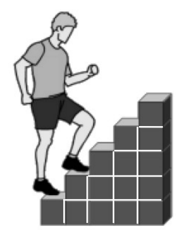
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2014

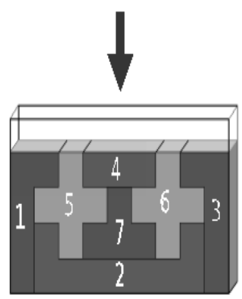
20 de setembro de 2014

Nível Júnior (5^o ano do ensino fundamental)

1. A escada da figura tem cinco degraus e foi construída com cubos. Quantos cubos serão necessários para fazer uma escada com dez degraus?



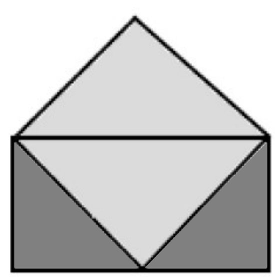
2. As peças foram colocadas na caixa pela parte de cima conforme mostra a figura.



Em que ordem elas foram colocadas?

3. Trinta e um atletas participam de uma corrida. O número de corredores atrás de João é o quádruplo do número de corredores que estão a sua frente. Qual a posição de João?

4. O matemático Fred G. Ninho, muito antenado com os dias atuais, resolveu criar um aplicativo para que os professores de Matemática pudessem se comunicar de maneira secreta. Para isso, ele desenvolveu um algoritmo que só permitiria acesso ao aplicativo para aqueles que descobrissem a área do losango presente no ícone abaixo. A única informação dada por G. Ninho era que o retângulo tinha 2014 cm^2 de área. Qual a área do losango do ícone do aplicativo?



5. Um bloco de madeira, na forma de um paralelepípedo retângulo, tem as seguintes dimensões: 168cm, 112cm e 84cm. Sabendo que esse bloco deve ser cortado em cubos idênticos, sem que haja sobra de material, determine:

   (a) a medida da aresta dos maiores cubos que se podem obter;

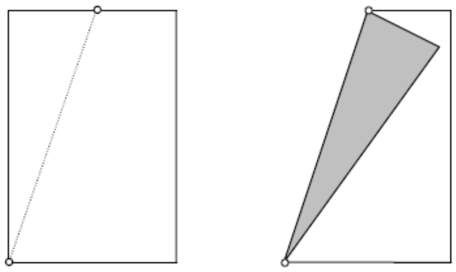
   (b) a menor quantidade possível de cubos resultantes do processo de corte descrito no enunciado.

6. Ao quebrar seu cofre, André contou 360 moedas, das quais, $\frac{1}{2}$ eram de 1 real, $\frac{1}{3}$ de 50 centavos, $\frac{1}{10}$ de 25 centavos e as demais de 10 centavos. Quanto havia no cofre de André?

OMERJ 2014 – Nível 1

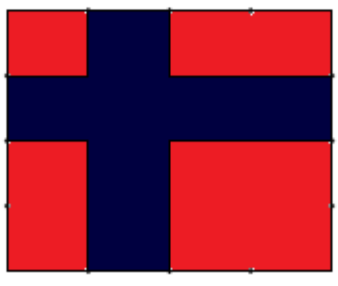
Parte A

1) Uma das grandes paixões da professora Estelita Chapéu de Onça é fazer origamis. Preparando – se para fazer um pequeno pássaro, ela pegou uma folha de papel retangular com um lado branco e outro cinza. Ela fez uma dobra reta que passou em um canto da folha e no ponto médio do lado oposto, sendo a folha dobrada por cima da parte branca, como mostra a figura. Estelita parou a sua obra de arte ao perceber que a área cinza dobrada ocupava uma certa fração em relação à parte branca que restou. Determine essa fração.



