(2x) \\ 2\text{sen}(2x) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$,

$g(x) = \frac{1}{2} - f(x)$ e marque a alternativa INCORRETA.

- a) O conjunto imagem da função f é o intervalo $[0,1]$
- b) A função g é ímpar.
- c) A função real h definida por $h(x) = -\frac{1}{2} + g(x)$ possui duas raízes no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- d) O período da função real j definida por $j(x) = \left| -\frac{1}{2} + g(x) \right|$ é $\frac{\pi}{2}$

T.10 (AFA) O sistema linear nas incógnitas x , y e z abaixo possui uma infinidade de soluções.

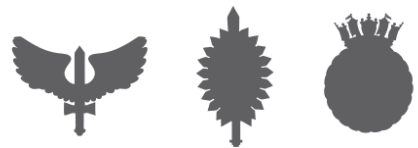
$$\begin{cases} (\text{sena})x + y - z = 0 \\ x - (\text{sena})y + z = 1 \\ x + y = \text{cosa} \end{cases}$$

Sobre o parâmetro a , $a \in \mathfrak{R}$, pode-se afirmar que

- a) $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- b) $a = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- c) $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- d) $a = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

T.11(AFA) Considere as matrizes A e B , inversíveis e de ordem n , bem como a matriz identidade I . Sabendo que $\det(A) = 5$ e $\det(I \cdot B^{-1} \cdot A) = \frac{1}{3}$, então o $\det \left[3(B^{-1} \cdot A^{-1})^t \right]$ é igual a

- a) $5 \cdot 3^n$
- b) $\frac{3^{n-1}}{5^2}$
- c) $\frac{3^n}{15}$
- d) 3^{n-1}



T.12 (AFA) Uma montadora de automóveis prepara três modelos de carros, a saber:

MODELO	1	2	3
CILINDRADA (em litro)	1.0	1.4	1.8

Essa montadora divulgou a matriz abaixo em que cada termo a_{ij} representa a distância percorrida, em km, pelo modelo i , com um litro de combustível, à velocidade $10j$ km/h.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7,6 & 7,2 & 8,9 & 8,2 & 11 & 10 & 12 & 11,8 \\ 5 & 7,5 & 7 & 8,5 & 8 & 10,5 & 9,5 & 11,5 & 11 \\ 3 & 2,7 & 5,9 & 5,5 & 8,1 & 7,4 & 9,8 & 9,4 & 13,1 \end{bmatrix}$$

Com base nisso, é correto dizer que

- a) para motoristas que somente trafegam a 30 km/h, o carro 1.4 é o mais econômico.
- b) se durante um mesmo período de tempo um carro 1.4 e um 1.8 trafegam a 50 km/h, o 1.4 será o mais econômico.
- c) para motoristas que somente trafegam a velocidade de 70 km/h, o carro 1.8 é o de maior consumo.
- d) para motoristas que somente trafegam a 80 km/h, o carro 1.0 é o mais econômico.

T.13 (AFA) Sejam A uma matriz quadrada de ordem 3, $\det A = d$, $\det(2A \cdot A^t) = 4k$, onde A^t é a matriz transposta de A , e d é a ordem da matriz quadrada B . Se $\det B = 2$ e $\det 3B = 162$, então o valor de $k + d$ é:

- a) 4
- b) 8
- c) 32
- d) 36

T.14 (AFA) O valor do determinante de uma matriz de ordem n é 21. Se dividirmos a segunda linha desta matriz por 7 e multiplicarmos a matriz por 3, o valor do novo determinante será:

- a) $3n$
- b) 3^{n+1}
- c) 3^n
- d) 3^{n+3}

T.15 (EN) A equação

$$\begin{vmatrix} \sin^2 x & 1 & \sec^2 x \\ 1 & \cos^2 x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{31}{16}$$

Com $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ possui como solução o volume de uma pirâmide com base hexagonal de lado l e altura $h = \sqrt{3}$. Sendo assim, é correto afirmar que o valor de l é igual a:

- a) $\sqrt{\frac{2\pi^2}{9}}$
- b) $\sqrt{\frac{\pi}{18}}$
- c) $\sqrt{\frac{8\pi}{9}}$
- d) $\sqrt{\frac{32\pi}{9}}$
- e) $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$



T.16 (EN) Se $a = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{3 - \sqrt{2}}$ seja k o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{bmatrix},$$

sendo assim, é correto afirmar que o coeficiente de x^{k-1} no desenvolvimento de

$$\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^3 \text{ é}$$

- a) 21
- b) 22
- c) 23
- d) 24
- e) 25