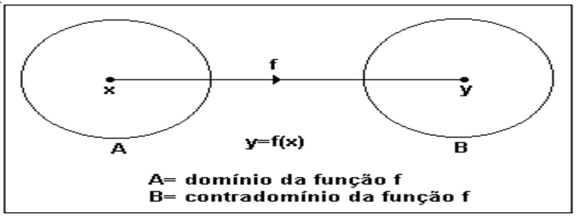
AULA 01 - ESTUDO DAS FUNÇÕES

Sejam **A** e **B** dois conjuntos não vazios e uma relação R de A em B, essa relação será chamada de função quando todo e qualquer elemento de **A** estiver associado a um único elemento em B.

Numa função podemos definir alguns elementos.

- Conjunto de Partida: A (Domínio)
- Contra Domínio: B
- Conjunto Imagem: Elementos do conjunto B que recebem as "setinhas".



Observações:

- A imagem está sempre contida no Contra Domínio (Im $\subset$ C.D)
- Podemos reconhecer através do gráfico de uma relação, se essa relação é ou não função. Para isso, deve-se traçar paralelas ao eixo y. Se cada paralela interceptar o gráfico em apenas um ponto, teremos uma função.
- O domínio de uma função é o intervalo representado pela projeção do gráfico no eixo das abscissas. E a imagem é o intervalo representado pela projeção do gráfico no eixo y.

VALOR DE UMA FUNÇÃO

Denomina-se valor numérico de uma função f(x) o valor que a variável **y** assume quando a variável **x** é substituída por um valor que lhe é atribuído.

Por exemplo: considere a relação $y = x^2$, onde cada valor de x corresponde um único valor de y.

Assim se x = 3, então y = 9.

Podemos descrever essa situação como: f(3) = 9

Exemplo 1: Dada a função f(x) = x + 2. Calcule o valor de f(3)

Resolução: f(x) = x + 2, devemos fazer x = 3

f(3) = 3 + 2

f(3) = 5

Exemplo 2: Dada a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Determine o valor de f(-1).

Resolução: $f(x) = x^2 - 5x + 6$, devemos fazer x = -1

f(-1) = (-1)2 - 5(-1) + 6

f(-1) = 1 + 5 + 6

f(-1) = 12

Exemplo 3: Dada a função $f(x-1) = x^2$. Determine f(5).

Resolução: $f(x-1) = x^2$, devemos fazer x = 6

$f(6-1) = 6^2$

f(5) = 36

Observe que se fizéssemos x = 5, teríamos f(4) e não f(5).

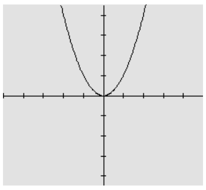
PARIDADE DE FUNÇÕES

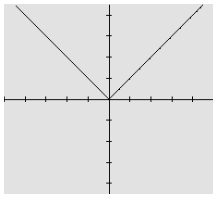
FUNÇÃO PAR

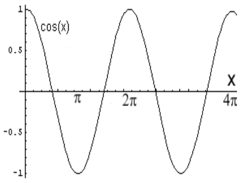
Uma função é par quando para valores simétricos de x temos imagens iguais, ou seja:

$$\boxed{\mathbf{F(x) = F(-x)}}$$

Uma consequência da definição é: Uma função f é par se e somente se, o seu gráfico é simétrico em relação ao eixo y**.** A seguir temos os gráficos das funções $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$ e h(x) = cosx





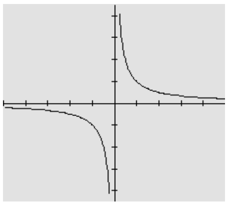


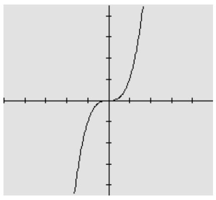
FUNÇÃO ÍMPAR

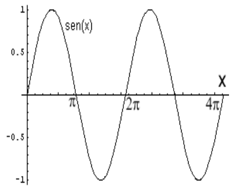
Uma função é ímpar quando para valores simétricos de x as imagens forem simétricas, ou seja:

$$\boxed{\mathbf{F(x) = - F(-x)}}$$

Como consequência da definição os gráficos das funções ímpares são simétricos em relação à origem do sistema cartesiano. A seguir temos os gráficos das funções f(x) = 1/x, $g(x) = x^3$ e h(x) = senx.

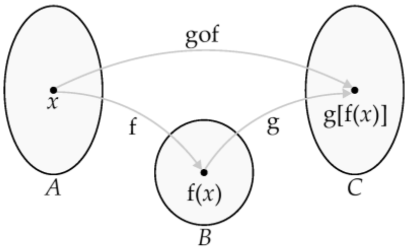






FUNÇÃO COMPOSTA

Dadas as funções f: A →B e g: B→C, denomina-se função composta de g com f a função gof: definida de A→C tal que gof(x) = g(f(x))



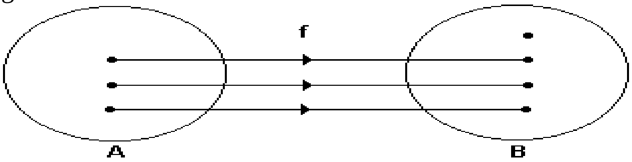
$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)]$

f: A→B g: B→C gof: A→C

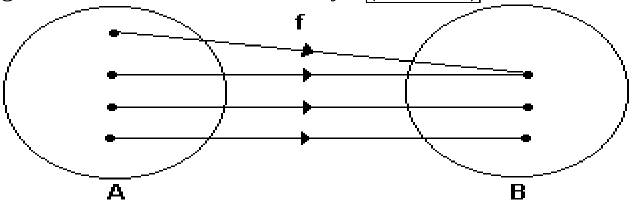
Exercício resolvido:
Dadas as funções f(x) = x2 - 5x + 6 e g(x) = x + 1, achar x de modo que f(g(x)) = 0
Sol. Primeiramente vamos determinar f(g(x)) e, em seguida, igualaremos a zero.
$f(x) = x^2 - 5x + 6$
$f(g(x)) = (x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6$
Daí vem que $f(g(x)) = x^2 - 3x + 2$.
Igualando a zero temos:
$x^2 - 3x + 2 = 0$, onde $\underline{x_1 = 1}$ e $\underline{x_2 = 2}$

FUNÇÃO INJETORA, SOBREJETORA E BIJETORA

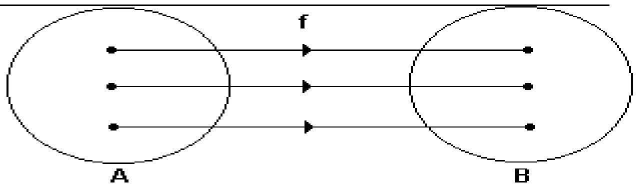
FUNÇÃO INJETORA: Uma função f: A→B é injetora se e somente se elementos distintos de A têm imagens distintas em B.



FUNÇÃO SOBREJETORA: Uma função f de A em B é sobrejetora, se **todos** os elementos de B forem imagem dos elementos de A, ou seja: $\boxed{\text{(CD = Im)}}$



FUNÇÃO BIJETORA: Uma função é bijetora se for ao mesmo tempo **injetora** e **sobrejetora.** $\boxed{n(D) = n(CD)}$

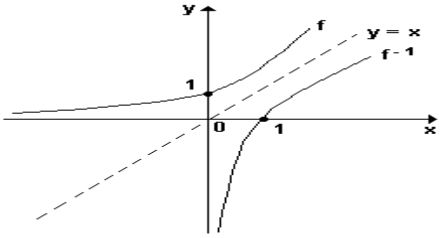


FUNÇÃO INVERSA

Seja f uma função f de A em B. A função f^{-1} de B em A é a inversa de f, se e somente se f for bijetora.

Para encontrar a inversa de uma função, o processo prático é trocar x por y e, em seguida, isolar y.

Os gráficos de duas funções inversas f(x) e $f^{-1}(x)$ são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.
(f(x) = x)



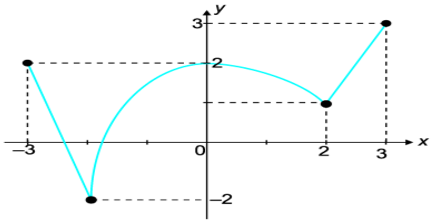
Exercício Resolvido:
Dada a função f(x) = 2x + 4 de R em R. determine a sua inversa.
Resolução: Como a função f(x) é bijetora, então ela admite inversa. Basta trocarmos x por y e teremos:
f(x) = 2x + 4 →
x = 2y + 4 →
x - 4 = 2y →

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01

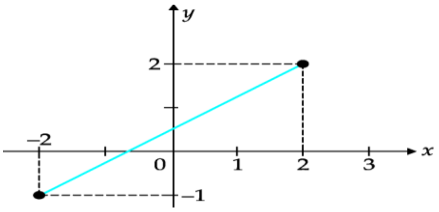
Seja o gráfico abaixo da função f, determinar a soma dos números associados às proposições **corretas**:



01. O domínio da função f é {x R | - 3 ≤ x ≤ 3}
02. A imagem da função f é {y R | - 2 ≤ y ≤ 3}
04. Para x = 3, tem-se y = 3
08. Para x = 0, tem-se y = 2
16. Para x = - 3, tem-se y = 0
32. A função é decrescente em todo seu domínio

QUESTÃO 02

Assinale a soma dos números associados às proposições **corretas**:



01. O domínio da função f é {x R | - 2 ≤ x ≤ 2}
02. A imagem da função f é {y R | - 1 ≤ y ≤ 2}
04. Para x = -2 , tem-se y = -1
08. Para x = 2, tem-se y = 2
16. A função é crescente em todo seu domínio.

QUESTÃO 03

Seja $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & se \quad x\le 0 \\ 5, & se \quad 0<x\le 5 \\ x^2-5x+6, & se \quad x>5 \end{cases}$, então o valor de $\dfrac{f(-3)+f(\pi)}{f(6)}$ vale:

a) -1/2 b) -1 c) 1 d) 2

QUESTÃO 04 UFSC

Considere a função f(x) real, definida por f(1) = 43 e f(x + 1) = 2 f(x) - 15. Determine o valor de f(0).

a) 27 b) 28 c) 29 d) 30 e) 31

QUESTÃO 05 UFC

O domínio da função real $y=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-7}}$ é:

a) {x ∈R| x > 7}
b) {x R| x ≤ 2}
c) {x R| 2 ≤ x < 7}
d) {x R| x ≤ 2 ou x > 7}

QUESTÃO 06 UFC

Sejam f e g funções reais de variável real definidas por f(x) = $\dfrac{17}{2^x+1}$ e g(x) = 3 + 2x – x^2. O valor mínimo de f(g(x)) é:

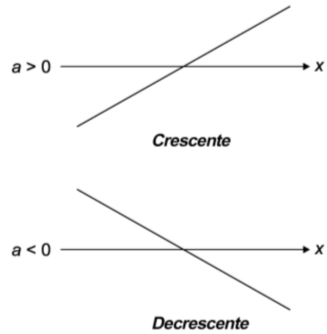
a) 1/4 b) 1/3 c) 1/2 d) 1 e) 2

AULA 02 - FUNÇÃO DO 1° GRAU

Uma função f de R em R é do 1º grau se a cada x R, associa o elemento ax + b.
Forma: f(x) = ax + b com a ≠ 0. Onde **a** é o coeficiente angular e **b** o coeficiente linear.

GRÁFICO

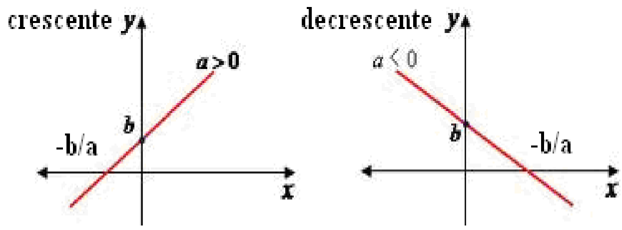
O gráfico será uma reta crescente se **a** for positivo e decrescente se **a** for negativo.



Como o gráfico de uma função do 1º Grau é uma reta, logo é necessário definir apenas dois pontos para obter o gráfico.

