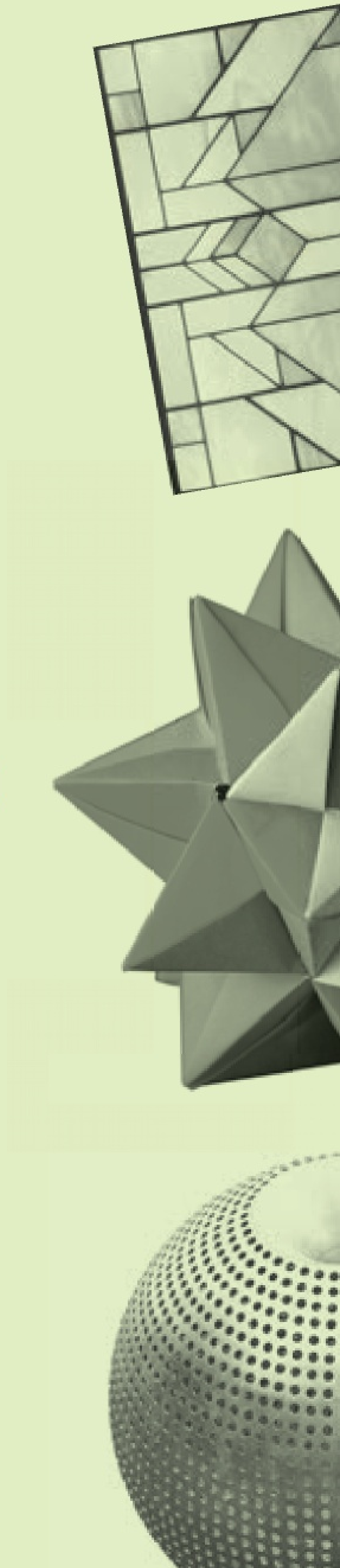
PROJETO
MÚLTIPLO

Caderno do Enem

Matemática

Ensino Médio



editora ática

PROJETO MÚLTIPLO

Caderno do Enem

Matemática

Ensino Médio

Luiz Roberto Dante

Livre-docente em Educação Matemática pela Unesp – Rio Claro, SP.

Doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática, pela PUC – São Paulo.

Mestre em Matemática pela USP.

Pesquisador em ensino e aprendizagem da Matemática pela Unesp – Rio Claro, SP.

Ex-professor da rede estadual do Ensino Fundamental e Médio – São Paulo.

Autor de vários livros, entre os quais: *Formulação e resolução de problemas de Matemática – Teoria e prática; Didática da Matemática na pré-escola; Projeto Ápis – Matemática* (1º ao 5º ano); *Projeto Teláris Matemática* (6º ao 9º ano); *Projeto Voaz Matemática* (Ensino Médio – volume único); *Matemática – Contextos & Aplicações* (Ensino Médio – volume único).

editora ática

editora ática

Diretoria editorial: Lidiane Vivaldini Olo
Editoria de Ciências Exatas: Cármen Matricardi
Editoras: Monique Matos de Oliveira, Letícia Mancini Martins (estag.)
Supervisor de arte e produção: Sérgio Yutaka
Supervisor de arte e criação: Didier Moraes
Coordenadora de arte e criação: Andréa Dellamagna
Editor de arte: André Gomes Vitale
Diagramação: Typegraphic editoração eletrônica
Design gráfico: UC Produção Editorial, Andréa Dellamagna (miolo e capa)
Gerente de revisão: Hélia de Jesus Gonsaga
Equipe de revisão: Rosângela Muricy (coord.), Ana Paula Chabaribery Malfa, Claudia Virgilio, Luís Maurício Boa Nova; Flávia Venézio dos Santos e Gabriela Macedo de Andrade (estags.)
Coordenação de iconografia: Fabiana Manna da Silva
Pesquisa iconográfica: Ellen Finta, Graziele Costa, Marcella Doratioto e Tamires Castillo
Foto da capa: Gareth Byrne/Alamy/Glow Images
Grafismos: Shutterstock/Glow Images

Av. das Nações Unidas, 7221, 3º andar, setor C
Pinheiros – São Paulo – SP
CEP 05425-902
Tel.: 4003-3061
www.atica.com.br/editora@atica.com.br

2014
ISBN 978 85 08 16751-7 (AL)
ISBN 978 85 08 16752-4 (PR)
Código da obra CL 737771
CAE 501241 (AL)
CAE 501242 (PR)
1ª edição
1ª impressão

Impressão e acabamento

Uma publicação Abril EDUCAÇÃO

Material elaborado por:
Cézar Emanuel Cintra Rios
Clodoaldo Lessa
Fábio Orfali
Glenn Albert Jacques van Amson
Roberto Benedicto Aguiar Filho
Roberto Miguel El Jamal
Thiago Dutra de Araújo

Sumário

AULA 1

Competência 1 Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade 1 Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações — naturais, inteiros, racionais ou reais.

Em classe

POTÊNCIAS E NOTAÇÃO CIENTÍFICA

- Observe que:
  a) um ano-luz tem 9 500 000 000 000 km;
  b) um micrômetro tem 0,000 001 m.
  De acordo com os exemplos acima, pode-se perceber que:
  I) a representação decimal desses números não é prática;
  II) qualquer operação feita com números dessa ordem é muito trabalhosa.
  Portanto, torna-se necessária a criação de uma representação sintética para esses números.
- Dado um número real a, e um número natural n, $n > 1$, chama-se potência enésima de a ao produto de n fatores iguais a a. Assim:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

- Todo número N, não nulo, pode ser representado na forma:

$$N = \pm a \cdot 10^m$$

Nessa expressão, $1 \leqslant a < 10$ e m é um número inteiro.
Essa forma de escrever o número é chamada de **notação científica**.
Logo, os exemplos acima podem ser representados na forma: $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km e $1 \cdot 10^{-6}$ m.

1 O volume de petróleo extraído é dado em uma unidade de medida do sistema inglês denominada barril (bbl), que equivale ao volume de 42 galões. A capacidade de um galão é de, aproximadamente, 4 litros. A produção diária da bacia de Campos, no Rio de Janeiro, é de 670 mil barris. A ordem de grandeza dessa produção diária, expressa em litros, é:

a) 10^{12}. b) 10^{10}. → c) 10^8. d) 10^5. e) 10^3.

Do enunciado, a produção diária, em litros, é dada por:
$P = (6{,}7 \cdot 10^5) \cdot (4{,}2 \cdot 10^1) \cdot (4) \Rightarrow P = 1{,}12 \cdot 10^8$ L

2 (Enem) A resolução das câmeras digitais modernas é dada em megapixels, unidade de medida que representa um milhão de pontos. As informações sobre cada um desses pontos são armazenadas, em geral, em 3 *bytes*. Porém, para evitar que as imagens ocupem muito espaço, elas são submetidas a algoritmos de compressão, que reduzem em até 95% a quantidade de *bytes* necessários para armazená-las. Considere 1 kB = 1 000 *bytes*, 1 MB = 1 000 kB, 1 GB = 1 000 MB. Utilizando uma câmara de 2.0 megapixels cujo algoritmo de compressão é de 95%, João fotografou 150 imagens para seu trabalho escolar. Se ele deseja armazená-las de modo que o espaço restante no dispositivo seja o menor espaço possível, ele deve utilizar:

a) um CD de 700 MB.
b) um *pendrive* de 1 GB.
c) um HD externo de 16 GB.
d) um *memory stick* de 16 MB.
→ e) um cartão de memória de 64 MB.

Assumindo que cada uma das imagens tenha 2 megapixels, o espaço necessário para armazená-las é $0{,}05 \cdot 150 \cdot 2\,000\,000 \cdot 3 = 45\,000\,000$ *bytes*, ou seja, 45 MB.
Assim, para que o espaço restante no dispositivo seja o menor possível, ele deve utilizar um cartão de memória de 64 MB.

Em casa

TEXTO DE APOIO

A unidade básica de medida de dados na computação é o ***bit***. Um conjunto de 8 *bits* é chamado de **1 *byte***. Devido à necessidade de indicar grandes quantidades de memória presentes nos computadores, utilizaram-se prefixos que representam múltiplos do *byte*, como por exemplo:
a) 1 *kilobyte* = 1024 *bytes* ou 1 kB = 2^{10} *bytes*;
b) 1 *megabyte* = 1024 *kilobytes* ou 1 MB = 2^{10} kB;
c) 1 *gigabyte* = 1024 *megabytes* ou 1 GB = 2^{10} MB;
d) 1 *terabyte* = 1024 *gigabytes* ou 1 TB = 2^{10} GB.

Note-se que usualmente o prefixo kilo representa 1000 unidades, e não 1024.

Quando se refere à memória de um computador, 1 *kilobyte* representa 1024 *bytes*. No entanto, alguns fabricantes de discos rígidos e DVDs arredondam o *kilobyte* para 1000 *bytes* para a comercialização de seus produtos.

Para evitar confusões foram estabelecidos, em 1998, pela Comissão Eletrotécnica Internacional, os prefixos binários, tais como:
a) 1 KiB (*kibibyte*) = 1024 *bytes*
b) 1 MiB (*mibibyte*) = 1024 KiB
c) 1 GiB (*Gibibyte*) = 1024 MiB

Assim, com o uso desses novos prefixos, evitaram-se problemas para o usuário. Um desses problemas encontrava-se na capacidade do disco rígido. Essa capacidade é medida em *megabytes* de memória. Mas, na verdade, são *mibibytes* de memória, ou seja, 2^{20} *bytes*.

1 A descoberta de um planeta semelhante à Terra fora do Sistema Solar, o GL 581c, revelada na semana passada, é o maior passo já dado até hoje pela humanidade na busca de vida extraterrestre. [...] Na última década, mais de 200 planetas foram identificados fora do Sistema Solar – o GL 581c é o primeiro que pode ser considerado um irmão da Terra.

VEJA. São Paulo: Abril, ed. 2006, ano 40, n. 17, 2 maio 2007. p. 80.

O astro que ilumina e aquece o GL 581c é uma estrela anã vermelha, a Gliese 581. Ela tem $\frac{1}{3}$ da massa do Sol. Adotando-se a massa do Sol como $1{,}98 \cdot 10^{30}$ kg, a massa de Gliese 581, em toneladas, é igual a 6,6 multiplicado por:

a) 10^{9}.
b) 10^{10}.
c) 10^{12}.
d) 10^{26}.
→ e) 10^{29}.

2 (Enem) Dados divulgados pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais mostraram o processo de devastação sofrido pela Região Amazônica entre agosto de 1999 e agosto de 2000. Analisando fotos de satélites, os especialistas concluíram que, nesse período, sumiu do mapa um total de 20000 quilômetros quadrados de floresta. Um órgão de imprensa noticiou o fato com o seguinte texto: "O assustador ritmo de destruição é de um campo de futebol a cada oito segundos".

Considerando que um ano tem aproximadamente $32 \cdot 10^6$ s (trinta e dois milhões de segundos) e que a medida da área oficial de um campo de futebol é aproximadamente 10^{-2} km² (um centésimo de quilômetro quadrado), as informações apresentadas nessa notícia permitem concluir que tal ritmo de desmatamento, em um ano, implica a destruição de uma área de:

a) 10000 km², e a comparação dá a ideia de que a devastação não é tão grave quanto o dado numérico nos indica.
b) 10000 km², e a comparação dá a ideia de que a devastação é mais grave do que o dado numérico nos indica.
c) 20000 km², e a comparação retrata exatamente o ritmo da destruição.
d) 40000 km², e o autor da notícia exagerou na comparação, dando a falsa impressão de gravidade a um fenômeno natural.
→ e) 40000 km² e, ao chamar a atenção para um fato realmente grave, o autor da notícia exagerou na comparação.

3 (Enem)

Técnicos concluem mapeamento do aquífero Guarani

O aquífero Guarani localiza-se no subterrâneo dos territórios da Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai, com extensão total de 1200000 quilômetros quadrados, dos quais 840000 quilômetros estão no Brasil. O aquífero armazena cerca de 30 mil quilômetros cúbicos de água e é considerado um dos maiores do mundo. Na maioria das vezes em que são feitas referências à água, são usadas as unidades metro cúbico e litro, e não as unidades já descritas. A Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp) divulgou, por exemplo, um novo reservatório cuja capacidade de armazenar é de 20 milhões de litros.

Disponível em: <http://noticias.terra.com.br>. Acesso em: 10 jul. 2009. Adaptado.

Comparando as capacidades do aquífero Guarani e desse novo reservatório da Sabesp, a capacidade do aquífero Guarani é:

a) $1,5 \cdot 10^2$ vez a capacidade do reservatório novo.
b) $1,5 \cdot 10^3$ vez a capacidade do reservatório novo.
c) $1,5 \cdot 10^6$ vez a capacidade do reservatório novo.
d) $1,5 \cdot 10^8$ vez a capacidade do reservatório novo.
→ e) $1,5 \cdot 10^9$ vez a capacidade do reservatório novo.

Anotações

AULA 2

Competência 1 Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade 2 Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

Em classe

SEQUÊNCIAS, PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Sequências

- Sendo $A = \{1, 2, 3, ..., n\}$, $n \geq 3$, e B um conjunto numérico, chama-se sequência finita a função $f: A \to B$. Indica-se a sequência por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, e seus termos são:
  $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$ ... e $a_n = f(n)$.
- Se $A = \mathbb{N}^*$, a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ é uma sequência infinita.

Progressão aritmética (P.A.)

- É toda sequência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante chamada razão (r).
  Portanto, dados a_1 e r, temos $a_n = a_{n-1} + r$.
  Assim, $a_{10} = a_9 + r$, $a_{10} = a_8 + 2r$, $a_{10} = a_1 + 9r$, etc.
  Em função do primeiro termo: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$.

Progressão geométrica (P.G.)

- É toda sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante chamada razão (q).
  Portanto, dados a_1 e q, temos $a_n = a_{n-1} \cdot q$.
  Assim, $a_{10} = a_9 \cdot q$, $a_{10} = a_8 \cdot q^2$, $a_{10} = a_1 \cdot q^9$, etc.
  Em função do primeiro termo: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

1 (Vunesp-SP) Os coelhos se reproduzem mais rapidamente que a maioria dos mamíferos. Considere uma colônia de coelhos que se inicia com um único casal de coelhos adultos e denote por a_n o número de casais adultos desta colônia no final de n meses. Se $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e, para a $n \geq 2$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, o número de casais de coelhos adultos no final do quinto mês será:

a) 13. b) 8. c) 6. → d) 5. e) 4.

$a_1 = 1$ e $a_2 = 1$
$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$
$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$
$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$
Ao final do quinto mês, o número de casais adultos será 5.

2 (Enem) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro, foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

a) 38 000   b) 40 500   c) 41 000   → d) 42 000   e) 48 000

A sequência (33 000, 34 500, 36 000, ...) é uma P.A., com $a_1 = 33000$ e razão $r = 1500$.
Assim, em julho, o sétimo termo é dado por:
$a_7 = a_1 + 6 \cdot r \Rightarrow a_7 = 33000 + 6 \cdot 1500 \Rightarrow a_7 = 42000$

3 (Ufscar-SP) Um determinado corpo celeste é visível da Terra a olho nu de 63 em 63 anos, tendo sido visto pela última vez no ano de 1968. De acordo com o calendário atualmente em uso, o primeiro ano da era Cristã em que esse corpo celeste esteve visível a olho nu da Terra foi o ano:

→ a) 15.   b) 19.   c) 23.   d) 27.   e) 31.

Temos uma P.A. em que $a_n = 1968$, $r = 63$ e $a_1 > 0$.
Efetuando a divisão no conjunto dos números naturais, temos:
$1968 = 63 \cdot 31 + 15$

$$\begin{array}{r|l} 1968 & 63 \\ \hline 078 & 31 \\ 15 & \end{array}$$

Assim, o primeiro ano da era Cristã em que o corpo celeste esteve visível foi o ano 15.

Outro modo:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_1 = 1968 - (n - 1) \cdot 63 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1968 - (n - 1) \cdot 63 > 0 \Rightarrow n - 1 < 31{,}2$
O primeiro ano ocorre quando $n - 1 = 31$, ou seja, $n = 32$.
Substituindo, $a_1 = 1968 - 31 \cdot 63 = 15$.

4 No início de julho de 2011, Pedro montou uma página na internet sobre análise de questões do Enem. No ano de 2011, houve 756 visitas à página. Supondo que o número de visitas à página, durante o ano, dobrou a cada mês, o número de visitas à página de Pedro no mês de julho foi igual a:

→ a) 12.   b) 14.   c) 16.   d) 18.   e) 24.

Sendo x a quantidade de visitas em julho, e notando que temos uma P.G. de razão igual a 2, temos:
$x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x = 756 \Rightarrow 63x = 756 \Rightarrow x = 12$

Em casa

TEXTO DE APOIO

Progressão aritmética

- Qualquer termo é a média aritmética entre o anterior e o posterior.

Se (a, b, c) é uma P.A., então $2b = a + c$.

De fato, $r = b - a = c - b$, e assim $2b = a + c$.
Assim, na P.A. (4, 7, 10), temos: $2 \cdot 7 = 4 + 10$ (igual a 14).
Veja o exemplo:
Algumas balas foram divididas entre Luís, Paulo e João de forma que, nessa ordem dos nomes, formassem a P.A. $(x - 1, 3x, 2x + 13)$. Quantas balas ganhou cada um deles?

Resolução:
Temos:
$2 \cdot 3x = (x - 1) + (2x + 13) \Rightarrow 6x = 3x + 12 \Rightarrow x = 4$
Resposta: Luís ganhou 3, Paulo ganhou 12 e João ganhou 21.

- A soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.
  Se $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ é uma P.A., então $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ...$.
  De fato, $a_1 + a_n = a_1 + a_{n-1} + r = a_2 + a_{n-1}$, e assim sucessivamente.
  Assim, na P.A. (3, 7, 11, 15, 19), temos:
  $3 + 19 = 7 + 15 = 11 + 11$ (igual a 22)

- Soma dos n primeiros termos de uma P.A.
  Podemos calcular a soma dos n primeiros termos (S_n) de uma P.A. usando a propriedade da soma de dois termos equidistantes dos extremos. Escrevemos a soma em ordem crescente dos índices, depois a mesma soma em ordem decrescente dos índices e, então, somamos as duas igualdades membro a membro:
  $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$
  $S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1$
  Obtemos:
  $2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \Rightarrow 2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow$
  $\Rightarrow S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

  Veja o exemplo:
  Calcule a soma dos 20 primeiros números naturais ímpares.

  Resolução:
  Temos a P.A. em que $a_1 = 1$ e $r = 2$.
  $a_{20} = a_1 + 19 \cdot r \Rightarrow a_{20} = 1 + 19 \cdot 2 = 39$
  $S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} \Rightarrow S_{20} = \dfrac{(1 + 39) \cdot 20}{2} \Rightarrow S_{20} = 400$
  Resposta: 400.

Progressão geométrica

- Qualquer termo é a média geométrica entre o anterior e o posterior.
  Se (a, b, c) é uma P.G., então $b^2 = a \cdot c$.
  De fato, $q = \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b}$, e assim $b^2 = a \cdot c$.
  Assim, na P.G. (2, 6, 18), temos: $6^2 = 2 \cdot 18$ (igual a 36).

- O produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.
  Se $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ é uma P.G., então:
  $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = ...$
  De fato, $a_1 \cdot a_n = a_1 \cdot a_{n-1} \cdot q = a_2 \cdot a_{n-1}$, e assim sucessivamente.
  Assim, na P.G. (1, 2, 4, 8, 16), temos: $1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$ (igual a 16).

- Soma dos n primeiros termos de uma P.G.
  Se $q = 1$, todos os termos são iguais e, então, $S_n = n \cdot a_1$.
  Se $q \neq 1$, escrevemos a soma em ordem crescente dos índices, multiplicamos os dois membros da igualdade pela razão e subtraímos uma igualdade da outra:
  $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n \Rightarrow q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + ... + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \Rightarrow$
  $\Rightarrow q \cdot S_n = a_2 + ... + a_{n-1} + a_n + a_{n+1}$
  Calculando $q \cdot S_n - S_n$, temos:
  $q \cdot S_n - S_n = a_{n+1} - a_1$
  Como $a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$, e colocando a_1 em evidência, temos:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{2}$$

Veja o exemplo:
Calcule a soma: $2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{10}$.

Resolução:
Temos uma soma de 10 termos em P.G. tal que $a_1 = 2$ e $q = 2$.

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} \Rightarrow S_{10} = 2046$$

Resposta: 2046.

- Soma (limite da soma) dos infinitos termos de uma P.G., com $-1 < q < 1$.
  Nesse caso, à medida que n tende a infinito, q^n tende a zero e a soma se reduz a:

$$S = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Veja o exemplo:
Calcule a fração geratriz da dízima 0,777...

Resolução:
0,777... = 0,7 + 0,07 + 0,007 + ...
Temos uma soma de P.G. infinita em que $a_1 = 0{,}7$ e $q = 0{,}1$.

$$S = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow 0{,}777... = \frac{0{,}7}{1 - 0{,}1} = \frac{0{,}7}{0{,}9} = \frac{7}{9}$$

Resposta: $\frac{7}{9}$.

1 (Vunesp-SP) Em 05 de junho de 2004, foi inaugurada uma pizzaria que só abre aos sábados. No dia da inauguração, a pizzaria recebeu 40 fregueses. A partir daí, o número de fregueses que passaram a frequentar a pizzaria cresceu em progressão aritmética de razão 6, até que atingiu a cota máxima de 136 pessoas, a qual tem se mantido. O número de sábados que se passaram, excluindo-se o sábado de inauguração, para que a cota máxima de fregueses fosse atingida pela primeira vez, foi:

a) 15.
b) 16.
c) 17.
d) 18.
e) 26.

2 (Enem) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerantes para montar figuras, em que cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.

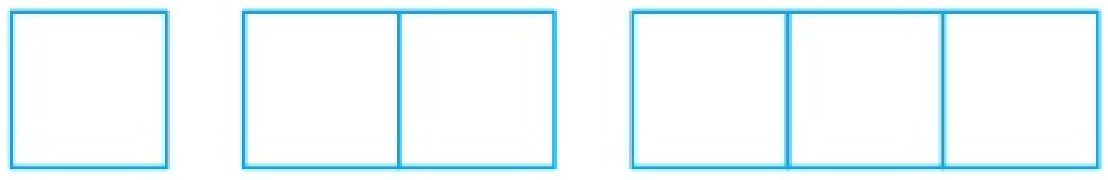


Figura I   Figura II   Figura III

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

a) $C = 4Q$
b) $C = 3Q + 1$
c) $C = 4Q - 1$
d) $C = Q + 3$
e) $C = 4Q - 2$

3 (Enem) **Fractal** (do latim *fractus*, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1) comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2) construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3) posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;

4) repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

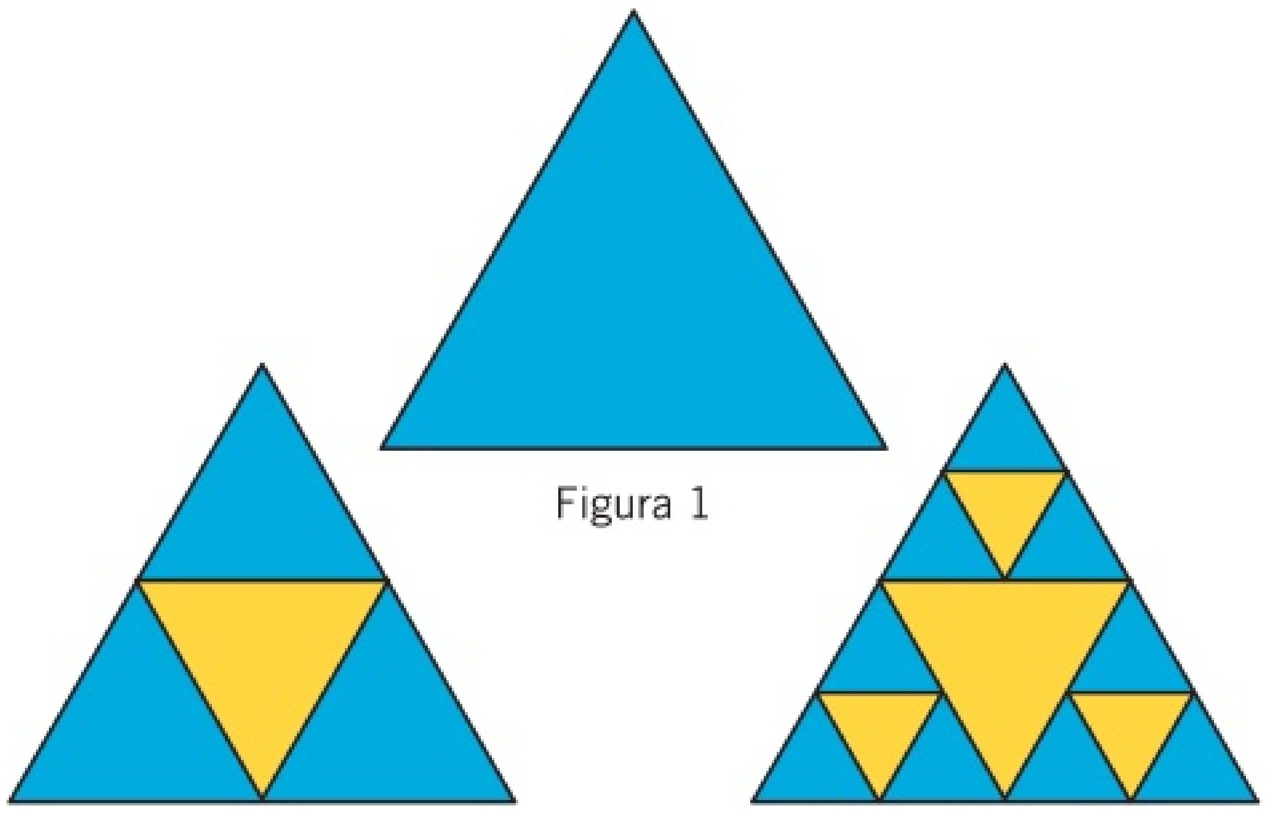


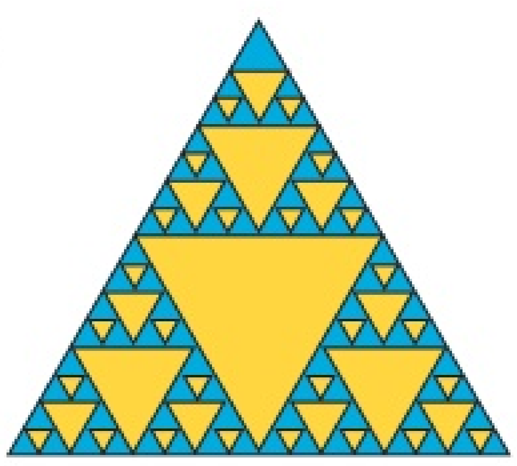
Figura 1

Figura 2

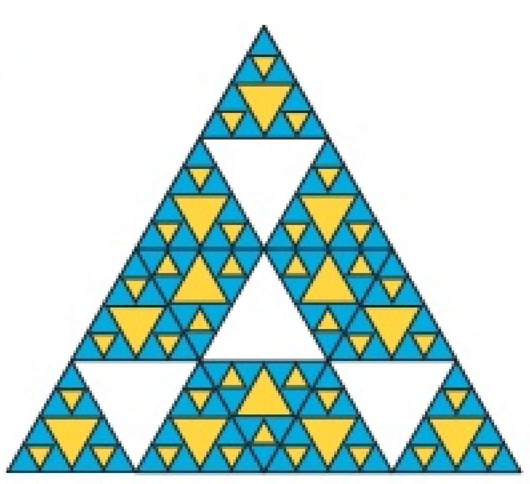
Figura 3

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada acima é:

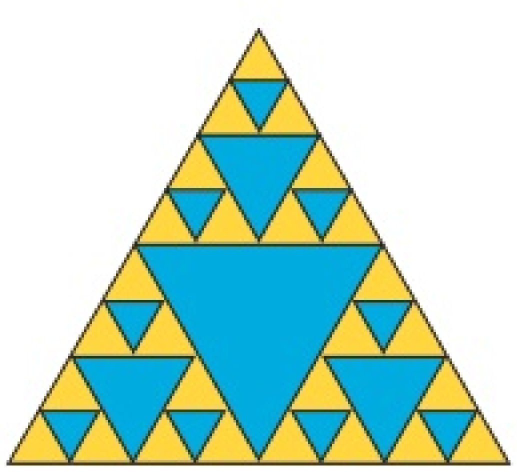
a)



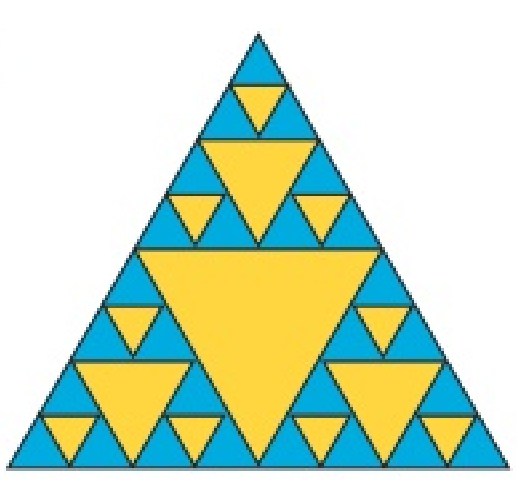
b)



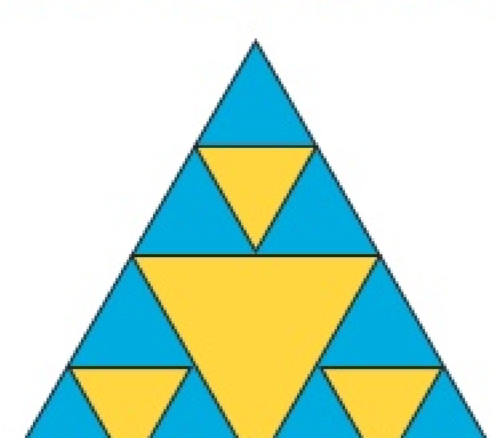
c)



d)



e)



4 (Enem) Ronaldo é um garoto que adora brincar com números. Numa dessas brincadeiras, empilhou caixas numeradas de acordo com a sequência conforme mostrada no esquema a seguir.

1

1 2 1

1 2 3 2 1

1 2 3 4 3 2 1

...

Ele percebeu que a soma dos números em cada linha tinha uma propriedade e que, por meio dessa propriedade, era possível prever a soma de qualquer linha posterior às já construídas.

A partir dessa propriedade, qual será a soma da 9ª linha da sequência de caixas empilhadas por Ronaldo?

a) 9

b) 45

c) 64

d) 81

e) 285

5 Uma pessoa resolveu fazer sua caminhada matinal passando a percorrer, a cada dia, 100 metros mais do que no dia anterior. Ao completar o 21º dia de caminhada, observou ter percorrido, nesse dia, 6000 metros. A distância total percorrida nos 21 dias foi de:

a) 125 500 m.

b) 105 000 m.

c) 90 000 m.

d) 87 500 m.

e) 80 000 m.