2) Após passar anos acumulando riquezas, Rafaelito Galvón reservou uma sala de sua mansão de Caxias para guardar, em doze caixas com mesma aparência externa, suas barras de ouro. Cada barra de ouro tem 1 kg. Sabe-se que nenhuma caixa está vazia. As caixas são repartidas em quatro grupos de três caixas cada e, ao serem pesados, verifica-se que a totalidade de ouro em cada grupo é de 7 kg. Em seguida, as caixas são repartidas em três grupos de quatro caixas cada, e, ao serem pesados, verifica-se que há um grupo com 19 kg de ouro, um com 4 kg e o terceiro com 5 kg. Qual é a maior quantidade de barras de ouro que está colocada em uma caixa de Galvón?

3) O professor Joãozinho Tigre nunca escondeu de ninguém que adorava Geografia nos seus tempos de criança. Ele sempre se orgulhou por conseguir identificar as bandeiras de vários países do mundo todo. Relembrando essa época de ouro, ele rabiscou no quadro uma bandeira retangular com um desenho de uma cruz obtida dividindo – se os lados desse retângulo em 4 partes iguais e traçando – se duas faixas, como mostra a figura. Joãozinho ficou orgulhoso porque sua bandeira estava muito parecida com a da Noruega, que é considerada pela ONU como um dos melhores países do mundo para se viver. Terminando o desenho, Joãozinho perguntou a seus alunos a razão entre a área da bandeira e a área da cruz. Qual a resposta correta que eles deveriam apresentar?



4) Após se conhecerem em uma rede social, 5 amigos, de nacionalidades diferentes, resolveram marcar um encontro durante a Copa do Mundo disputada no Brasil. Albert (A),

Brigite(B), Claus (C), Dulce (D) e Eduardo (E) só estavam preocupados com a forma como iriam se comunicar. Sabe-se que:

• Quando B e C estão juntos, conversam em inglês, mas quando D está com eles, falam todos no idioma que os três conhecem: o português;

• O único idioma comum a A, B e E é o francês;

• O único idioma comum a C e E é o alemão;

• Três amigos falam espanhol;

• O idioma mais falado é o português;

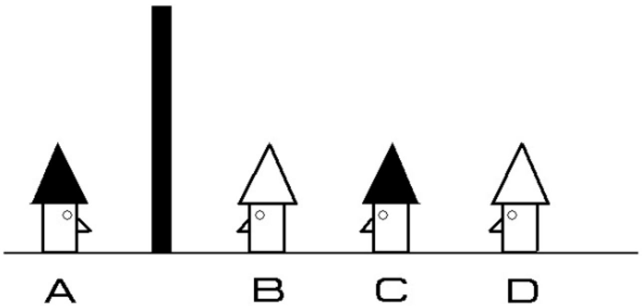
• Um dos amigos fala exatamente cinco idiomas, outro amigo fala exatamente quatro idiomas, entre eles há um que fala exatamente três o idiomas, entre os restantes um fala dois idiomas e o último apenas um idioma.

Qual dos amigos fala exatamente 4 idiomas?

Parte B

5) Riveloz Lee Geiro, conhecido com o Rei da Maçã no Nordeste, começou a sentir os efeitos da crise econômica pela qual passava nosso país. Durante algum tempo, grande parte de sua produção mensal de 980 Kg de maçã havia estragado nos estoques. Como havia um pacto entre ele e seus concorrentes para que o quilo da maçã não baixasse dos tradicionais R$ 5,40, ele correu mais que os outros negociantes e decidiu inovar, vendendo pacotes de 1 Kg de maçãs desidratadas. Sabendo que no processo da desidratação a maçã perde 1720 de sua massa, determine por quanto Lee Geiro deverá vender o quilo da maçã desidratada de modo a obter a mesma quantia que conseguia com a venda de sua produção mensal de maçãs.

6) Em um ato de bondade, o rei Panthiolino Bhan Goo deu a quatro prisioneiros a possibilidade de serem libertos. Ele ordenou que os quatro fossem enterrados até o pescoço, ficando apenas com a cabeça para fora da terra. Olhando para frente, sem poder se moverem, eles veem que existe um muro entre o prisioneiro A e o B e sabem que os quatro estão usando chapéus – sendo dois brancos e dois pretos –, mas não sabem qual é a cor do seu próprio chapéu.
O prisioneiro A e o B enxergam apenas seus respectivos lados da parede, o C vê o homem B e o D vê os prisioneiros B e C. Eles não têm qualquer tipo de comunicação entre si e serão levados de volta à cadeia dentro de 10 minutos. A única chance de serem salvos é se um deles gritar a cor do chapéu que está usando. Se ele errar, retornam todos à prisão.
Minutos depois, um deles grita e acerta a cor.
Qual deles gritou a cor de seu próprio chapéu? Como ele tinha certeza sobre a cor do próprio chapéu?



