Jakson Da Cruz Pereira

Médias: Aritmética, Geométrica e Harmônica

CAMPINAS
2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

JAKSON DA CRUZ PEREIRA

MÉDIAS: ARITMÉTICA, GEOMÉTRICA E HARMÔNICA

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Antônio Carlos do Patrocinio

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO JAKSON DA CRUZ PEREIRA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. ANTÔNIO CARLOS DO PATROCINIO.

Assinatura do Orientador

Patrocinio

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

P414m

Pereira, Jakson Da Cruz, 1981-
Médias : aritmética, geométrica e harmônica / Jakson Da Cruz Pereira. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Antônio Carlos do Patrocinio.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Desigualdades (Matemática). 2. Média (Matemática). 3. Aritmética. I. Patrocinio, Antônio Carlos do,1941-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Means : arithmetic, geometric and harmonic
Palavras-chave em inglês:
Inequalities (Mathematics)
Average
Arithmetics
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Antônio Carlos do Patrocinio [Orientador]
Anamaria Gomide
Roberto Ribeiro Paterlini
Data de defesa: 14-05-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 14 de maio de 2014 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____

Prof.(a). Dr(a). ANTÔNIO CARLOS DO PATROCINIO

____

Prof.(a). Dr(a). ANAMARIA GOMIDE

____

Prof.(a). Dr(a). ROBERTO RIBEIRO PATERLINI

Abstract

This dissertation is dedicated to the study of the arithmetic, geometric and harmonic means. Initially, we defined each of the means and applied its uses through problem resolution. Afterwards, we gave emphasis to the inequalities between the means and its uses.

Keywords: Inequalities, Means, Uses.

Resumo

O presente trabalho se dedica ao estudo das médias aritmética, geométrica e harmônica. Inicialmente, definimos cada uma das médias e trabalhamos suas aplicações através da resolução de problemas. Posteriormente destacamos as desigualdades entre as médias e suas aplicações.

Palavras-chave: Desigualdades, Médias, Aplicações.

Sumário

Dedico este trabalho à

minha mãe Milene.

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Doutor Antônio Carlos Patrocínio, pela proposta e ajuda na elaboração do trabalho.

À Capes, pelo apoio financeiro que contribuiu muito para a realização desse projeto.

À minha namorada Luciana, pela grande ajuda na parte final da dissertação.

À minha família do Maranhão, pela compreensão da minha ausência.

À minha família de Campinas, tios, padrinhos, primos, vô e especialmente minha mãe Milene e meu Irmão Douglas.

Aos amigos da turma de mestrado, especialmente Gláucia e Marília, pelos momentos passados juntos.

Aos amigos e companheiros de trabalho da escola Nísia Floresta, pela compreensão e incentivo.

A todos os outros amigos...

Lista de Ilustrações

Introdução

Analisando os conteúdos programáticos das coleções aprovadas no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) 2014 para os anos finais do ensino fundamental [1], constatamos que a maioria delas tratam o assunto média explorando somente conteúdos referentes às médias aritmética simples e ponderada e não citam as médias geométrica e harmônica.

Em relação aos conteúdos programáticos das sete coleções aprovadas no PNLD 2012 [2] para o ensino médio, constatamos que a ênfase dada ao assunto média, é novamente dedicada às médias aritmética simples e a média aritmética ponderada.

Devido a essa abordagem feita nos livros, conseguimos entender melhor o processo de generalização que as pessoas fazem quando se deparam com problemas que envolvem médias. Sem muita reflexão, elas aplicam o algoritmo da média aritmética acreditando terem resolvido a questão. Por exemplo, considere o problema retirado do livro *A Matemática do ensino Médio volume 2* [3].

Problema: *Uma empresa aumentou sua produção durante o primeiro bimestre do ano passado. Em janeiro e em fevereiro, as taxas de aumento foram de 21% e 8%, respectivamente. Qual foi a taxa média de aumento mensal nesse bimestre?*[4]

A maioria das pessoas responderia calculando a média aritmética, somando 21% com 8%, dividindo o resultado por 2 e obtendo a resposta 14,5%. Entretanto, como veremos no decorrer desse trabalho, essa resposta está errada e esse problema seria melhor resolvido com o auxílio da média geométrica.

Apesar de serem negligenciadas, as médias geométrica e harmônica se constituem como instrumentos de fundamental importância no cotidiano. Por exemplo, em cálculos envolvendo matemática financeira, velocidade média, custo médio de bens comprados com uma quantia fixa, etc.

No capítulo 1 desse trabalho, destacaremos aspectos conceituais das médias, definindo cada uma e finalizaremos apresentando suas aplicações.

Em vários sites das companhias de energia elétrica, consta que se não for possível ter acesso ao medidor de energia da residência, o faturamento da conta será feito pela média de consumo dos últimos doze meses. A questão é que, em muitos desses sites, a princípio, não se especifica qual é o tipo de média a ser usado. Pesquisando um pouco mais, descobrimos que a média utilizada é a aritmética. No capítulo 2, entenderemos porque quando se trata de cobrar o consumidor, é utilizada a média aritmética. Nesse mesmo capítulo provaremos o teorema da desigualdade das médias e apresentaremos, também, suas diversas aplicações.

No capítulo 3, deixaremos sugestões de problemas, para que possam ser aplicados os conceitos desenvolvidos nessa dissertação.

Por meio desse estudo, pretendemos fornecer um material de apoio aos professores que desejam ensinar aos seus alunos um conceito mais amplo de média, assim como proporcionar aos mesmos um importante contato com as médias geométrica e harmônica e suas aplicações, tendo em vista que essas médias constam nos conteúdos programáticos dos principais vestibulares do país.

Capítulo 1

Definições e Aplicações

1.1 Média Aritmética Simples

Dada uma lista de n > 1 números reais, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, a média aritmética A é definida pela igualdade:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3.... + x_n}{n}. \tag{1.1.1}$$

Propriedade: A média aritmética preserva a soma dos números da lista.

Isto é, se substituirmos cada número $x_1, x_2, x_3...., x_n$ por A temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = n.A = \underbrace{A + A + A + ... + A}_{n \quad vezes}.$$

Esta é a média mais simples de ser calculada. Basta somarmos os números da nossa lista e, em seguida, dividirmos o resultado pela quantidade de números da mesma.

Exemplo: Qual é a média arimética dos números 4, 9, 12 e 20?

Solução:

$$A = \frac{4 + 9 + 12 + 20}{4} = \frac{45}{4} = 11,25.$$

Observe que a soma dos números é $4 + 9 + 12 + 20 = 45$ e se substituirmos cada um desses números pela média A teremos $11,25 + 11,25 + 11,25 + 11,25 = 45$. Ou seja, como definido acima, a média aritmética preserva a característica da soma.

1.2 Média Aritmética Ponderada

Na média aritmética simples, cada número possui exatamente a mesma importância ou mesmo peso. Se temos uma lista de números que possuem importância relativa, ou pesos diferentes, devemos utilizar uma média que considere esses pesos. Essa é a media aritmética ponderada.

Dada uma lista de n>1 números reais $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, com pesos respectivamente iguais a $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$, a média aritmética ponderada P é dada pela igualdade:

$$P = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + ... + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n}. \tag{1.2.1}$$

Exemplo: Numa avaliação bimestral constituída de duas provas, um aluno tirou nota 6 na primeira, que tinha peso 2 e nota 4 na segunda, que tinha peso 3. Qual foi a média obtida pelo aluno?

Solução:

$$P = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot 4}{2 + 3} = \frac{24}{5} = 4,8.$$

1.3 Média Geométrica

Dada uma lista de n > 1 números reais positivos, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, a média geométrica G é definida pela igualdade:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 ... \cdot x_n} \tag{1.3.1}$$

Propriedade: A média geométrica preserva o produto dos números da lista.

Isto é, se substituirmos cada número $x_1, x_2, x_3 ...., x_n$, por G temos:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n = G^n = \underbrace{G.G.G....G}_{n \quad vezes}.$$

Exemplo: Qual a média geométrica dos números 3, 6 e 12?