6 Considere uma sequência infinita de cubos em que a aresta do primeiro mede 2 e cada cubo seguinte tem aresta igual à metade da aresta do cubo anterior. A soma dos volumes desses infinitos cubos é:

a) $\frac{32}{7}$.

b) $\frac{24}{7}$.

c) $\frac{64}{7}$.

d) 4.

e) 16.

Anotações

AULA 3

Competência 1 Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade 3 Resolver situações-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

Em classe

PRINCÍPIOS BÁSICOS DA CONTAGEM

Dado um conjunto A, com m elementos, e um conjunto B, com k elementos, A e B disjuntos, valem os seguintes princípios:

- Aditivo: para a escolha de um elemento que seja elemento de A **ou** de B, existem $m + k$ possibilidades.
- Multiplicativo: para a escolha de um elemento de A e, depois, um elemento de B, nesta ordem, existem $m \cdot k$ possibilidades.

Observações:

1ª) Para a escolha de dois elementos, ambos pertencentes a A, em uma certa ordem, podendo haver a repetição do elemento escolhido, existem $m \cdot m = m^2$ possibilidades.

2ª) Para a escolha de dois elementos distintos, ambos pertencentes a A, numa certa ordem, existem $m \cdot (m - 1)$ possibilidades.

1 (Ufscar-SP) Um encontro científico conta com a participação de pesquisadores de três áreas, sendo eles: 7 químicos, 5 físicos e 4 matemáticos. No encerramento do encontro, o grupo decidiu formar uma comissão de dois cientistas para representá-lo em um congresso. Tendo sido estabelecido que a dupla deveria ser formada por cientistas de áreas diferentes, o total de duplas distintas que podem representar o grupo no congresso é igual a:

a) 46. b) 59. c) 77. → d) 83. e) 91.

Podemos escolher 1 químico e 1 físico ou 1 químico e 1 matemático ou 1 físico e 1 matemático. Pelo Princípio Fundamental da Contagem temos: $7 \cdot 5 + 7 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 83$

2 (Enem) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos distribuídas conforme a tabela abaixo.

Grupos taxonômicos	Número de espécies	Grupos taxonômicos	Número de espécies
Artiodáctilos	4	Perissodáctilos	1
Carnívoros	18	Primatas	20
Cetáceos	2	Roedores	33
Quirópteros	103	Sirênios	1
Lagomorfos	1	Edentados	10
Marsupiais	16	**Total**	**209**

T&C Amazônia, ano 1, n. 3, dez. 2003.

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos – uma do grupo cetáceos, outra do grupo primatas e a terceira do grupo roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a:

→ a) 1 320. b) 2 090. c) 5 845. d) 6 600. e) 7 245.

Devemos escolher uma espécie de cetáceo, uma espécie de primata e uma espécie de roedor. Assim, temos $2 \cdot 20 \cdot 33 = 1\,320$ possibilidades.
O número de conjuntos distintos que podem ser formados é 1 320.

3 (Enem) O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste em um conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe abaixo um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.

Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001.

Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010.

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima.

Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é:

a) 14. b) 12. c) 8. → d) 6. e) 4.

Comecemos a preencher a sequência da esquerda para a direita.
A quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita, igual à da direita para a esquerda, é:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 8$$

Até a 3ª casa, temos 2 possibilidades para cada barra e, a partir daí, uma única para a 4ª (igual à 2ª) e uma única para a 5ª (igual à 1ª).
Como são desconsideradas todas as barras claras e todas as barras escuras, temos: $8 - 2 = 6$ códigos.

4 Uma pessoa deseja escolher uma senha de quatro algarismos para seu computador e, para isso, resolve usar apenas algarismos ímpares. Quantas são as possibilidades de escolha se ela quer que os quatro algarismos sejam diferentes?

Os algarismos a serem usados são: 1, 3, 5, 7 e 9. Devemos construir sequências de 4 elementos distintos.
Para a escolha do 1º algarismo, ela tem 5 possibilidades, para a escolha do 2º, tem 4, para a escolha do 3º, tem 3 e para a escolha do 4º, tem 2 possibilidades. Assim, pelo princípio multiplicativo:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

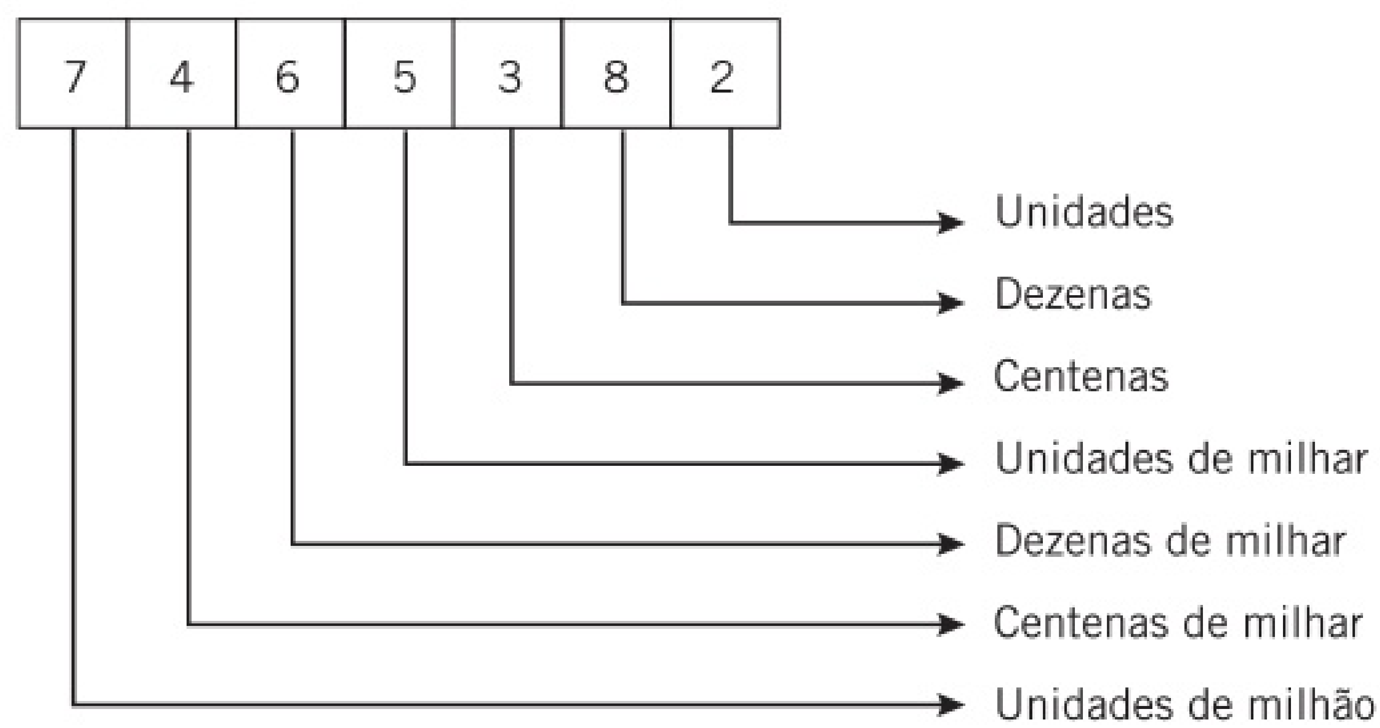
Resposta: 120 possibilidades.

Em casa

TEXTO DE APOIO

Sistema decimal

- O sistema de numeração decimal utiliza os algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- Os algarismos pares são: 0, 2, 4, 6, 8.
- Os algarismos ímpares são: 1, 3, 5, 7, 9.
- Considerando, por exemplo, o número 7 465 382, temos:



Observação: O número 482 tem 3 algarismos, enquanto o número 085 tem 2 algarismos.

Divisibilidade

Um número é divisível por:

- 2 quando é par, ou seja, quando termina com algarismo par.
  Exemplos: 574 e 390.
- 3 quando a soma dos seus algarismos é divisível por 3.
  Exemplo: 258, pois: 2 + 5 + 8 = 15 (15 é divisível por 3).
- 4 quando o número formado pelos dois últimos algarismos da direita é divisível por 4.
  Exemplos:

- 5 quando termina com zero ou 5.
  Exemplos: 730 e 845.
- 6 quando é divisível por 2 e 3.
  Exemplo: 258.
- 10 quando termina com zero.
  Exemplo: 280.

Número primo

Um número natural p é primo se, e somente se, ele possui dois, e apenas dois, divisores distintos: 1 e p.
Exemplos: 2, 3, 5, 7, 11 e 13.
Nota: O número 1 não é primo.

Veja os exemplos:

1) Uma sala tem 5 portas. De quantas maneiras diferentes essa sala pode ter pelo menos uma de suas portas aberta?

Resolução:
A sala estará aberta se abrirmos uma, duas, ..., ou até todas as 5 portas.
Para cada porta, temos duas possibilidades: estar aberta ou estar fechada.
Do total de possibilidades obtido devemos excluir uma: o caso em que as 5 portas ficam fechadas.
Assim:

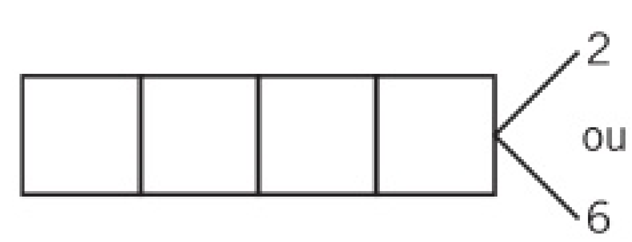
$$\begin{array}{ccccccccccl} 1^{a} & e & 2^{a} & e & 3^{a} & e & 4^{a} & e & 5^{a} & & \text{(estarem todas fechadas)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & \cdot & 2 & & - 1 = 2^5 - 1 = 31 \end{array}$$

Resposta: 31 maneiras.

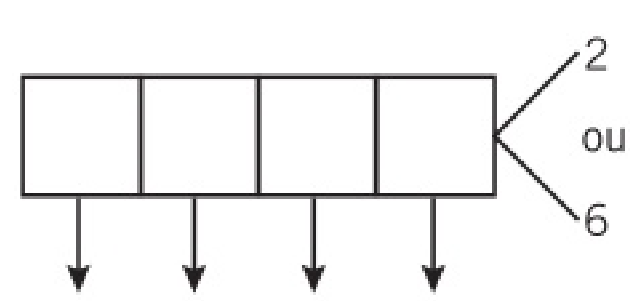
2) Considere os números naturais pares de 4 algarismos que podem ser formados com 1, 2, 3, 5, 6 e 9.

a) Quantos números podem ser formados?

Resolução:
Como os números são pares, devem terminar com 2 ou 6. Sendo assim, temos restrições ao preenchimento da última casa. É conveniente iniciarmos por aí o preenchimento de possibilidades, para que não aconteçam complicações posteriores.
Assim:



Como o enunciado permite a repetição dos algarismos, temos agora todas as 6 possibilidades para cada uma das 3 casas restantes.
Logo:

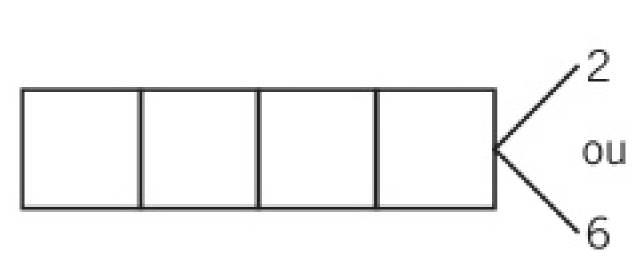


$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 432$$

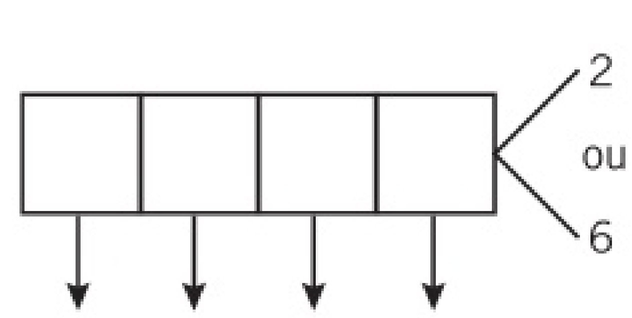
Resposta: 432 números.

b) Quantos desses números têm algarismos distintos?

Resolução:
Temos restrição na última casa:



Como os algarismos do número devem ser distintos, em cada casa preenchida vamos gastando um algarismo que não poderá mais ser usado. Assim, restam 5 possibilidades para a primeira (perdeu-se um na restrição), 4 possibilidades para a segunda e 3 possibilidades para a terceira.
Logo:



$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$$

Resposta: 120 números.

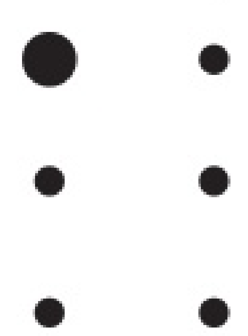
1 (FGV-SP) Um *notebook* é encontrado à venda com diferentes opções para as seguintes características: tipo de processador, cor e capacidade de memória. São elas:

- Tipo de processador: *A*, *B*, *C* ou *D*;
- Cor: preta, marrom, vermelha ou azul;
- Capacidade de memória: 3 Gb ou 4 Gb.

Eduardo vai comprar um *notebook*, mas não quer que ele seja de cor marrom. O número de possibilidades para Eduardo escolher o *notebook* é um número natural. Podemos afirmar que esse número é:

a) menor que 10.
b) entre 10 e 20.
→ c) entre 20 e 30.
d) entre 30 e 40.
e) maior que 40.

2 (Enem) A escrita Braile para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por:



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é:

a) 12.
b) 31.
c) 36.
→ d) 63.
e) 720.

3 Em um ônibus existem 7 lugares vagos, sendo que 3 estão localizados do lado da janela e 4 do lado do corredor interno. Três pessoas tomam o ônibus. De quantos modos diferentes elas podem escolher os lugares para se sentar, se uma delas, supersticiosa, só se senta do lado do corredor?

a) 60
→ b) 120
c) 144
d) 190
e) 240

4 (Enem) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

a) 6.
→ b) 7.
c) 8.
d) 9.
e) 10.

5 (Unifesp) Duzentos e cinquenta candidatos submeteram-se a uma prova com 5 questões de múltipla escolha, cada questão com 3 alternativas e uma única resposta correta. Admitindo-se que todos os candidatos assinalaram, para cada questão, uma única resposta, pode-se afirmar que pelo menos:

a) um candidato errou todas as respostas.
→ b) dois candidatos assinalaram exatamente as mesmas alternativas.
c) um candidato acertou todas as respostas.
d) a metade dos candidatos acertou mais de 50% das respostas.
e) a metade dos candidatos errou mais de 50% das respostas.

Anotações

AULA 4

Competência 1 Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade 4 Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

Em classe

FATORIAL, ARRANJOS SIMPLES E PERMUTAÇÕES

Fatorial

Definições

D_1) Sendo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:
$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ (lê-se: ene fatorial)
D_2) $1! = 1$
D_3) $0! = 1$

Exemplos: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Consequência:

$$\boxed{n! = n \cdot (n - 1)!, \ n \geqslant 1}$$

Assim: $4! = 4 \cdot 3!$

Arranjos simples

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto de n elementos ($n \in \mathbb{N}$). Chama-se **arranjo simples** dos n elementos de I, tomados p a p, qualquer **sequência** de p elementos distintos escolhidos entre os elementos de I.

Indica-se o número desses arranjos por $A_{n,\,p}$.

Exemplo:

Sendo $I = \{1, 2, 3\}$, temos os seguintes arranjos dos elementos de I, tomados 2 a 2:

$$\underbrace{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2)}_{\text{seis arranjos}}$$

Assim, temos: $A_{3,\,2} = 6$.

Como os agrupamentos são sequências, eles diferem entre si:

- pela ordem dentro do agrupamento: $(1, 2) \neq (2, 1)$;
- pelos elementos componentes: $(1, 2) \neq (1, 3)$.

$$A_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 \quad \text{ou} \quad A_{7,\,3} = \frac{7!}{(7 - 3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210$$

Generalizando:

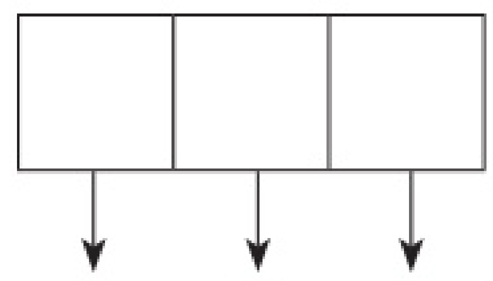
$$\boxed{A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n - p)!}}$$

Permutações

Permutações simples de n elementos são os arranjos simples obtidos dos n elementos tomados n a n.
Neste caso, os agrupamentos diferem somente pela ordem dos elementos.
Indicando o número de permutações simples de n elementos por P_n, temos:

$$P_n = A_{n,\,n} \Rightarrow P_n = \frac{n!}{(n - n)!} \Rightarrow P_n = \frac{n!}{0!} \Rightarrow P_n = n!$$

Exemplo:
Com os algarismos 1, 2, 3 podemos formar 6 números de 3 algarismos distintos:



$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

ou ainda, $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Os números são 123, 132, 213, 231, 312 e 321. A única diferença entre eles é a ordem dos algarismos.

1 Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 6 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as possíveis sequências dessas músicas será(ão) necessário(s) aproximadamente:

a) 1 mês.
b) 2 meses.
c) 5 meses.
d) 1 ano.
→ e) 2 anos.

Como a cada dia ele toca uma permutação dessas músicas, serão necessários 6! dias para esgotar todas as sequências possíveis.
$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ dias
Assim, são necessários, aproximadamente, 2 anos.

2 O casal Silva tem 3 filhos adolescentes, e o carro da família possui 5 lugares. De quantos modos os cinco membros da família podem se acomodar no carro, sabendo que só os pais têm carteira de habilitação e podem dirigir?

Para ocupar a direção temos 2 possibilidades. Os membros restantes podem ser dispostos de 4! maneiras.
Assim:
$2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$
Resposta: 48 modos.

3 (Enem) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

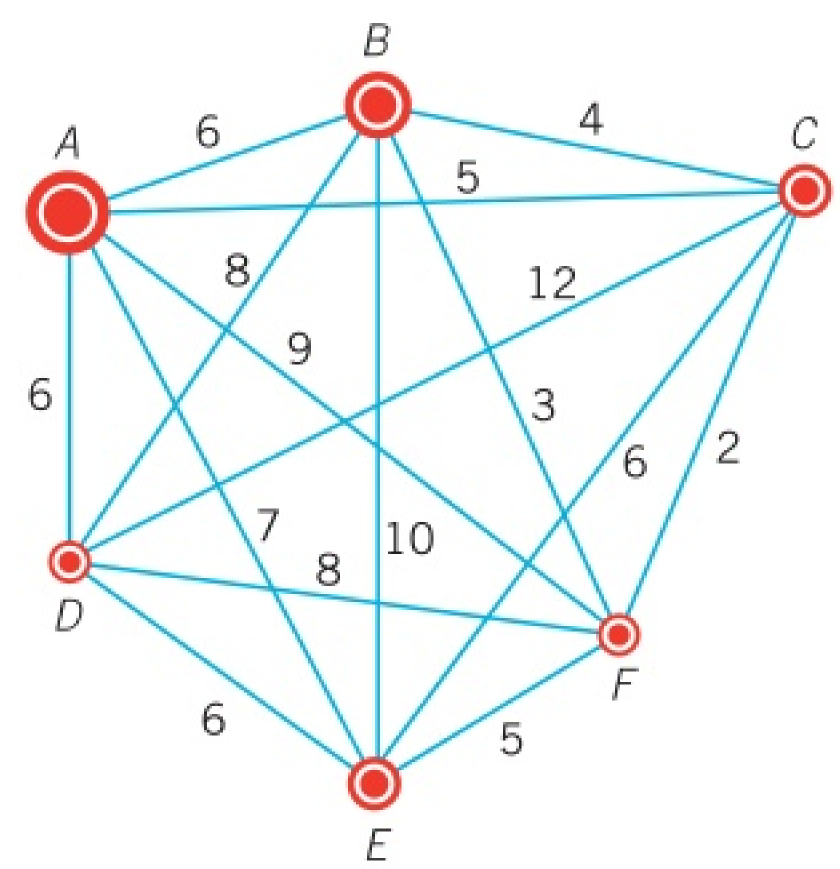
Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

→ a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Existem 6 maneiras de escolher o personagem, 5 modos de escolher o objeto e 9 opções para a escolha do cômodo. Pelo princípio multiplicativo, temos: $6 \cdot 5 \cdot 9 = 270$ possibilidades. Assim, temos 10 alunos a mais do que o total de possibilidades de respostas distintas.

4 (Enem) João mora na cidade *A* e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto *ABCDEFA* informa que ele sairá da cidade *A*, visitando as cidades *B*, *C*, *D*, *E* e *F* nesta ordem, voltando para a cidade *A*. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos *ABCDEFA* e *AFEDCBA* têm o mesmo custo. Ele gasta 1 min 30 s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado. O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de:

a) 60 min.
→ b) 90 min.
c) 120 min.
d) 180 min.
e) 360 min.

O número de sequências possíveis para ele visitar as 5 cidades é $5! = 120$. Do enunciado, cada sequência possui uma única simétrica, que não precisa ser examinada. Assim, o número de sequências que João precisa verificar é $\frac{120}{2} = 60$.

Desse modo, o tempo necessário é $1{,}5 \cdot 60 = 90$ minutos.

Em casa

TEXTO DE APOIO

Veja o exemplo:

Considere as letras da palavra PROVAS.

a) Quantos anagramas podemos formar?

b) Quantos anagramas começam por P, R e O juntos nesta ordem?

c) Quantos anagramas possuem P, R e O juntos e nesta ordem?

d) Quantos anagramas possuem P, R e O juntos?

e) Quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?

Resolução:

$$6 \text{ letras distintas} \begin{cases} 2 \text{ vogais} \\ 4 \text{ consoantes} \end{cases}$$

a) $P_6 = 6! = 720$

b)

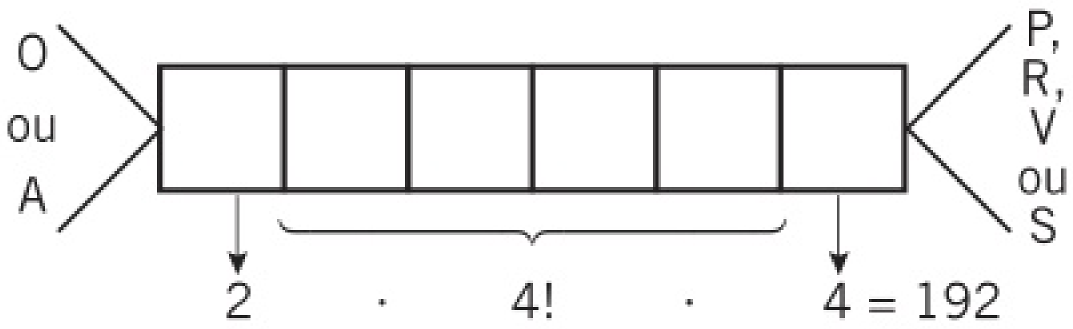
P	R	O			

$$\underbrace{\square\ \square\ \square}_{3! = 6}$$

c) Devemos permutar as 3 letras restantes com o bloco formado por PRO. Assim: $P_4 = 4! = 24$.

d) Devemos permutar as 3 letras restantes com o bloco formado por P, R e O e depois permutar P, R e O dentro desse bloco.

Assim: $P_4 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! = 144$.

e) 

Permutações com alguns elementos iguais

Dados n elementos dos quais:

n_1 elementos são iguais a a_1

n_2 elementos são iguais a a_2

. . .

. . .

. . .

n_k elementos são iguais a a_k

com $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, o número de permutações dos n elementos é dado por:

$$P_n^{(n_1,\, n_2,\, ...,\, n_k)} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \,...\, n_k!}$$

Exemplo:

A palavra TARRAFA tem 7 letras, sendo 3 iguais a A e 2 iguais a R. O número de anagramas com as letras dessa palavra é:

$$P_7^{(3,\,2)} = \frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$$

Veja o exemplo:

Considere as letras da palavra AMADA.

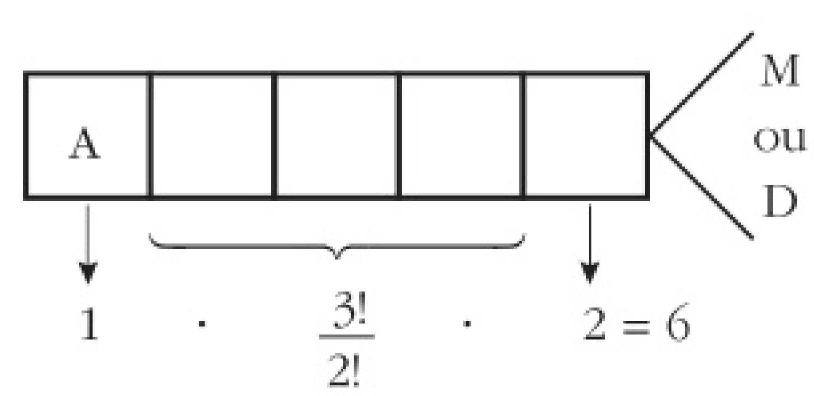
a) Quantos anagramas podemos formar?

b) Quantos anagramas começam por vogal e terminam por consoante?

Resolução:

$$5 \text{ letras} \begin{cases} M \\ D \\ 3A \end{cases}$$

a) $P_5^{(3)} = \frac{5!}{3!} = 20$

b) 

1 (Unemat-MT) As crianças de uma escola fizeram um trabalho sobre a coleta e distribuição do lixo. Para organizar a coleta, as crianças deverão alinhar em fila indiana 5 sacos de lixos de cores diferentes. De quantos modos diferentes poderão dispor os 5 sacos de lixo?

a) 20
→ b) 120
c) 60
d) 210
e) 30

2 (Vunesp-SP) Cinco livros devem ser colocados em uma estante de tal forma que dois permaneçam sempre juntos. O número de maneiras diferentes que podemos dispor esses livros é:

→ a) 48.
b) 42.
c) 36.
d) 30.
e) 24.

3 Um carro de uma montanha-russa de um parque de diversões é composto de 4 bancos de 2 lugares. De quantos modos 4 casais podem ser acomodados nesse carro, de modo que cada casal ocupe o mesmo banco?

a) 24
b) 108
c) 216
→ d) 384
e) 48

4 Considere os anagramas formados com as letras da palavra ALUNO. Quantos apresentam a letra L antes da letra N e não necessariamente juntas?

a) 30
b) 48
→ c) 60
d) 20
e) 24

AULA 5

Competência 1 Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

Habilidade 5 Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Em classe

COMBINAÇÕES SIMPLES

Seja I um conjunto com n elementos. Chama-se combinação simples dos n elementos de I, tomados p a p, qualquer subconjunto de p elementos do conjunto I.

Indica-se o número de combinações simples por $C_{n,\,p}$ ou $\binom{n}{p}$.

Exemplo:

Sendo $I = \{1, 2, 3\}$, temos as seguintes combinações simples dos elementos de I, tomados 2 a 2:

$$\underbrace{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3)}_{\text{três combinações simples}}$$

Assim, temos: $C_{3,\,2} = 3$.

Como os agrupamentos são conjuntos, eles diferem entre si somente pelos elementos componentes.

Observe ainda que como $I = \{1, 2, 3\}$ temos os seguintes arranjos simples dos elementos de I, tomados 2 a 2:

$$\underbrace{(1,\ 2)\text{ e }(2,\ 1),\ (1,\ 3)\text{ e }(3,\ 1),\ (2,\ 3)\text{ e }(3,\ 2)}_{\text{seis arranjos simples}}$$

Ou seja:

$$C_{3,\,2} \cdot 2! = A_{3,\,2} \Rightarrow C_{3,\,2} = \frac{A_{3,\,2}}{2!}$$

Assim:

$$C_{3,\,2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

Generalizando:

$C_{n,\,p} = \dfrac{A_{n,\,p}}{p!}$, ou ainda:

$$\boxed{C_{n,\,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n - p)!}}$$

1 (Unicamp-SP) O grêmio estudantil do Colégio Alvorada é composto por 6 alunos e 8 alunas. Na última reunião do grêmio, decidiu-se formar uma comissão de 3 rapazes e 5 moças para a organização das olimpíadas do colégio. De quantos modos diferentes pode-se formar essa comissão?

a) 6720 b) 100800 c) 806400 → d) 1120

Em uma comissão a ordem de escolha das pessoas não importa e sim apenas quem são os escolhidos. São grupos em forma de conjuntos, isto é, combinações simples. Assim:

$$C_{6,\,3} \cdot C_{8,\,5} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 1120$$

2 Num encontro de amigos, todos trocam cumprimentos com apertos de mão. Sabendo que aconteceram 66 apertos de mão, quantas pessoas se encontraram?

a) 11 b) 8 →c) 12 d) 9 e) 13

Sendo n o número de pessoas e observando que em um aperto de mão não importa a ordem, temos:

$C_{n,2} = 66 \Rightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 66 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot (n-2)!} = 66 \Rightarrow n^2 - n - 132 = 0 \Rightarrow n = 12$ ou $n = -11$ (não convém)

3 (UFU-MG) Um sério problema enfrentado pelas autoridades de saúde é diagnosticar a pneumonia asiática. Atualmente são conhecidos 7 sintomas dessa doença. Se em um paciente forem detectados 5 ou mais desses possíveis sintomas, a doença é diagnosticada. Diante disso, pode-se afirmar que o número total de combinações distintas dos sintomas possíveis para o diagnóstico da pneumonia asiática seja efetivado é igual a:

a) 21. →b) 29. c) 147. d) 210.

Um paciente estará com a doença se nele forem encontrados 5, 6 ou 7 sintomas.
Assim:

$C_{7,5} + C_{7,6} + C_{7,7} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} + \frac{7!}{6! \cdot 1!} + \frac{7!}{7! \cdot 0!} = \frac{7 \cdot 6}{2} + 7 + 1 = 29$

4 Sete amigos desejam tomar dois táxis, um de 4 lugares e outro de 3 lugares. De quantos modos podemos distribuí-los nos dois táxis, não importando os lugares ocupados dentro deles?

a) 21 →b) 35 c) 42 d) 36 e) 15

Podemos escolher os 4 para o primeiro táxi de $C_{7,4}$ maneiras. Os 3 amigos restantes vão ocupar o segundo táxi. Assim:

$C_{7,4} \cdot C_{3,3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 1 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$

Em casa

TEXTO DE APOIO

Veja os exemplos:

1) (UPM-SP) Com os diretores A, B, C, D, E, F e G de uma empresa, podemos formar, com a presença obrigatória de A e B, n comissões de 5 diretores. O valor de n é:

a) 10. b) 35. c) 6. d) 21. e) 12.