7) Severino Sombra, dono da fábrica Doce Sabor, preocupado com o armazenamento das rapaduras que produz, criou formas de organizá-las em cada sala de acordo com os seguintes critérios:

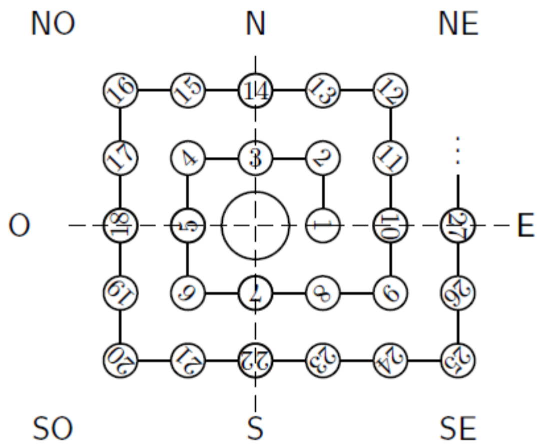
Pote: conjunto de 25 rapaduras

Caixa: conjunto de 20 potes

Estante: conjunto de 10 caixas

Se sua última produção equivalia a 16 estantes, 6 caixas, 10 potes e 28 rapaduras e ele queria dividi-la igualmente em 13 salas, seria possível obter um número **e** de estantes, **c** de caixas, **p** de potes e **r** de rapaduras. Qual o valor encontrado fazendo – se **e + c + p + r** ?

8) Em Tribobó do Norte, no lugar de postes, há lampiões numerados a partir do centro da cidade. Cada lampião é colocado em um dos oito sentidos: norte, sul, leste, oeste, nordeste, noroeste, sudeste e sudoeste, como mostra a figura abaixo. Assim, por exemplo, os lampiões 15, 16 e 17 estão no sentido noroeste, o 18 está no sentido oeste e o 19, o 20 e o 21 estão no sentido sudoeste. Em que sentido está colocado o lampião número 2014?



OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2013

20 de setembro de 2014

Nível 2 – (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

Parte A

QUESTÃO 1

Uma sequência de números é construída seguindo-se a seguinte "receita". Escolhe-se um número inicial. Se esse número for par, o mesmo é dividido por 2. Se ele for impar, o mesmo é multiplicado por 3 e a esse resultado soma-se 1. Usando o resultado dessa última conta como novo valor inicial, o processo é repetido.

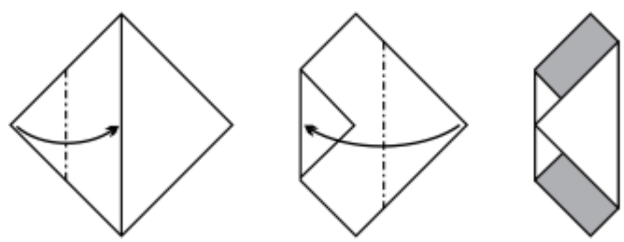
Por exemplo, se escolhermos como valor inicial o número 11, geramos a sequência

$$11, 34, 17, 52, 26, 13, ...$$

Escolhendo como valor inicial o número 5, qual o número que ocupa a posição 2014 da sequência gerada?

QUESTÃO 2

Um quadrado de papel, de área 64 cm^2, é dobrado como mostra a figura abaixo.



Qual é a soma das áreas dos dois retângulos em cinza?

QUESTÃO 3

Sejam a e b dois inteiros positivos. Dizemos que a é filho de b, se $a < b$, a é um divisor de b e a soma dos dígitos de a é igual a soma dos dígitos de b. Quantos filhos tem o número 110 000 ?