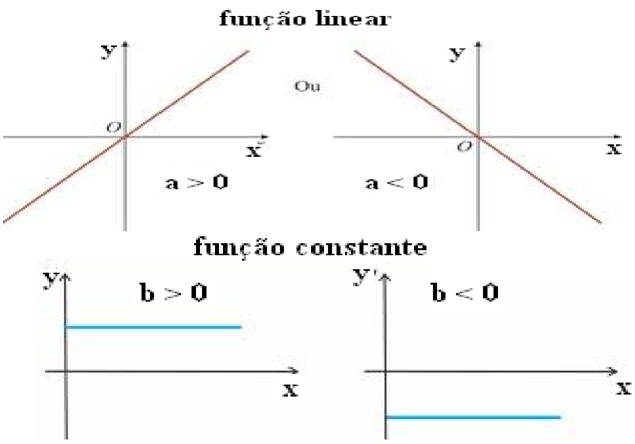
Ponto que o gráfico corta o eixo y: deve-se fazer x = 0. Logo, o ponto que o gráfico corta o eixo y tem coordenadas (0,b). Ponto que o Gráfico corta o eixo x: deve-se fazer y = 0. Logo, o ponto que o gráfico corta o eixo x tem coordenadas (-b/a; 0).

O ponto que o gráfico corta o eixo x é chamado raiz ou zero da função.



OBS:
Sendo f(x) = ax + b, com a ≠ 0 e b ≠ 0 é *função afim.*
Sendo f(x) = ax + b, com a ≠ 0 e b = 0 é *função linear*.
Sendo f(x) = ax + b, com a = 0 e b ≠ 0 é *função constante.*

curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br



EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01

Considere as funções f(x) = 2x – 6 definida em reais. Determine a soma dos números associados às proposições **corretas** :

01. A reta que representa a função f intercepta o eixo das ordenadas em (0,- 6)
02. f(x) é uma função decrescente
04. A raiz da função f(x) é 3
08. f(-1) + f(4) = 0
16. A imagem da função são os reais
32. A área do triângulo formado pela reta que representa f(x) e pelos eixos coordenados é 18 unidades de área.

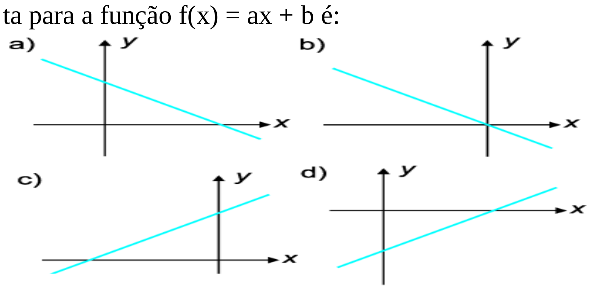
QUESTÃO 02 **PUC-SP**

Para que a função do 1º grau dada por f(x) = (2 - 3k)x + 2 seja crescente devemos ter:

a) k > 2/3 b) k < 3/2
c) k > 3/2 d) k < 2/3

QUESTÃO 03 **UFMG**

Sendo a < 0 e b > 0, a única representação gráfica correta para a função f(x) = ax + b é:



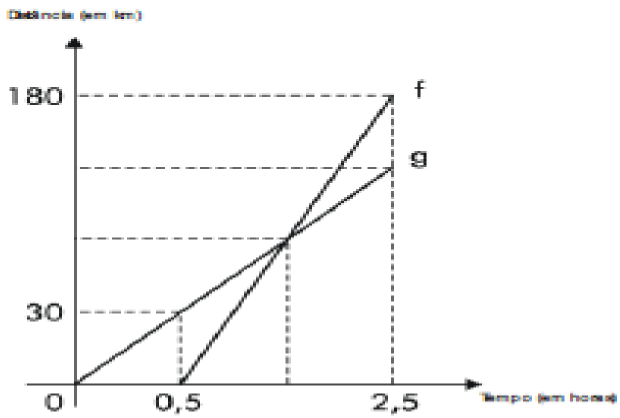
QUESTÃO 04 **Fuvest**

A reta de equação 2x + 12y – 3 = 0, em relação a um sistema cartesiano ortogonal, forma com os eixos do sistema um triângulo cuja área é:

a) 1/2 b) 1/4 c) 1/15 d) 3/8 e) 3/16

QUESTÃO 05 **UFRGS**

Dois carros partem de uma mesma cidade, deslocando-se pela mesma estrada. O gráfico abaixo apresenta as distâncias percorridas pelos carros em função do tempo.



Analisando o gráfico, verifica-se que o carro que partiu primeiro foi alcançado pelo outro ao ter percorrido exatamente:

a) 60km b) 85km c) 88km d) 90km e) 91km

AULA 03 - FUNÇÃO DO 2º GRAU

Uma função f de R em R é polinomial do 2º grau se a cada x R associa o elemento $ax^2 + bx + c$, com a 0

Forma: f(x) = $ax^2 + bx + c$, com a ≠ 0

GRÁFICO

O gráfico de uma função polinomial do 2º Grau de R em R
é uma parábola. A concavidade da parábola é determinada pelo sinal do coeficiente **a** (coeficiente de x^2). Assim, quando:

- **a > 0** tem-se a parábola com concavidade para cima
- **a < 0** tem-se parábola com concavidade para baixo

O ponto que o gráfico corta o eixo y possui coordenadas **(0,c)**.

Para achar o(s) ponto(s) que o gráfico corta o eixo x, deve-se fazer y = 0. Tem-se então uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, onde:

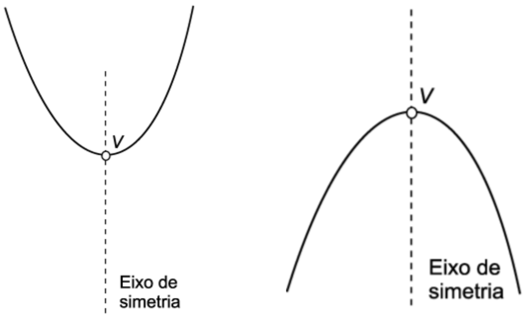
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ com } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Se $\Delta > 0$ Duas Raízes Reais
Se $\Delta = 0$ Uma Raiz Real
Se $\Delta < 0$ Não possui Raízes Reais

O verdadeiro nome de Δ é *discriminante* *, o termo delta é referência ao alfabeto grego.*

ESTUDO DO VÉRTICE

A Parábola que representa a função do 2º Grau é dividida em duas partes simétricas. Essa divisão é feita por um eixo chamado de eixo de simetria. A intersecção desse eixo com a parábola recebe o nome de **vértice da parábola**.



- O vértice é o ponto de máximo da função se a < 0.
- O vértice é o ponto de mínimo da função se a > 0.

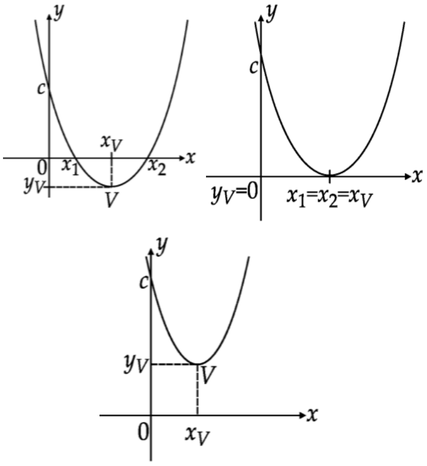
COORDENADAS DO VÉRTICE

O vértice é um ponto de coordenadas $V(x_v, y_v)$ onde

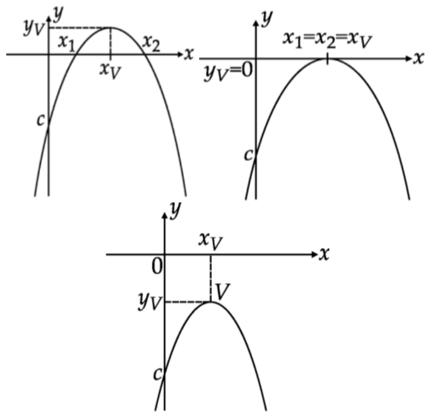
$$\boxed{x_V = \frac{-b}{2a} \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a}}$$

RESUMO GRÁFICO

Se a > 0 as combinações de com $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$



Se a > 0 as combinações de com $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta < 0$



EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01

Em relação a função $f(x) = x^2 - 6x + 8$ definida de é correto afirmar:
01. 2 e 4 são os zeros da função f.
02. o vértice da parábola possui coordenadas (3, -1).
04. O domínio da função f(x) é o conjunto dos números reais.
08. A imagem da função é: $\{y \in R \mid y \geq -1\}$.
16. A área do triângulo cujos vértices são o vértice da parábola e seus zeros, é 4 unidades de área.

QUESTÃO 02

Considere a função definida em x dada por $f(x) = x^2 - mx + m$. Para que valores de m > 0 o gráfico de f(x) irá interceptar o eixo x num só ponto?
a) 1 b) 4 c) 12 d) 16

QUESTÃO 03 **Mack**

O vértice da parábola $y = x^2 + kx + m$ é o ponto V(1, 4). O valor de k + m em módulo é:
a) -6 b) -3 c) 3 d) 6

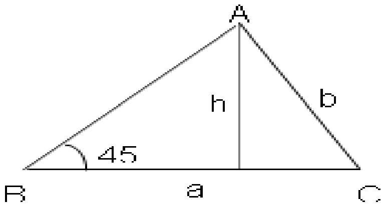
QUESTÃO 04 **UFSC**

Dada a função $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, sabe-se que f(1) = 4, f(2) = 7 e f(-1) = 10.
Determine o valor de a - 2b + 3c.
a) 3 b) 13 c) 23 d) 33

QUESTÃO 05 **UFC**

No triângulo ABC abaixo, a é a base, h a altura relativa à esta base, e b o lado oposto ao ângulo de 45°. Se a + h = 4, então o valor mínimo de b^2 é:

a) 16. b) 16/5. c) 4/5. d) $4\sqrt{5}$. e) $16\sqrt{5}$.



AULA 04 - FUNÇÃO MODULAR

Módulo ou valor absoluto de um número real x é a distância da origem ao ponto que representa o número x. Indicamos o módulo de x por | x |.

DEFINIÇÃO

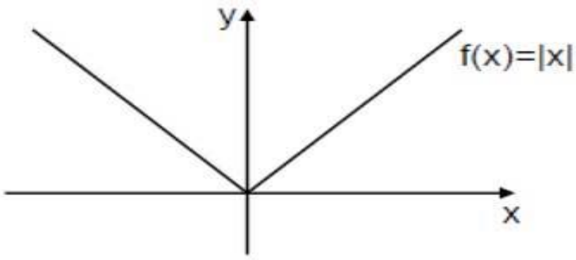
$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x > 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Veja: | 3 | = 3; | -5 | = 5, e | 0 | = 0

Já em | x | = 3, temos x = 3 ou -3.
Em | x | = 0, temos x = 0, somente
Em | x | = -1, não temos solução.

Se | x - 7 | = 2, daí temos duas possibilidades.
Ou x – 7 = 2 → x = 9
Ou x – 7 = - 2 → x = 5

GRÁFICO



$$D(f) = IR \quad e \quad Im(f) = [0, +\infty[= IR_+$$

INEQUAÇÃO MODULAR

| x | < k, com k > 0, então: k < x < k

Exemplos: | x | < 3 – 3 < x < 3
| x | < 10 – 10 < x < 10

| x | > k, com k > 0, então: x < k ou x > k

Exemplos: | x | > 3 x < – 3 ou x > 3
| x | > 10 x < –10 ou x > 10

Resumindo as inequações

- |ALGO| ≤ a e a > 0, então – a ≤ ALGO ≤ a
- |ALGO| ≥ a e a > 0, então x ≤ - ALGO ou ALGO ≥ a
- |ALGO| = |COISA|, então ALGO = COISA ou ALGO = - COISA.

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 **UFC**

Considere as duas circunferências concêntricas abaixo. Classifique as afirmativas abaixo como verdadeiras (V) ou falsas (F).

I. $|6-4| = 6-4$ **II.** $|3(1-2)| = 3(2-1)$ **III.** $|2-5| = |2| + |-5|$

Assinale a opção que apresenta a sequência correta.
a) V, V, V
b) V, F, V
c) V, V, F
d) V, F, F
e) F, F, F

QUESTÃO 02 **ESPCEX**

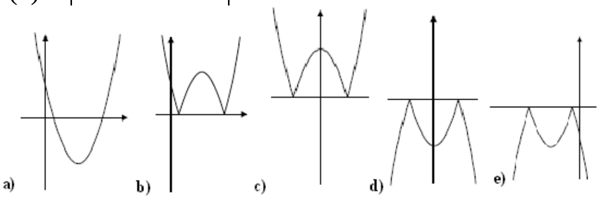
O número de raízes reais distintas da equação x.|x | – 3x + 2 = 0 é
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

QUESTÃO 03 **ESPCEX**

Dada a função real modular f(x) = 8 + (|4k – 3| – 7)x, em que k é real. Todos os valores de k para que a função dada seja decrescente pertencem ao conjunto:
a) k > 2,5
b) k < –1
c) –2,5 < k < -1
d) –1 < k < 2,5
e) k < –1 ou k > 2,5

QUESTÃO 04 | **ESPCEX**

Dos gráficos abaixo, o que melhor representa a função $f(x) = |4x^2 - 16x + 7|$ é:



QUESTÃO 05 | **UECE**

Em relação à equação $|x^2 + x| = x - 4$ é possível afirmar-se, corretamente, que ela

a) admite exatamente duas soluções reais
b) admite exatamente uma solução, que é real
c) admite duas soluções, sendo uma real e uma complexa (não real)
d) não admite soluções reais

AULA 05 - EXPONENCIAL

EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Chama-se equação exponencial toda equação que pode ser reduzida a forma $a^x = b$, com $0 < a \neq 1$.