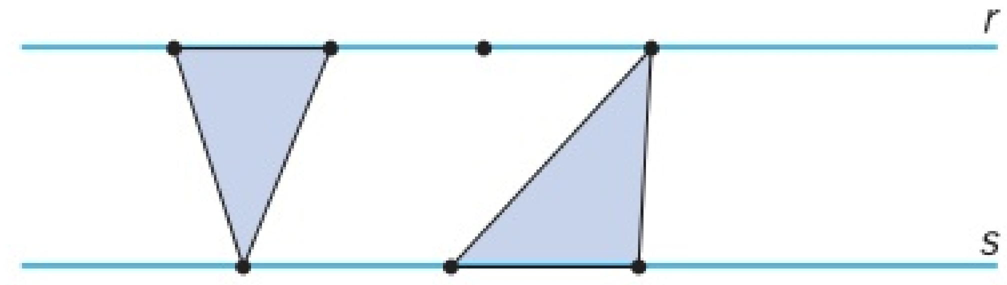
Resolução:
Colocando A e B na comissão, restam 3 vagas a serem preenchidas por 5 candidatos.
Assim:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Resposta: alternativa **a**.

2) Qual é o número de triângulos que podemos formar com 7 pontos distintos, 4 sobre uma reta e 3 sobre outra reta paralela à primeira?

Resolução:



1º modo
Supomos que todos os 7 pontos determinam triângulos quando associados 3 a 3 e descontamos as ligações 3 a 3 que não determinam triângulos.
Assim:

$$C_{7,\,3} - C_{4,\,3} - C_{3,\,3} = 35 - 4 - 1 = 30$$

2º modo
Ter um triângulo significa escolher um vértice e uma base. Assim:

$$\underbrace{\text{vértice em } r}_{4} \;\overset{\text{e}}{\cdot}\; \underbrace{\text{base em } s}_{C_{3,2}} \;\overset{\text{ou}}{+}\; \underbrace{\text{vértice em } s}_{3} \;\overset{\text{e}}{\cdot}\; \underbrace{\text{base em } r}_{C_{4,\,2}} = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 30$$

Resposta: 30 triângulos.

1 (FGV-SP) De um grupo de 8 pessoas, entre elas Antônio e Benedito, deseja-se escolher uma comissão com 4 pessoas. O número de comissões que podem se formar, nas quais Antônio participa e Benedito não, é igual a:

a) 15.
b) 24.
c) 30.
→ d) 20.
e) 36.

2 (Fuvest-SP) Na primeira fase de um campeonato de xadrez, cada jogador joga contra todos os demais. Nessa fase foram realizados 78 jogos. Quantos eram os jogadores?

a) 10
b) 11
c) 12
→ d) 13
e) 14

3 (UPM-SP) Nove pessoas desejam subir à cobertura de um edifício, dispondo, para isso, de dois elevadores, um com 4 lugares e outro com 5 lugares. O número de formas diferentes de distribuí-las nos elevadores é:

a) 630.
b) 252.
c) 180.
d) 378.
→ e) 126.

4 (Enem) Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo *A*. Em seguida, entre os times do Grupo *A*, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.
A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo *A* e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:

→ a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.
b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.
c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.
d) duas combinações.
e) dois arranjos.

5 Quantas diagonais tem um polígono convexo de *n* lados?

a) $n \cdot (n - 1)$
b) $n \cdot (n - 3)$
c) $n \cdot (n - 2)$
d) $\dfrac{n \cdot (n - 1)}{2}$
→ e) $\dfrac{n \cdot (n - 3)}{2}$

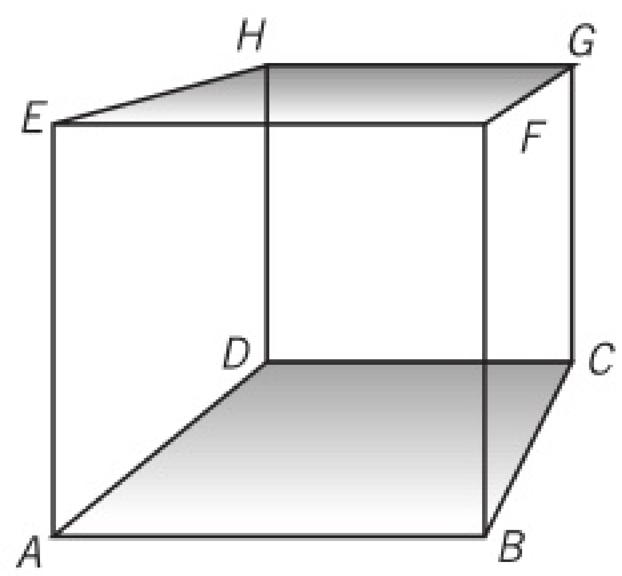
AULA 6

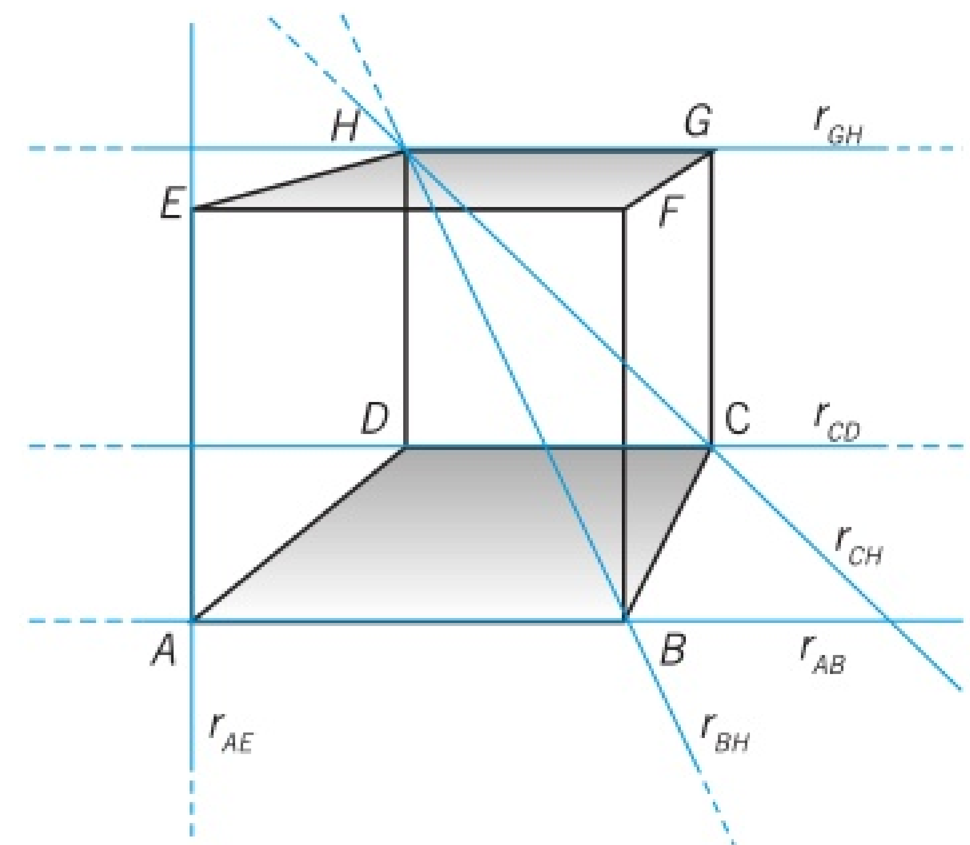
Competência 2 Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

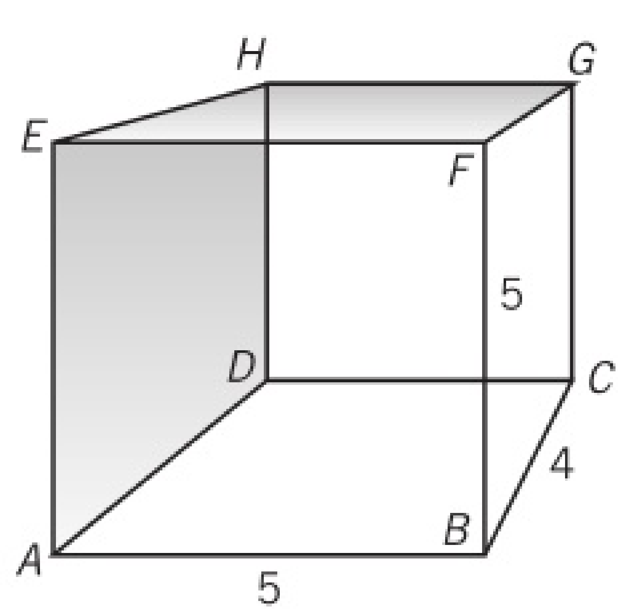
Habilidade 6 Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

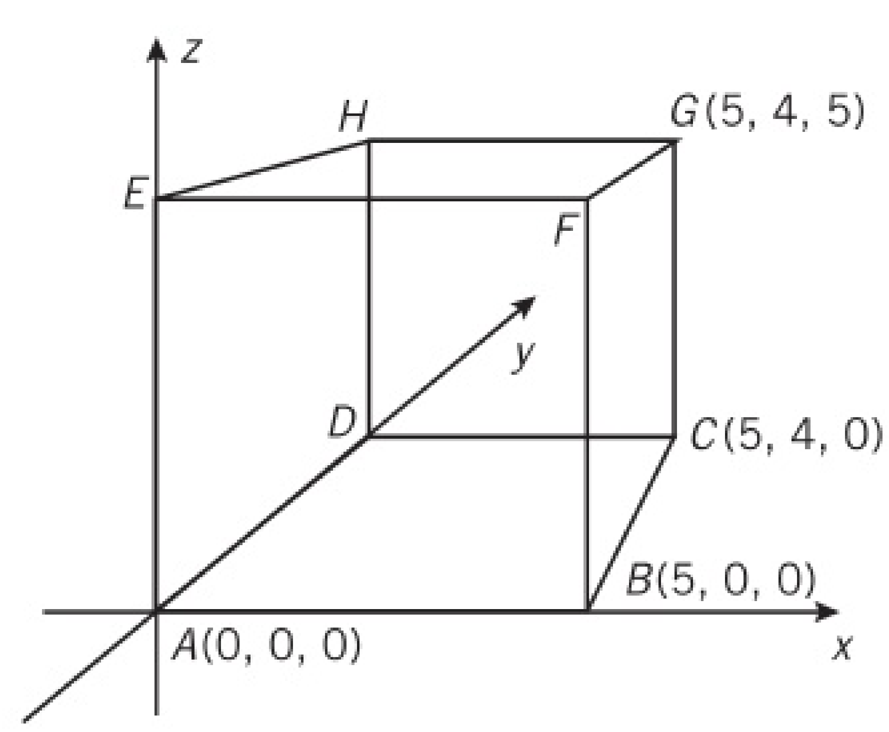
Em classe

POSIÇÕES E COORDENADAS







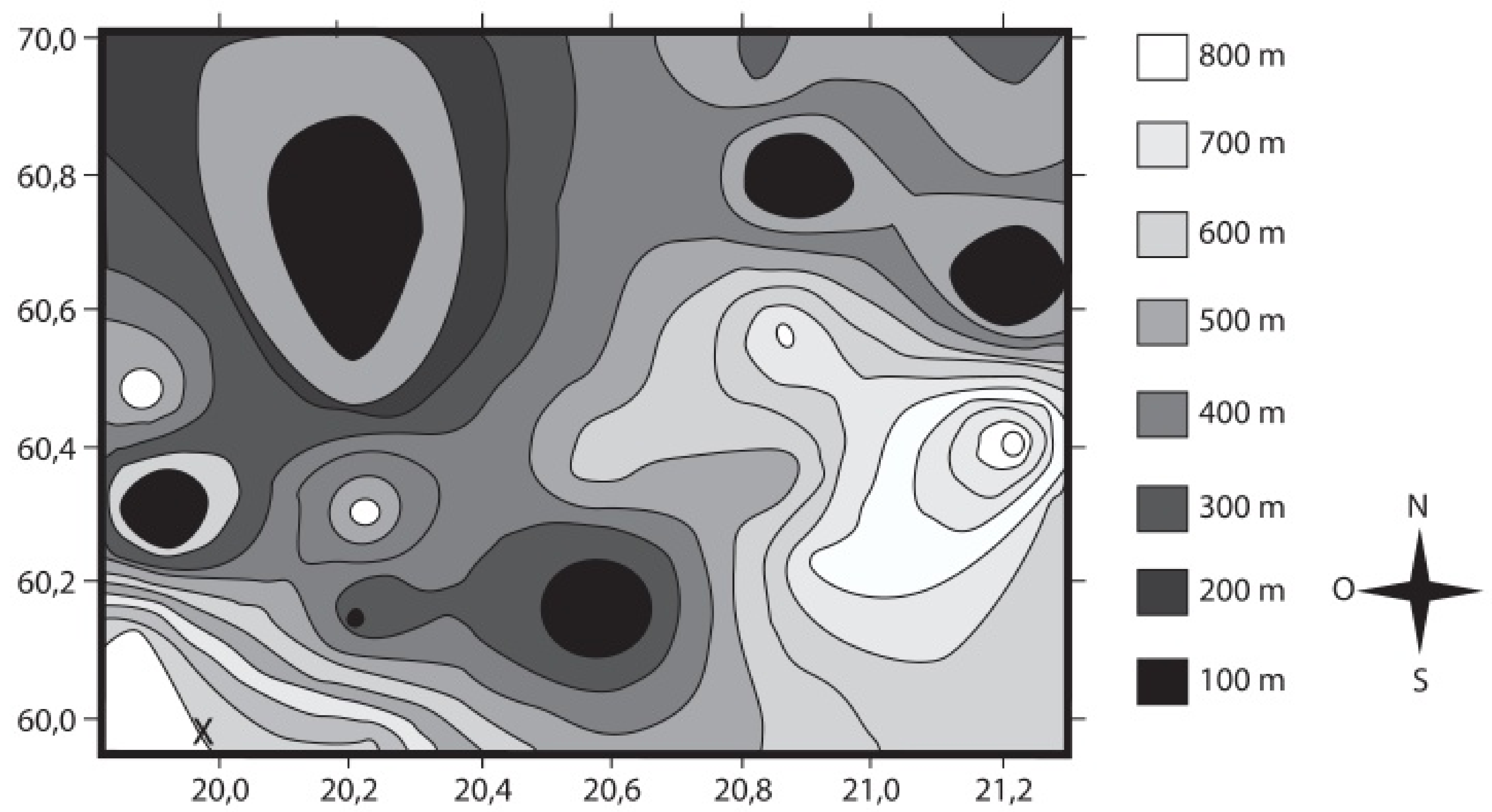


- Dois planos α e β são $\begin{cases} \text{paralelos } (\alpha \mathbin{/\!/} \beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ou } \alpha \cap \beta = \varnothing. \\ \text{secantes} \Leftrightarrow \text{a intersecção de } \alpha \text{ e } \beta \text{ é uma reta.} \end{cases}$

- Duas retas r e s são $\begin{cases} \text{paralelas} \Leftrightarrow r = s \text{ ou } r \text{ e } s \text{ são coplanares e } r \cap s = \varnothing. \\ \text{concorrentes} \Leftrightarrow \text{a intersecção de } r \text{ e } s \text{ é um ponto.} \\ \text{reversas} \Leftrightarrow r \text{ e } s \text{ não são coplanares.} \end{cases}$

- A reta r está contida no plano $\alpha \Leftrightarrow$ todo ponto de r pertence a α.
- A reta r é **paralela** ao plano $\alpha \Leftrightarrow r \cap \alpha = \varnothing$.
- A reta r é **secante** ao plano $\alpha \Leftrightarrow$ a intersecção de r e α é um ponto.
- As retas concorrentes r e s são perpendiculares $\Rightarrow r$ e s formam um ângulo reto.
- As retas reversas r e s são ortogonais $\Rightarrow r$ e s formam um ângulo reto.
- A reta r é perpendicular ao plano $\alpha \Leftrightarrow r$ forma um ângulo reto com qualquer reta s contida em α.
- Os planos α e β são perpendiculares $\Leftrightarrow \beta$ contém uma reta r que é perpendicular a α.

1 (Enem) A figura a seguir é a representação de uma região por meio de curvas de nível, que são curvas fechadas representando a altitude da região com relação ao nível do mar. As coordenadas estão expressas em graus de acordo com a longitude, no eixo horizontal, e a latitude, no eixo vertical. A escala em tons de cinza desenhada à direita está associada à altitude da região.



Um pequeno helicóptero usado para reconhecimento sobrevoa a região a partir do ponto $X = (20; 60)$. O helicóptero segue o percurso:

0,8° L → 0,5° N → 0,2° O → 0,1° S → 0,4° N → 0,3° L

Ao final, desce verticalmente até pousar no solo.

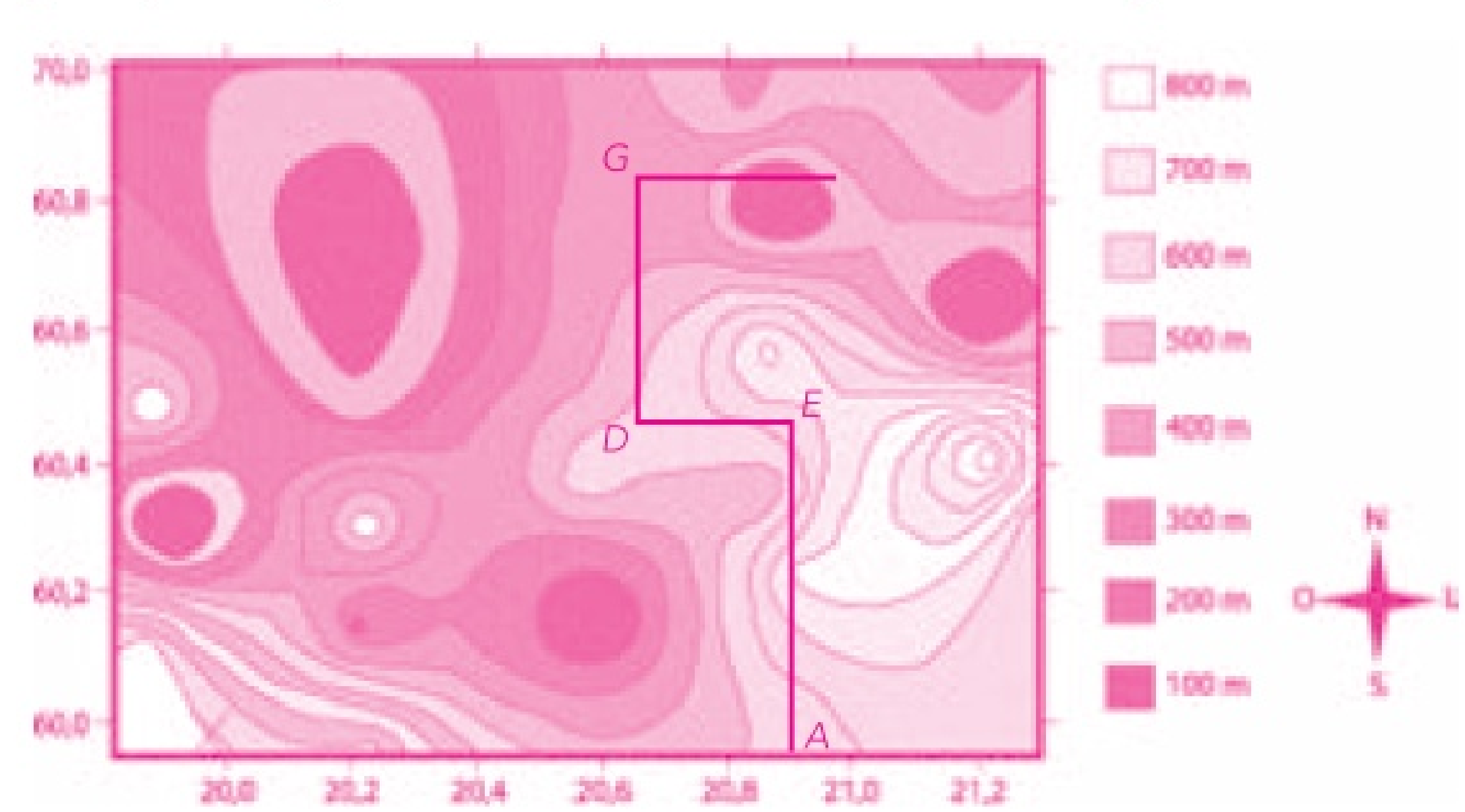
De acordo com as orientações, o helicóptero pousou em um local cuja altitude é:

→ a) menor ou igual a 200 m.
b) maior que 200 m e menor ou igual a 400 m.
c) maior que 400 m e menor ou igual a 600 m.
d) maior que 600 m e menor ou igual a 800 m.
e) maior que 800 m.

Do enunciado, temos:

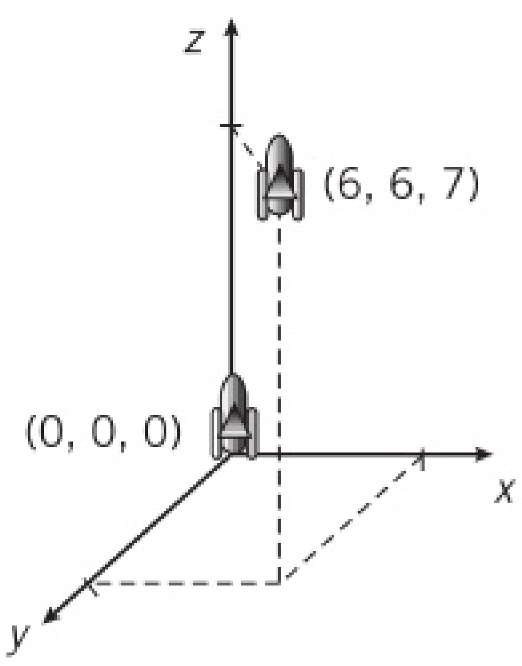
Posição inicial	Comando de percurso	Posição final
X(20; 60)	0,8° L	*A*(20,8; 60)
A(20,8; 60)	0,5° N	*B*(20,8; 60,5)
B(20,8; 60,5)	0,2° O	*C*(20,6; 60,5)
C(20,6; 60,5)	0,1° S	*D*(20,6; 60,4)
D(20,6; 60,4)	0,4° N	*E*(20,6; 60,8)
E(20,6; 60,8)	0,3° L	*F*(20,9; 60,8)

O percurso é dado pela poligonal que une os pontos *X*, *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*, como é mostrado na figura:



Assim, da escala de tons apresentada, podemos concluir que o helicóptero pousou em um local cuja altitude é menor ou igual a 200 m.

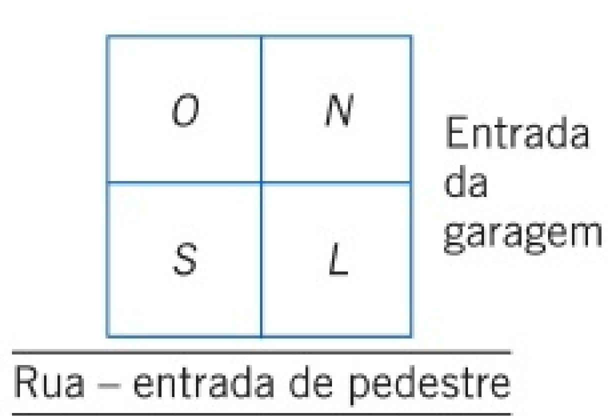
2 (Enem) Um foguete foi lançado do marco zero de uma estação e após alguns segundos atingiu a posição (6, 6, 7) no espaço, conforme mostra a figura. As distâncias são medidas em quilômetros. Considerando que o foguete continuou sua trajetória, mas se deslocou 2 km para frente na direção do eixo *x*, 3 km para trás na direção do eixo *y*, e 11 km para frente na direção do eixo *z*, então o foguete atingiu a posição:



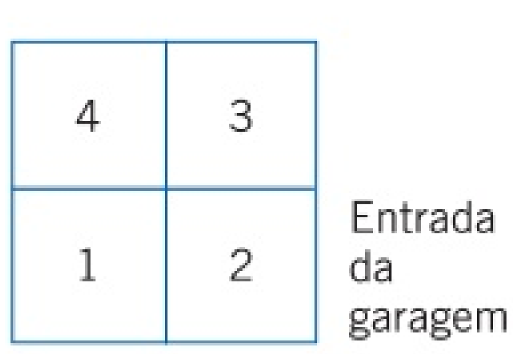
a) (17, 3, 9).
→ b) (8, 3, 18).
c) (6, 18, 3).
d) (4, 9, 4).
e) (3, 8, 18).

(6, 6, 7) + (2, −3, 11) = (8, 3, 18)

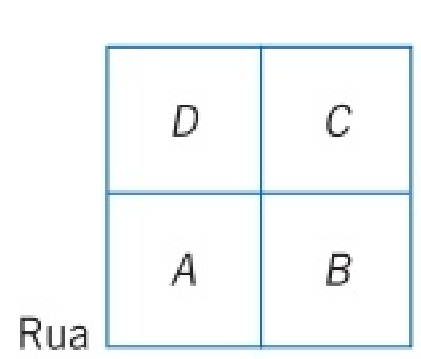
3 (Insper-SP) O prédio de uma grande loja de departamentos tem a forma de um cubo. As figuras a seguir apresentam três vistas do prédio, com as respectivas regiões em que se dividem.



Vista superior (planta)



Vista frontal da rua



Vista lateral – de frente para a entrada da garagem

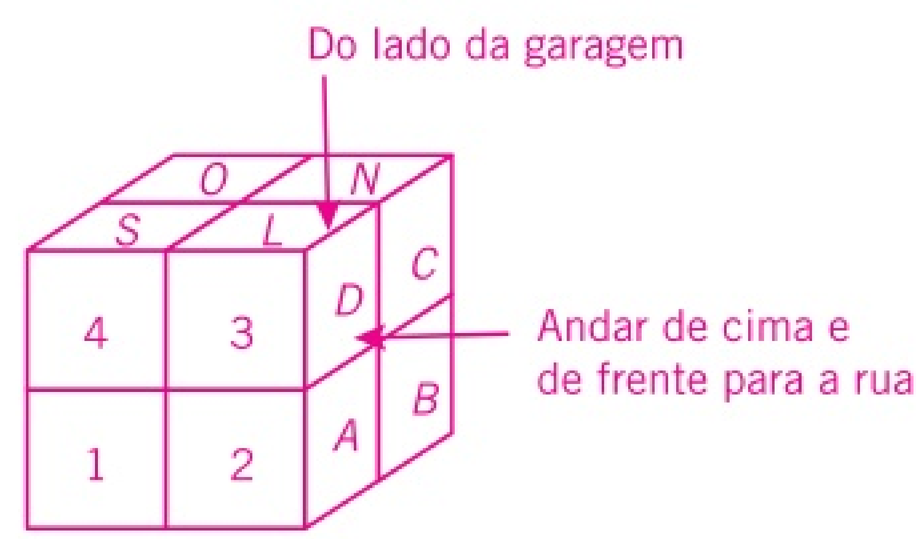
Dessa forma, o prédio se divide em 8 cubos menores, um por departamento. Para identificar o lugar de cada departamento, utiliza-se um código de três dígitos, de acordo com as quatro regiões estabelecidas em cada uma das vistas do prédio apresentadas na figura. Considere as seguintes descrições das localizações de dois departamentos:

- Entretenimento: de frente para a rua, no andar de cima, do lado da garagem.
- Roupas infantis: na parte dos fundos, no andar de baixo, na lateral oposta à garagem.

Dentre os códigos abaixo, aqueles que identificam mais precisamente a localização destes departamentos são, respectivamente:

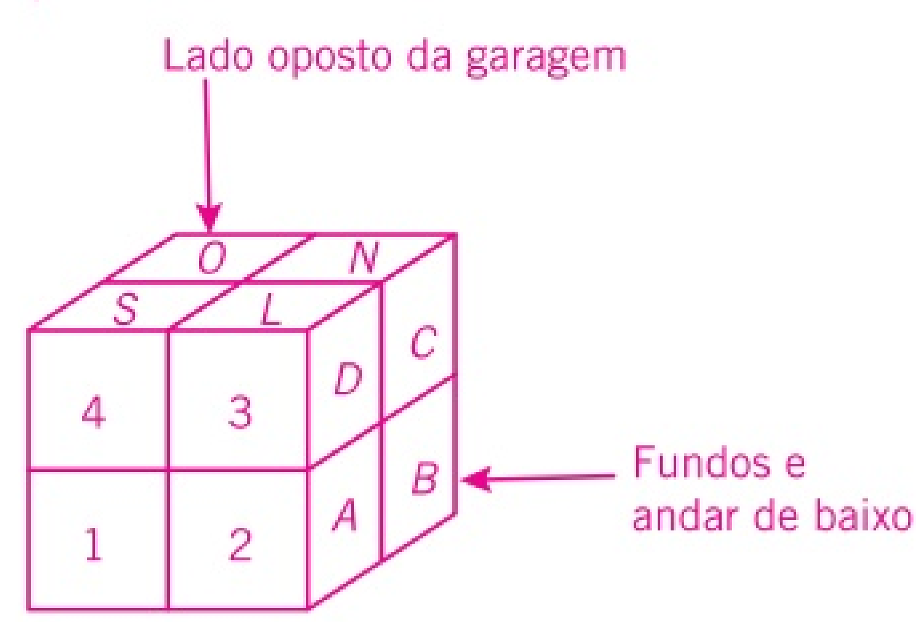
a) *S4D* e *N2B*.
b) *S4D* e *O1B*.
c) *L3D* e *N2B*.
d) *L2A* e *O4C*.
→ e) *L3D* e *O1B*.

Do enunciado, temos a representação:
Para entretenimento:



A identificação para o departamento de entretenimento é *L3D*.

Para roupas infantis:



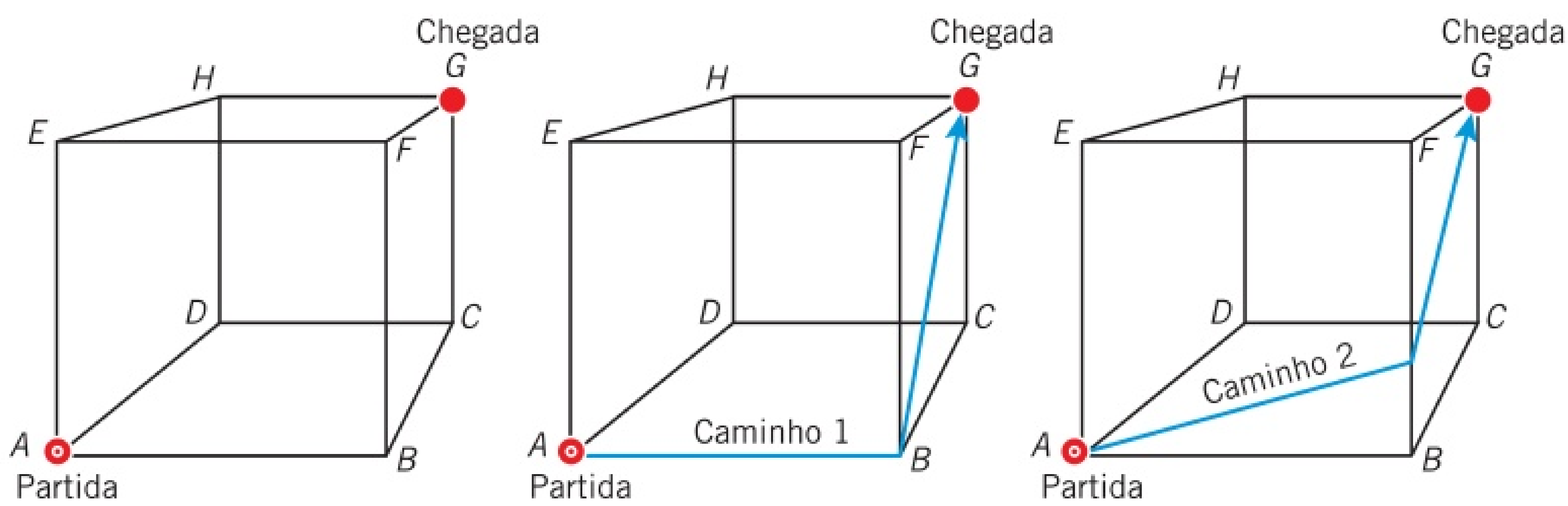
A identificação para o departamento de roupas infantis é *O1B*.