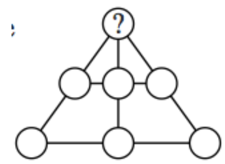
QUESTÃO 4

Um cubo $3 \times 3 \times 3$ é construído usando 27 pequenos cubos de $1 \times 1 \times 1$. Cada um dos pequenos cubos tem todas as faces da mesma cor. Queremos organizar para que os dois cubos da mesma cor não se toquem por uma face, ou por uma aresta, ou por um vértice. Qual é o número mínimo de cores que é preciso para fazer isso?

Parte B

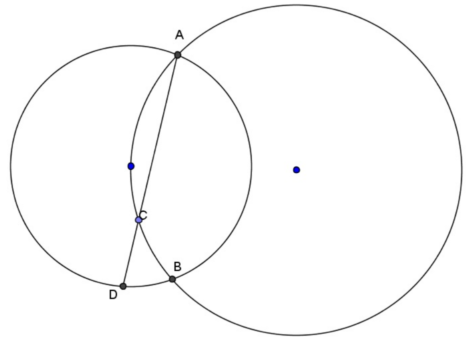
QUESTÃO 5

Coloca-se os números de 1 à 7 nos círculos da figura, de forma que a soma em cada uma das cinco linhas é a mesma. Qual é o número colocado na parte superior do triângulo?



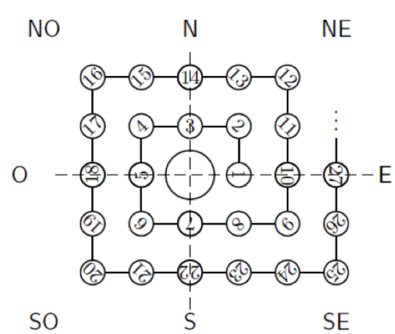
QUESTÃO 6

A figura a seguir mostra duas circunferências que se intersectam nos pontos A e B. Além disso, note que a circunferência maior passa pelo centro da circunferência menor. Seja C um ponto sobre o arco AB. A reta que contém os pontos A e C intersecta a circunferência menor no ponto D. Mostre que $CD = CB$.



QUESTÃO 7

Em Tribobó do Norte, no lugar de postes, há lampiões numerados a partir do centro da cidade. Cada lampião é colocado em um dos oito sentidos: norte, sul, leste, oeste, nordeste, noroeste, sudeste e sudoeste, como mostra a figura. Assim, por exemplo, os lampiões 15, 16 e 17 estão no sentido noroeste, o 18 está no sentido oeste e os lampiões 19, 20 e 21 estão no sentido sudoeste. Em que sentido está colocado o lampião número 2014?



QUESTÃO 8

Encontre todos os pares de inteiros (x, y) (possivelmente negativos) que satisfaçam a equação abaixo

$$x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2.$$

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2014

21 de agosto de 2014

Nível 3 (1^o e 2^o anos do ensino médio)

1. Seis pessoas tentam advinhar o número de pedras em uma caixa. Arnaldo diz 57 pedras, Bernaldo diz 64, Cernaldo diz 67, Dernaldo diz 70, Ernaldo 54 e Fernaldo 47. Todos erraram, alguns para mais e outros para menos. Eles erraram por 1, 4, 6, 9, 11 e 12, em alguma ordem, mas não se sabe quem cometeu cada erro. Quantas pedras havia na caixa?

2. Sabendo que cada uma das letras A, B, C, D, E, F, G e H representa um algarismo diferente entre 0 e 9 e que os números $ABACDE$, $CAFDG$, $CHHBAED$ são lados de um triângulo. Descubra qual algarismo cada letra representa.

3. Um número n de 3 algarismos é dito eficiente se os últimos 3 algarismos de n^2 são os mesmos algarismos de n e na mesma ordem. Encontre todos os números eficientes.

4. Seja Γ uma circunferência, l uma reta secante a Γ em B e C e r a reta tangente a Γ por B. Tome A um ponto em l distinto de C com $\overline{AB}$=$\overline{BC}$. Se s é uma reta por A tangente a Γ e P é o ponto de interseção de r e s prove que o ângulo $\angle APB$ não é obtuso.