Solução:

$$G = \sqrt[3]{3 \cdot 6 \cdot 12} = \sqrt[3]{216} = 6$$

.

Observe que o produto dos números é $3 \cdot 6 \cdot 12 = 216$ e se substituirmos cada um desses números pela média G teremos $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Ou seja, como definido acima, a média geométrica preserva a característica do produto.

1.4 Média Harmônica Simples

Dada uma lista de n > 1 números reais positivos, $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, a média harmônica H é definida pela igualdade:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + ... + \frac{1}{x_n}}. \tag{1.4.1}$$

Propriedade: A média harmônica preserva a soma dos inversos dos números da lista.

Isto é, se substituirmos cada número $x_1, x_2, x_3...., x_n$, por H teremos:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + ... + \frac{1}{x_n} = n.\frac{1}{H} = \underbrace{\frac{1}{H} + \frac{1}{H} + \frac{1}{H} + ... + \frac{1}{H}}_{n \quad vezes}.$$

Exemplo: Qual a média harmônica dos números 1, 2, e 10?

Solução:

$$H = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}} = \frac{3}{\frac{10+5+1}{10}} = \frac{3}{\frac{16}{10}} = \frac{3.10}{16} = \frac{15}{8} = 1,875.$$

Observe que a soma dos inversos dos números é

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{10+5+1}{10} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

e se substituirmos cada um desses números pela média H teremos

$$\frac{1}{\frac{15}{8}} + \frac{1}{\frac{15}{8}} + \frac{1}{\frac{15}{8}} = \frac{8}{15} + \frac{8}{15} + \frac{8}{15} = \frac{3.8}{15} = \frac{8}{5}.$$

Ou seja, como definido acima, a média harmônica preserva a característica da soma dos inversos dos números da lista.

1.5 Aplicações

Nesta seção apresentaremos, através da resolução de problemas, as diversas aplicações envolvendo médias de uma forma geral.

Problema 1: Calcule as médias aritmética A, geométrica G, harmônica H e aritmérica ponderada P (com pesos 1, 2 e 3, respectivamente) dos números 6, 4 e 9.

Solução:

$A = \frac{6+4+9}{3} = \frac{19}{3} \cong 6,33$

$G = \sqrt[3]{6 \cdot 4 \cdot 9} = 6$

$H = \frac{3}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}} = \frac{3}{\frac{6+9+4}{36}} = \frac{3}{\frac{19}{36}} = 3 \cdot \frac{36}{19} = \frac{108}{19} \cong 5,68$

$P = \frac{1 \cdot 6+2 \cdot 4+3 \cdot 9}{1+2+3} = \frac{41}{6} \cong 6,83$

Problema 2: (Fuvest) Numa classe com vinte alunos, as notas do exame final podiam variar de 0 a 100 e a nota mínima para aprovação era 70. Realizado o exame, verificou-se que oito alunos foram reprovados. A média aritmética das notas desses oito alunos foi 65, enquanto que a média dos aprovados foi 77. Após a divulgação dos resultados, o professor verificou que uma questão havia sido mal formulada e decidiu atribuir 5 pontos a mais para todos os alunos. Com essa decisão, a média dos aprovados passou a ser 80 e a dos reprovados 68,8.
a) Calcule a média aritmética das notas da classe toda antes da atribuição dos cinco pontos extras.
b) Com a atribuição dos cinco pontos extras, quantos alunos, inicialmente reprovados, atingiram nota para aprovação?

Solução:

Temos 20 alunos, dos quais 8 foram reprovados e 12 aprovados. Sejam $r_1, r_2, ..., r_8$, os oitos alunos reprovados e $a_1, a_2, ..., a_{12}$, os doze alunos aprovados. Como a média dos reprovados foi 65, temos:

$$\frac{r_1 + r_2 + ... + r_8}{8} = 65 \to r_1 + r_2 + ... + r_8 = 520.$$

Como a média dos aprovados foi 77, temos:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{12}}{12} = 77 \to a_1 + a_2 + ... + a_{12} = 924.$$

a) Seja m a média das notas da classe toda, antes da atribuição dos cinco pontos extras, então:

$$m = \frac{(r_1 + r_2 + ... + r_8) + (a_1 + a_2 + ... + a_{12})}{20} = \frac{520 + 924}{20} = 72,2.$$

b) Seja x o número de alunos reprovados inicialmente e que obtiveram posterior aprovação. Assim o número de alunos reprovados passa a ser $8 - x$ e de aprovados $12 + x$. Seja M a média da sala depois da correção feita pelo professor. O total de pontos da sala foi $520 + 924 + 20 \cdot 5 = 1544$ que dividido pelo total de alunos, fornece $M = 77,2$, mas M também pode ser calculado usando as novas médias dos alunos reprovados e aprovados. Temos $8 - x$ alunos reprovados que geram um total de $(8 - x) \cdot 68,8$ pontos, temos $12 + x$ alunos aprovados que geram $(12 + x) \cdot 80$ pontos. Assim:

$$\frac{(8 - x) \cdot 68,8 + (12 + x) \cdot 80}{20} = 77,2 \rightarrow x = 3$$

Portanto, 3 alunos atingiram nota para aprovação.

Problema 3 [1]**:** Uma empresa aumentou sua produção durante o primeiro bimestre do ano passado. Em janeiro e em fevereiro, as taxas de aumento foram de 21% e 8%, respectivamente. Qual foi a taxa média de aumento mensal nesse bimestre?

Solução: Suponha uma quantia inicial x. Se ela aumenta 21% no primeiro mês, temos: $x + 0,21 \cdot x = 1,21 \cdot x$. Assim $1,21 \cdot x$ é quantia sobre a qual incidirá o aumento do próximo mês 8%. Assim temos:

$$1,21 \cdot x + 0,08 \cdot 1,21 \cdot x = 1,21 \cdot x \cdot 1,08 = 1,3068 \cdot x.$$

Portanto, o aumento bimestral foi de $30,68\%$.

A taxa média i, é aquela que deve ser aplicada igualmente em cada mês a fim de produzir o mesmo aumento bimestral de $30,68\%$. Desse modo, para encontrá-la, basta efetuarmos os mesmos cálculos substituindo as taxas mensais 21% e 8% por $i\%$. Supondo a mesma quantidade inicial x, se ela aumenta $i\%$ no primeiro mês, teremos $x + i \cdot x = x \cdot (1 + i)$. Se essa nova quantia aumenta $i\%$, então teremos: $x \cdot (1 + i) + i \cdot x \cdot (1 + i) = x \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = x \cdot (1 + i)^2$, que, como mostrado acima, tem que ser igual a $1,21 \cdot x \cdot 1,08 = 1,3068 \cdot x$, assim teremos:

[1] Este problema foi citado na página 1 da Introdução.

$$
\begin{aligned}
x \cdot (1+i)^2 &= 1,21 \cdot x \cdot 1,08 \\
(1+i)^2 &= 1,21 \cdot 1,08 \\
1+i &= \sqrt{1,21 \cdot 1,08} \cong 1,1432 \\
i &\cong 1,1432 - 1 \\
i &\cong 0,1432 = 14,32\%
\end{aligned}
$$

Portanto, a taxa média é de 14,32%.

Observação: A taxa média é a média geométrica das taxas acrescidas de uma unidade, de cujo resultado se subtrai um.

Problema 4: Os índices anuais de inflação registrados no Brasil nos anos de 2011, 2012 e 2013 respectivamente foram 6,5%, 5,84% e 5,91%. Qual a taxa média anual de inflação no país nesse período?

Solução: De acordo com a observação acima, devemos primeiramente calcular a média geométrica G das taxas acrescidas de uma unidade:

$$G = \sqrt[3]{(1+0,065) \cdot (1+0,0584) \cdot (1+0,0591)} \cong 1,0608.$$

Basta subtrairmos um da média geométrica G encontrada e teremos a taxa média i:

$$i \cong 1,0608 - 1 = 0,0608 = 6,08\%.$$

Portanto, a taxa média anual de inflação no Brasil nos anos de 2011, 2012 e 2013 foi de aproximadamente 6,08%.