Anotações

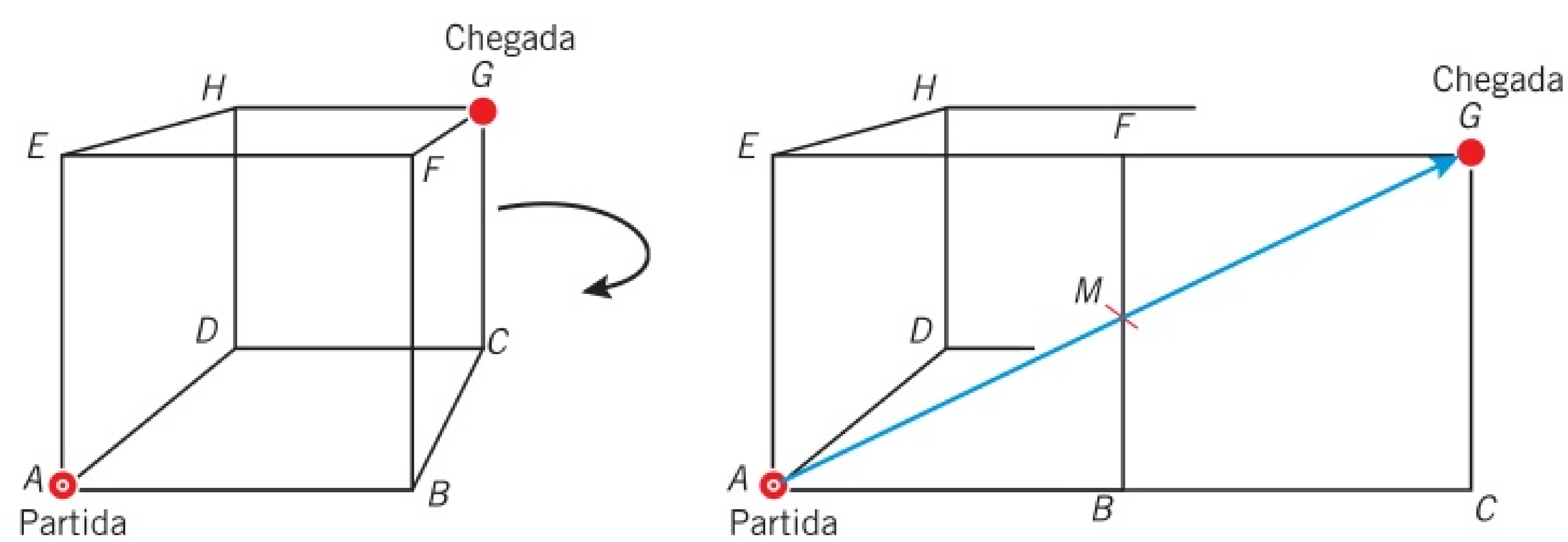
Em casa

TEXTO DE APOIO

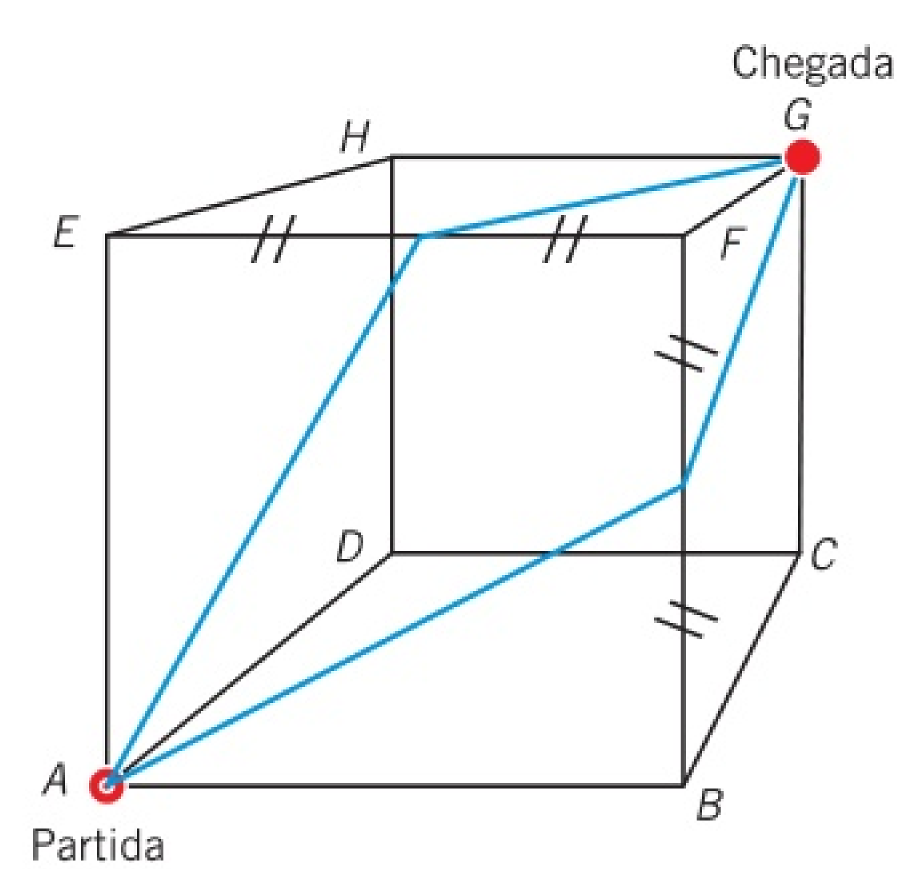
Há problemas no espaço (tridimensional) que podem ser resolvidos ao serem levados, de modo conveniente, para um plano (bidimensional). Vejamos algumas situações. Imaginemos que uma formiga apressada queira se deslocar do ponto *A* ao ponto *G*, pela superfície do cubo *ABCDEFGH*.



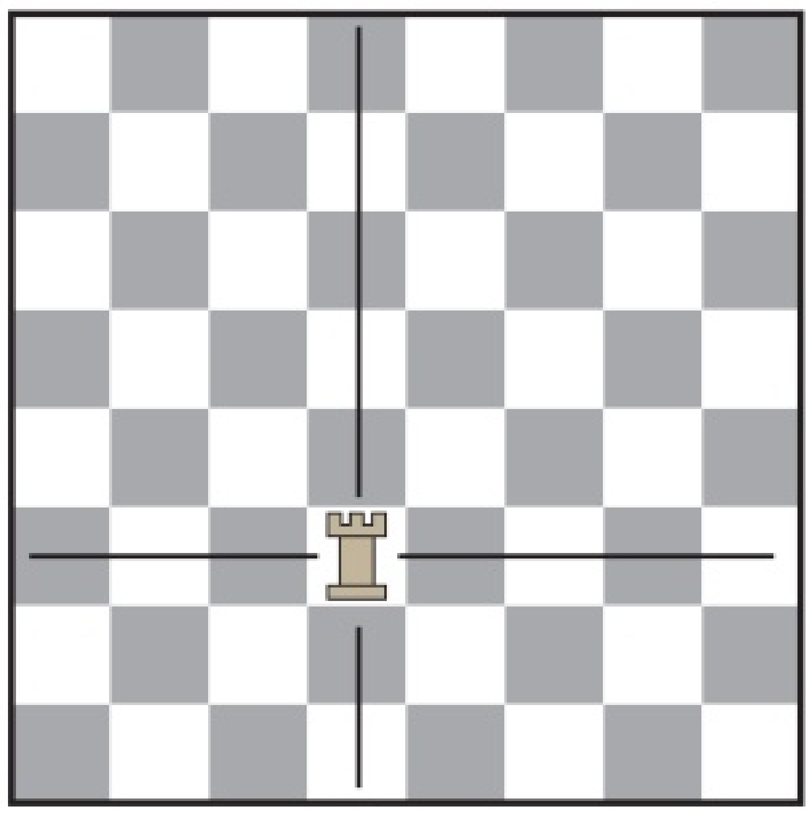
A dúvida dela é: qual é o caminho mais curto? Caminho 1, caminho 2 ou um outro? Felizmente, ela teve uma ideia; ela podia fazer de conta que as faces *ABFE* e *BCGF* estivessem no mesmo plano e, assim, seria fácil descobrir o caminho mais curto de *A* a *G*. Para isso, na sua imaginação, bastou ela deslocar a face *BCGF*, como se fosse abrir uma porta.



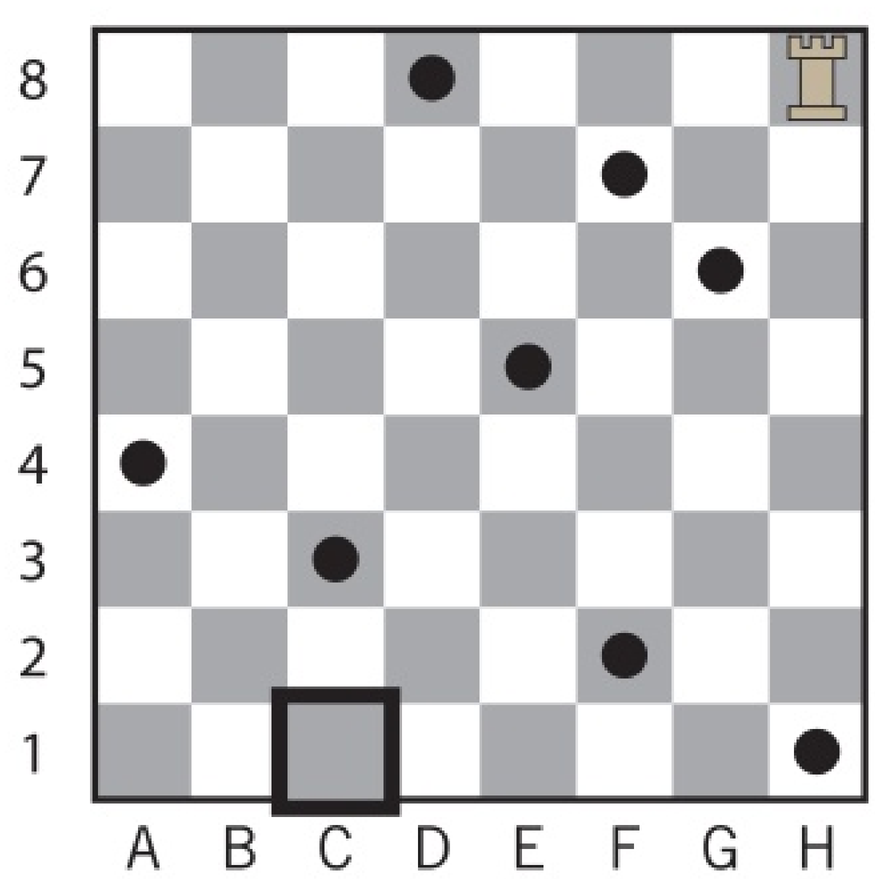
Pronto! O menor caminho é dado pela reta determinada pelos pontos *A* e *G*. Esse caminho intersecta o segmento $\overline{BF}$ no seu ponto médio *M*. Portanto, o menor caminho é obtido deslocando-se de *A* ao ponto médio de $\overline{BF}$ ou de $\overline{EF}$.



1 (Enem) O xadrez é jogado por duas pessoas. Um jogador joga com as peças brancas, o outro, com as peças pretas. Neste jogo, vamos utilizar somente a Torre, uma das peças do xadrez. Ela pode mover-se para qualquer casa ao longo da coluna ou linha que ocupa, para frente ou para trás, conforme indicado na figura a seguir.



O jogo consiste em chegar a um determinado ponto sem passar por cima dos pontos pretos já indicados.

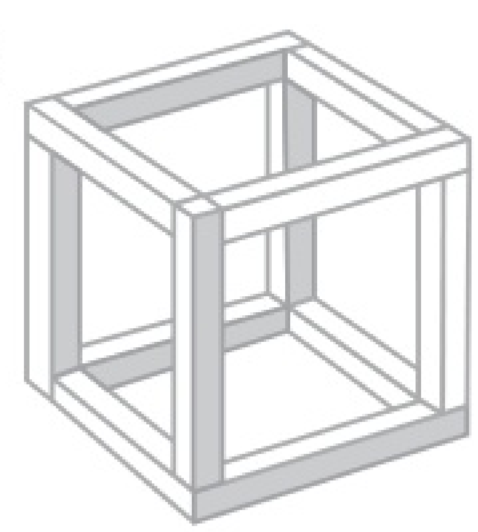


Respeitando-se o movimento da peça Torre e as regras de movimentação no jogo, qual é o menor número de movimentos possíveis e necessários para que a Torre chegue à casa C1?

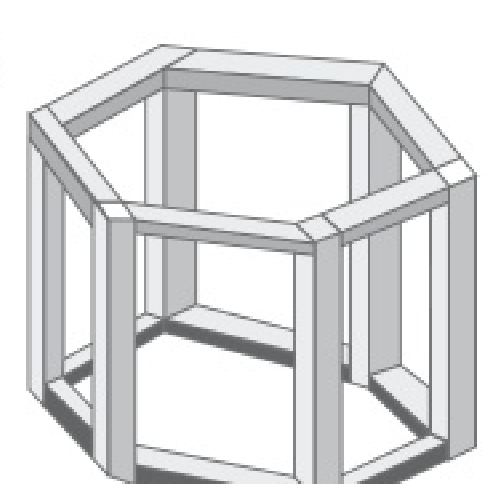
a) 2
b) 3
→ c) 4
d) 5
e) 7

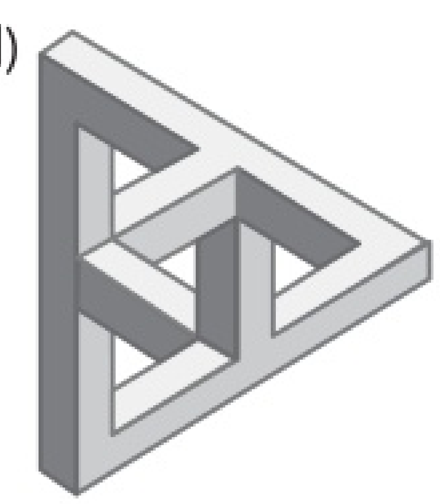
2 (Enem) Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da litografia *Belvedere*, reproduzida a seguir.

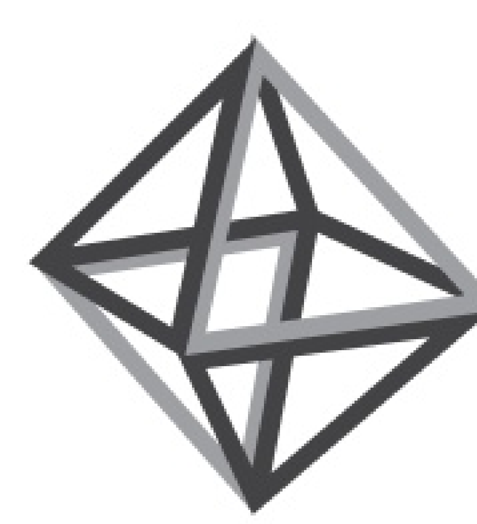
Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?

a)


b)


c)


d)


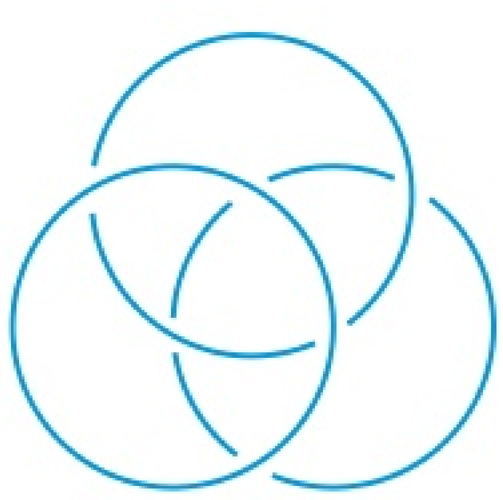
→ e)


3 (Enem) Em Florença, Itália, na Igreja de Santa Croce, é possível encontrar um portão em que aparecem os anéis de Borromeu. Alguns historiadores acreditavam que os círculos representavam as três artes: escultura, pintura e arquitetura, pois elas eram tão próximas quanto inseparáveis.

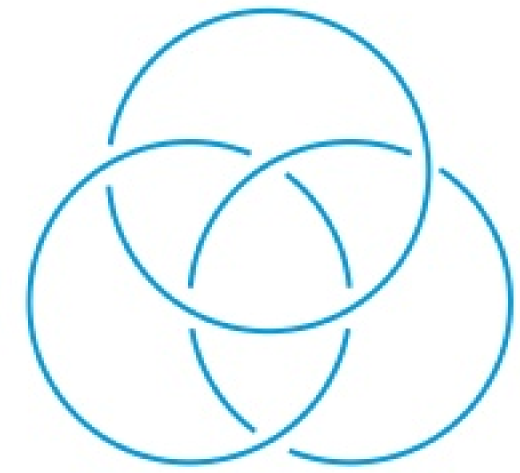
Scientific American, ago. 2008.

Qual dos esboços a seguir melhor representa os anéis de Borromeu?

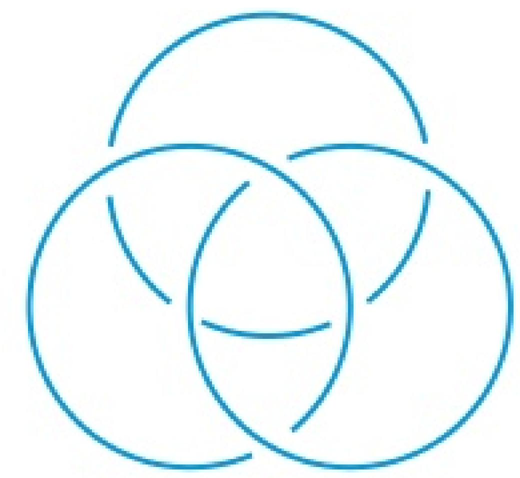
a)



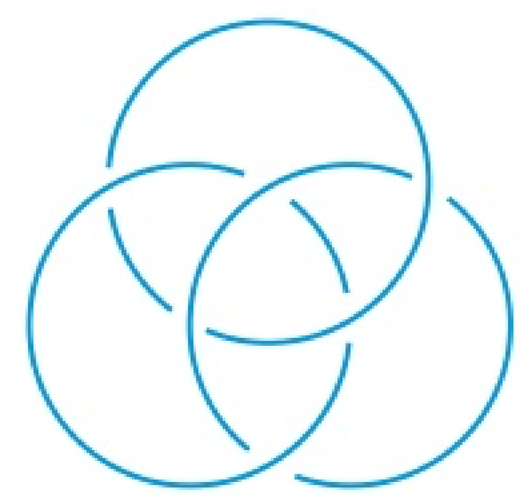
b)



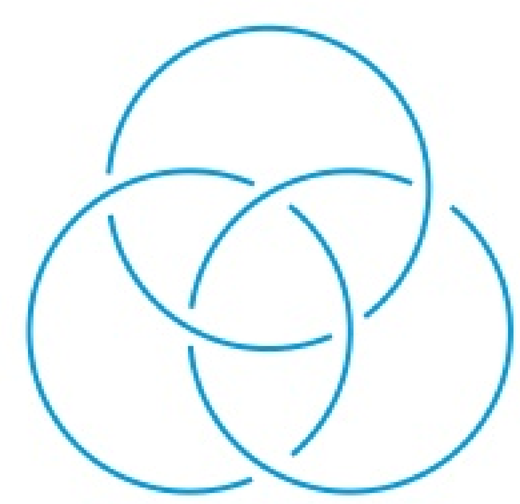
c)



d)



→ e)



4 Em relação a um sistema de coordenadas cartesianas no espaço, os vértices de um poliedro convexo são dados por: $A(1,1,-1)$, $B(3,1,-1)$, $C(3,3,-1)$, $D(1,3,-1)$, $E(1,1,5)$, $F(3,1,5)$, $G(3,3,5)$ e $H(1,3,5)$. O volume desse poliedro é igual a:

a) 12.
b) 16.
→ c) 24.
d) 36.
e) 54.

Anotações

AULA 7

Competência 2 Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade 7 Identificar características de figuras planas ou espaciais.

Em classe

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

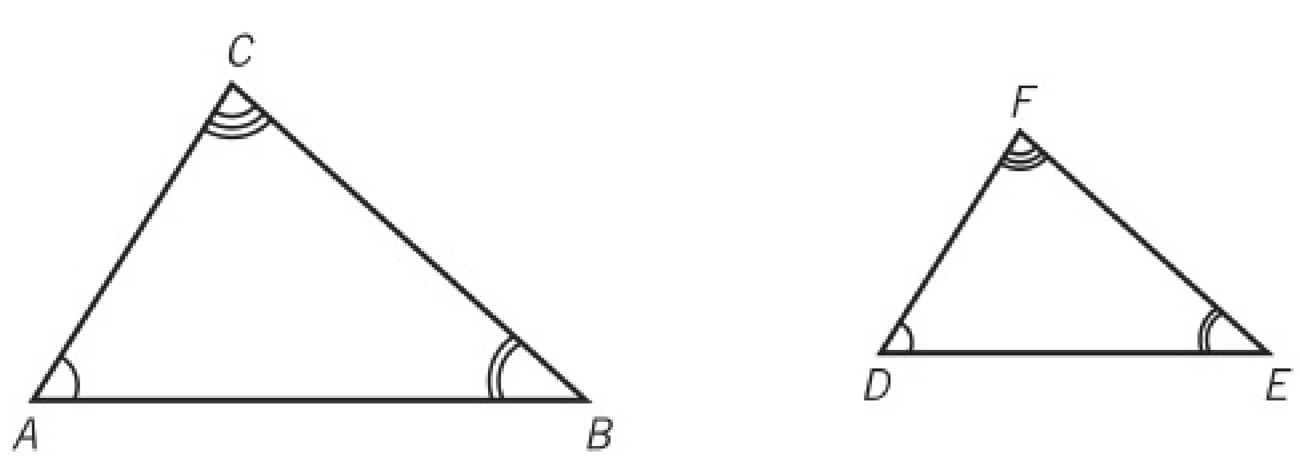
O que são figuras semelhantes?

Se observarmos a miniatura de uma garrafa, a fotografia de um objeto e a maquete de um prédio, veremos que elas mostram perfeitamente (fielmente) a forma, isto é, os ângulos, a relação entre uma largura com uma altura, etc., daquilo que ele foi copiado (elaborado). Figuras com essas características são chamadas, em Geometria, de **figuras semelhantes**.

Estudaremos nessa aula **triângulos semelhantes** e, a partir daí, poderemos estender esse conceito para outras figuras geométricas.

Triângulos semelhantes

Considere os triângulos *ABC* e *DEF* das figuras:



ABC e *DEF* são semelhantes se, e somente se:

$$\begin{cases} \text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{D}) \\ \text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{E}) \\ \text{med}(\hat{C}) = \text{med}(\hat{F}) \end{cases} \text{e } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k,$$

em que a constante k é chamada razão de semelhança do triângulo *ABC* para o triângulo *DEF*.

Indica-se a semelhança dos triângulos por: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Dois elementos que ocupam a "mesma posição" em dois triângulos semelhantes são chamados correspondentes (ou homólogos). Assim, nos triângulos apresentados:

- *A* e *D* são vértices homólogos;
- $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$ são lados homólogos.

Observações:

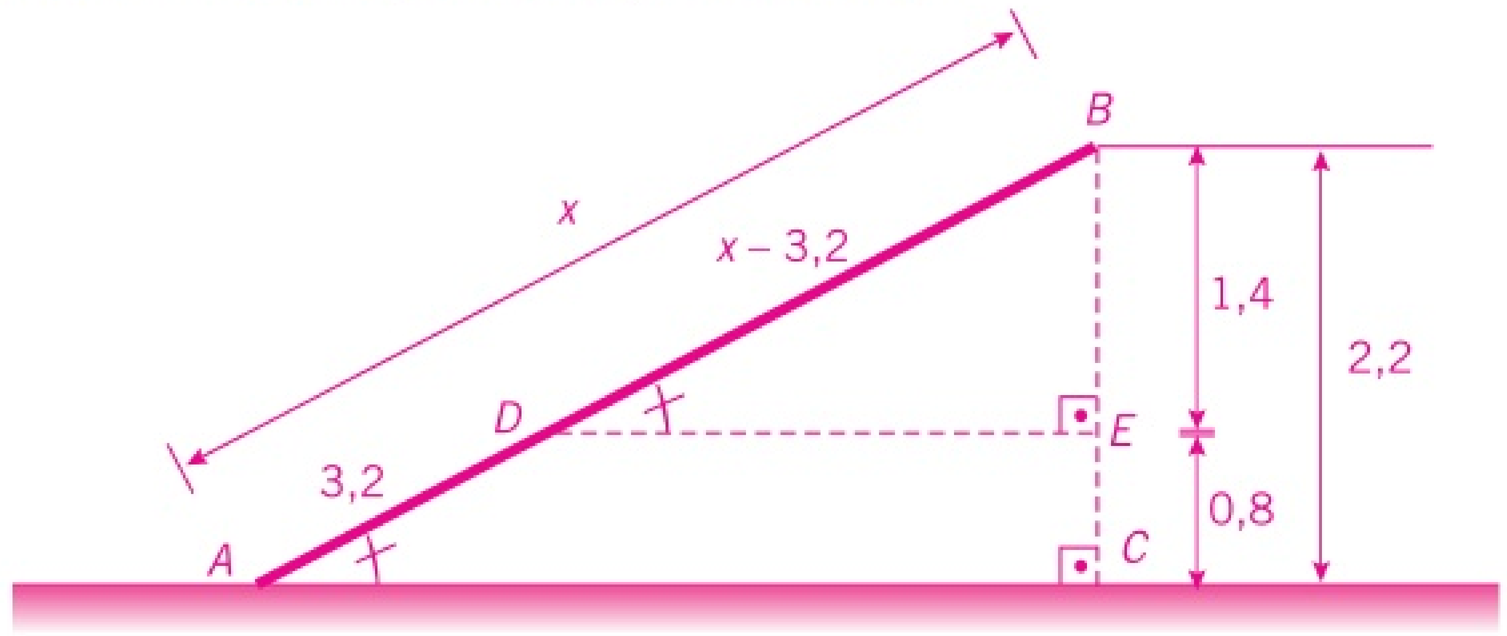
1ª) a) A razão k é verificada para quaisquer pares de segmentos lineares homólogos como, por exemplo, alturas, bissetrizes, projeções, etc.
b) A razão k continua válida para os perímetros dos triângulos.

2ª) Se dois triângulos têm dois ângulos respectivamente congruentes (mesma medida), eles são semelhantes.

1 (Enem) A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente, ao caminhar sobre a rampa, percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

a) 1,16 metro. b) 3,0 metros. c) 5,4 metros. → d) 5,6 metros. e) 7,04 metros.

Do enunciado temos a figura, cotada em metros, em que x é o comprimento da rampa:



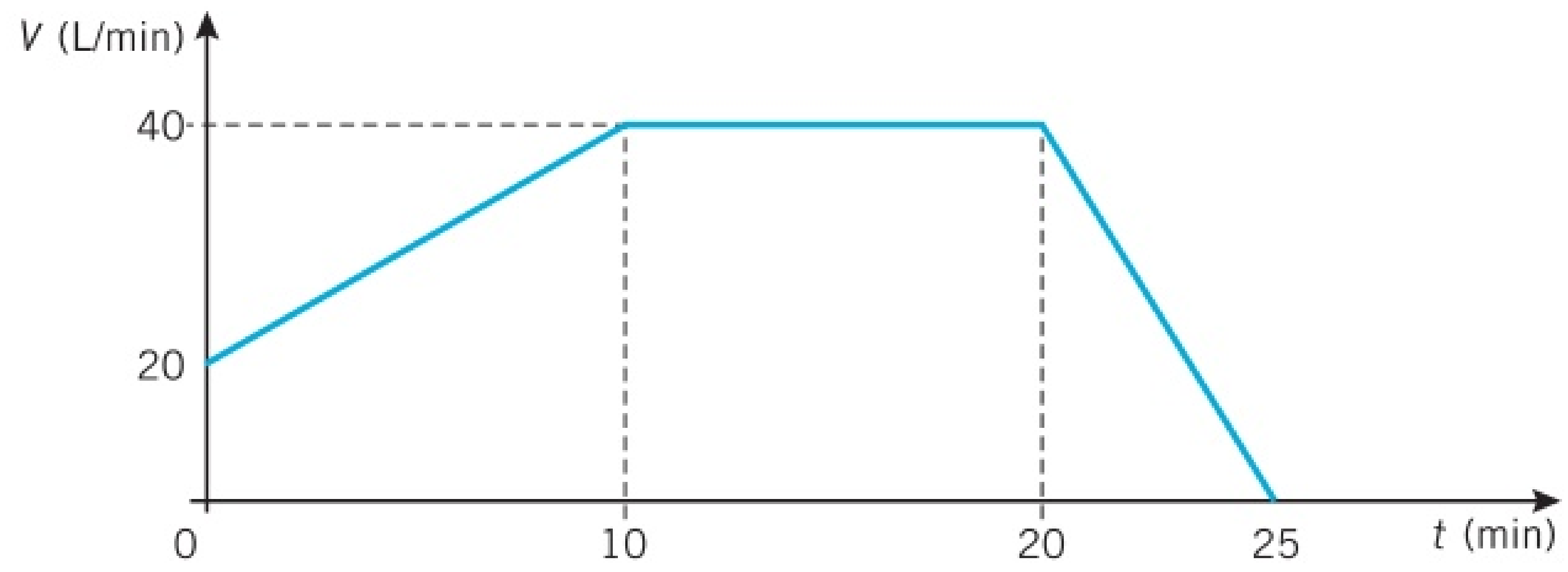
Da semelhança entre os triângulos *DBE* e *ABC*, temos:

$\frac{x - 3{,}2}{x} = \frac{1{,}4}{2{,}2} \Rightarrow 2{,}2x - 7{,}04 = 1{,}4x \Rightarrow x = 8{,}8$

Logo, a distância pedida é tal que:

$DB = x - 3{,}2 \Rightarrow DB = 8{,}8 - 3{,}2 \Rightarrow DB = 5{,}6$

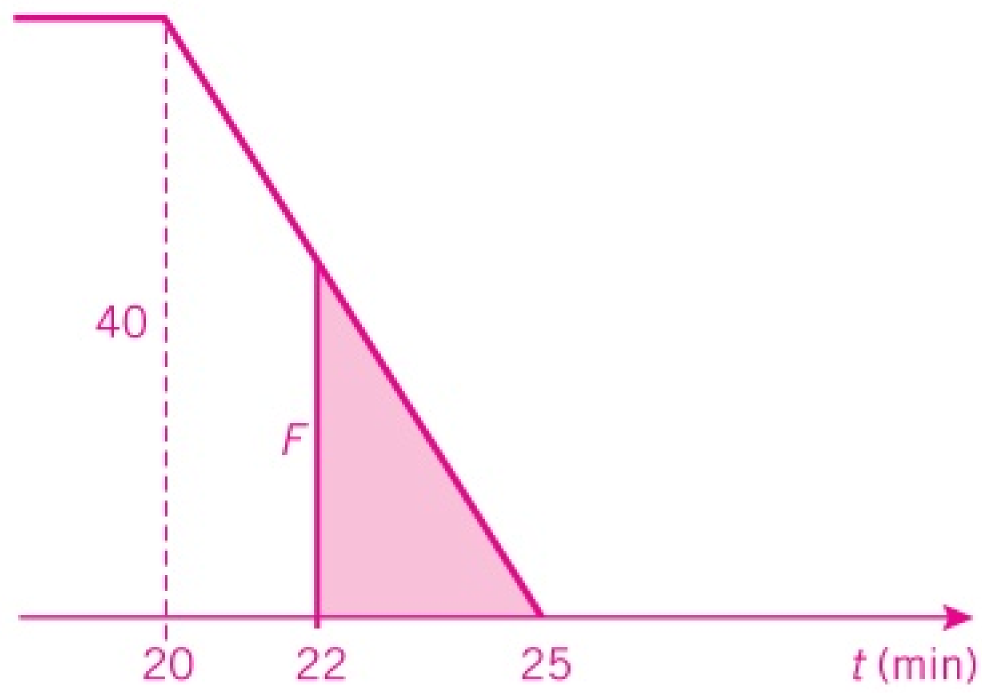
2 (Enem) Um reservatório, inicialmente vazio, foi abastecido por uma bomba-d'água. A vazão *V*, medida em litros por minuto, variou com o tempo (medido em minutos), conforme o gráfico abaixo. No instante $t = 25$ min, o reservatório encheu-se completamente e a bomba foi desligada.