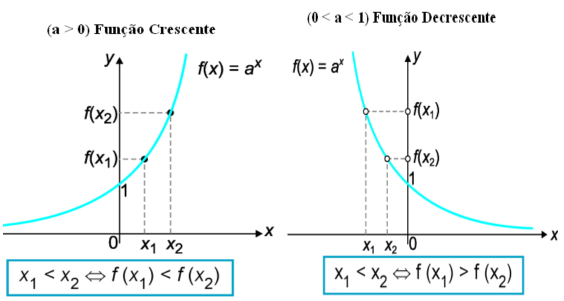
Para resolver tais equações é necessário transformar a equação dada em:

- Igualdade de potência de mesma base.

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

- Potências de expoentes iguais. $a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow a = b$ sendo a e b $\neq 1$ e a e b $\in R^*_+$.

GRÁFICO



INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

Para resolvermos uma inequação exponencial devemos respeitar as seguintes propriedades:

Quando as bases são maiores que 1 (a > 1), a relação de desigualdade se mantém.

$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)}$

Quando as bases estão compreendidas entre 0 e 1 (0 < a < 1), a relação de desigualdade se inverte.

$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)}$

OBS:
Para resolver exponencial a dica é analisar as bases das potencias fatorar para deixar em uma mesma base. Muito comum também em alguns casos fazer a mudança de variável, isto é chamar certa potencia 3^x por exemplo de y e resolver a equação.

Exemplo-1
Calcula valor de x em $2^x = 128$.
Sol. Fatorando $128 \rightarrow 2^7$
Então $2^x = 2^7 \rightarrow \underline{x = 7}$

Exemplo-2
Qual valor de x na equação $25.3^x = 15^x$?
Sol. Passe 3^x para outro lado...

$$25 = \left(\frac{15}{3}\right)^x \rightarrow 25 = 5^x$$

Então $\underline{x = 2}$

Exemplo-3
Determine as raízes de $2^{2x} - 2^{x+1} + 1 = 0$.
Sol. Faça $2^x = y$ e veja $y^2 - 2y + 1 = 0$
Então y = 1, portanto $2x = 1 \rightarrow \underline{x = 0}$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01

Dadas $f(x) = (0{,}5)^{-x}$ e as proposições:
I - f(x) é crescente
II - f(x) é decrescente
III - f(3) = 8
IV- $(0,1) \in f(x)$
Podemos afirmar que:
a) todas as proposições são verdadeiras.
b) somente II é falsa.
c) todas são falsas.
d) II e III são falsas.
e) somente III e IV são verdadeiras.

QUESTÃO 02

Dado o sistema $\begin{cases} 7^{2x+y} = 1 \\ 5^{\frac{x}{2}+y} = 25 \end{cases}$, o valor de $\left(\frac{y}{x}\right)^4$ é:

a) 1 b) 16 c) 81 d) 256 e) 625

QUESTÃO 03 | **UFMG**

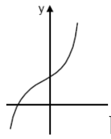
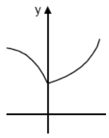
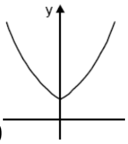
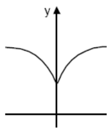
Com relação à função f(x) = a^x, sendo a e x números reais e 0 < a ≠ 1, assinale as verdadeiras:
01. A curva representativa do gráfico de f está toda acima do eixo x.
02. Seu gráfico intercepta o eixo y no ponto (0, 1).
04. A função é crescente se 0 < a < 1
08. Sendo a = 1/2, então f(x) > 2 se x > 1.

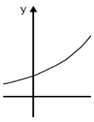
QUESTÃO 04 | **OBM**

Se $x^2 = x + 3$ então x^3 é igual a:
a) $x^2 + 3$
b) $x + 4$
c) $2x + 2$
d) $4x + 3$

QUESTÃO 05 | **ESPCEX**

O gráfico que melhor representa a função f: R → R, definida por f (x) = $2^{|x|}$ é:

a)  b)  **c)**  d)  e)



QUESTÃO 06 | **UECE**

A raiz da equação $\left(5^x+\sqrt{5}\right)\left(5^x-\sqrt{5}\right)=620$ é um número:
a) inteiro par.
b) racional, não inteiro.
c) irracional.
d) inteiro negativo.

QUESTÃO 07 | **UFG**

Se x e y são dois números reais tais que $6^{X+Y} = 36$ e $6^{X+5Y} = 216$, então x/y vale:
a) 7
b) 8
c) 9
d) 10

AULA 06 - LOGARITMOS

DEFINIÇÃO

Dado um número **a**, positivo e diferente de um, e um número **b** positivo, chama-se logaritmo de **b** na base **a** ao real x tal que a^x = b.
Condição de Existência : a > 0 e a ≠1 e b > 0
$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$
Em $\log_a b$ = x temos que:
a = base do logaritmo
b = logaritmando ou antilogaritmo
x = logaritmo
Observe que a base muda de membro e carrega x como expoente.

Exemplos:
1) $\log_6 36 = x \rightarrow 36 = 6^x \rightarrow 6^2 = 6^x \rightarrow$ <u>$x = 2$</u>
2) $\log_5 625 = x \rightarrow 625 = 5^x \rightarrow 5^4 = 5^x \rightarrow$ <u>$x = 4$</u>

Existe uma infinidade de sistemas de logaritmos. Porém, dois deles se destacam:

- **Sistemas de Logaritmos Decimais:**

É o sistema de base 10, também chamado sistema de logaritmos comuns ou vulgares, ou de Briggs (Henry Briggs, matemático inglês (1561-1630)). Quando a base é 10 costuma-se omitir a base na sua representação.

- **Sistemas de Logaritmos Neperianos:**

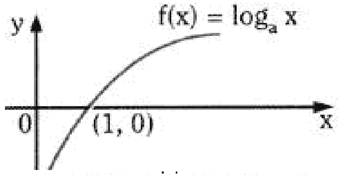
É o sistema de base e (e = 2, 718...), também chamado de sistema de logaritmos naturais. O nome neperiano deve-se a J. Neper (1550-1617).

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS

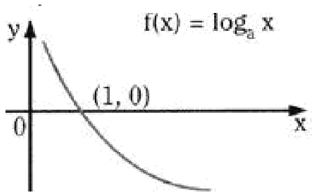
- $\log_b a + \log_b c = \log_b (ac)$
- $\log_b a - \log_b c = \log_b (a/c)$
- $\log_{b^d} a^c = \dfrac{c}{d}\log_b a$
- $\log_a b.\log_b c.\log_c d...\log_x y.\log_y z = \log_a z$
- $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$
- $\log_a a = 1$
- $\alpha^{\log_\alpha \beta} = \beta$

GRÁFICO

Função crescente (a > 1)



Função decrescente (0 < a < 1)



Exercício Resolvido:

Sabendo-se que log 2 = 0,30 e log 3 = 0,47. Calcule o valor de log 18.

Sol. log 18 = log(2.3^2) → log 18 = log 2 + log 3^2 → log 18 = log 2 + 2log 3 → log 18 = 0,30 + 2.0,47

log 18 = 1,24

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 **UFPR**

Sendo log 2 = 0,301 e log 7 = 0,845, qual será o valor de log 28?

a) 1,146
b) 1,447
c) 1,690
d) 2,107
e) 1,107

QUESTÃO 02 **FEI-SP**

A função f(x) = log (50 - 5x - x^2) é definida para:

a) x > 10
b) 10 < x < 5
c) 5 < x < 10
d) x < 5
e) n.d.a.

QUESTÃO 03

Sendo a e b números reais positivos tais que: $\log_{\sqrt{3}} a = 224$ e $\log_{\sqrt{3}} b = 218$, calcule o valor de a / b.

a) 9
b) 27
c) 18
d) 3

QUESTÃO 04

Sejam a = logcosθ, b = logsenθ e c = log2 e a + b + c = 0. Os logaritmos são decimais e 0^o < θ < 90^o. Podemos afirmar, corretamente, que o ângulo θ está situado entre:

a) 50^o e 60^o
b) 30^o e 40^o
c) 40^o e 50^o
d) 20^o e 30^o

QUESTÃO 05

A opção em que figuram as soluções da equação $3^{x^2-8} + Log_{10}[Log_{10}(\sqrt[10]{\sqrt[10]{\sqrt[10]{10}}})] = 0$ é:

a) –3 e 2
b) –3 e 3
c) –2 e 3
d) –2 e 2

QUESTÃO 06

Se x = p é a solução em R da equação 2 – log$_x$2 – log$_2$x = 0, então:

a) 0,5 < p < 1,5
b) 1,5 < p < 2,5
c) 2,5 < p < 3,5
d) 3,5 < p < 4,5

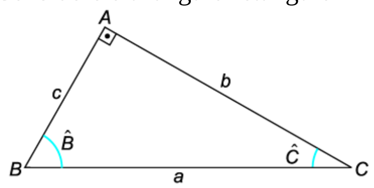
QUESTÃO 07 **UFSC**

Dada a função y = f(x) = log$_a$ x, com a > 0, a≠1, determine a soma dos números associados às afirmativas **verdadeiras.**

01. O domínio da função f é R.
02. A função f é crescente em seu domínio quando a ∈ (1, +∞)
04. Se a = 1/2 então f(2) = 1
08. Se a = 3 e f(x) = 6 então x = 27
16. O gráfico de f passa pelo ponto P(1,0)

AULA 07 - TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Considere o triângulo retângulo ABC



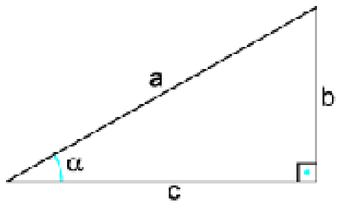
Nesse triângulo podemos destacar os seguintes elementos:

- AB e AC são os catetos
- BC é a hipotenusa
- C e B são os ângulos agudos

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS:

• **SENO**: seno de um ângulo agudo é o quociente entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.
• **CO-SENO**: co-seno de um ângulo é o quociente entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.
• **TANGENTE**: tangente de um ângulo é o quociente entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente.

Sendo assim, temos que:



$$sen\alpha = b/a$$
$$\cos\alpha = c/a$$
$$tg\alpha = b/c$$

OBS

Sempre que tivermos um par de ângulos complementares X e Y, serão validas a relações:
senX = cosY e senY = cosX

TABELA DE ARCOS NOTÁVEIS

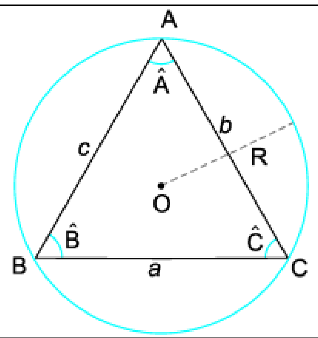
x	Sen x	Cos x	Tg x
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

RELAÇÕES METRICAS NO TRIÂNGULO QUALQUER

As seguintes relações que iremos ver abaixo são validas para qualquer triangulo. Elas recebem o nome de **LEI DOS SENOS** e **LEI DOS COSSENOS**.