Problema 5: Um carro se desloca da cidade A para a cidade B, com velocidade média de 120 km/h e retorna com velocidade média de 60 km/h. Qual a velocidade média desenvolvida no percurso todo?

Solução: Para muitos a resposta imediata seria dada pelo simples cálculo da média aritmética $(120+60)/2 = 90$ km/h. Mas, como veremos a seguir, essa resposta está errada. Seja d a distância entre as cidades, t_1 o tempo de ida, t_2 o tempo de volta, v_1 a velocidade média na ida, v_2 a velocidade média na volta e v a velocidade média no percurso todo. Temos que $v_1 = d/t_1 \to t_1 = d/v_1$ e $v_2 = d/t_2 \to t_2 = d/v_2$. A velocidade procurada v é dada pelo quociente do espaço total percorrido $2d$ com o tempo total de percurso $t_1 + t_2$, nos fornecendo:

$$v = \frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} = \frac{2d}{d(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2})} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}.$$

Portanto, v é a média harmônica das velocidades v_1 e v_2:

$$v = \frac{2}{\frac{1}{120} + \frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{1+2}{120}} = \frac{2 \cdot 120}{3} = 80\text{km/h}.$$

Problema 6: As torneiras T_1, T_2 e T_3 ligadas sozinhas enchem um tanque em 3 horas, 4 horas e 6 horas respectivamente. Abrindo-se as três torneiras simultaneamente, quanto tempo levará para encher o tanque?

Solução: Considerando que o volume do tanque é x, que v_1, v_2 e v_3 representam as respectivas vazões das torneiras T_1, T_2 e T_3 e lembrando que a vazão é definida como a divisão do volume pelo tempo, temos: $v_1 = x/3$, $v_2 = x/4$ e $v_3 = x/6$. Seja v a vazão simultânea das três torneiras e t o tempo necessário para que as mesmas encham o tanque, temos: $v = x/t \quad (1)$. Sabemos também que $v = v_1 + v_2 + v_3 \quad (2)$. Igualando as equações (1) e (2) obtemos:

$$\frac{x}{t} = \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = x \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) \to \frac{1}{t} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \to t = \frac{4}{3}.$$

Portanto, o tempo necessário é de 4/3 de hora, o que equivale a 1 hora e 20 minutos.

Qual a relação desse problema com as médias? Observe que a média harmônica H dos tempos que as torneiras levam para encher o tanque é:

$$H = \frac{3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{3}{\frac{4+3+2}{12}} = \frac{3}{\frac{9}{12}} = \frac{3 \cdot 12}{9} = 4$$

e que dividindo esse valor por 3 chegamos na resposta do problema. Podemos explicar essa relação notando que na resolução obtivemos a equação:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \to t = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}}$$

que, quando multiplicada pela fração 3/3, fornece:

$$t = \left(\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} \right) \cdot \frac{3}{3} = \left(\frac{3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} \right) \cdot \frac{1}{3} = H \cdot \frac{1}{3} = \frac{H}{3}.$$

Portanto, para resolvermos os clássicos problemas que envolvem as torneiras, basta calcularmos a média harmônica e depois dividirmos o resultado pelo número de torneiras.

Problema 7: Duas torneiras T_1 e T_2 enchem, separadamente, um tanque em 5 horas e 8 horas respectivamente. Uma terceira torneira T_3 leva 10 horas para esvaziar o tanque. Se as três torneiras forem ligadas simultaneamente, quanto tempo levará para o tanque ficar cheio?

Solução: Como vimos acima, basta calcularmos a média harmônica dos tempos e dividirmos o resultado pelo número de torneiras. Um detalhe importante a observarmos antes de efetuarmos os cálculos é a necessidade de considerarmos os tempos das torneiras T_1 e T_2 como positivos, pois elas enchem o tanque e o tempo da torneira T_3 como negativo, pois esta esvazia o tanque. Assim temos:

$$H = \frac{3}{\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{-10}} = \frac{3}{\frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10}} = \frac{3}{\frac{8+5-4}{40}} = \frac{3}{\frac{9}{40}} = 3 \cdot \frac{40}{9} = \frac{40}{3}.$$

Então, o tempo t procurado é:

$$t = \frac{40}{3} \div 3 = \frac{40}{9}$$

que é aproximadamente 4 horas e 26 minutos.

Problema 8: Dada uma reta r, considere dois pontos A e B de r. A partir deles, construimos os segmentos de reta AC e BD de comprimentos a e b respectivamente e perpendiculares a reta r. Ligando-se o ponto C ao ponto B, o ponto D ao ponto A e chamando o ponto de intersecção dos segmentos AD e CB de E (figura 1.1). Prove que a distância de E até a reta r é a metade da média harmônica de a e b.

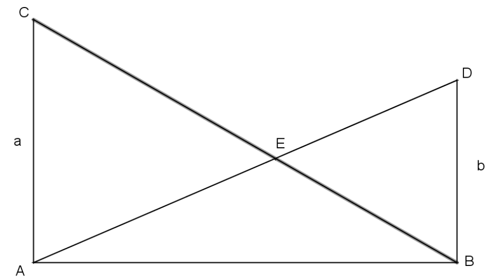

Figura 1.1: Figura do problema 8

Solução: A média harmônica de a e b é:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{a \cdot b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Observe a figura:

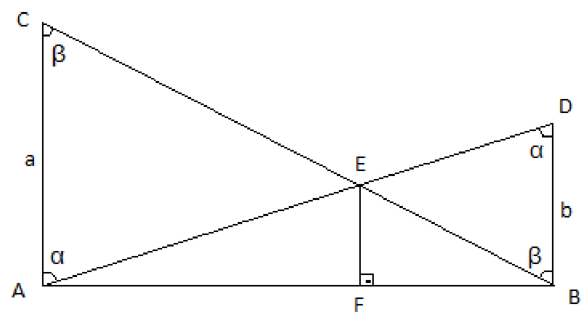

Figura 1.2: Solução do problema 8

Seja $EF = x$ queremos mostrar que

$$x = \frac{H}{2} = \frac{ab}{a+b}.$$

Temos que AF e FB são as respectivas alturas relativas ao vértice E dos triângulos AEC e DEB.

Da semelhança desses triângulos temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{AF}{FB} \qquad (1)$$

Da semelhança dos triângulos ACB e FEB temos:

$$\frac{a}{x} = \frac{AB}{FB} \to \frac{a}{x} = \frac{AF + FB}{FB} = \frac{AF}{FB} + \frac{FB}{FB} = \frac{AF}{FB} + 1 \qquad (2)$$

substituindo (1) em (2) temos:

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{b} + 1 \to \frac{a}{x} = \frac{a+b}{b} \to x = \frac{a \cdot b}{a+b}$$

como queríamos demonstrar.

Problema 9: Prove que a média aritmética A de uma lista de números satisfaz $m \leq A \leq M$, onde m e M são respectivamente o menor e o maior dos números.

Solução: Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_n$ os números da lista então:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Sabemos que $m \leq x_i \leq M$, para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. Assim podemos fazer:

$$\begin{gathered} \mathrm{m} \leq x_1 \leq M \\ \mathrm{m} \leq x_2 \leq M \\ \vdots \\ \mathrm{m} \leq x_n \leq M. \end{gathered}$$

Somando as n inequações obtemos: $n \cdot m \leq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq n \cdot M$, divindo por n:

$$m \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq M \to m \leq A \leq M,$$

como queríamos demonstrar.

Problema 10: Prove que a média geométrica G de uma lista de n números positivos, satisfaz $m \leq G \leq M$, onde m e M são respectivamente o menor e o maior dos números.