5. Para cada n inteiro não negativo, calcule a quantidade de triplas (a, b, c) de inteiros não negativos que satisfazem o sistema de inequações abaixo:

$$\begin{cases} a+b & \leq & 2n \\ a+c & \leq & 2n \\ b+c & \leq & 2n \end{cases}$$

6. Seja ABC um triângulo acutângulo com $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Um ponto P interior ao triângulo é dito B-*bom* se $\angle PBC = \angle PCA$, e é dito C-*bom* se $\angle PCB = \angle PBA$. Sejam D o ponto B-bom mais próximo de A e E o ponto C-bom mais próximo de A. Defina F o ponto de interseção entre as retas BD e CE, e G o ponto de interseção, distinto de F, entre os circuncírculos de BEF e CDF.

   (a) Prove que a reta PQ é perpendicular a reta BC.

   (b) Prove que A, E, D e G são concíclicos.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2014

21 de setembro de 2014

Nível 4 (3^o ano do ensino médio)

1. Encontre dois números a e b tais que os algarismos de b são os mesmos algarismos de a em outra ordem e o número $a - b$ possui todos os algarismos iguais a 1.

2. Um número n de 3 algarismos é dito *eficiente* se os últimos 3 algarismos de n^2 são os mesmos algarismos de n e na mesma ordem. Encontre todos os números eficientes.

3. Seja Γ uma circunferência, l uma reta secante a Γ em B e C e r a reta tangente a Γ por B. Tome A um ponto em l distinto de C com $\overline{AB}=\overline{BC}$. Se s é uma reta por A tangente a Γ e P é o ponto de interseção de r e s prove que o ângulo $\angle APB$ não é obtuso.

4. Para cada n inteiro não negativo, calcule a quantidade de triplas (a, b, c) de inteiros não negativos que satisfazem o sistema de inequações abaixo:

$$\begin{cases} a+b & \leq & 2n \\ a+c & \leq & 2n \\ b+c & \leq & 2n \end{cases}$$

5. Seja $A_0 = (0, 0)$, $A_1 = (3, 0)$ e $A_2 = (0, 2)$ pontos no plano cartesiano. Definimos recursivamente o ponto A_{n+3} como o baricentro do triângulo $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ para $n \geq 0$. Encontre um ponto que está no interior de todos os triângulos $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ para todo $n \geq 0$.

6. Seja ABC um triângulo acutângulo com $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Um ponto P interior ao triângulo é dito B-*bom* se $\angle PBC = \angle PCA$, e é dito C-*bom* se $\angle PCB = \angle PBA$. Sejam D o ponto B-bom mais próximo de A e E o ponto C-bom mais próximo de A. Defina F o ponto de interseção entre as retas BD e CE, e G o ponto de interseção, distinto de F, entre os circuncírculos de BEF e CDF.

   (a) Prove que a reta PQ é perpendicular a reta BC.

   (b) Prove que A, E, D e G são concíclicos.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2014

21 de setembro de 2014

Nível U

1. Calcule as seguintes integrais:

   (a)
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\ln(1+x^2)\cos(x)}{e^{x^2}}dx.$$

   (b)
   $$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}x(1-x)}{\sqrt{2}+2^x}dx.$$

2. Prove que
   $$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)dx > 0$$

3. Sejam A, B e C pontos não colineares em $\mathbb{R}^2$ com coordenadas inteiras. Se r é o raio do círculo inscrito no triângulo ABC, prove que pelo menos um lado de ABC é maior que $\frac{1}{3r}$.

4. Seja $(u_k)_{k=0,1,2,\ldots}$ uma sequência estritamente crescente de números inteiros positivos. A série
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{mmc}(u_k, u_{k+1})}$$
   converge ou diverge?

5. Para quais reais α a sequência $x_n := (\cos(n\alpha))^n$ é convergente?

6. Seja M uma matriz $(n+1)\times(n+1)$ com entradas $(a_{i,j})_{i,j=0,\ldots,n}$ onde $a_{i,j} = \cos(\frac{(i-j)\pi}{2n})$. Calcule o polinômio característico de M.