Qual foi a medida dessa vazão no instante $t = 22$ min?

a) 26 L/min → b) 24 L/min c) 22 L/min d) 21 L/min e) 20 L/min

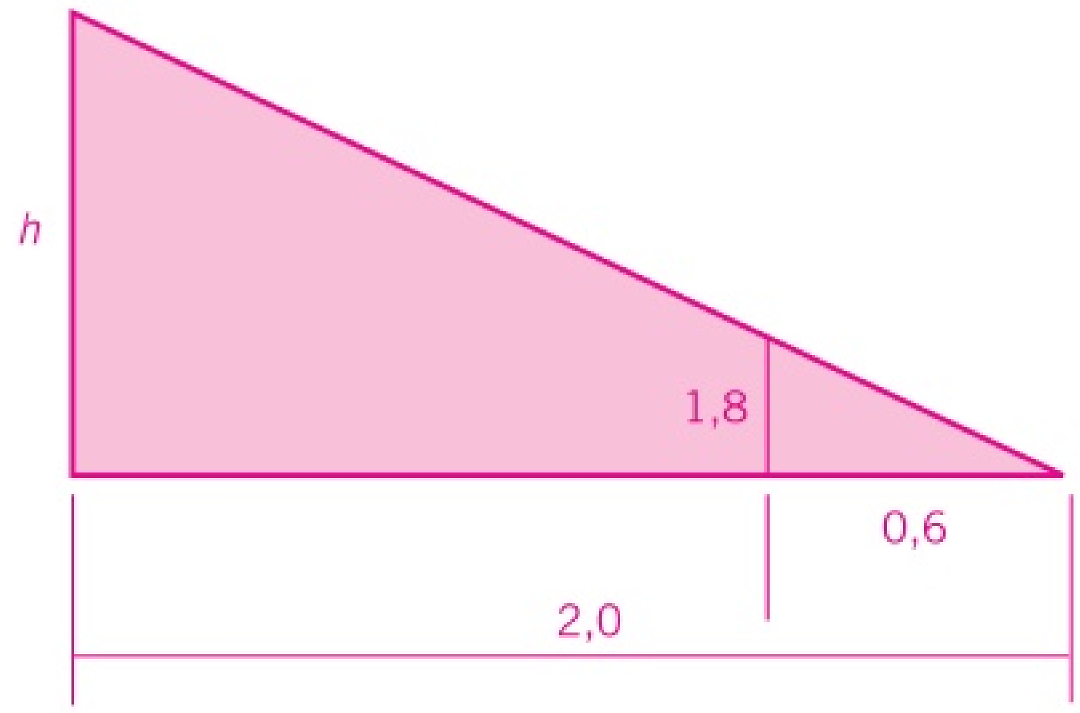
Da semelhança dos triângulos, na figura, temos:

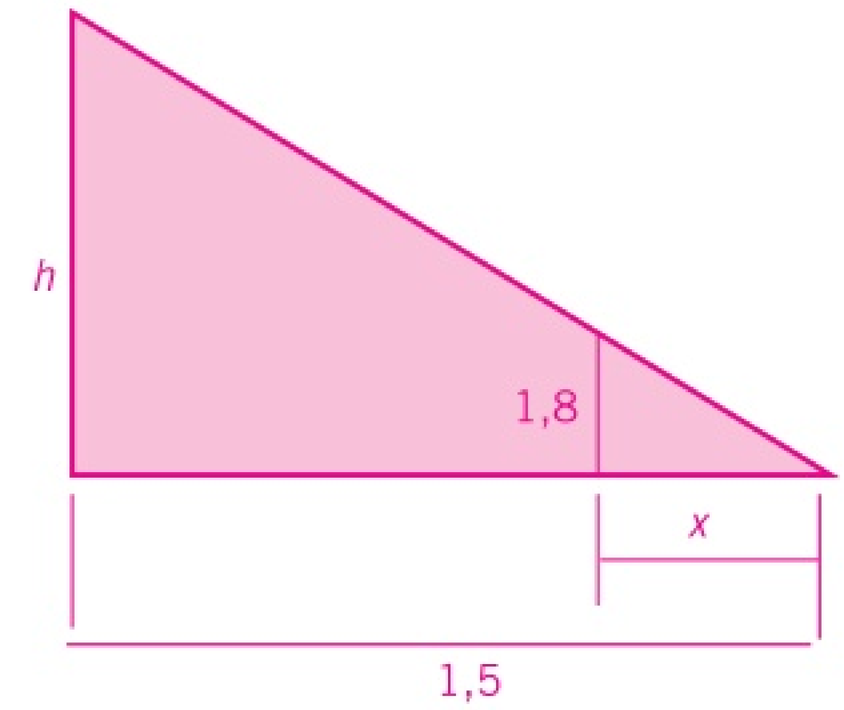


$\frac{F}{40} = \frac{25 - 22}{25 - 20} \Rightarrow F = 24$ (L/min)

3 (Enem) A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir:

a) 30 cm. → b) 45 cm. c) 50 cm. d) 80 cm. e) 90 cm.

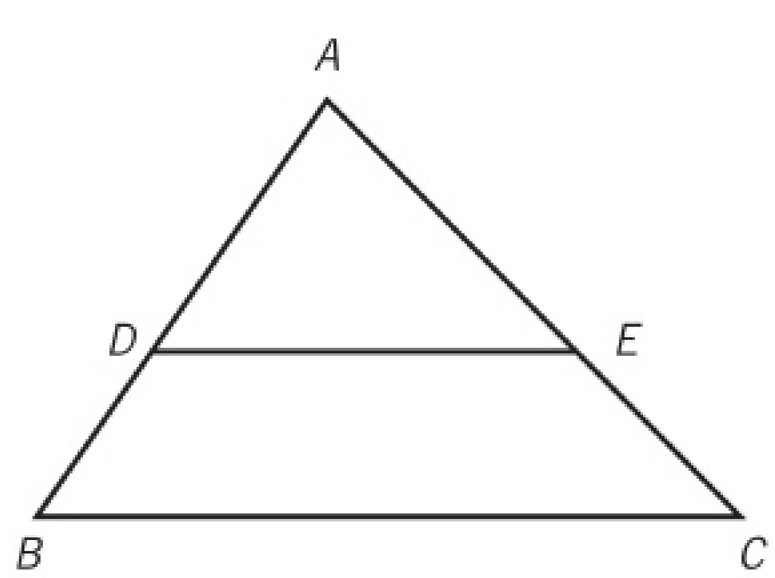




$\frac{h}{1,8} = \frac{2}{0,6} = \frac{1,5}{x} \Rightarrow x = 0,45 \text{ m} \Rightarrow x = 45 \text{ cm}$

Em casa

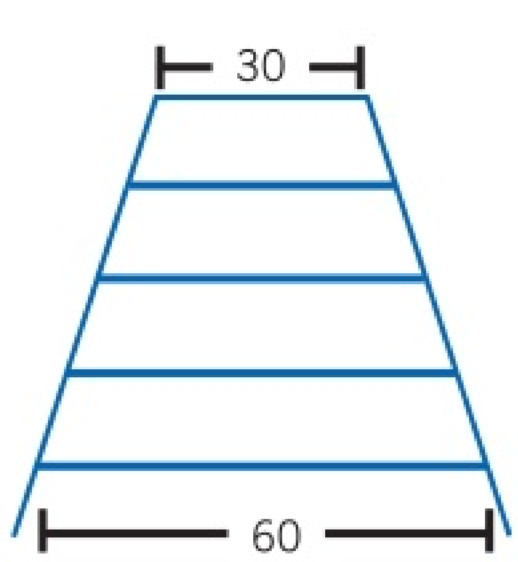
1 Na figura, o segmento $\overline{DE}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC.



Se $AB = 18$ cm, $BC = 24$ cm e $AD = 6$ cm, o segmento $\overline{DE}$ mede, em cm:

a) 6,5. → b) 8. c) 8,5. d) 10. e) 10,5.

2 (Enem) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme mostra a figura.



Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser:

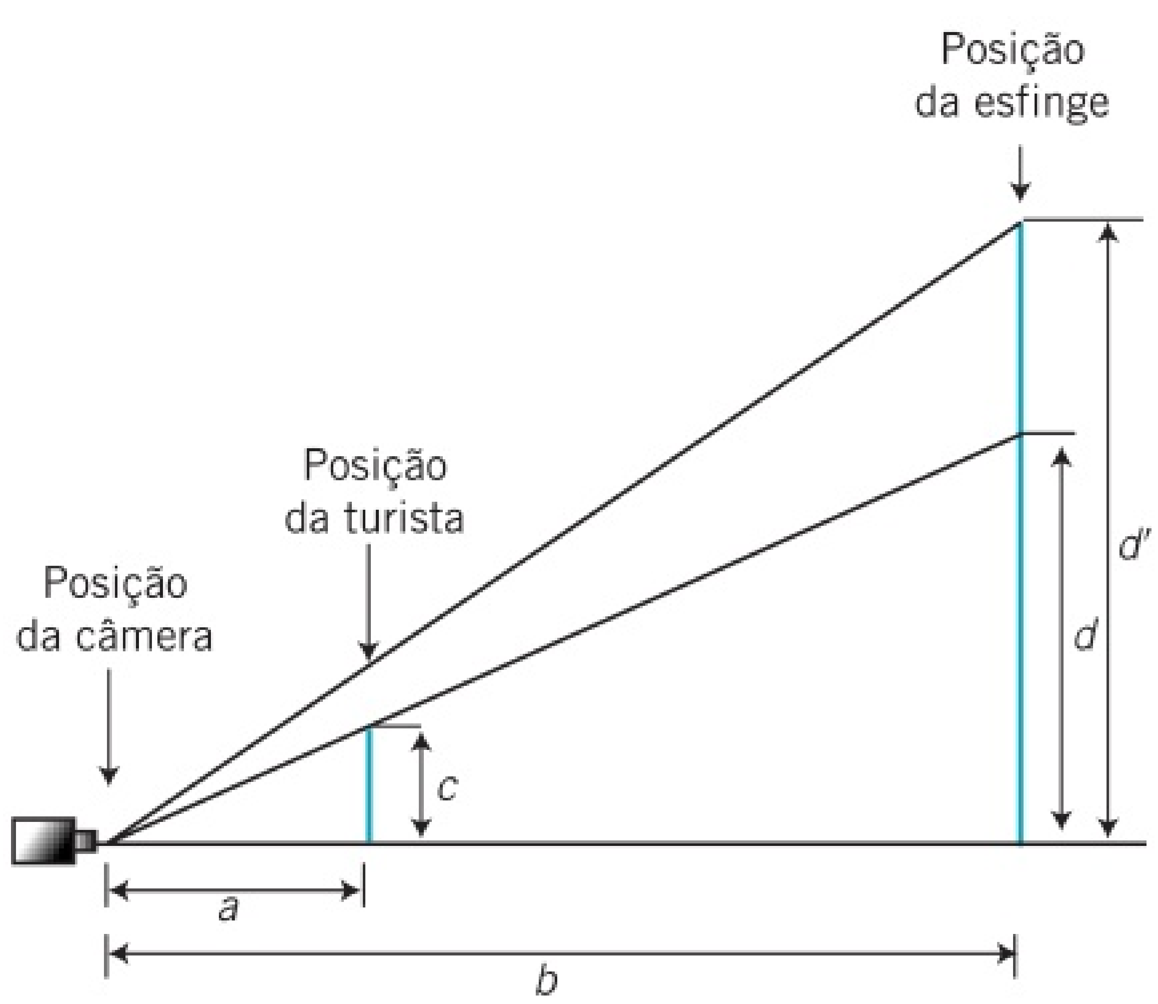
a) 144.
b) 180.
c) 210.
→ d) 225.
e) 240.

3 Joãozinho, após aprender semelhança de triângulos, aplicou os conceitos para calcular a distância "aproximada" da sua casa até um prédio situado relativamente longe dali. Colocou uma régua na posição vertical a uma distância de 60 cm de seus olhos e observou que para "cobrir" 8 andares daquele prédio necessitava de 12 cm da régua. Ao supor que cada andar do prédio tem altura de 2,80 m, qual foi a distância que Joãozinho obteve?

a) 94 m
b) 108 m
→ c) 112 m
d) 124 m
e) 136 m

4 (Enem) A fotografia mostra uma turista aparentemente beijando a esfinge de Gizé, no Egito. A figura a seguir mostra como, na verdade, foram posicionadas a câmera fotográfica, a turista e a esfinge.

© ENEM



Medindo-se com uma régua diretamente na fotografia, verifica-se que a medida do queixo até o alto da cabeça da turista é igual a $\frac{2}{3}$ da medida do queixo da esfinge até o alto da sua cabeça. Considere que essas medidas na realidade são representadas por d e d', respectivamente, que a distância da esfinge à lente da câmera fotográfica, localizada no plano horizontal do queixo da turista e da esfinge, é representada por b, e que a distância da turista à mesma lente, por a.

A razão entre b e a será dada por:

a) $\frac{b}{a} = \frac{d'}{c}$.

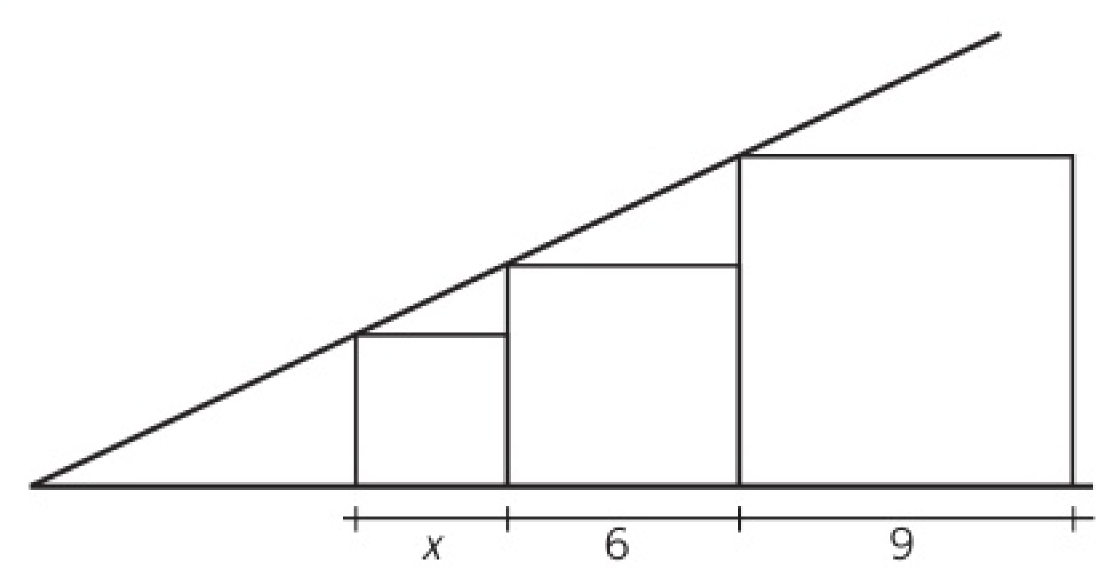
b) $\frac{b}{a} = \frac{2d}{3c}$.

c) $\frac{b}{a} = \frac{3d'}{2c}$.

d) $\frac{b}{a} = \frac{2d'}{3c}$.

e) $\frac{b}{a} = \frac{2d'}{c}$.

5 Na figura há três quadrados.



A medida x do lado do quadrado menor é:

a) 1,5.

b) 2.

c) 3.

d) 3,5.

e) 4.

Anotações

AULA 8

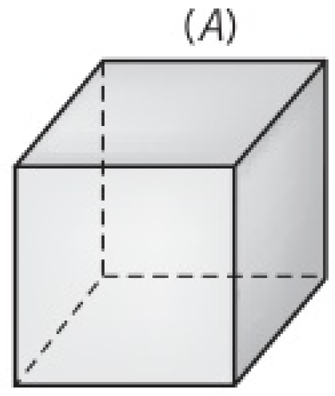
Competência 2	Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
Habilidade 8	Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos de espaço e forma.

Em classe

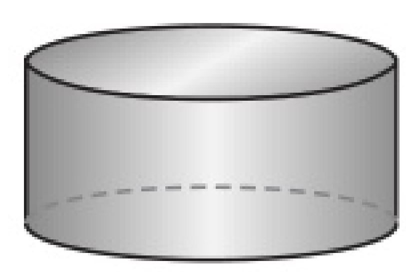
VOLUME

Volume de um sólido é a região do espaço ocupada por ele. Considere, por exemplo, os sólidos *A* e *B* das figuras.

(*A*)



(*B*)



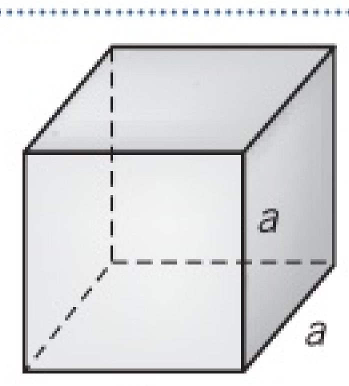
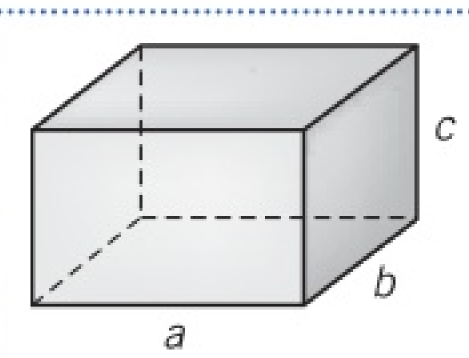
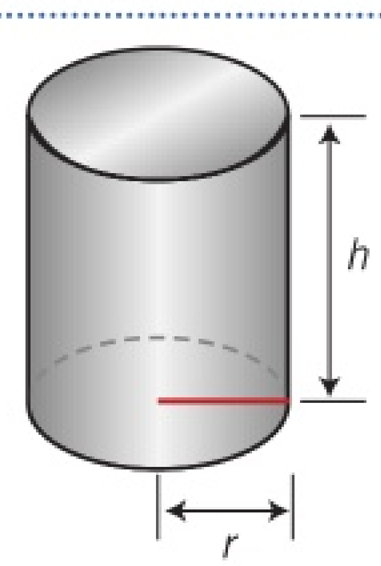
Qual deles é o de maior volume?

Poderemos até "perceber" qual deles tem maior volume. No entanto, temos uma pergunta: Como poderemos quantificar esses volumes?

É a Geometria Métrica do Espaço que procura fazer essa quantificação por meio de comparação com o volume de um sólido cujo volume é adotado como unitário. O raciocínio é análogo ao que fizemos para o cálculo de áreas de figuras planas.

Nesta aula veremos os volumes dos sólidos que aparecem em nosso dia a dia.

Cálculo de volumes

Cubo		a: medida da aresta Volume $= a^3$
Paralelepípedo reto retângulo (bloco retangular)		a, b, c: dimensões do paralelepípedo Volume $= a \cdot b \cdot c$
Cilindro circular reto (ou cilindro de revolução)		h: altura r: raio da base Volume $= \pi r^2 h$

1 (Enem) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a:

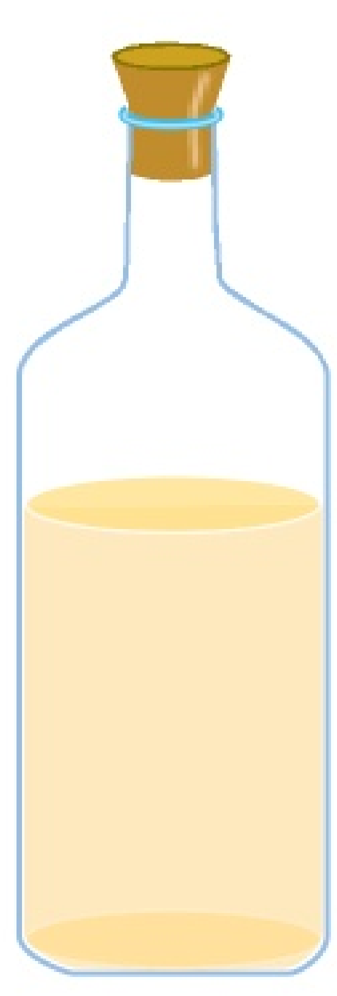
a) 5 cm.
→ b) 6 cm.
c) 12 cm.
d) 24 cm.
e) 25 cm.

Sendo ℓ a medida da aresta do cubo, em centímetros, do enunciado, temos:

$\ell^3 = 3 \cdot 18 \cdot 4 \Rightarrow \ell^3 = 3 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \Rightarrow \ell = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2^3} = 3 \cdot 2 \Rightarrow \ell = 6$

(Enem) Considere o enunciado a seguir para as questões 2 e 3.

Uma garrafa cilíndrica está fechada, contendo um líquido que ocupa quase completamente seu corpo, conforme mostra a figura. Suponha que, para fazer medições, você disponha apenas de uma régua milimetrada.



2 Para calcular o volume do líquido contido na garrafa, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

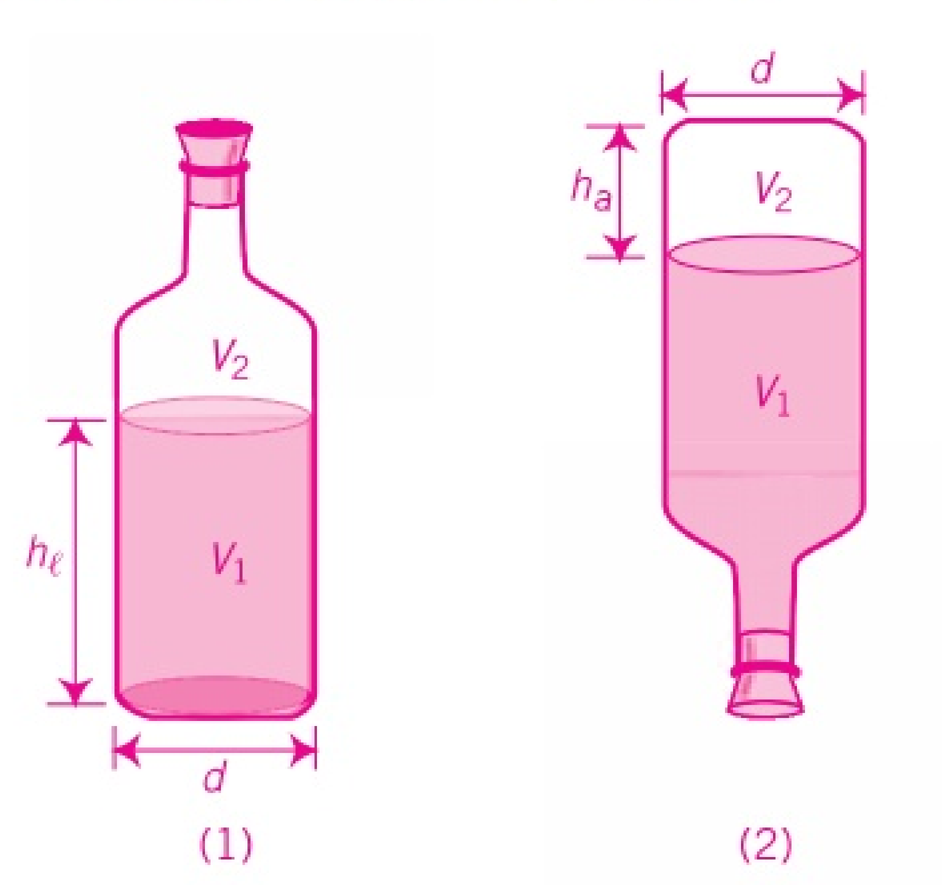
a) 1.
→ b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Para calcular o volume do líquido contido na garrafa, supondo que o fundo da garrafa seja plano e que o líquido ocupe o volume de um cilindro, o número de medições para esse cálculo é dois, ou seja, o diâmetro da base e a altura do líquido.

3 Para calcular a capacidade total da garrafa, lembrando que você pode virá-la, o número mínimo de medições a serem realizadas é:

a) 1.
b) 2.
→ c) 3.
d) 4.
e) 5.

Considere a garrafa nas posições (1) e (2) seguintes:

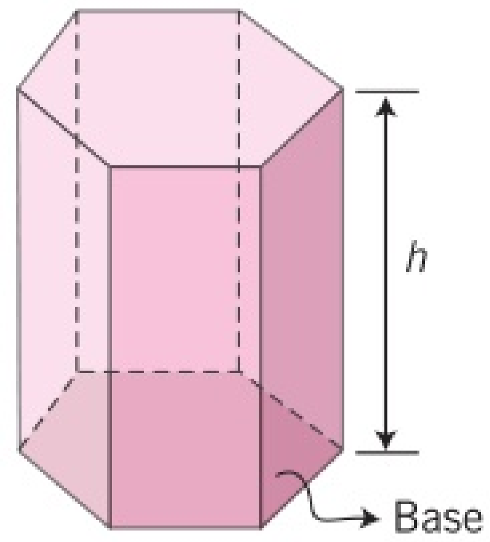


Sejam:
V_1: volume do líquido contido na garrafa
V_2: volume do "ar" contido na garrafa
h_ℓ: altura da coluna de líquido
h_a: altura da coluna de "ar"
d: diâmetro da base
A capacidade da garrafa é $V_1 + V_2$. Portanto, são necessárias três medições, ou seja: h_ℓ, d e h_a.

Em casa

TEXTO DE APOIO

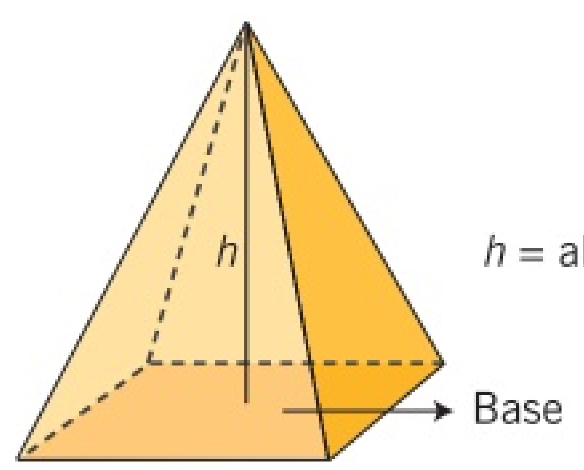
Volume de um prisma



h = altura

Volume = (área da base) · (altura)

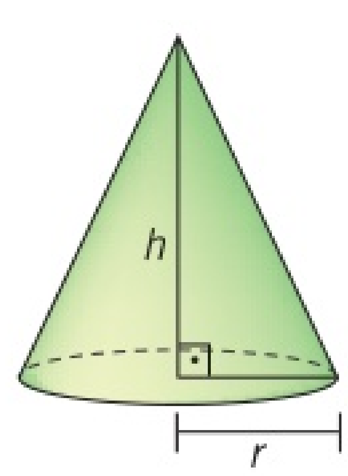
Volume de uma pirâmide



h = altura

Volume $= \frac{1}{3} \cdot$ (área da base) · (altura)

Volume de um cone circular reto (ou cone de revolução)

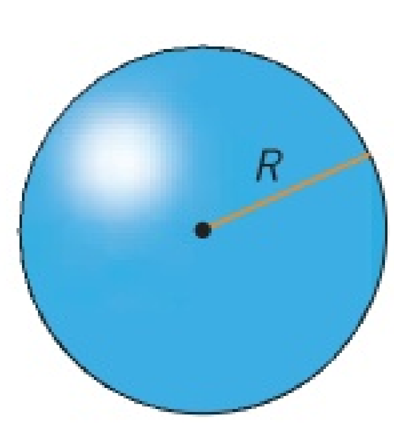


h = altura

r = raio da base

Volume $= \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$

Volume de uma esfera



R = raio da esfera

Volume $= \frac{4\pi R^3}{3}$

1 (Enem) Para construir uma manilha de esgoto, um cilindro com 2 m de diâmetro e 4 m de altura (de espessura desprezível), foi envolvido homogeneamente por uma camada de concreto de 20 cm de espessura. Supondo que cada metro cúbico de concreto custe R$ 10,00 e tomando 3,1 como valor aproximado de π, então o preço dessa manilha é igual a:

a) R$ 230,40.
b) R$ 124,00.
c) R$ 104,16.
→ d) R$ 54,56.
e) R$ 49,60.