Solução: Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_n$ os números da lista então: $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$. Sabemos que $m \leq x_i \leq M$, para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. Assim podemos fazer:

$$\begin{gathered} \text{m} \leq x_1 \leq M \\ \text{m} \leq x_2 \leq M \\ \vdots \\ \text{m} \leq x_n \leq M. \end{gathered}$$

Multiplicando as n inequações obtemos: $m^n \leq x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n \leq M^n$. Como todos os números são positivos podemos extrair a raiz n-ésima da inequação e obtemos: $m \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot_n} \leq M \rightarrow m \leq G \leq M$, como queríamos demonstrar.

Problema 11: Prove que a média harmônica H de uma lista de n números positivos, satisfaz $m \leq H \leq M$, onde m e M são respectivamente o menor e o maior dos números.

Solução: Sejam $x_1, x_2, \cdots, x_n$ os números da lista então:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Sabemos que $m \leq x_i \leq M$,para $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. Como os números são positivos temos:

$$\frac{1}{M} \leq \frac{1}{x_i} \leq \frac{1}{m}.$$

Assim podemos fazer:

$$\frac{1}{M} \leq \frac{1}{x_1} \leq \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{M} \leq \frac{1}{x_2} \leq \frac{1}{m}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{M} \leq \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{m}.$$

Somando as n inequações obtemos:

$$\frac{n}{M} \leq \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq \frac{n}{m},$$

que invertendo implica

$$\frac{m}{n} \leq \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \frac{M}{n},$$

multiplicando a inequação por n obtemos:

$$m \leq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq M \rightarrow m \leq H \leq M,$$

como queríamos demonstrar.

Capítulo 2

Desigualdades das Médias e Aplicações

Nesse capítulo apresentaremos inicialmente a desigualdade das médias artimética A, geométrica G e harmônica H, $A \geq G \geq H$, para dois números reais positivos x_1 e x_2. Mostraremos também que a igualdade entre as médias duas a duas ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2$.

Posteriormente demostraremos o caso geral do teorema das desigualdades das médias e abordaremos suas aplicações através da resolução de problemas.

2.1 Desigualdade das Médias: Caso n=2

Comecemos com um caso particular, calculando as médias dos números 5 e 6.

$$A = \frac{5+6}{2} = 5,5$$

$$G = \sqrt{5 \cdot 6} \cong 5,48$$

$$H = \frac{2}{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}} \cong 5,45.$$

Podemos observar que os resultados obedecem a relação $A \geq G \geq H$. Mostraremos que isso é válido para quaisquer números reais positivos x_1 e x_2 e que a igualdade das médias, duas a duas, ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2$.

Sabemos que $A = (x_1 + x_2)/2$ e que $G = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$. Como x_1 e x_2 são números reais positivos, temos que $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ também são reais positvos. Assim:

$$\begin{aligned}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 &\geq 0\\ x_1 - 2\sqrt{x_1\cdot x_2} + x_2 &\geq 0\\ x_1 + x_2 &\geq 2\sqrt{x_1\cdot x_2}.\end{aligned}$$

Isto é, $(x_1+x_2)/2 \geq \sqrt{x_1\cdot x_2}$. Ou seja, $A \geq G$.

Supondo $A = G$, temos:

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \sqrt{x_1\cdot x_2} \rightarrow x_1 - 2\sqrt{x_1\cdot x_2} + x_2 = 0 \rightarrow (\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2.$$

Agora, provaremos que $G \geq H$. Temos que a média harmônica H é dada por:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}},$$

e seu inverso é:

$$\frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}.$$

Seja A' a média aritmética dos inversos de x_1 e x_2, então $A' = 1/H$. Seja G' a média geométrica dos inversos de x_1 e x_2, então,

$$G' = \sqrt{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}} = \frac{1}{\sqrt{x_1\cdot x_2}} = \frac{1}{G}.$$

Como demonstramos acima, $A' \geq G' \rightarrow 1/H \geq 1/G \rightarrow G \geq H$. Assim, concluímos que $A \geq G \geq H$.

Se $G = H \rightarrow 1/G = 1/H \rightarrow A' = G' \rightarrow 1/x_1 = 1/x_2 \rightarrow x_1 = x_2$. Dessa forma, finalizamos a demonstração para quaisquer dois números reais positivos x_1 e x_2.

2.2 Desigualdade das Médias - Caso Geral

Nessa seção, provaremos o teorema da desigualdade das médias para o caso geral.

Teorema 2.2.1. *Desigualdade das Médias*

Dada uma lista de $x_1, x_2, ..., x_n$, números reais positivos com $n > 1$, e sendo A, G e H as médias aritmética, geométrica e harmônica desses números respectivamente, temos que $A \geq G \geq H$ e a *igualdade entre as médias, duas a duas, ocorre se, e somente se,* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração. Inicialmente, vamos provar que $A \geq G$, com $A = G$ implicando que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. O caso $n = 2$ já foi verificado acima, passemos ao caso $n = 4$. Seja $A = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4$, e aplicando a desigualdade das médias para $(x_1 + x_2)/2$ e $(x_3 + x_4)/2$ temos:

$$
\begin{aligned}
A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} &= \frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2} \\
&\overset{(1)}{\geq} \sqrt{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \cdot \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)} \\
&\overset{(2)}{\geq} \sqrt{\sqrt{x_1 \cdot x_2} \cdot \sqrt{x_3 \cdot x_4}} \\
&= \sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} = G.
\end{aligned}
$$

Se $A = G$ então, por (1) temos:

$$
\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{x_3 + x_4}{2} \quad \text{e} \quad \text{por} \quad (2) \quad \frac{x_1 + x_2}{2} = \sqrt{x_1 \cdot x_2} \quad \text{e} \quad \frac{x_3 + x_4}{2} = \sqrt{x_3 \cdot x_4},
$$

pelo caso $n = 2$, temos $x_1 = x_2$ e $x_3 = x_4$ e como $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, segue que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ como queríamos demonstrar.

Generalizando o procedimento acima, demonstraremos por indução que a desigualdade das médias é válida para qualquer n natural escrito como potência de 2.

Para $n = 2$, já foi demonstrado. Supondo que a desigualdade é válida para $n = 2^j$, queremos provar que ela também é verdadeira para $n = 2^{j+1}$. Observe que $2^{j+1} = 2 \cdot 2^j$. Basta supormos que a desigualdade seja válida para k números reais positivos, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, esses k números forem iguais e provar, a partir daí, que ela é válida para $2k$ números reais positivos, com igualdade novamente ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2k}$. Temos:

$$
\begin{aligned}
\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2k}}{2k} &= \frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}+\frac{x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_{2k}}{k}}{2} \\
&\overset{(1)}{\geq} \sqrt{\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)\cdot\left(\frac{x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_{2k}}{k}\right)} \\
&\overset{(2)}{\geq} \sqrt{\sqrt[k]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_k}\cdot\sqrt[k]{x_{k+1}\cdot x_{k+2}\cdot\cdots\cdot x_{2k}}} \\
&= \sqrt[2k]{x_1\cdot x_2\cdots x_k\cdot x_{k+1}\cdots x_{2k}}.
\end{aligned}
$$

Se $A=G$ então, por (1) temos:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}=\frac{x_{k+1}+x_{k+2}+\cdots+x_{2k}}{k},$$

e por (2) segue que, $x_1=x_2=\cdots=x_k$ e $x_{k+1}=x_{k+2}=\cdots=x_{2k}$. Essas três condições implicam que $x_1=x_2=\cdots=x_k=x_{k+1}=\cdots=x_{2k}$, como queríamos demonstrar.

Para verificar o caso $n=5$, utilizaremos o teorema já demonstrado para a primeira potência de 2 maior que 5, no caso 8. Seja $A=(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)/5$, temos:

$$A=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+A+A+A}{8}\geq\sqrt[8]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot A\cdot A\cdot A},$$

que implica $A^8\geq x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot A\cdot A\cdot A\to A^5\geq x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5$, que nos fornece:

$$A=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}\geq\sqrt[5]{x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot x_5},$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=A$, como queríamos demonstrar.