LEI DOS SENOS

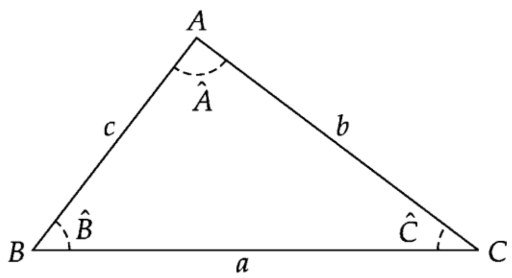
Num triângulo qualquer, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos. A razão de proporção é o diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo



$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = diametro}$$

LEI DOS COSSENOS

Num triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos duas vezes o produto das medidas destes lados pelo co-seno do ângulo formado por eles.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 | **UFSC**

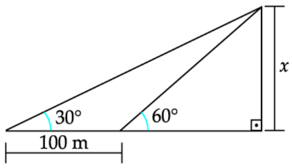
Num vão entre duas paredes, deve-se construir uma rampa que vai da parte inferior de uma parede até o topo da outra. Sabendo-se que a altura das paredes é de $4\sqrt{3}$ m e o vão entre elas é de 12m, o ângulo θ, em graus, que a rampa formará com o solo está compreendido entre:

a) $15 < \theta < 28$
b) $28 < \theta < 39$
c) $39 < \theta < 47$
d) $47 < \theta < 56$
e) $56 < \theta < 63$

QUESTÃO 02 FUVEST

Obter o valor de x na figura:

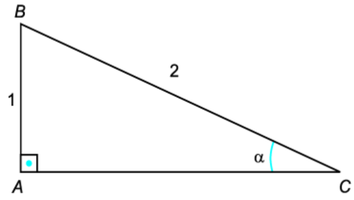
a) $60\sqrt{3}$
b) $50\sqrt{3}$
c) 60
d) 50
e) $40\sqrt{3}$



QUESTÃO 03

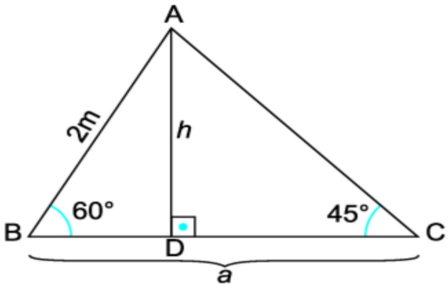
No triângulo ABC, o valor do ângulo , em graus, é:

a) 60°
b) 45°
c) 30°
d) 90°
e) n.d.a



QUESTÃO 04

Com base na figura abaixo é correto afirmar:



01. h = $\sqrt{2}m$
02. h = $\sqrt{3}m$
04. a = (1 + $\sqrt{3}$)m
08. O triângulo ACD é isósceles.
16. O lado AC mede 6m.

QUESTÃO 05

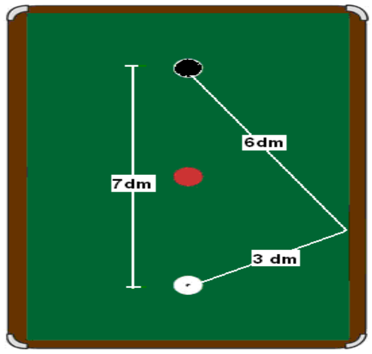
Considere um relógio onde o ponteiro do minuto mede 8 cm e o da hora mede 5 cm e de acordo com essas informações julgue os itens abaixo:

01. (C)(E) A maior distancia possível entre as extremidades livres dos ponteiros é superior a 13cm.
02. (C)(E) Se *d* é a menor distancia possível entre as extremidades dos ponteiros então $1{,}5 < \sqrt{d} < 1{,}9$.
03. (C)(E) O ângulo formado entre o ponteiro da hora e do minuto as 10:00hs tem tangente menor que $\sqrt{3}$.
04. (C)(E) A distancia entre as extremidades livres dos ponteiros as 02:00hs é 7cm.
05. (C)(E) Durante um dia inteiro os ponteiros formaram por 48 vezes um ângulo de 90^{o}.

QUESTÃO 06

A figura abaixo ilustra uma mesa de sinuca onde em uma jogada ousada a bola branca seguirá o percurso descrito. Qual o valor do cosseno do ângulo que a trajetória forma ao bater na lateral da mesa?

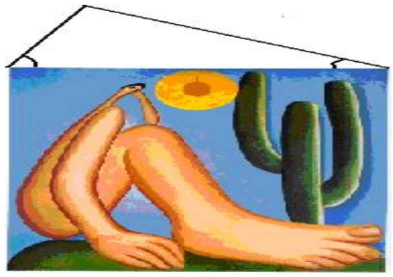
a) 1/9
b) -1/9
c) 1/3
d) -1/3



QUESTÃO 07

Sabendo que o cabo de aço usado para sustentar o quadro mede 3 metros e sendo α e β os angulos formados entre o cabo e o quadro, com $sen\alpha = 0{,}6$ e $sen\beta = 0{,}8$, determine o comprimento de cada segmento do cabo.

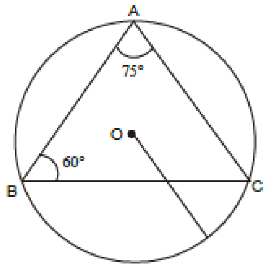
a) $1 \quad e \quad 6$
b) $3/5 \quad e \quad 12/5$
c) $11/9 \quad e \quad 16/9$
d) $9/7 \quad e \quad 12/7$



QUESTÃO 08

O triângulo ABC está inscrito na circunferência de $2\sqrt{3}$ centro O e raio R. Dado que AC = 2 cm, determine a soma dos números associados às proposições verdadeiras:

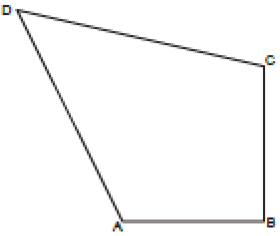
01. O triângulo ABC é equilátero
02. o raio da circunferência vale 2cm
04. AB = $2\sqrt{2}$ cm
08. O comprimento da circunferência é 4 cm



QUESTÃO 09	FUVEST

No quadrilátero dado a seguir, BC = CD = 3cm, AB = 2cm, ADC = 60° e ABC = 90°. O perímetro do quadrilátero, em cm, é:

a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15



AULA 08-INTRODUÇÃO TRIGONOMÉTRICA

Arco de uma circunferência é cada uma das partes que ficam divididas uma circunferência por dois quaisquer de seus pontos.

A cada arco corresponde um ângulo central (ângulo que possui vértice no centro da circunferência).

Para medir arcos e ângulos usaremos o grau e o radiano.

- Graus: Um arco de um grau (1º) é aquele cujo comprimento é igual a do comprimento da circunferência. 1 360

Logo, a circunferência tem 360º.

Os Submúltiplos do Grau são os minutos e segundos:

1º = 60' 1'= 60"

- Radiano: Um radiano é um arco cuja medida é igual ao raio da circunferência onde está contido.

Uma circunferência de raio unitário possui 2 radianos de comprimento. Pode-se, então, estabelecer uma relação entre graus e radianos.

OBS:
Quando numa circunferência de raio unitário se estabelece um sentido de deslocamento, diz-se que se define o **ciclo trigonométrico**.
Os eixos x e y dividem o ciclo em quatro partes denominadas quadrantes
O sentido positivo é o anti-horário.

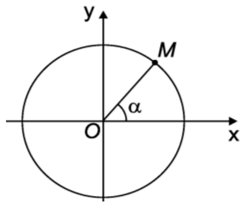
ARCOS CÔNGRUOS

Dois ou mais arcos são côngruos quando a diferença entre seus valores é um múltiplo de 360º.

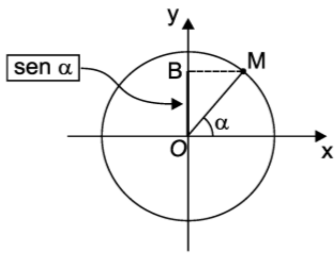
Exemplo: 1) 30º, 390º, 750º, 1110..........

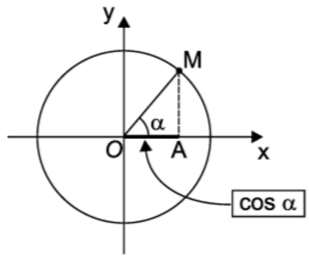
Veja que esses arcos possuem a mesma extremidade e diferem apenas no número de voltas.

SENO e CO-SENO DE UM ARCO



- Denomina-se sen α a projeção do raio OM, pela extremidade M do arco sobre o eixo y.
- Denomina-se cos α a projeção do raio OM, pela extremidade M do arco sobre o eixo x.



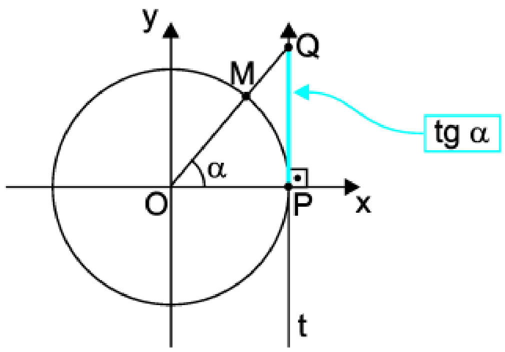


Note que: $-1 \le sen\alpha \le 1 \quad e \quad -1 \le \cos\alpha \le 1$

OBS:
Com o auxílio da simetria de arcos é possível determinar os valores de seno e co-seno de arcos do 2º, 3º e 4º quadrantes.
Como raio do círculo trigonométrico é unitário, podemos afirmar que $\boxed{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ em qualquer ângulo α .

TANGENTE DE UM ARCO

Associa-se a circunferência trigonométrica mais um eixo, a reta **t**, que tangencia a circunferência no ponto P de coordenadas (1,0). Define-se como tangente do arco PM ao segmento PQ determinado sobre o eixo das tangentes.



curso Degraus
TEL: (61) 4102-8485/4102-7660
SITE: www.cursodegraus.com.br

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01

Se sen x > 0 e cos x < 0, então x é um arco do:

a) 1º quadrante
b) 2º quadrante
c) 3º quadrante
d) 4º quadrante
e) n.d.a.

QUESTÃO 02 UFMG

Transformando 7º30' em radianos, teremos:

a) $\pi/24$
b) $\pi/25$
c) $\pi/25$
d) $3\pi/25$
e) $5\pi/32$

QUESTÃO 03 ESPCEX

Das alternativas abaixo o valor igual a sen $53\pi/6$ é:

a) cos225º
b) cos150º
c) cos60º
d) sen210º
e) sen120º

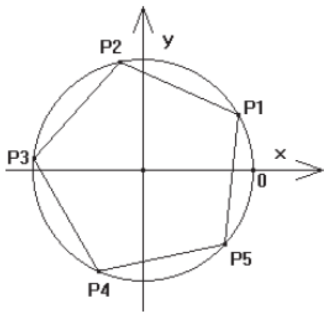
QUESTÃO 04 ESPCEX

São arcos côngruos:

a) – 730º e $-\pi/12rad$
b) 1640º e $-7\pi/6rad$
c) 350º e $-\pi/18rad$
d) 1235º e $5\pi/6rad$
e) -2000º e $4\pi/3rad$

QUESTÃO 05 ESPCEX

Na figura, está representado um círculo trigonométrico em que os pontos P1 a P5 indicam extremidades de arcos. Esses pontos, unidos, correspondem aos vértices de um pentágono regular inscrito no círculo. Se o ponto P1 corresponde a um arco de $\pi/6$ radianos, então o ponto P4 corresponderá à extremidade de um arco cuja medida, em radianos, é igual a:



a) $\dfrac{13\pi}{30}$
b) $\dfrac{17\pi}{30}$
c) $\dfrac{29\pi}{30}$
d) $\dfrac{41\pi}{30}$
e) $\dfrac{53\pi}{30}$

QUESTÃO 06

A equação sen x = 2m – 5 admite solução para:

a) $2 \leq m \leq 3$
b) $1 \leq m \leq 4$
c) $-1 \leq m \leq 1$
d) $2 < m < 3$
e) $0 \leq m \leq 1$

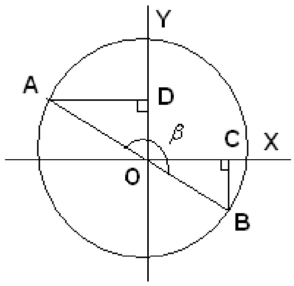
QUESTÃO 07 UFG

Se $senx = \dfrac{3m-5}{7}$, então determine o valor máximo de m.

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

QUESTÃO 08 ESPCEX

No círculo trigonométrico (raio = 1), representado na figura, a medida de β é 150° e AB representa um diâmetro. O valor do produto das medidas dos segmentos OC e OD é:



a) 1/4
b) 1/2
c) $\sqrt{3}/4$
d) $\sqrt{3}/2$
e) $\sqrt{2}/2$

QUESTÃO 09 ESPCEX

A quantidade de valores inteiros que a pode assumir para que a equação cos x = $(a-1)^2$ tenha solução é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

QUESTÃO 10 **ESPCEX**

Sendo k ∈ **Z**, o número de valores distintos assumidos por s $\frac{k\pi}{9}$ é igual a:

a) 5
b) 8
c) 9
d) 10
e) 18

QUESTÃO 11 **ESPCEX**

O número de arcos no intervalo $\left[0, \frac{19\pi}{6}\right]$ cujo valor do cosseno é igual a 0,5 é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

QUESTÃO 12 **ESPCEX**

Sendo $z = \frac{2-3senx}{4}$ pode-se afirmar que todos os valores de z que satisfazem essa igualdade estão compreendidos em:

a) $-2 \leq z \leq -1$
b) $-1 \leq z \leq -1/4$
c) $-1/4 \leq z \leq 5/4$
d) $0 \leq z \leq 3/2$
e) $1/4 \leq z \leq 2$

AULA 09 - RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Vamos definir algumas razões que envolva os principais elementos: seno e cosseno.