2 (Enem)

É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores. Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

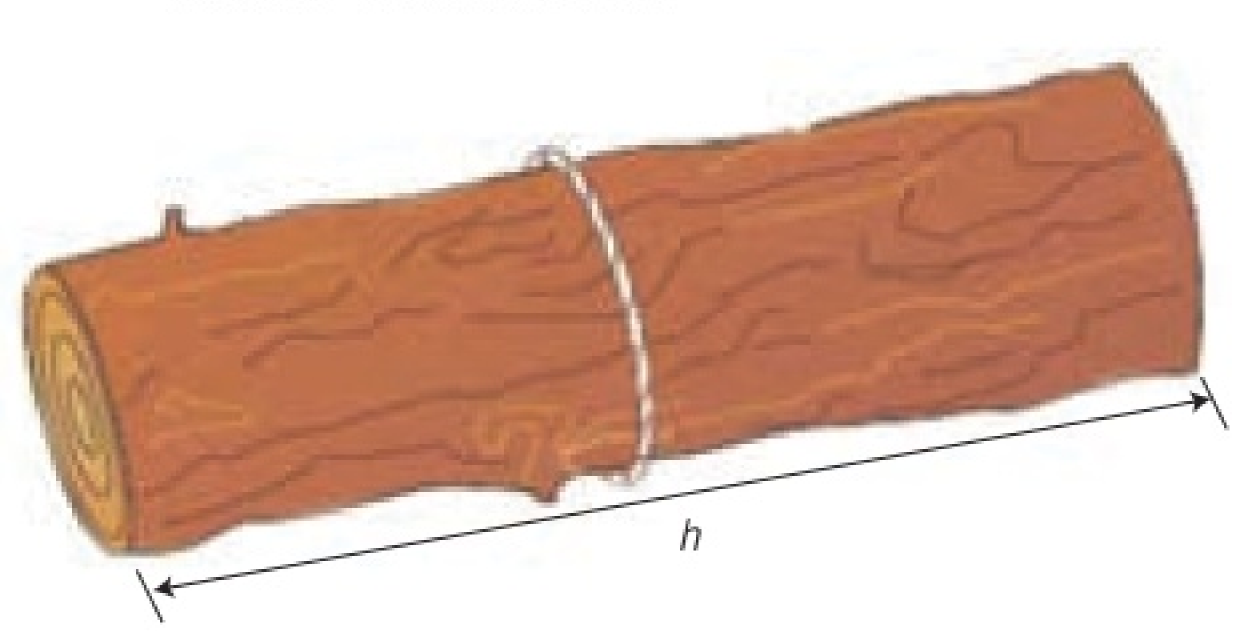
CIÊNCIA HOJE DAS CRIANÇAS. FNDE;
Instituto Ciência Hoje, ano 19, n. 166, mar. 1996.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro. A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize $\pi = 3$):

a) 20 mL.
b) 24 mL.
→ c) 100 mL.
d) 120 mL.
e) 600 mL.

3 (Enem) Em muitas regiões do Estado do Amazonas, o volume de madeira de uma árvore cortada é avaliado de acordo com uma prática dessas regiões:

I. Dá-se uma volta completa em torno do tronco com um barbante.



II. O barbante é dobrado duas vezes pela ponta e, em seguida, seu comprimento é medido com fita métrica.


1ª dobra


2ª dobra

III. O valor obtido com essa medida é multiplicado por ele mesmo e depois multiplicado pelo comprimento do tronco. Esse é o volume estimado de madeira.

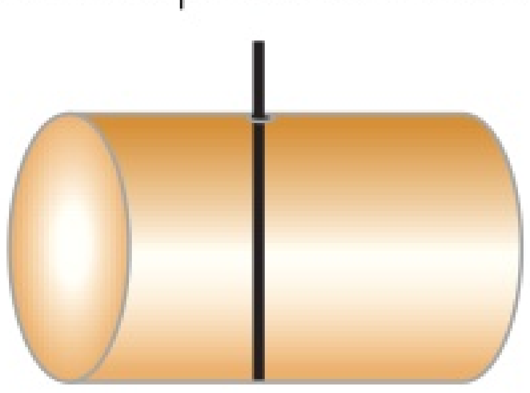
Outra estimativa pode ser obtida pelo cálculo formal do volume do tronco, considerando-o um cilindro perfeito.

A diferença entre essas medidas é praticamente equivalente às perdas de madeira no processo de corte para comercialização.

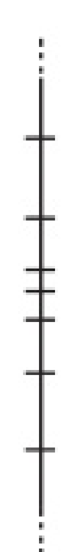
Pode-se afirmar que essas perdas são da ordem de:

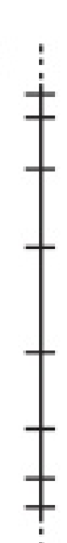
a) 30%.
→ b) 22%.
c) 15%.
d) 12%.
e) 5%.

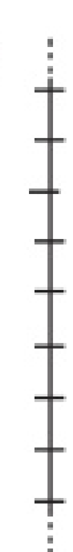
4 (Enem) Uma empresa de transporte armazena seu combustível em um reservatório cilíndrico enterrado horizontalmente. Seu conteúdo é medido com uma vara graduada em vinte intervalos, de modo que a distância entre duas graduações consecutivas representa sempre o mesmo volume.

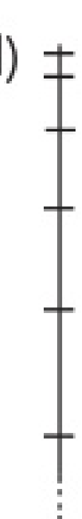


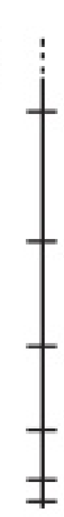
A ilustração que melhor representa a distribuição das graduações na vara é:

→ a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

AULA 9

Competência 2 Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

Habilidade 9 Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

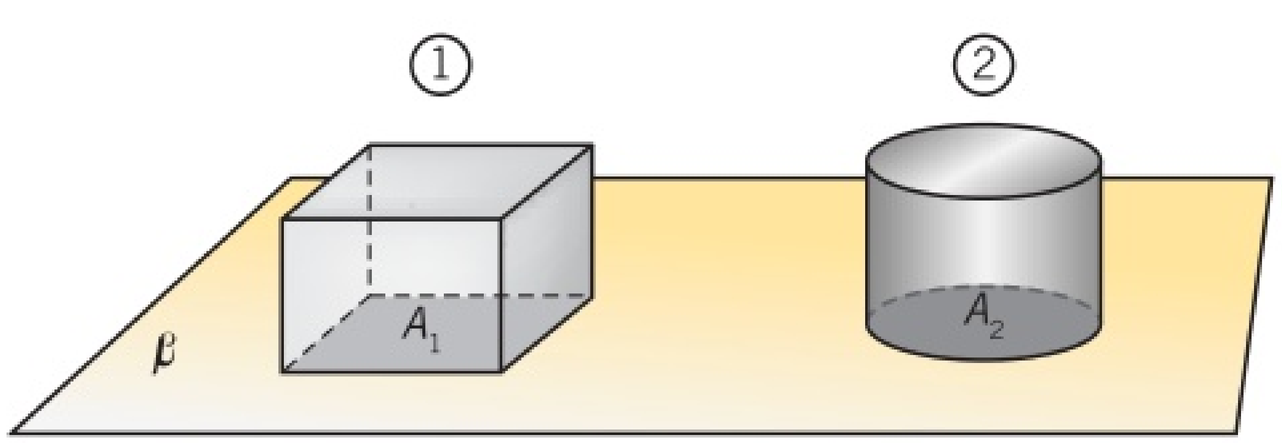
Em classe

COMPARAÇÃO DE VOLUMES

Utilizando o cálculo de volumes de sólidos, é possível comparar preços de produtos com diferentes embalagens (retangulares, cilíndricas, cônicas, etc.), maximizar o volume para uma determinada quantidade de material (papelão, alumínio, lata) para a fabricação de embalagens, e determinar a melhor forma para o acondicionamento de determinados produtos. Além disso, há uma infinidade de aplicações na engenharia e no nosso cotidiano.

Nesta aula, faremos exercícios mostrando como isso é possível, utilizando os conhecimentos de cálculos de volumes de sólidos e áreas de superfícies.

1 (Enem) Em uma padaria, há dois tipos de forma de bolo, formas **1** e **2**, como mostra a figura abaixo.



Sejam L o lado da base da forma quadrada, r o raio da base da forma redonda, A_1 e A_2 as áreas das bases das formas **1** e **2**, e V_1 e V_2 os seus volumes, respectivamente. Se as formas têm a mesma altura h, para que elas comportem a mesma quantidade de massa de bolo, qual é a relação entre r e L?

a) $L = r$

b) $L = 2r$

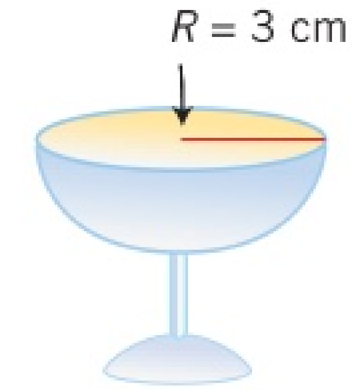
c) $L = \pi r$

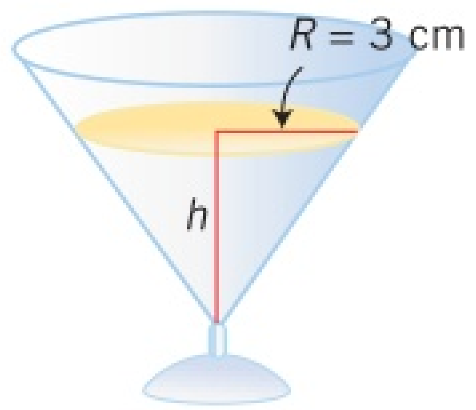
→ d) $L = r\sqrt{\pi}$

e) $L = \dfrac{(\pi r^2)}{2}$

De $A_1 = L^2$ e $A_2 = \pi r^2$ e $A_1h = A_2h$, temos $L^2 = \pi r^2$ e, portanto, $L = r\sqrt{\pi}$.

2 (Enem) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.





Considere: $V_{esfera} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ e $V_{cone} = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de:

a) 1,33.

→ b) 6,00.

c) 12,00.

d) 56,52.

e) 113,04.

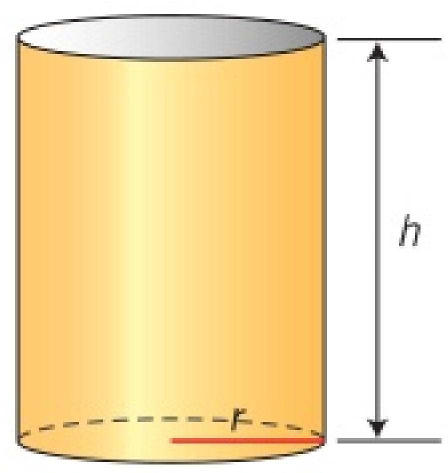
O volume V_1, em cm³, do champanhe servido na taça representada na figura 1 é igual a $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 3^3$, ou seja, 18π. Na taça representada pela figura 2, o volume V_2, em cm³, do champanhe é igual a $\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot h$, em que h é a medida da altura pedida, em cm. Do enunciado, devemos ter $18\pi = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot h$, ou seja, $h = 6$.

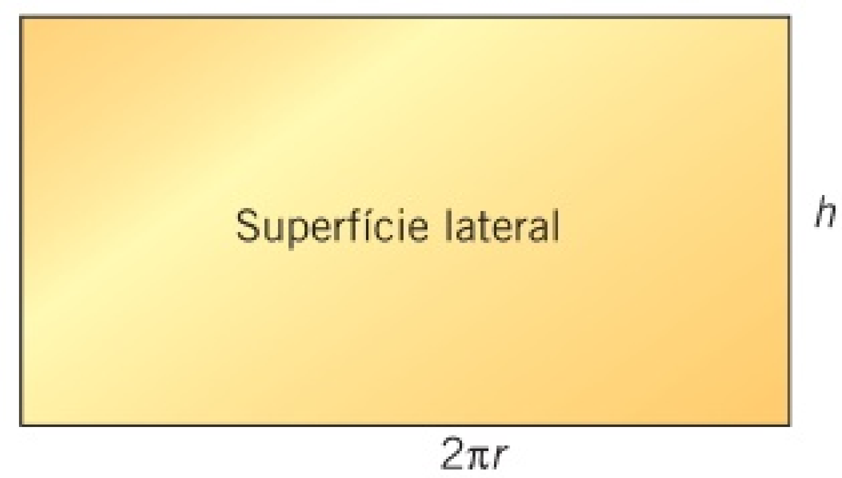
Em casa

TEXTO DE APOIO

Área da superfície lateral

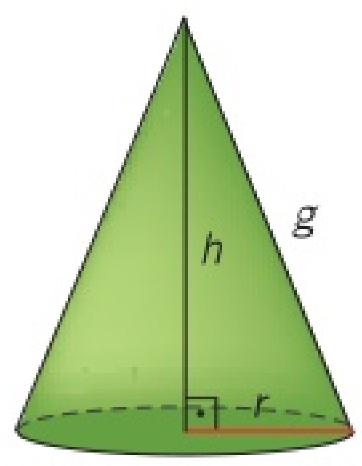
Cilindro circular reto (ou cilindro de revolução)

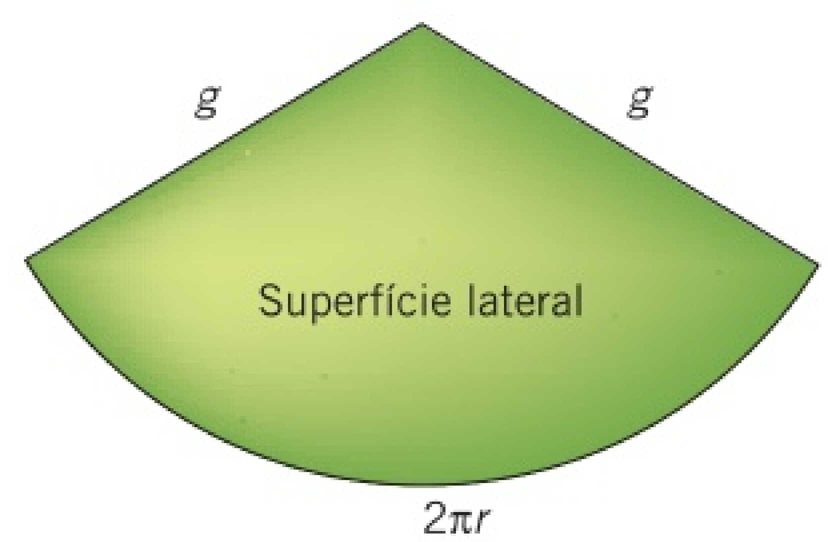




$A_L = 2\pi rh$

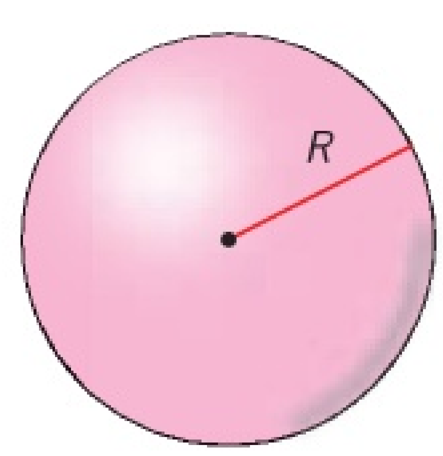
Cone circular reto (ou cone de revolução)





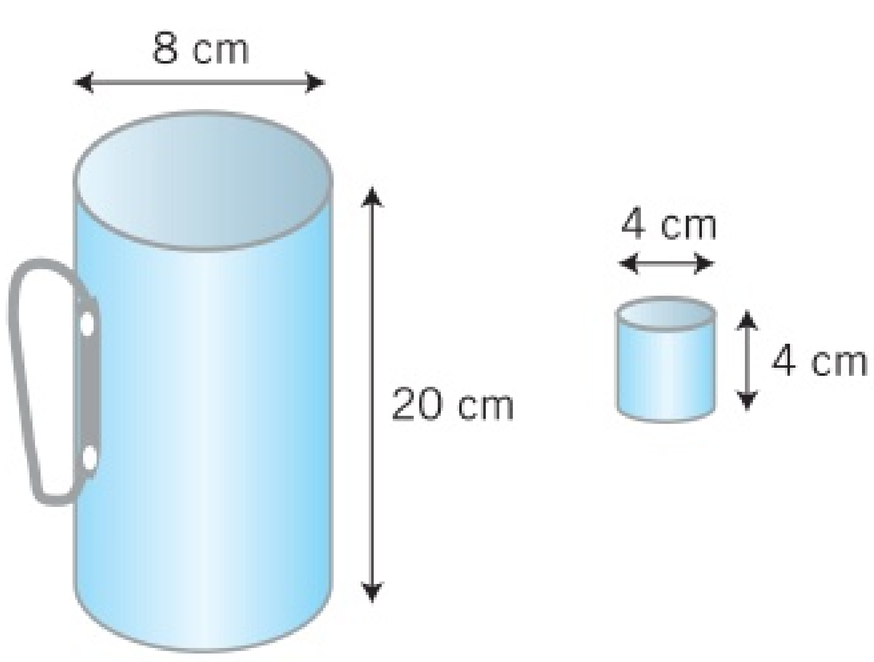
$A_L = \pi rg$

Superfície esférica



$A = 4\pi R^2$

1 (Enem) Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos:



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá:

→ a) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

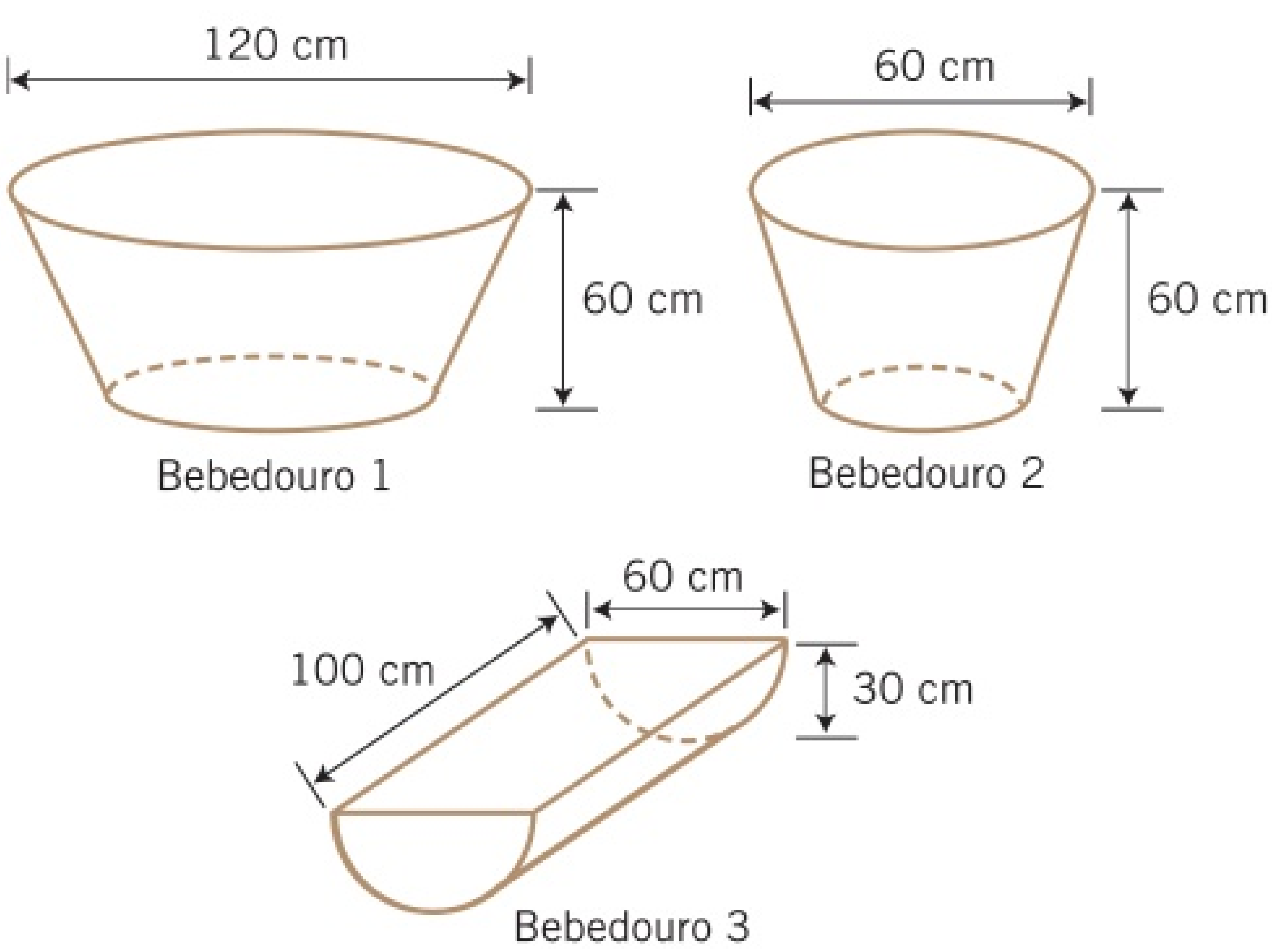
b) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

c) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

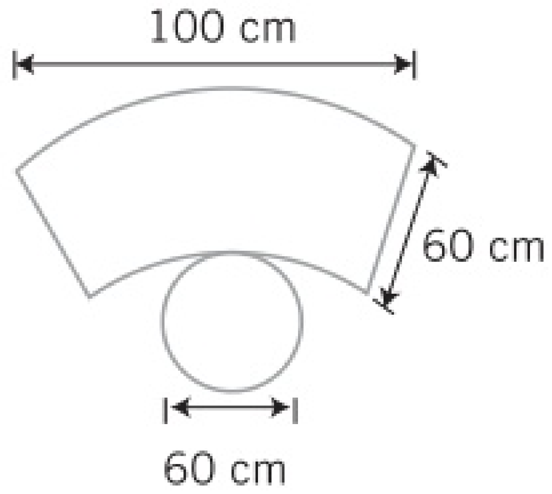
d) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

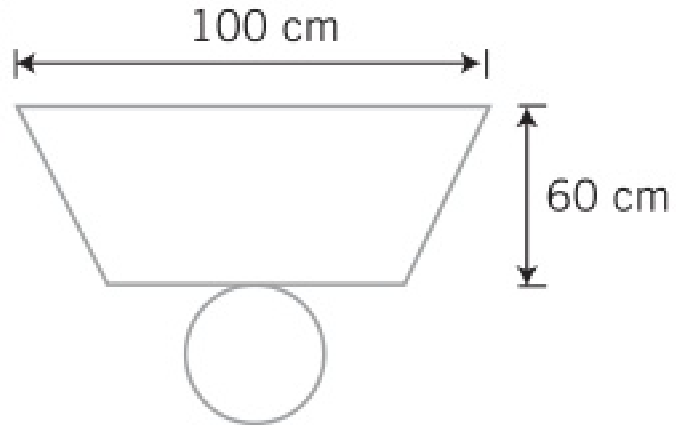
e) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

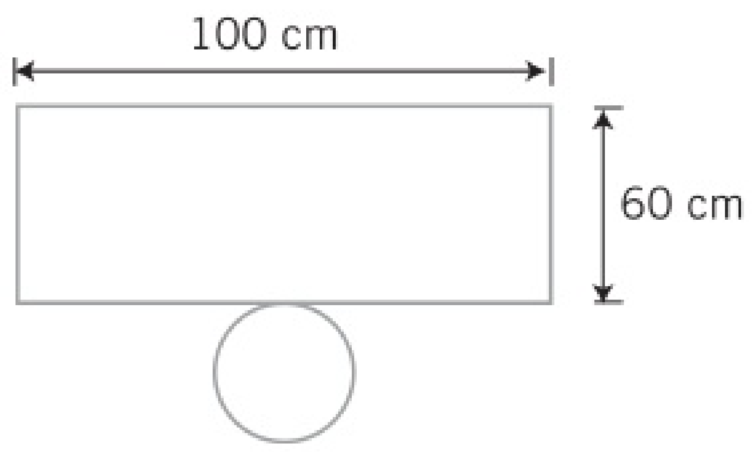
2 (Enem) Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.

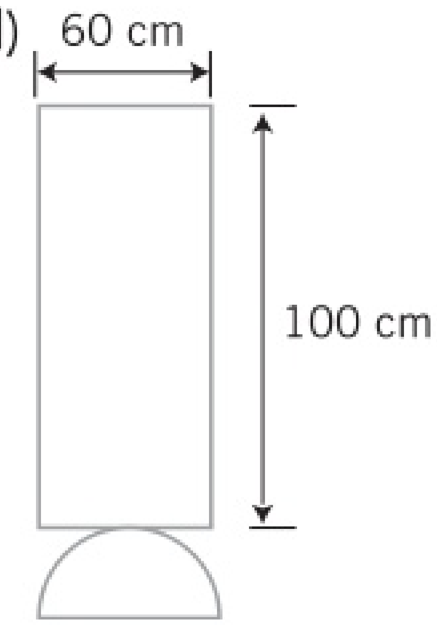


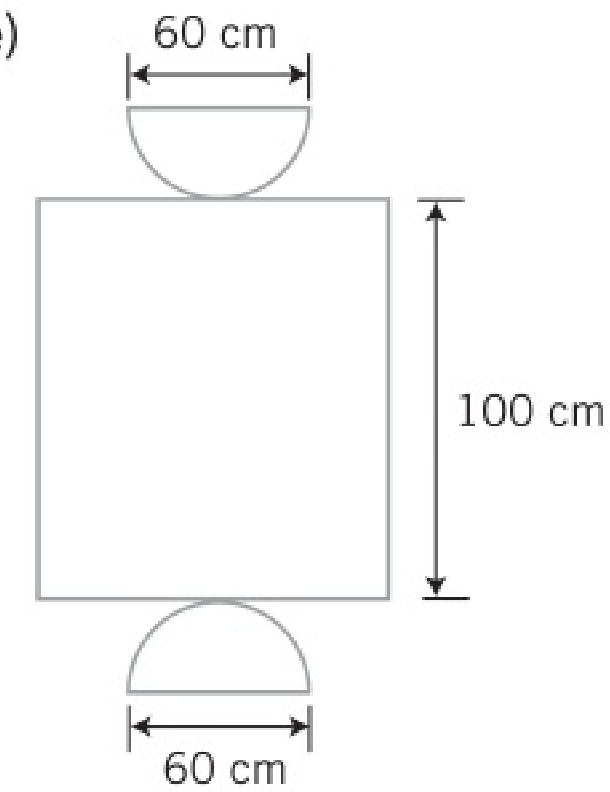
Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?

a)


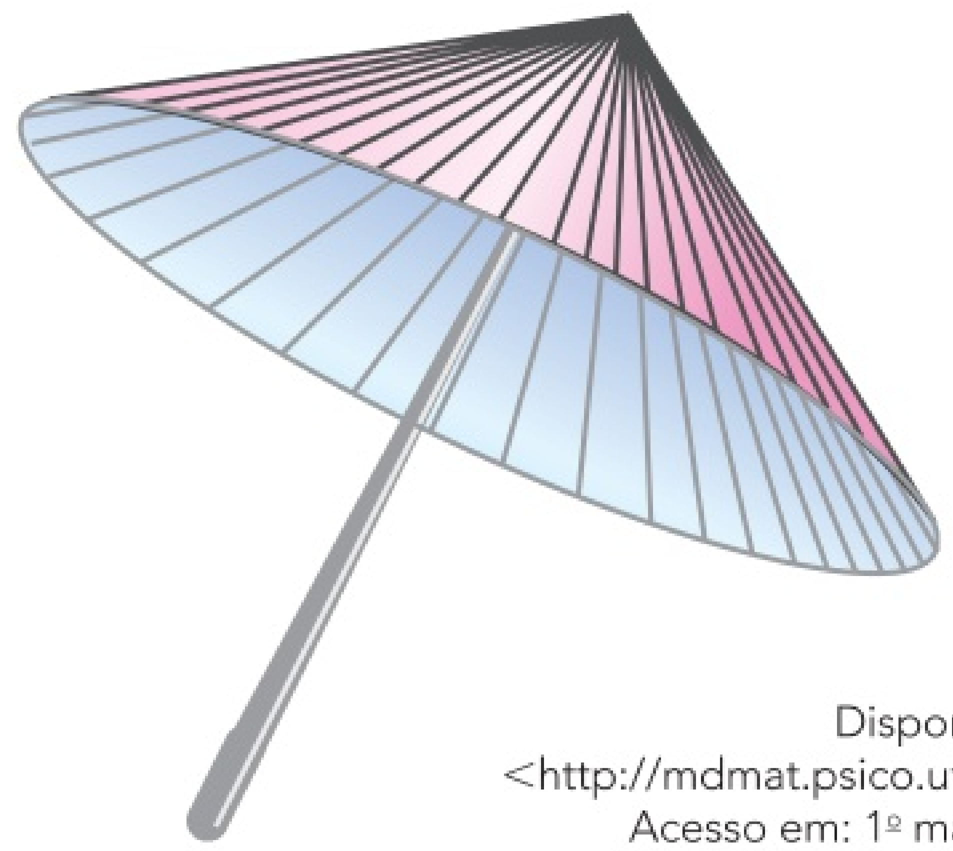
b)


c)


d)


→ e)


3 (Enem) A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.



Disponível em:
<http://mdmat.psico.ufrgs.br>.
Acesso em: 1º maio 2010.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de:

a) pirâmide.
b) semiesfera.
c) cilindro.
d) tronco de cone.
→ e) cone.

Anotações

AULA 10

Competência 3 Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade 10 Identificar relações entre grandezas e unidades de medidas.

Em classe

GRANDEZAS E MEDIDAS

Relacionar grandezas através de suas medidas é fundamental para diversas áreas do conhecimento, não só em Matemática.

Veremos, no exemplo a seguir, como duas grandezas podem ser relacionadas e, a partir disso, como inferir afirmações sobre um problema.

Perceba que há duas unidades para medir o volume de um sólido: o litro (L) e a unidade cúbica de comprimento (m^3, cm^3, ...). É usual conhecer que 1000 L correspondem a 1 m^3 ou que 1 cm^3 corresponde a 0,001 L.

Pedrinho tem muito orgulho da piscina que ele mandou construir e que acabara de ser enchida com água do poço; ele não sabe quantos litros foram necessários.

De qualquer modo, ele colocou na água 300 g de um produto a base de cloro. Após alguns dias, ele verificou que a concentração era de 0,004 g/L. Ele pôde concluir que o volume de água em metros cúbicos era:

a) 60. b) 72. c) 75. d) 96. e) 120.

© BIRF

Resolução:

0,004 g ——— 1 L
300 g ——— x L

$$x = \frac{300 \cdot 1}{0{,}004} \Rightarrow x = 75\,000 \text{ (litros)}$$

75 000 litros correspondem a 75 m^3.

Resposta: alternativa **c**.

1 (Enem)

Uma resolução do Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) estabeleceu a obrigatoriedade de adição de biodiesel ao óleo *diesel* comercializado nos postos. A exigência é que, a partir de 1º de julho de 2009, 4% do volume da mistura final seja formada por biodiesel. Até junho de 2009, esse percentual era de 3%. Essa medida estimula a demanda de biodiesel, bem como possibilita a redução da importação de *diesel* de petróleo.

Disponível em: <www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 12 jul. 2009. Adaptado.