Generalizando o procedimento utilizado para o caso $n=5$, provaremos que $A\geq G$, para o caso geral.

Para $n>1$ natural, dada uma lista de n números reais positivos, sempre podemos tomar k natural tal que $2^k>n$. Seja $A=(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n$ e aplicando a desigualdade das médias para os 2^k números reais positivos, temos:

$$A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+\underbrace{A+A+\cdots+A}_{(2^k-n)termos}}{2^k}\geq\sqrt[2^k]{x_1\cdot x_2\cdots x_n\cdot\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{(2^k-n)vezes}},$$

elevando os dois lados da desigualdade a 2^k temos:

$$A^{2^k} \geq x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \cdot A^{2^k - n},$$

dividindo ambos os lados da inequação por A^{2^k-n} temos:

$$A^n \geq x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \to A \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} = G,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = A$. Para finalizarmos a demonstração nos resta incluir a média harmônica H.

Temos que a média harmônica de n números reais positivos é dada por:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \to \frac{1}{H} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}.$$

Seja A' a média artimética dos inversos dos números $x_1, x_2, \cdots, x_n$, então $A' = 1/H$. Seja G' a média geométrica dos inversos dos números $x_1, x_2, \cdots, x_n$, então,

$$G' = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\sqrt{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}} = \frac{1}{G}.$$

Pelo teorema da desigualdade das médias temos:

$$A' \geq G' \to \frac{1}{H} \geq \frac{1}{G} \to G \geq H,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se,

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \cdots = \frac{1}{x_n} \leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Assim finalizamos a demonstração do teorema das desigualdades das médias.

$\square$

O teorema das desigualdades das médias nos ajuda a entender o problema, citado na introdução, no qual o consumidor é cobrado com base no uso da média aritmética pois, como acabamos de demonstrar, para números diferentes a média aritmética e sempre maior que a geométrica e a harmônica.

2.3 Aplicações

Nesta seção apresentaremos as diversas aplicações do teorema das desigualdade das médias, através da resolução de problemas.

Problema 1: Se $x > 0$, prove que $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Solução: Como x é positivo, temos que $1/x$ também é positivo. Aplicando a desigualdade das médias para esses dois números, temos:

$$A = \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq G = \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \to \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 1 \to x + \frac{1}{x} \geq 2,$$

como queríamos demonstrar.

Problema 2: Para $x > 0$, qual é o valor mínimo de $y = x^2 + 1/x$?

Solução: Temos que $y = x^2 + 1/2x + 1/2x$ e aplicando a desigualdade $A \geq G$ aos números positivos x^2, $1/2x$ e $1/2x$, temos:

$$\frac{x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \to x^2 + \frac{1}{x} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Portanto, o menor valor de y é $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$, que ocorre quando $x^2 = 1/2x$, que implica, $x = 1/\sqrt[3]{2}$.

Problema 3: Prove que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, para quaisquer x, y e z reais.

Solução: Aplicando a desigualdade $A \geq G$ ao números x^2, y^2, depois x^2, z^2 e por fim z^2 e y^2 temos:

$$(1) \quad \frac{x^2 + y^2}{2} \geq xy, \quad (2) \quad \frac{x^2 + z^2}{2} \geq xz \quad \text{e} \quad (3) \quad \frac{z^2 + y^2}{2} \geq zy.$$

Somando as três inequações acima obtemos:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{x^2 + z^2}{2} + \frac{z^2 + y^2}{2} \geq xy + xz + zy \to x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + zy,$$

como queríamos demonstrar.

Problema 4: Qual o ponto de máximo da função $f(x) = x(2-x)^3$, sendo $x \in (0, 2)$?

Solução: Como $x \in (0, 2)$, então $3x$ e $2-x$, são números reais positivos. Aplicando a desigualdade $A \geq G$ para os números $3x$, $2-x$, $2-x$ e $2-x$. Obtemos:

$$\frac{3x + (2-x) + (2-x) + (2-x)}{4} \geq \sqrt[4]{3x \cdot (2-x)^3} \rightarrow \frac{3}{2} \geq \sqrt[4]{3x \cdot (2-x)^3},$$

que implica

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 \geq 3x \cdot (2-x)^3 \rightarrow \frac{81}{16} \cdot \frac{1}{3} \geq x \cdot (2-x)^3 \rightarrow f(x) \leq \frac{27}{16}.$$

Portanto, o maior valor que $f(x)$ assume para $x \in (0, 2)$ é $27/16 = 1,6875$, que ocorre quando $3x = 2 - x$, ou seja, $x = 0,5$. Assim, o ponto de máximo é dado por $(1/2, 27/16)$.

Problema 5: Se a, b, c e d são números reais positivos, prove que

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geq 16.$$

Solução: Sendo

$$E = (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right),$$

desenvolvendo temos,

$$E = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{a}{d} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1 + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{d}{b} + \frac{d}{c} + 1$$

$$E = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{d} + \frac{d}{c} + \frac{c}{b}\right) + 4.$$

Aplicando a desigualdade $A \geq G$ aos quatro números entre parenteses acima respectivamente, obtemos:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} \rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \quad (1)$$

$$\frac{\frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{a}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a} \cdot \frac{a}{c}} \rightarrow \frac{c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{a}{c} \geq 3 \quad (2)$$

$$\frac{\frac{a}{d} + \frac{d}{b} + \frac{b}{a}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a}{d} \cdot \frac{d}{b} \cdot \frac{b}{a}} \rightarrow \frac{a}{d} + \frac{d}{b} + \frac{b}{a} \geq 3 \quad (3)$$

$$\frac{\frac{b}{d}+\frac{d}{c}+\frac{c}{b}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{b}{d}\cdot\frac{d}{c}\cdot\frac{c}{b}} \rightarrow \frac{b}{d}+\frac{d}{c}+\frac{c}{b} \geq 3 \quad (4).$$

Somando as inequações (1), (2), (3) e (4) temos:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}+\frac{a}{c}+\frac{a}{d}+\frac{d}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{d}+\frac{d}{c}+\frac{c}{b} \geq 12,$$

somando 4 aos dois lados,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}+\frac{a}{c}+\frac{a}{d}+\frac{d}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{d}+\frac{d}{c}+\frac{c}{b}+4 \geq 16,$$

que implica $E \geq 16$ como queríamos demostrar.

Problema 6: A média aritmética de 8 números positivos é igual a 2. Os números são agrupados aos pares e os números de cada par somados, resultando daí um conjunto de 4 números positivos. Mostre que o produto desses quatro números é menor ou igual à 256.

Solução: Temos $(x_1 + x_2 + \cdots + x_8)/8 = 2 \rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 16$. Fazendo $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_3 + x_4$, $y_3 = x_5 + x_6$ e $y_4 = x_7 + x_8$, queremos mostrar que $P = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 \leq 256$. Temos que $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 16$. Aplicando a desiguadade das médias $A \geq G$ para y_1, y_2, y_3 e y_4, obtemos:

$$\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4} \geq \sqrt[4]{y_1\cdot y_2\cdot y_3\cdot y_4} \rightarrow \sqrt[4]{P} \leq \frac{16}{4} = 4 \rightarrow P \leq 256,$$

como queríamos demonstrar.

Problema 7: Se a soma de n números reais positivos é igual a uma constante m, prove que o produto desses números será máximo quando eles forem iguais e determine produto máximo em função de m.

Solução: Pelo enunciado, temos $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$. Sendo $P = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$ e aplicando a desigualdade das médias $A \geq G$, temos:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n} \rightarrow \sqrt[n]{P} \leq \frac{m}{n} \rightarrow P \leq \left(\frac{m}{n}\right)^n.$$

Portanto, o produto P será máximo quando

$$P = \left(\frac{m}{n}\right)^n,$$

que ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = m/n$.

Problema 8: Se $x + y + z = 1$, qual o valor máximo de $P = x \cdot y \cdot z$?