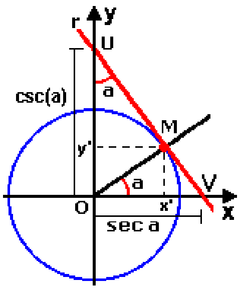
- Tangente → $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$
- Cotangente→ $\cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$
- Secante→ $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$
- Cossecante→ $\text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$

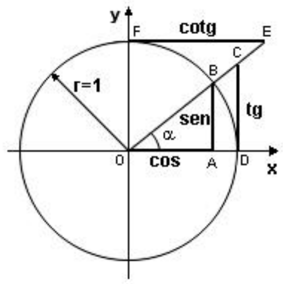
Da relação fundamental da trigonometria $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, podemos obter mais duas relações:

- $1 + \cot g^2\alpha = \text{cossec}^2\,\alpha$
- $1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$

SINAIS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

	1ºQ	2ºQ	3ºQ	4ºQ
seno e cossecante	+	+	–	–
cosseno e secante	+	–	–	+
tangente e cotangente	+	–	+	–





EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 **ESPCEX**

Sendo $senx = \frac{5}{13}$ e $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, então o valor de tgx é igual a:

a) -5/12
b) 5/12
c) 12/13
d) 12/5
e) -12/13

QUESTÃO 02 **ESPCEX**

O valor do determinante da matriz $\begin{pmatrix} \text{cossec}^2 x & 1 & \sec^2 x \\ \cot g^2 x & \cos^2 x & tg^2 x \\ 1 & sen^2 x & 1 \end{pmatrix}$ com $x \neq \frac{k\pi}{2}$ e k ∈ Z é:

a) -2
b) -1
c) 1
d) 0
e) 2

QUESTÃO 03 **ESPCEX**

Sendo $\text{cossec}\,\theta = \frac{1}{x-1}$ e $\sec\theta = \frac{\sqrt{3-x^2}}{3-x^2}$, então um valor de x que verifica essas igualdades é:

a) 1/2
b) 1/3
c) 1/4
d) 3/4
e) 3/2

QUESTÃO 04

Se $\pi < x < 3\pi/2$, então a maior raiz positiva da equação $(\text{tgx} - 1)(4\text{sen}^2 x - 3) = 0$ é:

a) $4\pi/3$
b) $5\pi/4$
c) $7\pi/6$
d) $7\pi/4$

QUESTÃO 05 **ESPCEX**

Simplificando a expressão E = $(1 + \cot g^2 x)(1 - \cos^2 x)$, teremos:

a) E = tg x
b) E = sen x
c) E = $\sqrt{2}$
d) E = 1
e) E = -1

QUESTÃO 06 **PUC**

O valor numérico de W para x = $\dfrac{1080^o}{\dfrac{-\pi}{50}}$.

$$W = \frac{sen(\frac{x}{2}) + 2tg\left(\frac{3x}{4}\right)}{3\cos x}$$

a) 5/2
b) 5/3
c) 3/2
d) 2/5
e) 0

AULA 10 - SOMA DE ARCOS

São válidas as seguintes fórmulas, que devem ser memorizadas! Repito aqui, que uma das aparentes dificuldades da Trigonometria é essa necessidade imperiosa de memorização de fórmulas. Entretanto, a não memorização levaria a perda de tempo para deduzi-las durante as provas, o que tornaria a situação impraticável.

Talvez, a melhor solução seria aquela em que os examinadores que elaboram os exames vestibulares inserissem como anexo de toda prova, um resumo das fórmulas necessárias à sua resolução, exigindo do candidato, apenas o conhecimento e o raciocínio necessários para manipulá-las algebricamente e, aí sim teria sido feito justiça! Fica a sugestão as bancas de concurso!

SENO E COSSENO DE ADIÇÕES

cos(a – b) = cosa.cosb + sena.senb
cos(a + b) = cosa.cosb – sena.senb
sen(a – b) = sena.cosb – senb.cosa
sen(a + b) = sena.cosb + senb.cosa

ARCO DUPLO

Ao fazer a condição de $a = b = \theta$ obtemos:

- $sen(2\theta) = 2sen\theta\cos\theta$
- $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - sen^2\theta$
- $tg(2\theta) = \dfrac{2tg\theta}{1 - tg^2\theta}$

ARCO METADE

Trabalhando as equações acima chegamos ainda

- $sen\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$
- $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$
- $tg\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \dfrac{sen\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{1-\cos\theta}{sen\theta}$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01

Se sen x + cos 2x = 1, então um dos valores de sen x é:

a) 1.
b) 1/2
c) $\sqrt{2}/2$
d) $-\sqrt{3}/3$

QUESTÃO 02

Se $f: R \to R$ é definida por $f(x) = 2\cos(2x) + \cos x + 4$, o menor valor que f pode assumir é:

a) 17/16
b) 31/16
c) 27/16
d) 19/16

QUESTÃO 03

O conjunto imagem da função $f: R \to R$ dada por $f(x) = 3sen^2x - 5\cos^2x$, isto é, o conjunto $\{y \in R;\ y = f(x) \text{ para algum } x \in R\}$, é o intervalo:

a) $[-6, 2]$
b) $[-5, 3]$
c) $[-5, 5]$
d) $[-2, 4]$

QUESTÃO 04

A soma das soluções da equação $2\cos^2 x - 2\text{sen}^2 x - 1 = 0$ no intervalo $[0,\ 2\pi]$ é:

a) $\dfrac{11\pi}{6}$
b) 3π
c) 4π
d) $\dfrac{23\pi}{6}$

QUESTÃO 05

Se tg(x/2) + cotg(x/2) = 8, então senx é:
a) 1/2
b) 1/4
c) $\sqrt{2}/2$
d) $\sqrt{3}/2$

QUESTÃO 06

Se x e y são arcos no primeiro quadrante tais que sen(x) = $\sqrt{3}/2$ = cos(y), então o valor de sen(x +y)+sen(x –y) é:

a) $\sqrt{6}/2$
b) $3/2$
c) $\sqrt{6}/3$
d) $2/3$

QUESTÃO 07

Se x e y são as medidas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, então $\cos^2 x + \cos^2 y$ é igual a:
a) sen(x+y).
b) cos(x+y).
c) senx.cosy.
d) sen(x+y).cos(x+y).

QUESTÃO 08

As medidas dos ângulos internos Y, X, Z, W de um quadrilátero convexo estão em progressão aritmética, sendo 45º a menor medida. O valor da soma sen Y + senX + sen Z+ senW é:

a) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$
b) $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$
c) $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$
d) $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3}$

AULA 11 - FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Em matemática, as **funções trigonométricas** são funções angulares, importantes no estudo dos triângulos e na modelação de fenômenos periódicos. Podem ser definidas como razões entre dois lados de um triângulo retângulo em função de um ângulo, ou, de forma mais geral, como razões de coordenadas de pontos no círculo unitário. Na análise matemática, estas funções recebem definições ainda mais gerais, na forma de séries infinitas ou como soluções para certas equações diferenciais. Neste último caso, as funções trigonométricas estão definidas não só para ângulos reais como também para ângulos complexos.
Atualmente, existem seis funções trigonométricas básicas em uso, cada uma com a sua abreviatura notacional padrão conforme tabela abaixo. As inversas destas funções são chamadas de **função de arco** ou funções trigonométricas inversas. A nomenclatura é feita através do prefixo "arco-", ou seja, arco seno, arco co-seno, etc.

FUNÇÃO SENO

Associa a cada número real *x* o número y = senx
- Domínio: pode assumir qualquer valor real: D = **R**.
- Conjunto Imagem: Im = {-1; 1}
- Gráfico: Ele sempre se repete no intervalo de 0 a 2π.. Esse intervalo é denominado **senóide**.
- Período: 2π.

FUNÇÃO COSSENO

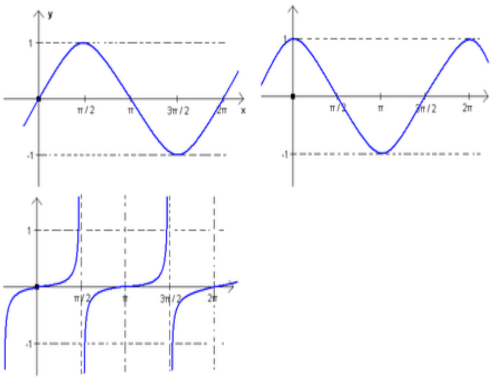
Associa a cada número real *x* o número y = cosx
- Domínio: pode assumir qualquer valor real: D = **R**
- Conjunto Imagem: Im = {-1; 1}
- Gráfico: Ele sempre se repete no intervalo de 0 a 2π.. Esse intervalo é denominado **cossenóide**.
- Período: 2π..

FUNÇÃO TANGENTE

Associa a cada número real *x* o número y = tgx.
- Domínio: A função da tangente apresenta uma peculiaridade. Ela não existe quando o valor de cosx = 0 (não existe divisão por zero), portanto o domínio são todos os números reais, exceto os que zeram o cosseno.
- Conjunto Imagem: $\text{Im} =]-\infty,\ \infty[$
- Gráfico: Tangentóide.
- Período: π

OBS:
Podemos considerar uma função seno ou cosseno dita como completa quando expressa por:
$\boxed{F(x) = A + B.sen(Cx + D),}$
onde:
- Im = {A+B; A-B}
- Período = $\dfrac{2\pi}{C}$.
- Fade inicial (x_O) = D

GRÁFICOS



EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 — **UEPR**

Dada a função trigonométrica sen(Kx), é correto afirmar que o período da função é:
a) π
b) 2 π
c) sempre o mesmo, independentemente do valor de K.
d) diretamente proporcional a K.
e) inversamente proporcional a K.

QUESTÃO 02 — **PUC**

O conjunto imagem da função f definida por f (x) = sen (x) + h é [–2, 0]. O valor de h é:
a) π
b) –2
c) –1
d) 0
e) 1

QUESTÃO 03 — **UFES**

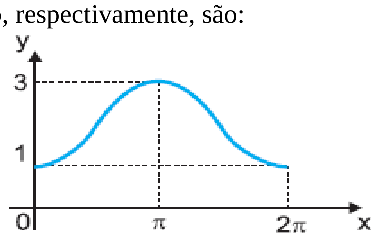
O período e a imagem da função $f(x) = 5 - 3\cos\left(\dfrac{x-2}{\pi}\right)$, $x \in \Re$ são respectivamente:
a) 2 π e [–1, 1]
b) 2 π e [2, 8]
c) 2 π^2 e [2, 8]
d) 2 π e [–3, 3]
e) 2 π^2 e [–3, 3]

QUESTÃO 04 — **MACK**

Para x, a função definida por f(x) = sen x para $[0,\ 2\pi]$tem:
a) um valor máximo para x = 0.
b) um valor mínimo para x = π.
c) somente valores positivos se $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$.
d) valores negativos se $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.
e) três raízes.

QUESTÃO 05 — **UEBA**

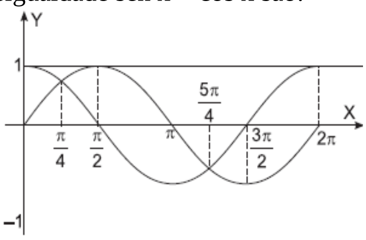
O gráfico a seguir representa a função f(x) = a + b cos x. Os valores de a e b, respectivamente, são:



a) 2 e -1
b) 1 e –1
c) 3 e 1
d) 2 e 1
e) 1 e –2

QUESTÃO 06 — **UFPA**

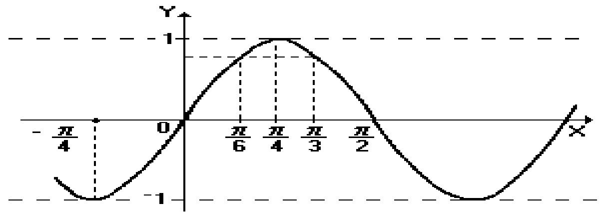
As funções seno e co-seno são representadas, respectivamente, por duas curvas chamadas de senóide e co-senóide. De acordo com o gráfico a seguir, os valores de x que satisfazem a desigualdade sen x > cos x são:



a) $\dfrac{5\pi}{4} < x < 2\pi$
b) $\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{5\pi}{4}$
c) $x < \pi$
d) $x > \pi$
e) $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}$

QUESTÃO 07 — PUC

Observe o gráfico a seguir.