Estimativas indicam que, com a adição de 4% de biodiesel ao *diesel*, serão consumidos 925 milhões de litros de biodiesel no segundo semestre de 2009. Considerando-se essa estimativa, para o mesmo volume da mistura final *diesel*/biodiesel consumida no segundo semestre de 2009, qual seria o consumo de biodiesel com a adição de 3%?

a) 27,75 milhões de litros
b) 37,00 milhões de litros
c) 231,25 milhões de litros
→ d) 693,75 milhões de litros
e) 888,00 milhões de litros

Sendo T o total de consumo da mistura, em milhões de litros, temos:

$925 = 0{,}04T \Rightarrow T = \frac{925}{0{,}04}$

Caso a mistura tivesse 3% do combustível, o consumo de biodiesel, em milhões de litros, seria:

$0{,}03 \cdot T = 0{,}03 \cdot \frac{925}{0{,}04} = 693{,}75$,

ou seja, 693,75 milhões de litros.

2 (Enem)

A cisterna é um recipiente utilizado para armazenar água da chuva. Os principais critérios a serem observados para captação e armazenagem de água da chuva são: a demanda diária de água na propriedade; o índice médio de precipitação (chuva), por região, em cada período do ano; o tempo necessário para armazenagem; e a área de telhado necessária ou disponível para captação. Para fazer o cálculo do volume de uma cisterna, deve-se acrescentar um adicional relativo ao coeficiente de evaporação. Na dificuldade em se estabelecer um coeficiente confiável, a Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa) sugere que sejam adicionados 10% ao volume calculado de água.

Desse modo, o volume, em m³, de uma cisterna é calculado por $V_c = V_d \cdot N_{dia}$, em que V_d = volume de demanda da água diária (m³), N_{dia} = número de dias de armazenagem, e este resultado deve ser acrescido de 10%.

Para melhorar a qualidade da água, recomenda-se que a captação seja feita somente nos telhados das edificações. Considerando que a precipitação de chuva de 1 mm sobre uma área de 1 m² produz 1 litro de água, pode-se calcular a área de um telhado a fim de atender a necessidade de armazenagem da seguinte maneira: área do telhado (em m²) = volume da cisterna (em litros)/precipitação.

Disponível em: <www.cnpsa.embrapa.br>.
Acesso em: 8 jun. 2009. Adaptado.

Para atender a uma demanda diária de 2 000 litros de água, com período de armazenagem de 15 dias e precipitação média de 110 mm, o telhado, retangular, deverá ter as dimensões mínimas de:

a) 6 metros por 5 metros, pois assim teria uma área de 30 m².

→ b) 15 metros por 20 metros, pois assim teria uma área de 300 m².

c) 50 metros por 60 metros, pois assim teria uma área de 3 000 m².

d) 91 metros por 30 metros, pois assim teria uma área de 2 730 m².

e) 110 metros por 30 metros, pois assim teria uma área de 3 300 m².

Do enunciado temos:
O volume V_d de demanda de água é tal que V_d = 2 000 L = 2 m³.
O número de dias N_d para armazenagem é tal que $N_d = 15$.
Logo, o volume V_c da cisterna é dado por:
$V_c = (V_d \cdot N_d) \cdot 1{,}1 \Rightarrow V_c = (2 \cdot 15) \cdot 1{,}1 \Rightarrow V_c = 33 \text{ m}^3 = 33\,000 \text{ L}$
Com a precipitação de 110 mm, a área do telhado, de acordo com o enunciado é dada por $\frac{33\,000}{110} = 300 \text{ m}^2$.
Dentre as alternativas, a única que apresenta dimensões de um telhado cuja área é 300 m² é a **b**.

Em casa

TEXTO DE APOIO

Para saber se um número é um dos divisores de um inteiro *N*, efetua-se a divisão de *N* por esse número e verifica-se o resto zero. Veja, a seguir, os conjuntos dos divisores (positivos) de:

a) 12: {1, 2, 3, 4, 6, 12}

b) 16: {1, 2, 4, 8, 16}

Note-se que nesses dois conjuntos existem os números comuns 1, 2 e 4. O maior desses números comuns é chamado de maior divisor comum e é representado por mdc (12, 16) = 4. Perceba ainda que, dizer que 4 é um divisor de 12 é equivalente a dizer que 12 é múltiplo de 4.

O conceito de máximo divisor comum está relacionado, entre outros, a problemas que envolvam minimizar quantidade de materiais que revestirão uma certa superfície, como no exemplo abaixo:

Deseja-se revestir uma sala retangular com dimensões 1 m e 1,25 m com lajotas quadradas, todas do mesmo tamanho e inteiras. Determine as possíveis medidas dos lados dessas lajotas, em cm.

Note-se que, ao resolver esse problema, a medida do lado de cada lajota tem de ser um divisor comum entre 100 cm e 125 cm. Os divisores de cada número são:

100: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100

125: 1, 5, 25, 125

Assim, os divisores comuns são 1, 5 e 25, e as medidas possíveis são 1 cm, 5 cm e 25 cm.

Se quiser gastar a menor quantidade possível de lajotas, cada lajota deverá ter o maior tamanho possível, ou seja, seu lado deverá ser o maior divisor comum entre 100 e 125 cm. O mdc (100, 125) = 25 é a medida do lado da maior lajota possível.

1 (Enem) Em uma certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

Terreno 1 → 55 m por 45 m

Terreno 2 → 55 m por 55 m

Terreno 3 → 60 m por 30 m

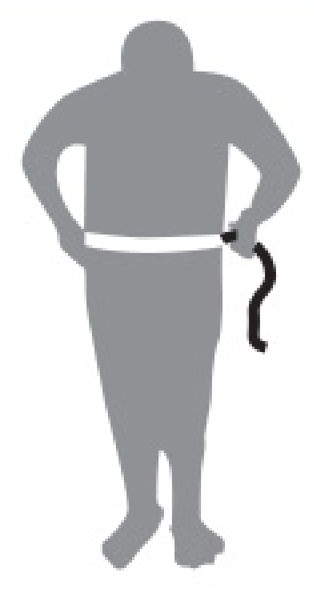
Terreno 4 → 70 m por 20 m

Terreno 5 → 95 m por 85 m

Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno:

a) 1.
b) 2.
→ c) 3.
d) 4.
e) 5.

2 (Enem) O Índice de Massa Corporal (IMC) é largamente utilizado há cerca de 200 anos, mas esse cálculo representa muito mais a corpulência que a adiposidade, uma vez que indivíduos musculosos e obesos podem apresentar o mesmo IMC. Uma nova pesquisa aponta o Índice de Adiposidade Corporal (IAC) como uma alternativa mais fidedigna para quantificar a gordura corporal, utilizando a medida do quadril e a altura. A figura mostra como calcular essas medidas, sabendo-se que, em mulheres, a adiposidade normal está entre 19% e 26%.

O velho IMC (Índice de Massa Corporal)	O novo IAC (Índice de Adiposidade Corporal)
	
$\text{Índice de Massa Corporal} = \dfrac{\text{massa (kg)}}{\text{altura} \cdot \text{altura}}$	$\%\ \text{de Gordura Corporal} = \dfrac{\text{circunferência do quadril (cm)}}{\text{altura} \cdot \sqrt{\text{altura}}\ \text{(m)}} - 18$

Disponível em: <www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 24 abr. 2011. Adaptado.

Uma jovem com IMC = 20 kg/m^2, 100 cm de circunferência dos quadris e 60 kg de massa corpórea resolveu averiguar seu IAC. Para se enquadrar aos níveis de normalidade de gordura corporal, a atitude adequada que essa jovem deve ter diante da nova medida é:

(Use $\sqrt{3} = 1{,}7$ e $\sqrt{1{,}7} = 1{,}3$.)

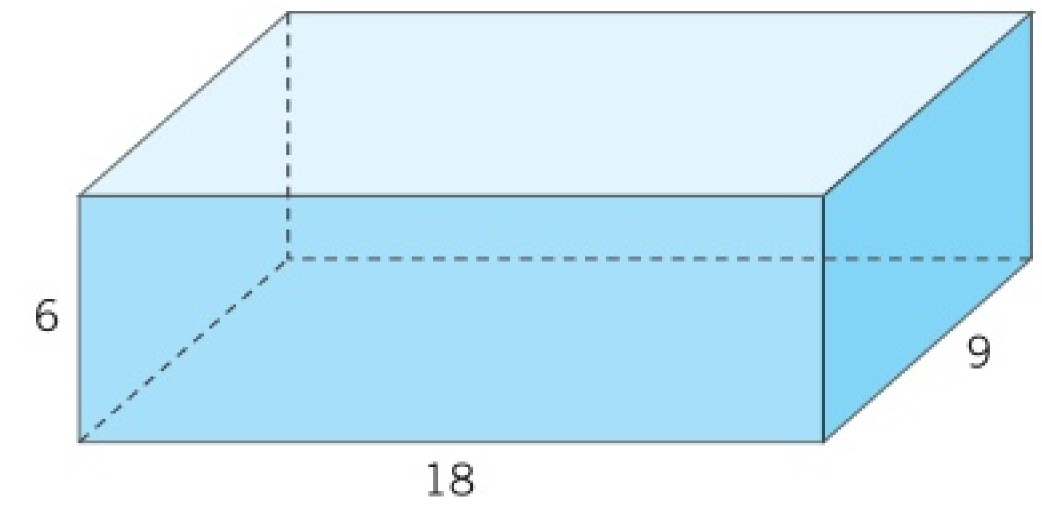
→ a) reduzir seu excesso de gordura em cerca de 1%.
b) reduzir seu excesso de gordura em cerca de 27%.
c) manter seus níveis atuais de gordura.
d) aumentar seu nível de gordura em cerca de 1%.
e) aumentar seu nível de gordura em cerca de 27%.

3 (Enem) Considere um caminhão que tenha uma carroceria na forma de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões internas são 5,1 m de comprimento, 2,1 m de largura e 2,1 m de altura. Suponha que esse caminhão foi contratado para transportar 240 caixas na forma de cubo com 1 m de aresta cada uma e que essas caixas podem ser empilhadas para o transporte.

Qual é o número mínimo de viagens necessárias para realizar esse transporte?

a) 10 viagens
b) 11 viagens
→ c) 12 viagens
d) 24 viagens
e) 27 viagens

4 (UPM-SP) Deseja-se preencher completamente o paralelepípedo retângulo da figura abaixo, com cubos iguais e de mesmo tamanho.



A medida da aresta do cubo que proporciona a menor quantidade de cubos é dada por:

a) 18.
b) 2.
c) 1.
d) 6.
→ e) 3.

Anotações

AULA 11

Competência 3 Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade 11 Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

Em classe

ESCALA – ÍNDICE PLUVIOMÉTRICO

Escalas (de redução e de ampliação)

Quando se quer fazer, por exemplo, o mapa de uma cidade, a planta de uma casa ou a miniatura de um avião, utiliza-se uma escala numérica, que é a razão entre a medida linear (comprimento) de um elemento qualquer do modelo que será elaborado (mapa, planta, miniatura) e a medida correspondente do real (cidade, casa, avião), ambas as medidas na mesma unidade. Essa razão é comumente indicada por dois-pontos, por exemplo 1 : 200.

Assim, se a planta de uma casa foi desenhada na escala 1 : 200, isso significa que cada unidade de medida na planta, por exemplo 1 cm, corresponde a 200 cm na casa.

No exemplo apresentado, temos uma escala de redução. No entanto, muitas vezes, queremos fazer uma ampliação, como ampliar em 10 vezes uma foto. Nesse caso, a escala será 10 : 1, ou seja, cada 10 unidades de medida da foto maior, por exemplo 10 cm, corresponderá a 1 cm da foto menor.

Deve-se observar que numa escala de redução ou mesmo de ampliação, ao escrevermos $a : b$, o primeiro número (a) corresponde ao protótipo, e o segundo número (b) corresponde ao real.

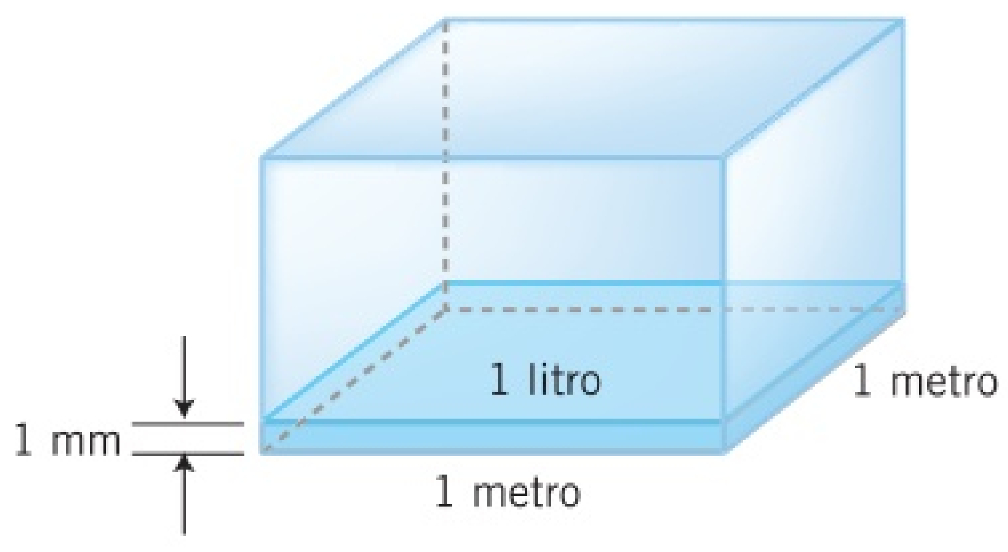
Notas:

1) A escala $a : b$ pode ser indicada por $\frac{a}{b}$.

2) A escala 1 : 1 reproduz o tamanho real.

Índice pluviométrico

Quando dizemos que numa determinada região a precipitação pluviométrica (chuva) foi de 1 mm (um milímetro), significa que a precipitação foi equivalente a 1 litro de água em cada metro quadrado de solo, ou seja, um litro de água dentro de uma região de um metro de comprimento por um metro de largura.



O **índice pluviométrico** é a medida em milímetros (mm) da quantidade da precipitação de água num determinado local durante um certo período.

Por exemplo, se numa região a precipitação pluviométrica (chuva) anual foi de 200 mm, significa que em um ano, nessa região, a quantidade da precipitação da água foi de 200 litros por metro quadrado, pois, como vimos, um milímetro corresponde a 1 litro em cada metro quadrado.

1 A planta de uma casa será desenhada na escala 1: 100. Se a sala da casa tem 8 m de comprimento, na planta esse comprimento deverá ser de:

a) 4 cm. b) 6 cm. → c) 8 cm. d) 80 cm. e) 0,8 cm.

A escala compara medidas na mesma unidade. É mais fácil compararmos em centímetros.
8 m = 800 cm
Sendo x o comprimento na planta, devemos ter:
$\frac{x}{800} = \frac{1}{100} \Rightarrow 100x = 800 \Rightarrow x = 8$ cm

2 (Enem) Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade *A*, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade *B*, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, *A* e *B*, era 8 cm. Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de:

a) 1:250. b) 1:2500. c) 1:25000. d) 1:250000. → e) 1:25000000.

A distância real e a distância no mapa devem ser comparadas na mesma unidade. Em centímetros fica mais fácil.
Real: 2000 km = 200000000 cm
Mapa: 8 cm
Logo:
$\frac{1}{x} = \frac{8}{200000000} \Rightarrow 8x = 200000000 \Rightarrow x = 25000000$
Portanto, a escala é 1: 25000000.

3 Numa região de 1,8 ha (hectare) foi registrado um índice pluviométrico anual de 300 mm. Se 1 ha = 10000 m^2, e lembrando que 1 m^3 = 1000 L, essa precipitação foi de:

a) 5,4 m^3. b) 54 m^3. c) 540 m^3. → d) 5400 m^3. e) 54000 m^3.

1,8 ha = $1{,}8 \cdot 10000 = 18000$ m^2
Como cada mm em 1 metro quadrado corresponde a 1 litro, então 300 mm em cada metro quadrado correspondem a 300 litros.
Como temos uma área de 18000 m^2, a precipitação pedida é dada por $18000 \cdot 300 = 5400000$ litros, ou seja, 5400 m^3.

Em casa

TEXTO DE APOIO

Unidades de medida

Introdução

Vamos, primeiramente, relembrar os prefixos. Isso facilitará bastante a memorização das relações entre as unidades.

Quilo: 1 000 (ou 10^3)	Mili: $\frac{1}{1\,000}$ (ou 10^{-3})
Hecto: 100 (ou 10^2)	Centi: $\frac{1}{100}$ (ou 10^{-2})
Deca: 10 (ou 10^1)	Deci: $\frac{1}{10}$ (ou 10^{-1})

Unidades de comprimento

Quilômetro (km) = 1 000 m
Hectômetro (hm) = 100 m
Decâmetro (dam) = 10 m
Metro (m)
Decímetro (dm) = 10^{-1} m
Centímetro (cm) = 10^{-2} m
Milímetro (mm) = 10^{-3} m
Como consequência, faz-se a conversão de unidades do seguinte modo:

$$\xrightarrow{\times 10}$$
$$\text{km} \quad \text{hm} \quad \text{dam} \quad \text{m} \quad \text{dm} \quad \text{cm} \quad \text{mm} \; ,$$
$$\xleftarrow{:\, 10}$$

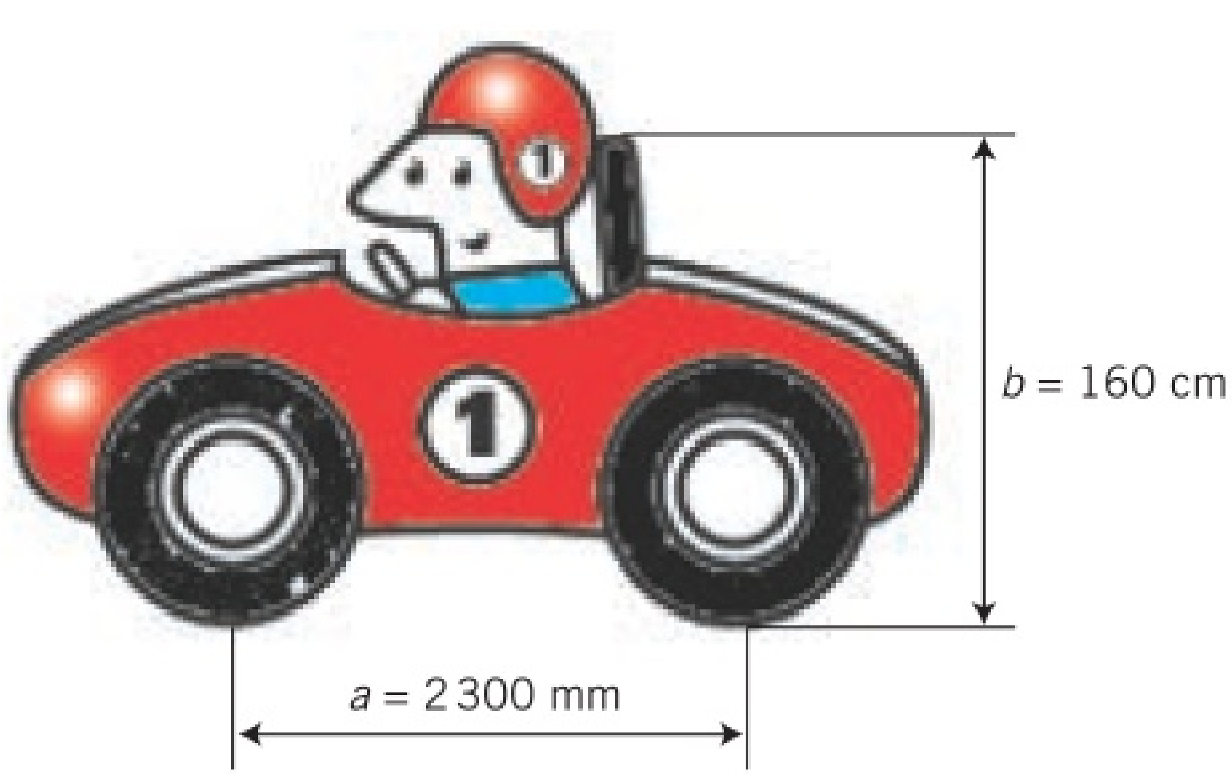
ou seja: para cada "passo" para a direita, multiplicamos por 10; e para cada "passo" para a esquerda, dividimos por 10.

Exemplos:
a) 2,3 m = 2,3 × 10 × 10 = 230 cm
b) 342 cm = 342 : 10 : 10 = 3,42 m

Nota: Quando um número é inteiro, a "vírgula" encontra-se imediatamente à sua direita. Assim: 342 = 342,0.

Exercício resolvido

(Enem) Um mecânico de uma equipe de corrida necessita que as seguintes medidas realizadas em um carro sejam obtidas em metros:
a) distância *a* entre os eixos dianteiro e traseiro;
b) altura *b* entre o solo e o encosto do piloto.



Ao optar pelas medidas *a* e *b* em metros, obtêm-se, respectivamente:

a) 0,23 e 0,16.
b) 2,3 e 1,6.
c) 23 e 16.
d) 230 e 160.
e) 2 300 e 1 600.

Resolução:
$a = 2\,300 \text{ mm} = 2\,300 : 10 : 10 : 10 = 2{,}3 \text{ m}$
$b = 160 \text{ cm} = 160 : 10 : 10 = 1{,}6 \text{ m}$
Resposta: alternativa **b**.

Unidades de área

$$\xrightarrow{\times 10^2}$$

$$\mathrm{km^2} \quad \mathrm{hm^2} \quad \mathrm{dam^2} \quad \mathrm{m^2} \quad \mathrm{dm^2} \quad \mathrm{cm^2} \quad \mathrm{mm^2}$$

$$\xleftarrow{:\,10^2}$$

Unidades de volume

$$\xrightarrow{\times 10^3}$$

$$\mathrm{km^3} \quad \mathrm{hm^3} \quad \mathrm{dam^3} \quad \mathrm{m^3} \quad \mathrm{dm^3} \quad \mathrm{cm^3} \quad \mathrm{mm^3}$$

$$\xleftarrow{:\,10^3}$$

Notas:
1 $\mathrm{dm^3}$ = 1 L (litro)
1 $\mathrm{cm^3}$ = 1 mL (mililitro)
Logo:
1 $\mathrm{m^3}$ = 10^3 $\mathrm{dm^3}$, ou seja, 1 $\mathrm{m^3}$ = 1 000 L
1 $\mathrm{dm^3}$ = 10^3 $\mathrm{cm^3}$, ou seja, 1 L = 1 000 mL
Observação: Não existe plural para os símbolos de unidades. Por exemplo, 10 quilômetros escrevemos 10 km, e não 10 kms.

Unidades de massa

As mais utilizadas em nosso dia a dia são:

Grama (g)
Quilograma (kg) = 1 000 g
Tonelada (t) = 1 000 kg

$$\xrightarrow{\times 10^3}$$

$$\mathrm{t} \qquad \mathrm{kg} \qquad \mathrm{g}$$

$$\xleftarrow{:\,10^3}$$

Unidades de tempo

A unidade fundamental de tempo é o segundo (s). Seus múltiplos usuais são:

Minuto (min) = 60 s
Hora (h) = 60 min = 60 × 60 = 3 600 s
Dia = 24 h = 24 × 60 × 60 = 86 400 s

$$\begin{tikzcd}
\text{dia} \arrow[r, bend left, "\times 24"] & \text{h} \arrow[l, bend left, ":\,24"] \arrow[r, bend left, "\times 60"] & \text{min} \arrow[l, bend left, ":\,60"] \arrow[r, bend left, "\times 60"] & \text{s} \arrow[l, bend left, ":\,60"]
\end{tikzcd}$$

Observação (cuidado!):

Como o sistema de medidas de tempo não é decimal, então, por exemplo, 8,3 h não quer dizer 8 h e 30 min nem 8 h e 3 min. Faz-se assim:
8,3 h = 8 h + 0,3 h =
= 8 h + 0,3 × 60 min (pois 1 h = 60 min) =
= 8 h e 18 min

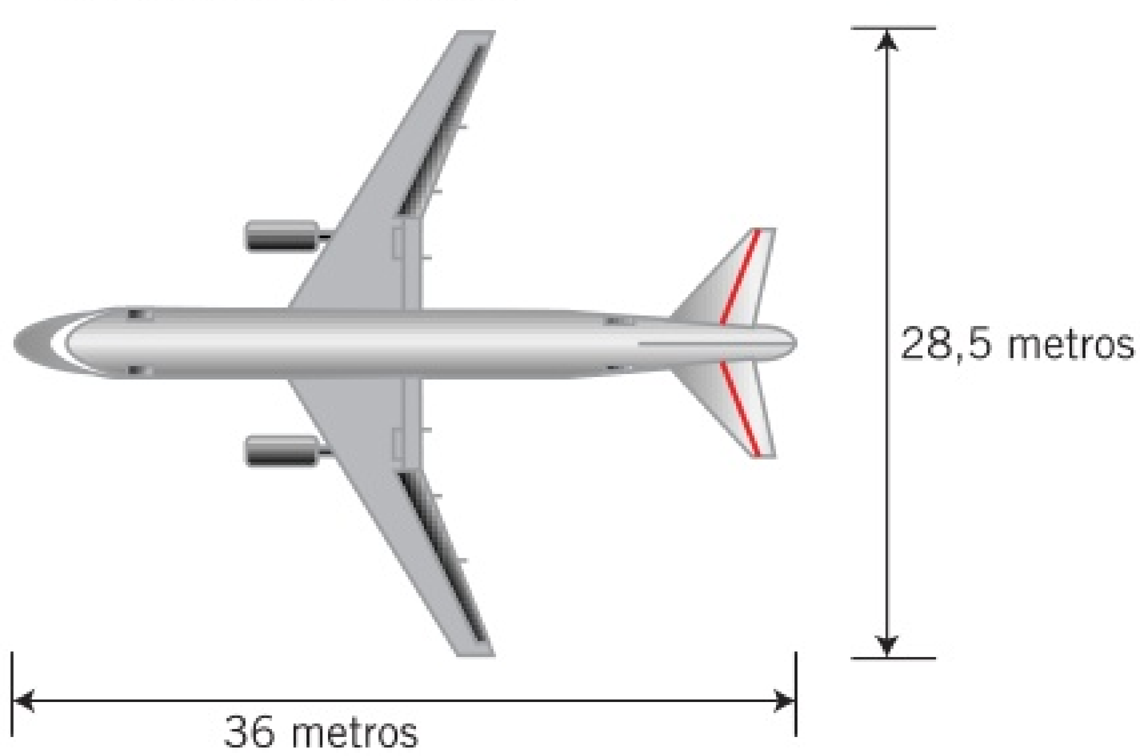
1 Uma garrafinha miniatura de um litro de uísque será feita na escala 1:4. Se a garrafa de uísque tem 32 cm de altura, qual será a altura da garrafinha?

a) 0,8 cm
b) 3,2 cm
c) 4 cm
d) 6 cm
→ e) 8 cm

2 Um mapa da cidade de São Paulo será feito na escala 1:10000. Se o comprimento de uma rua é 500 m, qual será seu comprimento no mapa?

a) 2 cm
b) 2,5 cm
c) 3 cm
d) 4,5 cm
→ e) 5 cm

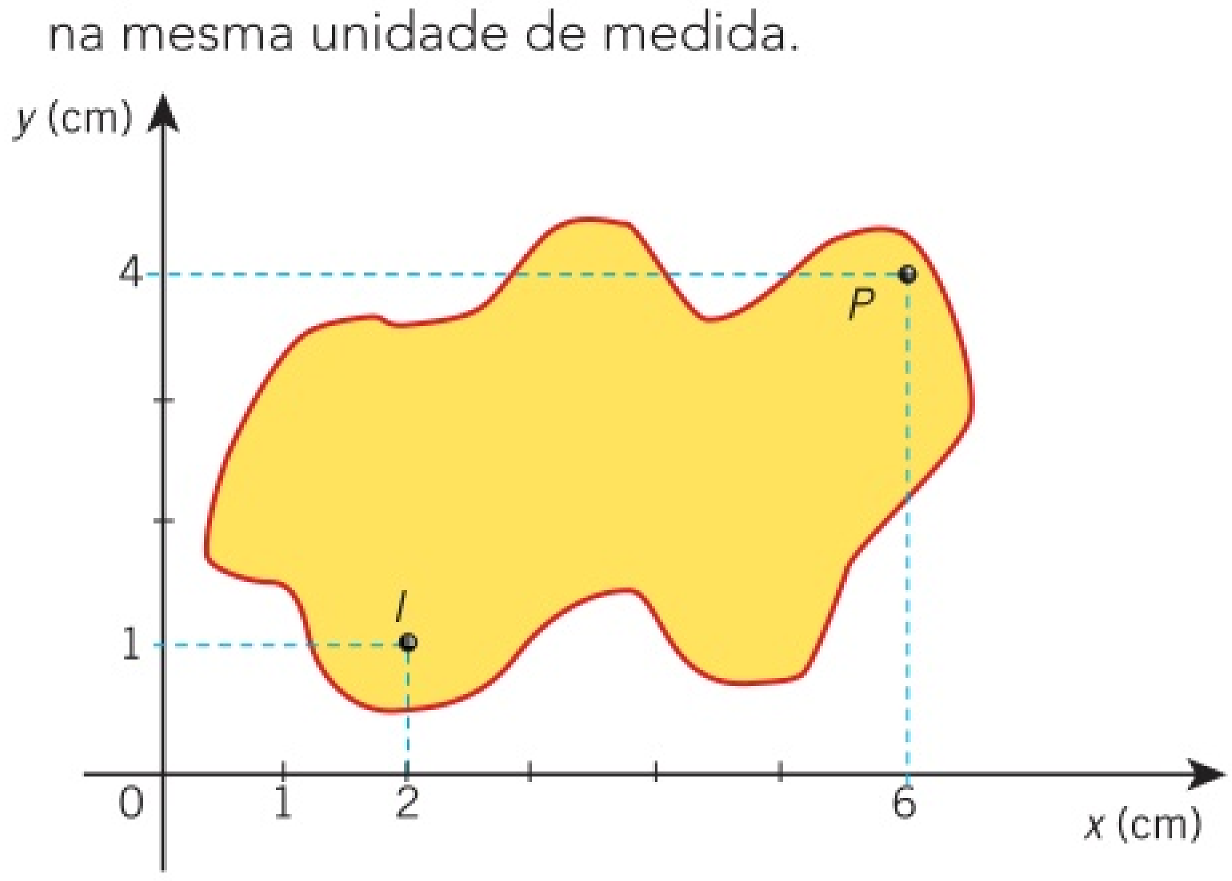
3 (Enem) A figura a seguir mostra as medidas reais de uma aeronave que será fabricada para utilização por companhias de transporte aéreo. Um engenheiro precisa fazer o desenho desse avião em escala de 1:150.