Solução: De acordo com o problema 7, temos que o valor máximo de P é dado por:

$$P = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

que ocorre quando $x = y = z = 1/3$.

Problema 9: Mostre que, entre todos os retângulos de perímetro $2p$, o quadrado é o de maior área.

Solução: Sejam a e b os lados do retângulo, então o perímetro $2p$ é dado por $2p = 2a + 2b$, que implica $p = a + b$. Seja S a área do retângulo, assim $S = a \cdot b$. Pela desigualdade das médias $A \geq G$ temos:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \rightarrow \frac{p}{2} \geq \sqrt{S} \rightarrow S \leq \frac{p^2}{4}.$$

A maior área possível é $S = p^2/4$, que ocorre quando $a = b$, portanto, o retângulo de maior área é um quadrado.

Problema 10: Provar que de todos os triângulos de mesmo perímetro, o triângulo equilátero é o que possui a maior área.

Solução: Consideremos um triângulo qualquer de lados a, b e c, com semiperímetro $p = (a + b + c)/2$. A área S desse triângulo pode ser calculada pela fórmula de Heron:

$$S = \sqrt{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \rightarrow S = \sqrt{p} \cdot \sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}.$$

Como $\sqrt{p}$ é constante, temos que S será máxima quando $\sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ for máxima, o que acontece quando $P = (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)$ for máximo. Considerando os números $p - a$, $p - b$ e $p - c$ temos que a soma desses: $p - a + p - b + p - c = 3p - (a + b + c) = 3p - 2p = p$

que é constante, portanto, de acordo com o problema 7 o produto P desses números será máximo quando $p-a=p-b=p-c=p/3$, que implica $a=b=c=2p/3$, como queríamos demonstrar.

Problema 11: Dado um cilindro circular reto, com volume total V, qual a menor área possível desse cilindro? Que relação deve existir entre o raio da base r do cilindro e sua altura h para que o mesmo tenha a menor área possível?

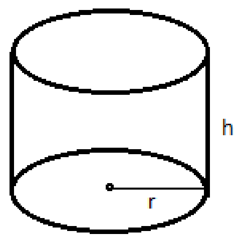

Figura 2.1: Cilindro circular reto

Solução: A área total do cilindro é $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$ e o volume do cilindro é $V = \pi r^2 h$. Aplicando a desigualdade das médias $A \geq G$ para os números πrh, πrh e $2\pi r^2$, temos:

$$\frac{\pi rh + \pi rh + 2\pi r^2}{3} = \frac{S}{3} \geq \sqrt[3]{\pi rh \cdot \pi rh \cdot 2\pi r^2} = \sqrt[3]{(\pi r^2 h) \cdot (\pi r^2 h) \cdot 2\pi},$$

que implica

$$\frac{S}{3} \geq \sqrt[3]{V^2 \cdot 2\pi} \rightarrow S \geq 3\sqrt[3]{V^2 \cdot 2\pi}.$$

Portanto, a menor área possível é $S = 3\sqrt[3]{V^2 \cdot 2\pi}$, que ocorre se, e somente se, $\pi rh = 2\pi r^2 \rightarrow h = 2r$. Ou seja, o cilindro de volume constante com a menor área possível é o cilindro equilátero.

Problema 12: Considerando o paralelepípedo reto-retângulo da figura 2.2, com área lateral fixada L, qual o maior volume possível desse paralelepípedo? Que relação deve existir entre as suas dimensões para que seu volume seja máximo?

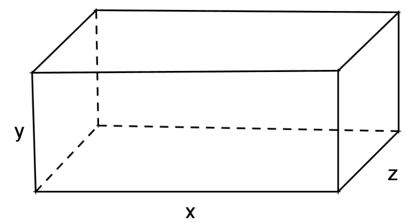

Figura 2.2: Paralelepípedo reto-retângulo

Solução: Temos que a área lateral L é dada por $L = 2(xy+xz+yz)$ e seu volume V por $V = xyz$. Aplicando a desigualdade das médias $A \geq G$ para xy, xz e yz temos:

$$\frac{xy+xz+yz}{3} \geq \sqrt[3]{xy \cdot xz \cdot yz} \rightarrow \frac{L}{6} \geq \sqrt[3]{V^2} \rightarrow V^2 \leq \left(\frac{L}{6}\right)^3 \rightarrow V \leq \sqrt{\left(\frac{L}{6}\right)^3}.$$

Portanto, o maior volume possível é $V = \sqrt{(L/6)^3}$, que ocorre quando $xy = xz = yz$, que implica, $x = y = z$. Ou seja, o paralelepípedo de área lateral constante L e maior volume possível é um cubo.

Problema 13: Considerando o terreno retangular da figura 2.3 , queremos construir um prédio que ocupe a área de 2000 m^2, com recuos de 5m na frente e no fundo e recuo de 4m nas laterais. Quais as dimensões do menor terreno, onde o prédio pode ser construído?

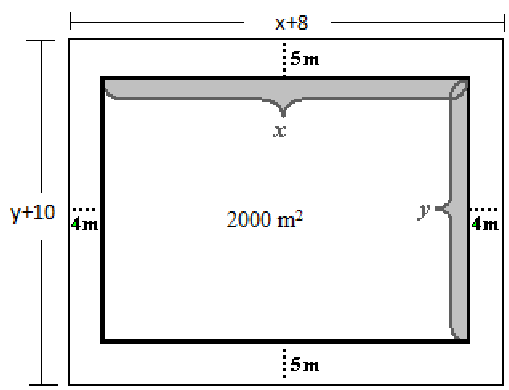

Figura 2.3: Figura do problema 13

Solução: Sendo A_t a área do terreno, temos que $A_t = (y+10)\cdot(x+8) = xy+8y+10x+80$. Como sabemos que $xy = 2000$, então $A_t = 2080 + 8y + 10x$. Portanto, a área do terreno será a menor possível, quando $8y + 10x$ for o menor possível. Aplicando a desigualdade das médias $A \geq G$ nos números $8y$ e $10x$ temos:

$$\frac{8y+10x}{2} \geq \sqrt{8y \cdot 10x} = \sqrt{80 \cdot 2000} = 400 \rightarrow 8y+10x \geq 800.$$

Assim o menor valor possível para $8y+10x$ é 800, que ocorre quando $8y = 10x \rightarrow 4y = 5x$ que substituindo em $8y+10x = 800$, nos fornece $x = 40$ e $y = 50$. Portanto, as dimensões do terreno procurado são: 48 metros de frente e fundo e 60 metros de laterais.

Problema 14: De um quadrado de papelão com lado de 21 cm, subtraímos de cada vértice um quadrado de lado $x < 21$ cm. Dobramos as abas restantes para formar uma caixa cuja a base é um quadrado de lado $21-2x$ e altura x. Qual o volume máximo da caixa? Qual deve ser o valor de x para que o volume da caixa seja máximo?

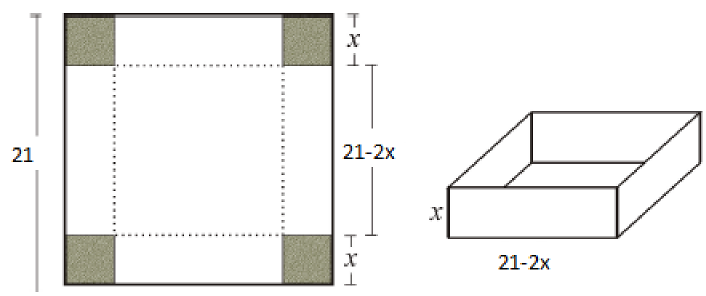

Figura 2.4: Figura do problema 14

Solução: O volume V é dado por $V = (21-2x)\cdot(21-2x)\cdot x$. Aplicando a desigualdade das médias $A \geq G$ para os valores $21-2x$, $21-2x$ e $4x$ temos:

$$\frac{(21-2x)+(21-2x)+4x}{3} \geq \sqrt[3]{(21-2x)\cdot(21-2x)\cdot 4x},$$

que implica

$$\sqrt[3]{4V} \leq \frac{42}{3} = 14 \rightarrow 4V \leq 14^3 \rightarrow V \leq \frac{14^3}{4} = 686.$$

Portanto, o volume máximo da caixa é 686 cm^3, que ocorre quando $21-2x = 4x \rightarrow x = 21/6 = 3,5$ cm.