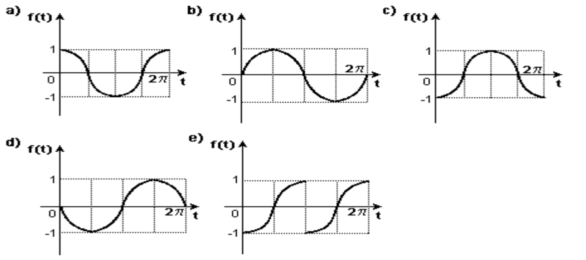


A função real de variável real que MELHOR corresponde a esse gráfico é

a) y = cos x
b) y = sen x
c) y = cos 2x
d) y = sen 2x
e) y = 2 sen x

QUESTÃO 08 — UFPA

O gráfico da função f dada por f(t) = $\cos\left[t + \left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$ no intervalo [0, 2π] é:

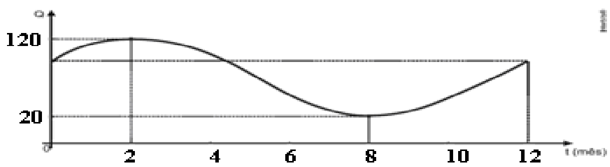


QUESTÃO 09 — MACK

Sejam f(x) = 2 − cos x, com $0 \le x \le 2\pi$, M o valor máximo de f(x) e m o seu valor mínimo. O valor de $\frac{M}{2m}$ é:

a) 3/2
b) 2/3
c) 1/3
d) 1/6
e) 3

QUESTÃO 10 — UFSM



O gráfico mostra a quantidade de animais que certa área de pastagem pode sustentar ao longo de 12 meses. Propõe-se a função Q (t) = a sen (b + ct) + d para descrever essa situação. De acordo com os dados, Q (0) é igual a

a) 100.
b) 97.
c) 95.
d) 92.
e) 90.

QUESTÃO 11 — UFPR

Suponha que o horário do pôr do sol na cidade de Curitiba, durante o ano de 2009, possa ser descrito pela função

$$f(t) = 18{,}8 - 1{,}3\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{365}t\right)$$

sendo t o tempo dado em dias e t = 0 o dia 1º de janeiro. Com base nessas informações, considere as seguintes afirmativas:

1. O período da função acima é 2π .
2. Foi no mês de abril o dia em que o pôr do sol ocorreu mais cedo.
3. O horário em que o pôr do sol ocorreu mais cedo foi 17h30.

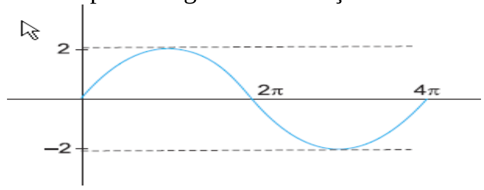
Assinale a alternativa correta.

a) Somente a afirmativa 3 é verdadeira.
b) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.
e) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

QUESTÃO 12 — UCB

A figura a seguir mostra parte do gráfico da função:

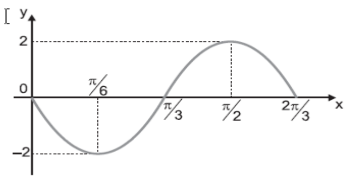
a) senx
b) 2sen(x/2)
c) 2senx
d) 2sen(2x)
e) sen(2x)



QUESTÃO 13 — UEAL

Observe o gráfico: Sabendo-se que ele representa uma função trigonométrica, a função y(x) é:

a) –2 cos (3x).
b) –2 sen (3x).
c) 2 cos (3x).
d) 3 sen (2x).
e) 3 cos (2x).



AULA 12 – NÚMEROS COMPLEXOS I

O conjunto dos números complexos é o conjunto que possui maior cardinalidade, afinal ele contém todos os outros conjuntos. É necessário, pois, compreender os processos das operações (aritméticas, trigonométricas, algébricas) envolvendo elementos desse conjunto, assim como a representação geométrica dos números complexos.

ORIGEM E POTÊNCIAS DE i

No estudo dos números complexos deparamo-nos com a seguinte igualdade: $i^2 = -1$.

A justificativa para essa igualdade está geralmente associada à resolução de equações do 2º grau com raízes quadradas negativas, o que é um erro. A origem da expressão $i^2 = -1$ aparece na definição de números complexos, outro assunto que também gera muita dúvida. Quanto as potências...

Veja o cálculo das primeiras potências de i com expoente natural:

$i^0 = 1$, por definição
$i^1 = i$, por definição
$i^2 = -1$, constatado no item 4
$i^3 = i^2 . i = (-1) . i = -i$
$i^4 = i^2 . i^2 = (-1) . (-1) = 1$
$i^5 = i^4 . i = 1 . i = i$
$i^6 = i^4 . i^2 = 1 . (-1) = -1$
$i^7 = i^4 . i^3 = 1 . (-i) = -i$
$i^8 = i^4 . i^4 = 1 . 1 = 1$, etc.

Teorema

$$\begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline r & q \end{array} \Rightarrow n = 4q + r \Rightarrow i^n = i^{4q+r} \Leftrightarrow i^n = (i^2)^{2q} . i^r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i^n = (-1)^{2q} . i^r \Leftrightarrow i^n = 1 . i^r \Leftrightarrow i^n = i^r$$

PARTICULARIDADES DOS COMPLEXOS

Oposto

O oposto de qualquer número real é o seu simétrico, o oposto de 10 é -10, o oposto de -5 é +5. O oposto de um número complexo respeita essa mesma condição, pois o oposto do número complexo z será – z.

Conjugado

Para determinarmos o conjugado de um número complexo, basta representar o número complexo através do oposto da parte imaginária. O conjugado de z = a + bi será: $\bar{z} = a - bi$.

Igualdade

Dois números complexos serão iguais se, e somente se, respeitarem a seguinte condição (para z = a + bi):
Partes imaginárias iguais (b)
Partes reais iguais (a)
Dado os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, z1 e z2, serão iguais se, somente se, a = c e bi = di.

OPERAÇÃO COM NÚMEROS COMPLEXOS

Os números complexos são escritos na sua forma algébrica da seguinte forma: a + bi, sabemos que a e b são números reais e que o valor de a é a parte real do número complexo e que o valor de bi é a parte imaginária do número complexo.

Adição

Dado dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, ao adicionarmos teremos:
$\underline{z_1 + z_2} \rightarrow (a + bi) + (c + di) \rightarrow a + bi + c + di$
$a + c + bi + di \rightarrow a + c + (b + d)i \rightarrow (a + c) + (b + d)i$
Portanto, $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

Subtração

Dado dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e z_2 = c
+ di, ao subtraímos teremos:
$\underline{z_1 - z_2} \rightarrow (a + bi) - (c + di) \rightarrow a + bi - c - di \rightarrow a - c + bi - di$
$(a - c) + (b - d)i$
Portanto, $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$.

Multiplicação

Dado dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, ao multiplicarmos teremos:
$z_1 . z_2 \rightarrow (a + bi) . (c + di) \rightarrow ac + adi + bci + bdi^2$
$ac + adi + bci + bd(-1) \rightarrow ac + adi + bci - bd$
$ac - bd + adi + bci \rightarrow (ac - bd) + (ad + bc)i$
Portanto, $z_1 . z_2 = (ac + bd) + (ad + bc)i$.

Divisão

Ao dividirmos dois números complexos devemos escrevê-los em forma de fração e multiplicarmos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, veja como:
Dado dois números complexos z_1 e z_2, para efetuarmos a divisão dos dois devemos seguir a seguinte regra:

$$\frac{Z_1}{Z_2} \rightarrow \frac{Z_1}{Z_2} . \frac{\overline{Z_2}}{\overline{Z_2}} \rightarrow \frac{a+bi}{c+di}\left(\frac{c-di}{c-di}\right)$$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01

O produto (5 + 7i) (3 - 2i) vale:
a) 1 + 11i
b) 1 + 31i
c) 29 + 11i
d) 29 - 11i
e) 29 + 31i

QUESTÃO 02

Se $f(z) = z^2 - z + 1$, então f(1 - i) é igual a:
a) i
b) -i + 1
c) i – 1
d) i + 1
e) –i

QUESTÃO 03

Sendo i a unidade imaginária o valor de $i^{10} + i^{-100}$ é:
a) zero
b) i
c) –i
d) 1
e) -1

QUESTÃO 04

Sendo i a unidade imaginária, $(1 - i)^{-2}$ é igual a:
a) 1
b) –i
c) 2i
d) -i/2
e) i/2

QUESTÃO 05

A potência $(1 - i)^{16}$ equivale a:
a) 8
b) 16 - 4i
c) 16 - 16i
d) 256 - 16i
e) 256

QUESTÃO 06 UECE

Para os números complexos z = 3 + 4i e w = 4 – 3i, onde $i^2 = -1$, a soma $\frac{z}{w} + \frac{w}{z}$ é igual a:
a) 0
b) 2i
c) –2i
d) 1

QUESTÃO 07 UECE

Seja p o produto das raízes da equação complexa $z^3 = i$ e q a soma das raízes da equação complexa $z^2 + (2 + i)z + 2i = 0$. O valor do produto p.q é:
a) –2i – 1
b) –2i + 1
c) –2i + 2
d) –2i – 2

QUESTÃO 08 UECE

Se o número complexo $z = (-3 - 2i)^2 + 2/i$ é posto na forma a + bi, onde a e b são números reais, então a + b é igual a:
a) 5
b) 10
c) 15
d) 20

QUESTÃO 09 UECE

Os números complexos z e w, escritos na forma z = x + yi e w = u + vi em que $x \neq 0$ e $u \neq 0$, são tais que z . w = 1. A soma dos quadrados $u^2 + v^2$ é igual a:
a) 1/x
b) $1/u^2$
c) 1 /ux
d) u / x

QUESTÃO 10 UECE

Os números complexos z_1, z_2, z_3 e z_4 são representados, no plano complexo, por quatro pontos, os quais são vértices de um quadrado com lados paralelos aos eixos e inscrito em uma circunferência de centro na origem e raio r. O produto $z_1 . z_2 . z_3 . z_4$ é:
a) um número real positivo.
b) um número real negativo.
c) um número complexo cujo módulo é igual a r/2
d) um número complexo, não real.

QUESTÃO 11 UECE

Os números complexos z_1 e z_2 são as raízes da equação $x^2 - 2x + 5 = 0$. A soma $|z_1| + |z_2|$ é:
a) $2\sqrt{5}$
b) $3\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{2}$
d) $5\sqrt{2}$

QUESTÃO 12 | **UECE**

No plano complexo, o número z = 2 – 3i é o centro de um quadrado e w = 5 – 5i é um de seus vértices. O vértice do quadrado não consecutivo a w é o número complexo:

a) 2 – 2i.
b) 1 – i.
c) -1 – i.
d) -2 – 2i.

QUESTÃO 13 | **UECE**

Se i representa o número complexo cujo quadrado é igual a -1, determine o valor numérico da soma $1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{27}$.

a) -1
b) 0
c) 1
d) 2
e) 3

QUESTÃO 14 | **UFSM**

Para que o número Z = (x – 2i)(2 + xi) seja real, devemos ter ($x \in \Re$) tal que:

a) x = 0
b) x = $\pm\frac{1}{2}$
c) x = ± 2
d) x = ± 4
e) n.d.a

QUESTÃO 15 | **UFPA**

Qual é o valor de *m*, real, para que o produto (2 + mi)(3 + i) seja um imaginário puro?

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8

QUESTÃO 16 | **UFMG**

O número complexo z, tal que $5z + \bar{z} = 12 + 16i$, é igual a:

a) -2 + 2i
b) 2 – 3i
c) 1 + 2i
d) 2 + 4i
e) 3 + i

QUESTÃO 17 | **MACK**

Para $i = \sqrt{-1}$, os valores de a e b tais que $\begin{vmatrix} a-i & i \\ i^3 & i^{26} \end{vmatrix} = 3 + bi$ são, respectivamente:

a) 0 e 3/2
b) -4 e 1
c) 3/2 e 0
d) 3/2 e 2
e) -6 e 2

AULA 13 – NÚMEROS COMPLEXOS II

Vimos na aula passada a forma algébrica de um número complexo (z = a + bi). Hoje vamos ver a representação em um plano cartesiano de coordenadas complexas.