Problema 15: Qual o perímetro máximo de um retângulo com diagonal d?

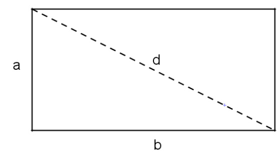

Figura 2.5: Retângulo com diagonal d

Solução: Sejam a e b os lados do retângulo, logo o perímetro $2p$ é dado por $2p = 2a+2b$. Sabemos também que $a^2 + b^2 = d^2$. Aplicando a desigualdade das médias $A \geq G$ em a^2 e b^2, obtemos:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b \rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Somando a^2+b^2 em ambos os lados da desigualdade $a^2+b^2 \geq 2ab$ e depois divindo por 4, obtemos:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{d^2}{2} \rightarrow \frac{a+b}{2} \leq \frac{d}{\sqrt{2}},$$

que implica

$$4 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 4 \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} \rightarrow 2a + 2b \leq 2d\sqrt{2} \rightarrow 2p \leq 2d\sqrt{2}.$$

Portanto, o maior perímetro possível é $2p = 2d\sqrt{2}$, que ocorre quando $a = b$.

Problema 16: Considerando o paralelepípedo reto-retângulo da figura 2.6 e sabendo que a soma de todas as suas arestas medem 12 cm, qual a menor diagonal d possível e quais as dimensões do paralelepípedo para que isso ocorra?

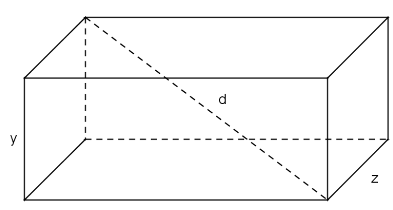

Figura 2.6: Paralelepípedo reto-retângulo

Solução: Sabemos que $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e que $4x + 4y + 4z = 12$, que implica $x + y + z = 3$. Temos que $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) \quad (*)$. Do problema 3, sabemos que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$. Manipularemos essa inequação até que seu lado direito fique igual ao lado direito da equação (*).

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz \qquad (multiplicando \quad por \quad 2)$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2(xy + xz + yz) \quad (somando \quad x^2 + y^2 + z^2)$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \geq x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) \quad (dividindo \quad por \quad 9 \quad e \quad usando \quad (*))$$

$$\frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{9} \geq \frac{(x + y + z)^2}{9}$$

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{3} \geq \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^2,$$

que implica $d^2/3 \geq 1 \rightarrow d \geq \sqrt{3}$. Portanto, a menor diagonal possível de $d = \sqrt{3}$, que ocorre se, e somente se $x = y = z$, como $x + y + z = 3$ temos que $x = y = z = 1$.

Capítulo 3

Sugestões de Atividades

Nesse capítulo forneceremos sugestões de atividades, nas quais podem ser testados os conceitos desenvolvidos nessa dissertação. Outros problemas poderão ser consultados nas referências [3], [6], [7], [8], [11], [12]. As respostas ou sugestões de respostas das atividades se encontram no apêndice A.

Problema 1: Um determinado investimento rende 5% no primeiro ano e 7,5% no segundo. Qual foi a taxa média anual desse investimento?

Problema 2: O Índice FipeZap composto mede a evolução do preço dos imóveis em sete capitais brasileiras. Nos anos de 2011, 2012 e 2013 ele registrou as taxas de 26%, 13,7% e 12,7% respectivamente. Qual foi a taxa média anual da evolução do preço dos imóveis nos anos de 2011, 2012 e 2013 segundo o índice FipeZap composto?

Problema 3: Um carro se desloca da cidade A para a cidade B, com velocidade média de 100 Km/h e retorna com velocidade média de 80 km/h. Qual a velocidade média desenvolvida no percurso todo?

Problema 4: As Bombas B_1, B_2 e B_3 enchem separadamente uma piscina em 5 horas, 6 horas e 8 horas respectivamente. Ligando-se as três bombas simultaneamente, quanto tempo levará para encher o tanque?

Problema 5: Se $x > 0$ prove que $2x + \frac{1}{x} + 4 \geq 6$.

Problema 6: Qual o ponto de máximo da função $f(x) = 2x(1-x)^3$, sendo $x \in (0, 1)$?

Problema 7: Se a,b e c são números reais positivos, prove que

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Problema 8: Se $a+b+c=3$, qual o valor máximo de $P = a \cdot b \cdot c$?

Problema 9: Mostre que, entre todos os retângulos de área S, o quadrado é o de menor perímetro.

Problema 10: Dentre todos os triângulos com perímetro 18 cm, quais as dimensões do triângulo que possui a maior área?

Problema 11: Qual o maior perímetro possível do retângulo com diagonal 10 cm?

Problema 12: (UEG) Um criador de gado leiteiro tem arame suficiente para fazer uma cerca de 500 metros de comprimento. Ele deseja cercar uma área retangular para plantar um canavial, visando fazer ração para o gado, aproveitando esse arame. O local escolhido por ele possui uma cerca pronta que será aproveitada como um dos lados da área a ser cercada. Quais as dimensões dos lados desse canavial para que a área plantada seja a maior possível, se o criador utilizar o arame que possui apenas para os três lados restantes?

Problema 13: (Profmat) A média aritmética de 10 números positivos é igual a 1. Os números são agrupados aos pares e os números de cada par somados, resultando daí um conjunto de 5 números positivos. (a) O que se pode dizer sobre a média aritmética desses 5 números? (b) Mostre que o produto desses 5 números é menor ou igual a 32.

Problema 14: (Profmat) Uma caixa retangular sem tampa tem arestas medindo x, y e z (veja figura 3.1, onde as linhas tracejadas indicam segmentos de arestas obstruídos por alguma face).
(a) Exprima a área e o volume da caixa em função de x, y e z.
(b) Use a desigualdade das médias para mostrar que, se o volume da caixa é igual a 32, então sua área é maior ou igual a 48.
(c) Determine as medidas das arestas da caixa de área mínima com volume igual a 32.

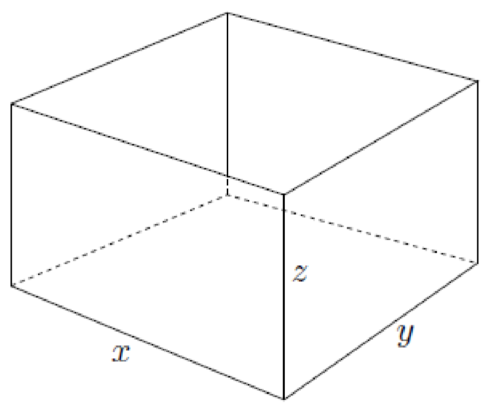

Figura 3.1: Caixa retangular

Problema 15: Considerando o paralelepípedo reto-retângulo da figura 3.2 e sabendo que a soma de todas as suas arestas é 16 cm, qual a menor diagonal d possível e quais as dimensões do paralelepipedo para que isso ocorra?

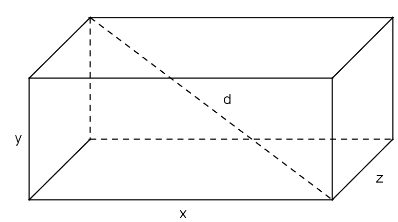

Figura 3.2: Figura do problema 15

Considerações Finais

Esperamos que esse trabalho tenha cumprido seus objetivos, como a ampliação do conceito de médias, as definições e aplicações das médias aritmética, geométrica e harmônica, ressaltando a importância cotidiana que as mesmas possuem.

Desejamos que o teorema da desigualdade das médias possa ter sido completamente assimilado, assim como sua importância e suas diversas aplicações.

Por fim, esperamos que este trabalho possa servir como material de apoio para professores que desejam abordar o tema em suas aulas.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. Ministério da Educação. Fundo Nacional de Deselvolvimento da Educação. *Guia de Livros Didáticos PNLD 2014 Matemática – Anos Finais do Ensino Fundamental*. Brasília, 2013. 104p. Disponível em:http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guia-do-livro/guia-pnld-2014. Acesso em 08/04/2014.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Fundo Nacional de Deselvolvimento da Educação. *Guia de Livros Didáticos PNLD 2012 Matemática – Ensino Médio*. Brasília, 2011. 104p. Disponível em:http:http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guia-do-livro/item/2988-guia-pnld-2012-ensino-médio. Acesso em 16/01/2014.

[3] LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo Cesar Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio Volume 2*. 6. ed. Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[4] Idem, p. 140.

[5] LIMA, Elon Lages. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. 6 ed. Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[6] LIMA, Elon Lages. CARVALHO, Paulo Cesar Pinto. WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto César. *A Matemática do Ensino Médio Volume 4*. Rio de Janeiro, SBM, 2010.

[7] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar: Números reais*. 2. ed. Rio de Janeiro, SBM, 2013. v.1 p. 163-176.

[8] FOMIN, Dimitri. GENKIN, Sergey. ITENBERG, Ilia. *Círculos Matemáticos*. Rio de Janeiro, IMPA, 2010.

[9] WAGNER, Eduardo. *Duas Médias*. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 18, p. 43-47, semestre 1. 1991.

[10] HARIKI, Seiji. *Média Harmônica.* **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 32, p. 17-24, 1996.

[11] SILVA, Luiz Eduardo Landim. *Desigualdade Entre as Médias Geométrica e Aritmética e de Cauchy-Schwarz.* Fortaleza, 2013. Dissertação (Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional)-Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará.

[12] FONTE, André Costa. *Médias, desigualdades e problemas de otimização*. Recife, 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Para a obtenção de título de Mestre em Matemática)- Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Apêndice

Respostas dos problemas do capítulo 3

Nesse apêndice forneceremos as respostas ou sugestões de respostas para as atividades que foram propostas no capítulo 3.

Problema 1: Um determinado investimento rende 5% no primeiro ano e 7,5% no segundo. Qual foi a taxa média anual desse investimento?

Resposta: A taxa foi de aproximadamente 6,24%.

Problema 2: O Índice FipeZap composto, mede a evolução do preço dos imóveis em sete capitais brasileiras. Nos anos de 2011, 2012 e 2013 ele registrou as taxas de 26%, 13,7% e 12,7% respectivamente. Qual foi a taxa média anual da evolução do preço dos imóveis nos anos de 2011, 2012 e 2013 segundo o índice FipeZap composto?

Resposta: A taxa foi de aproximadamente 17,31%.

Problema 3: Um carro se desloca da cidade A para a cidade B, com velocidade média de 100 Km/h e retorna com velocidade de 80 km/h. Qual a velocidade média desenvolvida no percurso todo?

Resposta: Aproximadamente 88,89 km/h.

Problema 4: As Bombas B_1, B_2 e B_3 enchem separadamente uma piscina em 5 horas, 6 horas e 8 horas respectivamente. Ligando-se as três bombas simultaneamente, quanto tempo levará para encher o tanque?

Resposta: Levará aproximadamente 2 horas e 9 minutos.

Problema 5: Se $x > 0$ prove que $2x + \frac{1}{x} + 4 \geq 6$.

Resposta: Aplique a desigualdade das médias para: $2x$, $\frac{1}{x}$ e 4.

Problema 6: Qual o ponto de máximo da função $f(x) = 2x(1-x)^3$, sendo $x \in (0,1)$?

Resposta: O ponto de máximo é $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{768}\right)$.

Problema 7: Se a,b e c são números reais positivos, prove que

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Resposta: Observe que:

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+3.$$

Agora aplique a desigualdade das médias separadamente a cada par de frações entre parenteses e por fim some as três desigualdades obtidas gerando uma única desigualdade na qual somando 3 de cada lado obtemos a demonstração desejada.

Problema 8: Se $a+b+c=3$, qual o valor máximo de $P = a \cdot b \cdot c$?

Resposta: O valor máximo é 1.

Problema 9: Mostre que, entre todos os retângulos de área S, o quadrado é o de menor perímetro.

Resposta: Aplique a desigualdade das médias $A \geq G$ aos lados do retângulo e observe que igualdade ocorre se, e somente se, os lados forem iguais.

Problema 10: Dentre todos os triângulos com perímetro 18 cm, quais as dimensões do triângulo que possui a maior área?

Resposta: Um triângulo equilátero de lado 6 cm.

Problema 11: Qual o maior perímetro possível do retângulo com diagonal 10 cm?

Resposta: O maior perímetro é $20\sqrt{2}$cm.

Problema 12: (UEG) Um criador de gado leiteiro tem arame suficiente para fazer uma cerca de 500 metros de comprimento. Ele deseja cercar uma área retangular para plantar um canavial, visando fazer ração para o gado, aproveitando esse arame. O local escolhido por ele possui uma cerca pronta que será aproveitada como um dos lados da área a ser cercada. Quais as dimensões dos lados desse canavial para que a área plantada seja a maior possível, se o criador utilizar o arame que possui apenas para os três lados restantes?

Resposta: As dimensões são: 125 metros e 250 metros.

Problema 13: (Profmat) A média aritmética de 10 números positivos é igual a 1. Os números são agrupados aos pares e os números de cada par somados, resultando daí um conjunto de 5 números positivos. (a) O que se pode dizer sobre a média aritmética desses 5 números? (b) Mostre que o produto desses 5 números é menor ou igual a 32.

Resposta: (a) É igual a 2.

(b) Aplique a desigualdade das médias $A \geq G$ aos cinco números do item (a).

Problema 14: (Profmat) Uma caixa retangular sem tampa tem arestas medindo x, y e z (veja figura 3.3, onde as linhas tracejadas indicam segmentos de arestas obstruídos por alguma face).
(a) Exprima a área e o volume da caixa em função de x, y e z.
(b) Use a desigualdade das médias para mostrar que, se o volume da caixa é igual a 32, então sua área é maior ou igual a 48.
(c) Determine as medidas das arestas da caixa de área mínima com volume igual a 32.

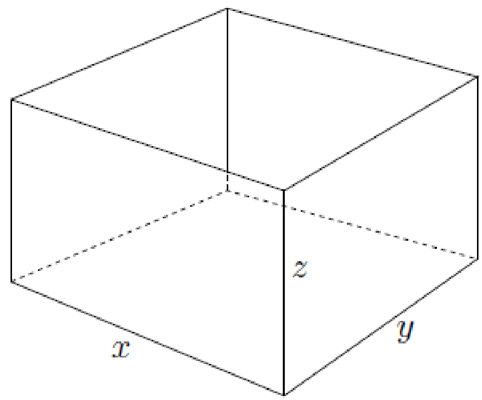

Figura 3.3: Caixa retangular

Resposta: (a) $V = x \cdot y \cdot z$.

(b) Demonstração.

(c) $x = y = 4$ e $z = 2$.

Problema 15: Considerando um paralelepípedo reto-retângulo da figura 3.4, sabendo que a soma de todas as suas arestas medem 16 cm. Qual a menor diagonal d possível e quais as dimensões do paralelepipedo para que isso ocorra?

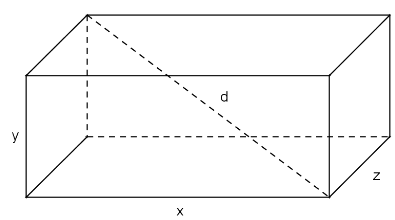

Figura 3.4: Figura do problema 15

Resposta: A menor diagonal possível é $\frac{4\sqrt{3}}{9}$, que ocorre quando $x = y = z = 4/3$.