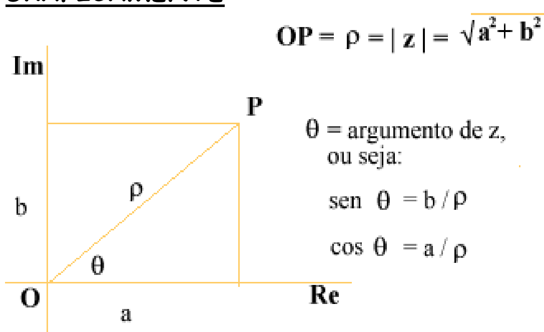
O par ordenado (x; y) tem sua abscissa x no eixo dos reais e a ordenada y no eixo dos imaginários. Desta forma vamos a estudos detalhados até chegar a forma trigonométrica.

PLANO CARTESIANO

Na ilustração temos a representação de um numero complexo no plano cartesiano. Dosi elementos são importantes no estudo nesse momento:

- Módulo: é a distancia do ponto P a origem (0; 0). Para z = a + bi teremos $\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}$.
- Argumento: é o ângulo formado entre o segmento OP e o eixo x no sentido anti-horario. Para z = a + bi teremos $\boxed{tg\theta = \frac{b}{a}}$.

GRAFICAMENTE



FORMA TRIGONOMÉTRICA OU POLAR

O item anterior mostra que $sen\theta = \frac{b}{\rho}$ e $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$. Bem, como z = a + bi, podemos escrever

$$\boxed{z = \rho(sen\theta + i\cos\theta)}$$

Quando temos uma potencia de z na forma trigonométrica, escrevemos

$$\boxed{z^n = \rho^n(sen(n\theta) + i\cos(n\theta))}$$

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 | **UFAL**

É dado um número complexoz = (x – 2) + (x + 3)i, onde x é um número real positivo. Se |z| = 5, então:
a) z é um número imaginário puro.
b) z é um número real positivo.
c) O ponto imagem de z é (-1, 2)
d) O conjugado de z é -1 + 2i.
e) O argumento principal de z é 180º.

QUESTÃO 02 | **UFC 2007**

Ao dividir 1- $i\sqrt{3}$ por –1 + *i*, obtém-se um complexo de argumento igual a:
a) $\pi/4$
b) $5\pi/12$
c) $7\pi/12$
d) $3\pi/4$
e) $11\pi/12$

QUESTÃO 03 | **UECE**

Considere o número complexo z = 1/2 + $\sqrt{3}$ i/2. Então $(zi)^{2007}$ é igual a:
a) 1.
b) -1.
c) i.
d) –i.

QUESTÃO 04 | **UFAL**

Determine o argumento do número z = 0,5 + $0{,}5i3^{(1/2)}$.
a) 30º
b) 45º
c) 60º
d) 120º

QUESTÃO 05 | (MACK)

A solução da equação |z| + z = 2 + i é um número complexo de módulo:
a) 5/4
b) $5\sqrt{2}$
c)$15/\sqrt{2}$
d) 5/2

QUESTÃO 06 | FEI-SP

O módulo do número complexo $z = \dfrac{1+2i}{3-4i}$ é:
a) 1/5
b) 2/5
c) 1/3
d) $\sqrt{5}$
e) $\sqrt{5}/5$

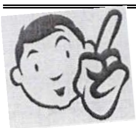
QUESTÃO 07 | (MACK)

A forma trigonométrica ou polar do número complexo $\dfrac{1-i}{(1+i)^2}$ tem argumento igual a:
a) 45º
b) 90º
c) 135º
d) 225º
e) 315º

QUESTÃO 08 | **UCDB-MS**

Considerando z = – 1 – i , de módulo ρ e argumento θ , é falso dizer que:
o afixo de "z" pertence ao 3º quadrante.
b) $z.\bar{z} = 2$
c) $z^2 = 2.\bar{z} + 2$
d) $\rho^3 = 8$
e) **tg**θ = **1**

AULA 14 – POLINÔMIOS



Chamamos **monômio** na variável **x** toda expressão do tipo $a.x^n$. Nesta expressão, a constante **a** e a variável **x** são definidas no **universo complexo** e o expoente **n** é um **número natural**.

O número **a** é o coeficiente numérico e $\mathbf{x^n}$ é a parte literal do monômio. Caso o coeficiente **a** seja um número diferente de zero, o expoente **n** é o grau do monômio. Caso contrário, i.e., o número **a** é nulo, dizemos que o grau do monômio não é definido.
Ex. O monômio -5i$\mathbf{x}^6$ tem grau 6.

Note que a expressão $2x^{\frac{1}{2}} - 3x + 5$ **não** é um polinômio, pois o expoente 1/2 não é um número natural.

Podemos generalizar a representação de um polinômio na variável **x** da seguinte forma: $p(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0$. Evidentemente que se $a_n \neq 0$ então o grau do polinômio é igual a **n**.

ELEMENTOS DE UM POLINÔMIO

Dado um polinômio na variável **x** tal que: $p(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0$. Cada monômio que constitui esse polinômio é um **termo** de p(**x**) e, em particular, o monômio a_0, é o **termo independente**. Os números complexos $a_n, a_{n-1}, ..., a_1$ e a_0 são os coeficientes de p(x).

POLINÔMIO IDENTICAMENTE NULO

Um polinômio **p**, definido na variável **x**, é identicamente **nulo** se, e somente se, **todos os coeficientes de p forem nulos.**

VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO

Valor Numérico de um polinômio P(x), é o valor que se obtém substituindo a variável x por um número e efetuando as operações indicadas. Observação: Quando P(α) = 0 dizemos que α é a raiz do polinômio.
Observe que os números 2 e 3 são raízes do polinômio $P(x) = x^2 - 5x + 6$, pois P(2) = 0 e P(3) = 0.

OBS
- Se $p(\alpha) = 0$ então α é **raiz** do polinômio.
- Note que o valor numérico do polinômio p(**x**) para **x** =1 é igual à soma dos coeficientes do polinômio,i.e., $p(1) = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$
- Note que o valor numérico do polinômio p(**x**) para **x** = 0 é igual ao termo independente, i.e, $p(0) = a_0$.

POLINÔMIOS IDÊNTICOS

Dois polinômios, **p** e **q**, definidos na variável **x**, são idênticos se, e somente se, os seus termos correspondentes tiverem coeficientes respectivamente iguais. Indicaremos a identidade entre os polinômios por $p \equiv q$.

Ex. Se **p**(**x**) = 8**x**² - 7**x** + 11 é idêntico a **q**(**x**) = a**x**² + b**x** + c, então a = 8, b = -7 e c = 11.

OPERAÇÃO COM POLINÔMIOS

Adição
Para somar dois polinômios definidos em uma mesma variável, basta somar os monômios de mesmo grau.
Ex. Dados $p(x) = 7x^3 + 5x^2 + 1$ e $q(x) = 4x^2 + 3x + 7$, temos:
$p(x) + q(x) = 7x^3 + (5x^2 + 4x^2) + 3x + (1 + 7) =$
$= 7x^3 + 9x^2 + 3x + 8$.

Subtração
Para subtrair dois polinômios definidos em uma mesma variável, devemos subtrair seus respectivos monômios de mesmo grau.
Ex. Dados $p(x) = 7x^3 + 5x^2 + 1$ e $q(x) = 4x^2 + 3x + 7$, temos:
$p(x) - q(x) = 7x^3 + (5x^2 - 4x^2) - 3x + (1 - 7) = 7x^3 + x^2 - 3x - 6$.

OBS Note que na soma e na subtração de dois polinômios, caso o resultado não seja o polinômio nulo, o grau do resultado é no **máximo** o maior dos graus dos polinômios.

Multiplicação
Para multiplicar dois polinômios, devemos multiplicar **cada** monômio de um deles por **todos** os monômios do outro e somar os resultados de mesmo grau.
Ex. Dados $p(x) = 2x+3$ e $g(x) = 5x^2 + 4x + 1$, temos:

$$p(x) \cdot g(x) = (2x + 3)(5x^2 + 4x + 1)$$
$$p(x) \cdot g(x) = (10x^3 + 8x^2 + 2x) + (15x^2 + 12x + 3)$$
$$\therefore \; p(x) \cdot g(x) = 10x^3 + 23x^2 + 14x + 3$$

OBS
Note que na multiplicação de polinômios não-nulos o grau do resultado é a soma dos graus dos dois polinômios.

Divisão
Dados os polinômios P(x) e D(x), com D(x) não identicamente nulos, dividir P(x) por D(x) equivale obter os polinômios Q(x) (quociente) e R(x) (resto), tais que:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

- $P(x) \equiv D(x) . Q(x) + R(x)$
- $gr(R) < gr(D)$ ou $R(x) \equiv 0$

Onde:
P(x) é o dividendo
D(x) é o divisor
Q(x) é o quociente
R(x) é o resto

OBS:
O grau de Q(x) é a diferença entre os graus de P(x) e de D(x), ou seja, gr(Q) = gr(P) gr(D)

Se R(x) for um polinômio nulo, apontamos que P(x) é divisível por D(x), dizemos então, que a divisão é exata

TEOREMA DO RESTO

O resto da divisão de um polinômio p(**x**) pelo binômio **x** – **a** é igual a p(**a**). Note que o número **a** é a **raiz** do divisor d(**x**) = **x** – **a**.
Ex. Determine o resto da divisão do polinômio $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por $d(x) = x - 2$.
Solução:
Note que x = 2 é a raiz do divisor. Pelo teorema do resto, o resto da divisão de p(x) por d(x) é igual a p(2) = $3.2^3 - 5.2^2 + 2 - 2 = 4$.
Consequência: um polinômio p(**x**) é **divisível** pelo binômio **x** – **a** se, e somente se, p(**a**) = 0, ou seja, se o número **a** for raiz de p(x). (**Teorema de D'Alembert**).

DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI

O dispositivo de Briot-Ruffini, também conhecido como algoritmo de Briot-Ruffini, é um modo prático para dividir um polinômio P(x) por um binômio da forma
ax + b.

Ex: Determine o quociente e o resto da divisão da divisão de
$P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$ por (x - 3)

1º Passo Dispõem-se todos os coeficientes de P(x) de forma ordenada e segundo os expoentes decrescentes de x na chave.

	2	– 1	4	– 1

2º Passo Coloca-se à esquerda a raiz do divisor.

3	2	– 1	4	– 1

3º Passo Abaixa-se o primeiro coeficiente de P(x)

3	2	– 1	4	– 1
	2			

4º Passo Multiplica-se o coeficiente baixado pela raiz, somando o resultado com o próximo coeficiente de P(x) e o resultado abaixo desse último.

+

3	2	– 1	4	– 1
x	2	5		

5º Passo
Multiplica-se o esse último resultado pela raiz e soma o resultado com o próximo coeficiente de P(x) de forma análoga ao último passo, e assim sucessivamente.

+

3	2	– 1	4	– 1
x	2	5	19	

+

3	2	– 1	4	– 1
x	2	5	19	56

→
Terminando assim o processo, temos:

raiz	coeficientes de P(x)			
	2	5	19	56

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 **UELO**

Sendo F, G e H polinômios de graus 4, 6 e 3, respectivamente, o grau de (F + G).H será:
a) 9
b) 10
c) 12
d) 18
e) 30

QUESTÃO 02 **PUC**

Efetuando a soma de $\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x-1}$ obtemos a expressão $\frac{x-3}{(x^2+1)(x-1)}$. Os valores de a, b e c são respectivamente:
a) 0, 1, -3
b) 1, -1, -3
c) -1, 1, 1
d) 1, 2, -1
e) 2, 1, -2

QUESTÃO 03 **UFRGS**

O polinômio do 2º grau p(x), que tem zero como raiz e tal que p(x) - p(x - 1) = 6x - 2, é
a) $2x^2 + 3x – 6$
b) 6x - 2
c) $6x^2 - x$
d) $3x^2 + x$
e) $x^2 + 3x$

QUESTÃO 04

Cescea-SP Dado o polinômio $P(x) = x^2 – 2x$, o valor de P(1 + i) será:
a) P(1) + P(i)
b) -2
c) 0
d) -1 + 2i
e) n.r.a

QUESTÃO 05

O grau do polinômio $(x + 2)^2(x – 4)^4(x + 6)^6(x – 8)^8...(x + 18)^{18}$ é:
a) 2. 9!
b) 90
c) 2^3 . 9!
d) 180
e) 18!

QUESTÃO 06 **PUC**

Os valores de a e b que tornam o polinômio $P(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b$ divisível por $(x + 1)^2$ são respectivamente:
a) 1 e 2
b) 3 e 2
c) 4 e 5
d) 5 e 2
e) n.d.a.

QUESTÃO 07 **UFMG**

O quociente da divisão de $P(x) = 4x^4 - 4x^3 + x - 1$ por $Q(x) = 4x^3 + 1$ é:

a) x – 5
b) x – 1
c) x + 5
d) 4x - 5
e) 4x + 8

QUESTÃO 08 **UFSCAR**

A respeito das seguintes afirmações:

I - Se P(x) e Q(x) são polinômios de grau *n*, então P(x) + Q(x) é um polinômio de grau 2n.
II - O quociente de um polinômio de grau *n* por x – a é um polinômio de grau -1.
III - Se P(x) e Q(x) são polinômios de grau n, então P(x). Q(x) é um polinômio de grau n^2.
IV - Se P(x) é um polinômio de grau n – 3, então, o resto da divisão P(x) / Q(x) é um polinômio de grau 4.

Podemos afirmar:
a) I e III são falsas;
b) I e II são falsas;
c) II e IV são verdadeiras;
d) III e IV são verdadeiras;
e) I e IV são verdadeiras

QUESTÃO 09 **UECE**

Se os números 2 e –3 são raízes da equação $x^3 – 4x^2 + px + q = 0$, então o resultado da divisão do polinômio $x^3 – 4x^2 + px + q$ por $x^2 + x – 6$ é:
a) x – 1
b) x + 1
c) x – 5
d) x + 5

QUESTÃO 10 **UECE**

Se o polinômio $P(x) = x^4 + \alpha x^3 – 5x2 + 2x + \beta$ é divisível por $x^2 + 1$, então β / α é igual a:
a) 3
b) – 3
c) 5/2
d) – 5/2

QUESTÃO 11 **UECE**

Se o polinômio $p(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$ pode ser fatorado como $p(x) = (x + a)(x^2 + b)$, o valor de p(a – b) é:
a) 6
b) 10
c) 16
d) 20

QUESTÃO 12 **UFC**

Considere a igualdade $\frac{x+3}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$. A opção em que figuram os valores de A e B que tornam esta igualdade uma identidade algébrica é:
a) A = –2 e B = 1
b) A = 1 e B = –2
c) A = 1 e B = 2
d) A = 2 e B = 1
e) A = 2 e B = –1

QUESTÃO 13 **UFC**

O polinômio $P(x) = 2x^3 – x^2 + ax + b$, em que a e b são números reais, possui o número complexo *i* como uma de suas raízes. Então o produto a·b é igual a:
a) –2
b) –1
c) 0
d) 1
e) 2

QUESTÃO 14 **UFC**

Os números reais *a*, *b*, *c* e *d* são tais que, para todo *x* real, tem-se $ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + x – 2)(x – 4) – (x + 1)(x^2 – 5x + 3)$. Desse modo, o valor de *b* + *d* é:
a) –2
b) 0
c) 4
d) 6
e) 10

QUESTÃO 15 **UFC**

Se a identidade $\frac{3x+2}{x^2-4}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}$ é verdadeira para todo número real *x* diferente de 2 e - 2 ,então, os valores de *a* e *b* são, respectivamente,
a) 1 e -1
b) 2 e -1
c) 2 e 1
d) 3 e 2
e) 3 e 3

QUESTÃO 16 — **UEL**

Se o resto da divisão do polinômio $p(x) = x^4 - 4x^3 - kx - 75$ por $(x - 5)$ é 10, o valor de k é:
a) -5
b) -4
c) 5
d) 6
e) 4

QUESTÃO 17

Um polinômio p(x) deixa resto 1 quando dividido por $(x – 3)$ e resto 4 quando dividido por $(x + 1)$. O resto da divisão desse polinômio por $(x – 3)(x + 1)$ é:
a) $-3/4x + 13/4$
b) $-3/4x + 1/4$
c) $x + 4$
d) 4
e) $1/4x + 3/4$

QUESTÃO 18

Determinar m + n + p sabendo que $P(x) = px^4 + (n – p – 1)x^2 + (2m – n – p)x$ é um polinômio nulo.
a) 0
b) 0,5
c) 1
d) 1,5
e) 2

QUESTÃO 19 — **UFRGS**

Se P(x) é um polinômio de grau 5, então, o grau de $[P(x)]^3 + [P(x)]^2 + 2P(x)$ é:
a) 3
b) 8
c) 15
d) 20
e) 30

QUESTÃO 2 — **ITA**

Os valores de α β γ que tornam o polinômio $P(x) = 4x^5 + 2x^4 – 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ divisível por $Q(x) = 2x^3 + x^2 – 2x + 1$ satisfazem as desigualdades:
a) $\alpha > \beta > \gamma$
b) $\alpha > \gamma > \beta$
c) $\beta > \alpha > \gamma$
d) $\beta > \gamma > \alpha$

AULA 15 – EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Chamamos **equação polinomial** de grau **n** toda equação do tipo p(**x**) = 0, onde p(**x**) é um polinômio de grau **n** definido na variável **x**.
Ex. $3x^3 - 4x^2 - 5 = 0$ é uma equação polinomial de grau 3.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA ALGEBRA

Toda equação polinomial de grau maior que zero admite pelo menos uma raiz complexa.

Consequentemente podemos afirmar que todo polinômio de grau n > 1 pode ser decomposto em um produto de fatores de 1º grau, ou seja,
$p(x) = a_n(x - r_1).(x - r_2).(x - r_3). \ldots .(x - r_n)$, em que r_i são as raízes de p(x) e a_n é o coeficiente de x^n.

Note que dessa decomposição podemos concluir que um polinômio de grau **n** admite **n** raízes complexas.

MULTIPLICIDADE DE UMA RAIZ

Se na decomposição do polinômio p(x) em fatores de 1º grau, o fator (x – **r**) aparecer **k**, e somente **k**, vezes, dizemos que o número **r** é raiz com multiplicidade **k** de p(x).
Ex. Dado $p(x) = 7(x - 2)^3(x - 5)^2(x+8)$, temos:
o número 2 é raiz com multiplicidade 3 ou é raiz tripla.
o número 5 é raiz com multiplicidade 2 ou é raiz dupla.
o número -8 é raiz com multiplicidade 1 ou é raiz simples.

RAÍZES COMPLEXAS

Se o número r é raiz da equação polinomial cujos coeficientes são todos números reais, então o número $\bar{r}$, conjugado de r, também é raiz dessa equação com a mesma multiplicidade de r.

RAÍZES RACIONAIS

Se o número racional P/Q, com P e Q primos entre si, é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros:
$a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_1.x + a_0 = 0$, então P é divisor de a_0 e Q é divisor de a_n.
Lembrete: dizer que P e Q são primos entre si equivale a dizer que P/Q é uma fração irredutível.
Ex. Pesquise as raízes racionais da equação $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$.
Solução.

Na equação dada, temos a_0 = 2 e a_n = 3. Segundo o teorema das raízes racionais, temos:

p é divisor de 2 $\Rightarrow p \in \{-2,-1,1,2\}$

q é divisor de 3 $\Rightarrow q \in \{-3,-1,1,3\}$

Logo, $\frac{p}{q} \in \left\{-1,1,-2,2,-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\}$.

Usando o algoritmo de Briot-Ruffini, vemos que as raízes racionais são -2, 1/3 e 1.

OBS

- Note que nem todo número P/Q é raiz da equação.
- Se uma **equação polinomial de coeficientes inteiros** admite como raiz o número irracional $a+\sqrt{b}$, então $a-\sqrt{b}$ também é raiz.

Relações de Girard

As relações entre as **raízes** e os **coeficientes** de uma equação algébrica são denominadas relações de Girard.

Vimos que toda equação polinomial pode ser decomposta em fatores de primeiro grau. Tomemos, sem perda de generalidade, uma equação de segundo grau:

ax² + b**x** + c = 0 ou **a**(**x** – r_1).(**x** – r_2) = 0 com a $\neq$ 0. Segundo Girard, é possível relacionar os coeficientes **a**, **b** e **c** com as raízes $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ da equação. Veja.

Como **ax**² + b**x** + c = **a**(**x** – r_1).(**x** – r_2) e dividindo ambos os membros por **a**, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 \cdot r_2$$

Igualando os coeficientes correspondentes, obtemos as **duas relações** de Girard:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 . r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

De maneira análoga, para uma equação de grau 3, **a**x³ + **b**x² + **c**x + **d** = 0, seguem as **três relações** de Girard:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 . r_2 + r_1 . r_3 + r_2 . r_3 = \dfrac{c}{a} \\ r_1 . r_2 . r_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Sendo assim, por indução, podemos provar por este mesmo raciocínio que toda equação algébrica de grau **n** **(n > 1)** possui **n** relações de Girard.

É importante observar que dada a equação $a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_1.x + a_0 = 0$, a primeira relação sempre representa a soma e a última o produto das raízes. Isto posto, segue que:

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$ e

$$r_1 . r_2 . r_3 . \ldots . r_n = \frac{a_0}{a_n}$$, para **n** par.

$$r_1 . r_2 . r_3 . \ldots . r_n = -\frac{a_0}{a_n}$$, para **n** ímpar.

EXERCICIOS DE FIXAÇÃO

QUESTÃO 01 **UDESC**

As raízes do polinômio $x^3 - 6x^2 - x + 30$:

a) somadas dão 6 e multiplicadas dão 30
b) somadas dão -6 e multiplicadas dão 30
c) somadas dão 6 e multiplicadas dão - 30
d) somadas dão -6 e multiplicadas dão – 30
e) são 5, -2 e –3

QUESTÃO 02 **UFC**

Se a, b e c são as raízes da equação $x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$, encontre o valor numérico de: $\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\right)^2$.

a) 1
b) 4
c) 9
d) 16
e) 25

QUESTÃO 03 **Med ABC-SP**

As raízes da equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ estão em progressão aritmética. Suas raízes são:

a) 1, 2, 3
b) 2, 3, 4
c) 1, 3, 5
d) 2, 4, 6
e) 3, 6, 9

QUESTÃO 04 **MACK**

Uma raiz da equação $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ é igual a soma das outras duas. As raízes são:

a) 2, 2 e 1
b) 3, 2 e 1
c) 2, 1 e 3
d) 1, 1 e 2
e) 1, 2 e 3

QUESTÃO 05 **SANTA CASA**

Sabe-se que a equação: $4x^3 - 12x^2 - x + k = 0$, onde k, admite duas raízes opostas. O produto das raízes dessa equação é:

a) 12
b) 3/4
c) 1/4
d) 3/4
e) 12

QUESTÃO 06 **ACAFE**

A equação polinomial cujas raízes são -2, 1 e - 1 é:

a) $x^3 + 4x^2 + x - 2 = 0$
b) $x^3 - x - 2 = 0$
c) $x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = 0$
d) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
e) $x^3 + 2x + 1 = 0$

QUESTÃO 07 **FGV-SP**

A equação $2x^3 - 5x^2 - x + 6$ admite uma raiz igual a 2. Então, as outras duas raízes são:

a) - 3/2 e 1
b) - 2 e 1
c) 3 e - 1
d) 3/2 e - 1
e) 3/2 e 2

QUESTÃO 08 **UFC**

As medidas, em centímetros, dos lados de um triângulo retângulo são dadas pelos números que são raízes da equação $4x^3 – 24x^2 + 47x – 30 = 0$. Então, a área deste triângulo, em cm^2, é:

a) 1,5.
b) 0,5.
c) 7,5.
d) 6.
e) 3.

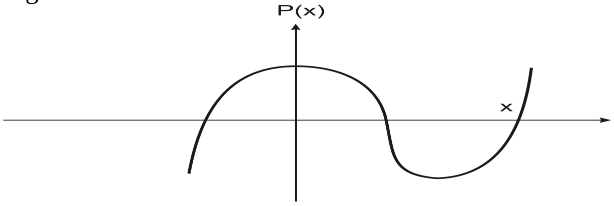
QUESTÃO 09 **UFC**

A área do polígono cujos vértices são as representações geométricas das raízes do polinômio $p(x) = x^6 – 1$ é:

a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
c) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
e) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

QUESTÃO 10

Um polinômio P(x) do terceiro grau tem o gráfico dado a seguir:



Os pontos de intersecção com o eixo das abscissas são (–1, 0), (1, 0) e (3,0). O ponto de intersecção com o eixo das ordenadas é (0,2). Portanto o valor de P(5) é:

a) 24
b) 26
c) 28
d) 30
e) 32

QUESTÃO 11 **UECE**

Se o número 2 é uma raiz de multiplicidade dois da equação $ax^3 + bx + 16 = 0$, então o valor de a + b é:

a) – 11
b) 11
c) –12
d) 12

QUESTÃO 12 **UECE**

Se os números m, p e q são as soluções da equação $x^3 – 7x^2 + 14x – 8 = 0$ então o valor da soma $\log_2 m + \log_2 p + \log_2 q$ é:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.

AGORA, ALUNO, VÁ À LUTA!!!