Para o engenheiro fazer esse desenho em uma folha de papel, deixando uma margem de 1 cm em relação às bordas da folha, quais as dimensões mínimas, em centímetros, que essa folha deverá ter?

a) 2,9 cm × 3,4 cm
b) 3,9 cm × 4,4 cm
c) 20 cm × 25 cm
→ d) 21 cm × 26 cm
e) 192 cm × 242 cm

4 O mapa de uma cidadezinha foi desenhado em um sistema cartesiano e utilizou-se escala 1:20000, isto é, um comprimento 1 no mapa corresponde a um comprimento 20000 na cidade, na mesma unidade de medida.



Qual é a distância entre a igreja *I* e o posto de combustível *P* na cidade se a unidade de medida no sistema cartesiano é o centímetro?

a) 100 m
b) 750 m
→ c) 1 km
d) 5 km
e) 10 km

5 (Enem)

No monte de Cerro Armazones, no deserto de Atacama, no Chile, ficará o maior telescópio da superfície terrestre, o Telescópio Europeu Extremamente Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de 42 m de diâmetro, "o maior olho do mundo voltado para o céu".

Disponível em: <www.estadao.com.br>. Acesso em: 27 abr. 2010. Adaptado.

Ao ler esse texto em uma sala de aula, uma professora fez uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede aproximadamente 2,1 cm.

Qual a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?

a) 1:20
b) 1:100
c) 1:200
d) 1:1000
→ e) 1:2000

6 Uma fábrica de bolas de basquete pretende fazer uma réplica em tamanho grande de um de seus modelos de bola, para ser exposta em um estádio. Se a bola tem diâmetro de 24 cm, qual será a medida do diâmetro da réplica se for utilizada a escala 50:1?

a) 0,12 m
b) 1,2 m
→ c) 12 m
d) 4,8 m
e) 48 m

7 Numa região do interior do Paraná foi registrado, num determinado período, um índice de 80 mm de precipitação pluviométrica. Se essa região tem uma área de 1 km^2, de quantos metros cúbicos foi essa precipitação?

→ a) 80000
b) 8000
c) 800
d) 80
e) 8

8 Numa pequena cidade foi registrado um índice pluviométrico médio mensal de 50 mm. Se a média mensal de precipitação foi de 4500 m^3 de água, a área dessa região é:

a) 9000 m^2.
→ b) 90000 m^2.
c) 900000 m^2.
d) 9 km^2.
e) 90 km^2.

AULA 12

Competência 3 Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade 12 Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

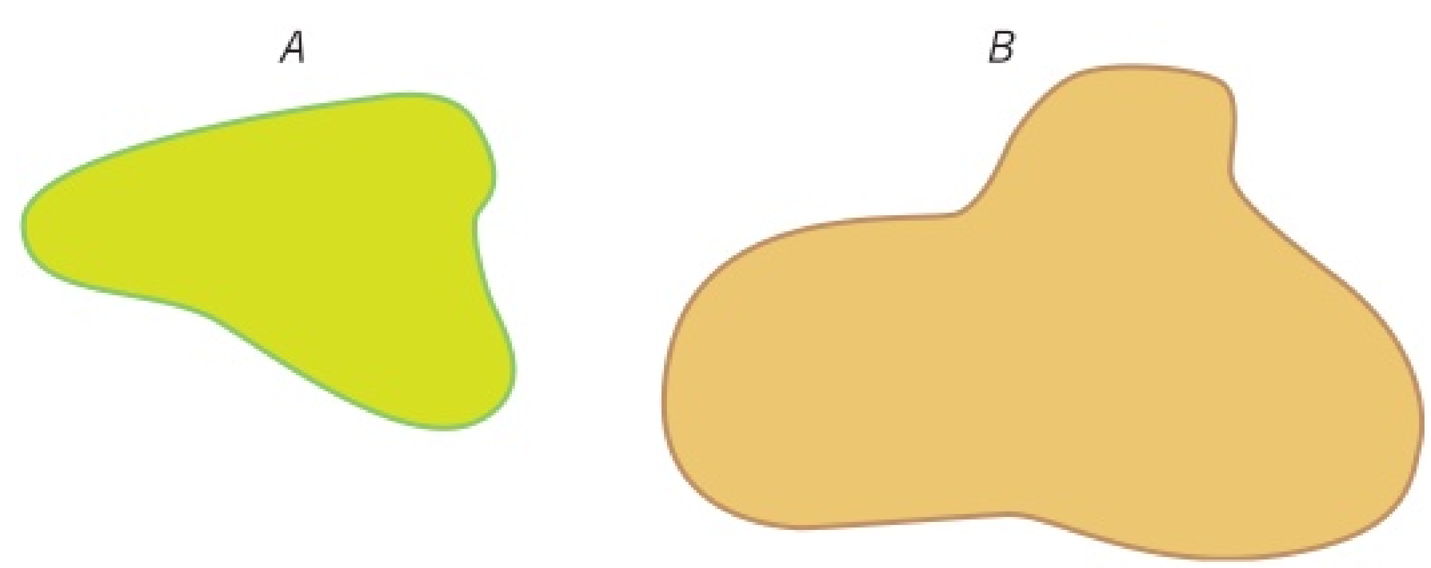
Em classe

ÁREAS

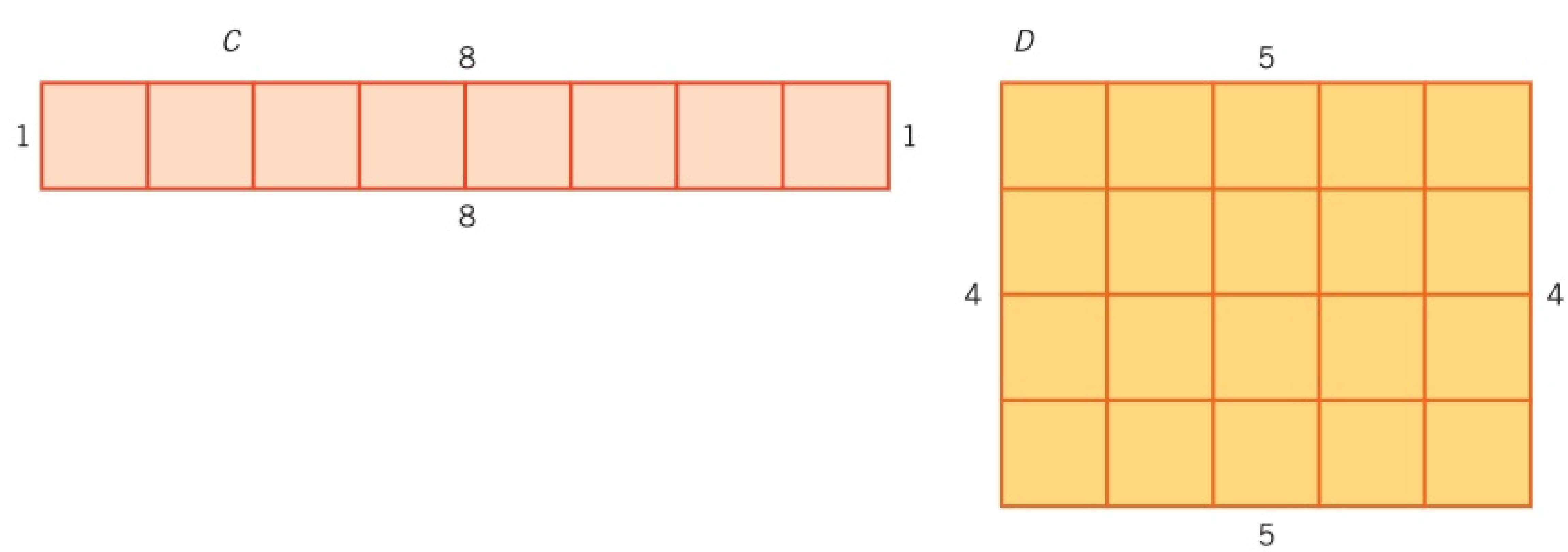
Introdução

O que é área de uma figura plana?

Considere as figuras A e B.



Percebe-se claramente que o tamanho da figura A é menor que o tamanho da figura B. E como poderíamos calcular esses tamanhos? Considere agora os retângulos C e D, em que as medidas assinaladas estão em centímetros.



Percebe-se, claramente também, que o tamanho do retângulo C é menor que o tamanho do retângulo D, embora eles tenham perímetros (somas das medidas dos lados) iguais a 18 cm, ou seja:

- Perímetro de C: $8 + 8 + 1 + 1 = 18$ cm;
- Perímetro de D: $5 + 5 + 4 + 4 = 18$ cm.

Já deu para perceber que não existe uma relação entre o tamanho e o perímetro.

Mas, afinal, como calcular os tamanhos de C e D?

Podemos fazer o seguinte:

O retângulo C é formado por 8 quadradinhos de lado 1 cm (observe que $8 \times 1 = 8$).

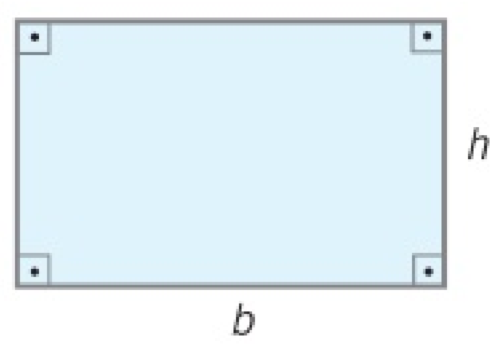
O retângulo D é formado por 20 quadradinhos de lado 1 cm (observe que $20 = 5 \times 4$).

Poderíamos dizer, então, que os tamanhos de C e D são 8 e 20, ou seja, números que indicam quantos quadradinhos de lados 1 cm "cabem" neles.

O assunto que estudaremos agora é área, que é a medida do "tamanho" de uma figura plana.

Cálculo de áreas

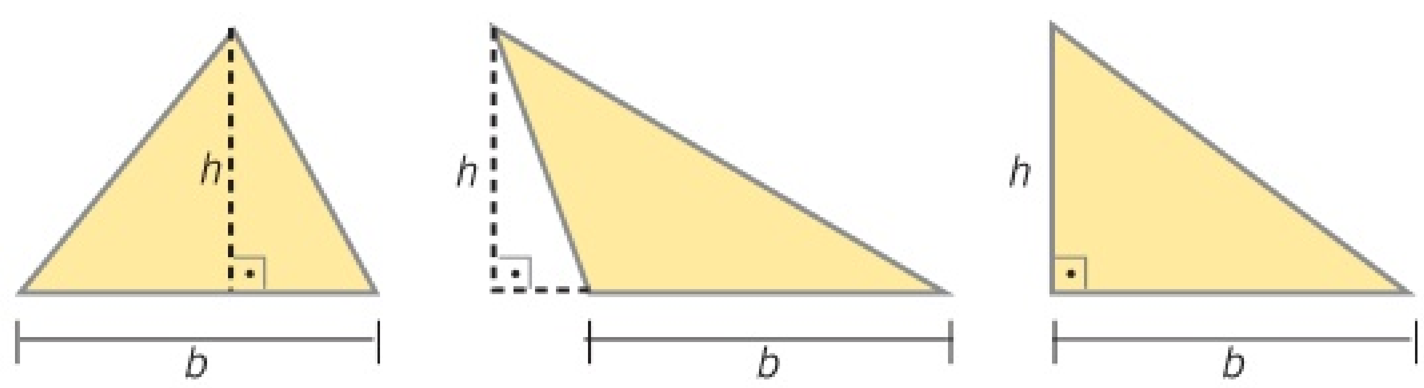
Retângulo



$$\boxed{A = b \cdot h}$$

b = medida da base
h = medida da altura

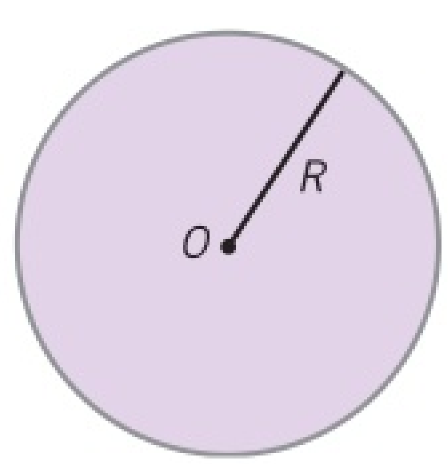
Triângulo



$$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h}$$

b = medida da base
h = medida da altura

Círculo



$$\boxed{A = \pi R^2}$$

$\pi = 3{,}14$ (valor aproximado)

1 (Enem) O governo cedeu terrenos para que famílias construíssem suas residências com a condição de que no mínimo 94% da área do terreno fossem mantidos como área de preservação ambiental. Ao receber o terreno retangular $ABCD$, em que $AB = \frac{BC}{2}$, Antônio demarcou uma área quadrada no vértice A, para a construção de sua residência, de acordo com o desenho, no qual $AE = \frac{AB}{5}$ é lado do quadrado.

Nesse caso, a área definida por Antônio atingiria exatamente o limite determinado pela condição se ele:

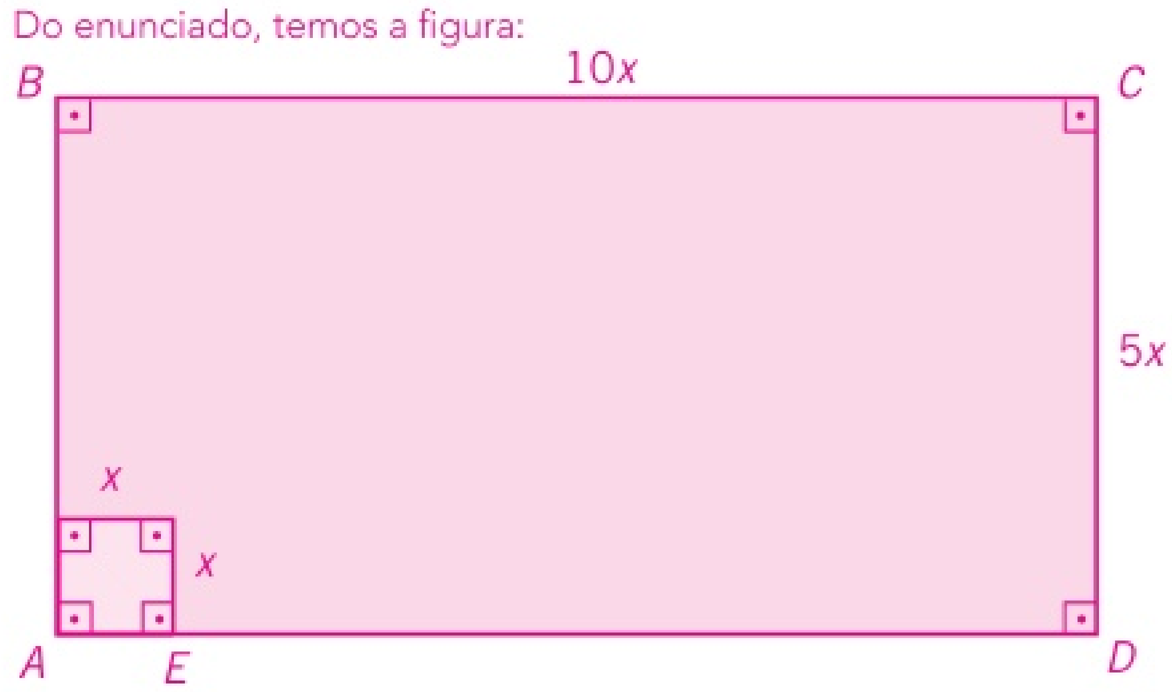
a) duplicasse a medida do lado do quadrado.
b) triplicasse a medida do lado do quadrado.

→ c) triplicasse a área do quadrado.

d) ampliasse a medida do lado do quadrado em 4%.

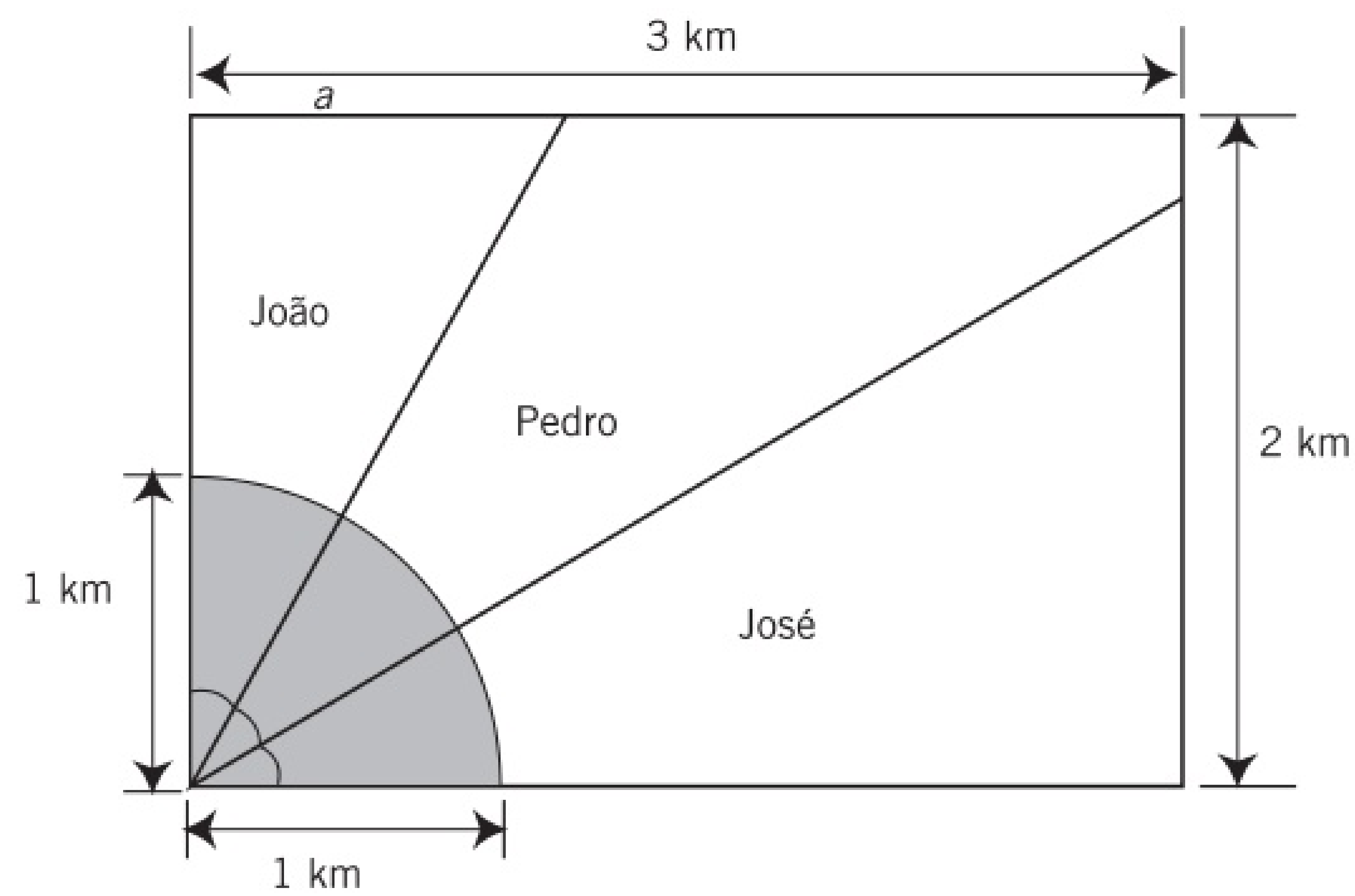
e) ampliasse a área do quadrado em 4%.

Do enunciado, temos a figura:



Sendo ℓ a medida-limite do lado do quadrado, pela condição do enunciado, temos:
$\ell^2 = 0{,}06 \cdot 5x \cdot 10x \Rightarrow \ell^2 = 3x^2$

2 (Enem) Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km × 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.

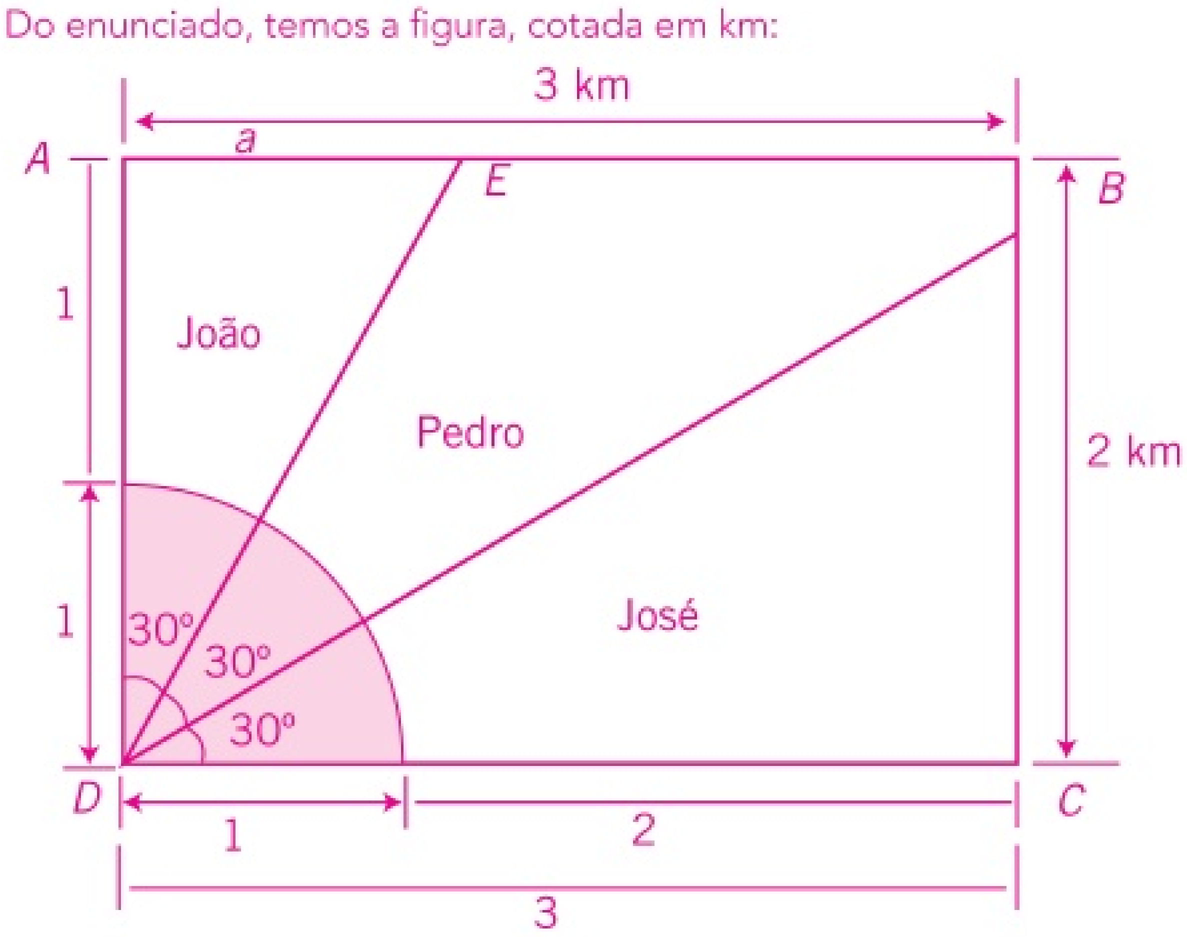


Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a:

$\left(\text{Considere } \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58.\right)$

a) 50%. b) 43%. c) 37%. d) 33%. → e) 19%.

Do enunciado, temos a figura, cotada em km:



No ΔADE, temos:

$\text{tg } 30° = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{2} \Rightarrow 0{,}58 = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 1{,}16$

Sendo S a área do terreno que coube a João, em km², temos:

$S = \frac{1{,}16 \cdot 2}{2} \Rightarrow S = 1{,}16$

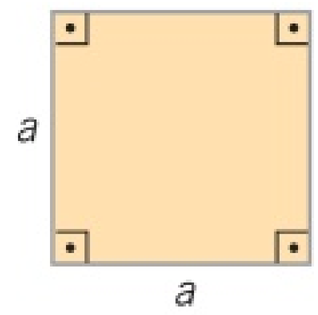
Como $\frac{1{,}16}{(2 \cdot 3)} = 0{,}19$, a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde a aproximadamente 19%.

Em casa

TEXTO DE APOIO

Áreas

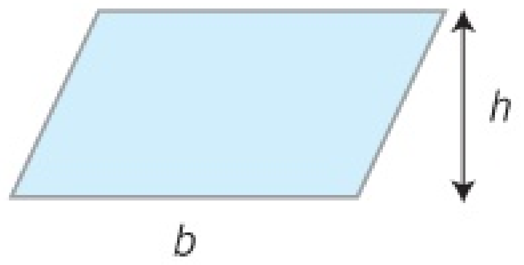
Quadrado



$\boxed{A = a^2}$

a = medida do lado

Paralelogramo



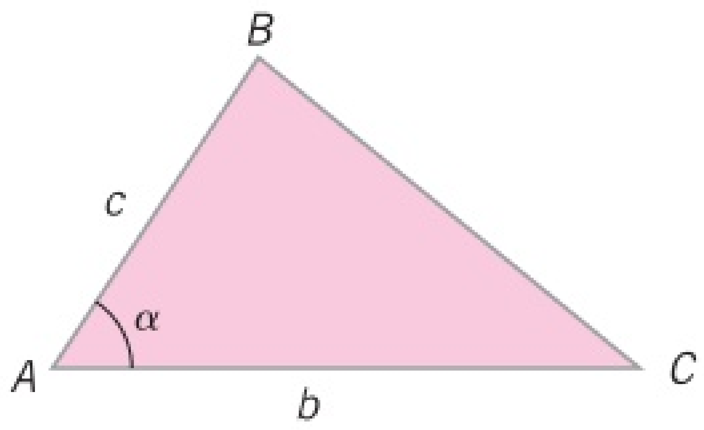
$\boxed{A = b \cdot h}$

b = medida da base
h = medida da altura

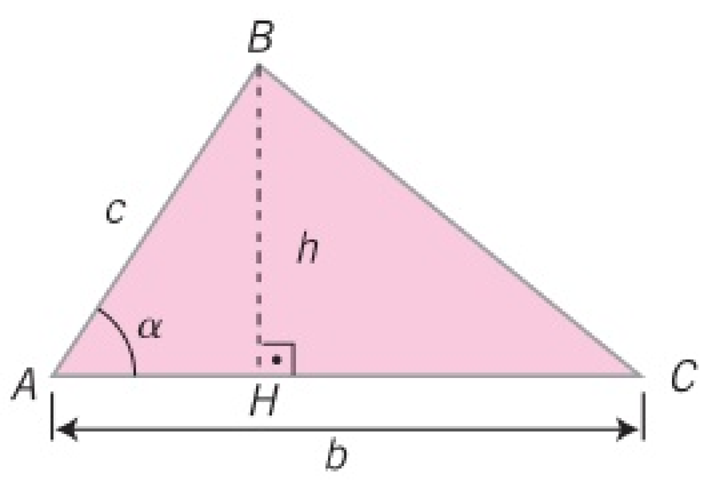
Observe que h é a distância entre os lados paralelos.

Triângulo

Se num triângulo tivermos as medidas a e b de dois lados e a medida α do ângulo por eles compreendidos, teremos:



$$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen } \alpha}$$



De fato, sendo h a medida relativa ao lado $\overline{AC}$, temos:

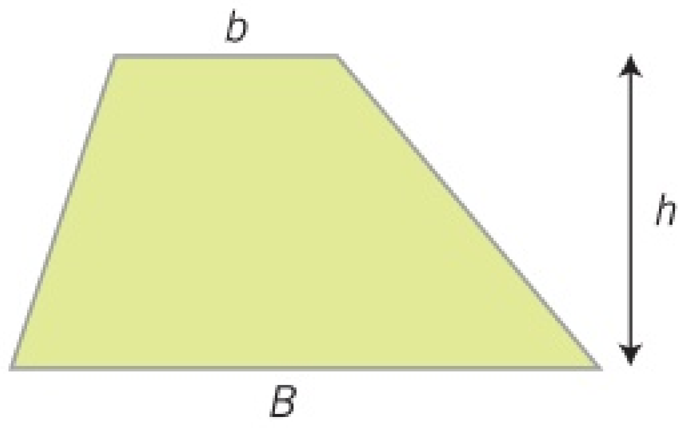
$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \qquad (1)$$

No $\triangle AHB \rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \text{sen } \alpha$

Substituindo em (1), temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen } \alpha$$

Trapézio

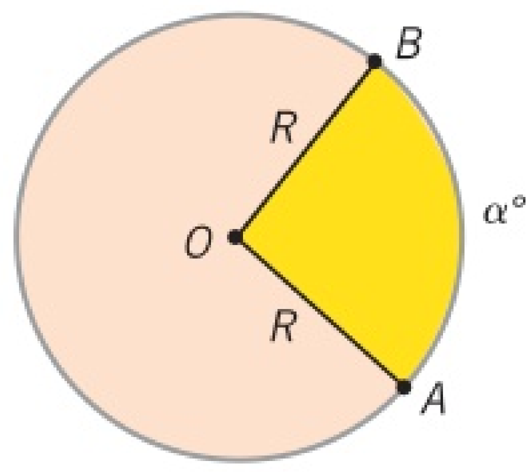


$$\boxed{A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}}$$

B = medida da base maior
b = medida da base menor
h = medida da altura

Observe que h é a distância entre as duas bases.

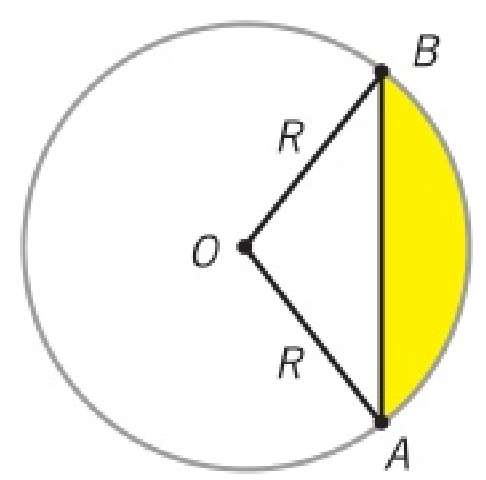
Setor circular



Área		Arco
πR^2	———	$360°$
A	———	$\alpha°$

$$\boxed{A = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi R^2}$$

Segmento circular



$$\boxed{A = A_{\text{setor}} - A_{\text{triângulo}}}$$

1 (Enem) O quadro apresenta informações da área aproximada de cada bioma brasileiro.

Biomas continentais brasileiros	Área aproximada (km²)	Área/total Brasil
Amazônia	4 196 943	49,29%
Cerrado	2 036 448	23,92%
Mata Atlântica	1 110 183	13,04%
Caatinga	844 453	9,92%
Pampa	176 496	2,07%
Pantanal	150 355	1,76%
Área total Brasil	8 514 877	

Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 10 jul. 2009. Adaptado.

É comum em conversas informais, ou mesmo em noticiários, o uso de múltiplos da área de um campo de futebol (com as medidas de 120 m × 90 m) para auxiliar a visualização de áreas consideradas extensas. Nesse caso, qual é o número de campos de futebol correspondente à área aproximada do bioma Pantanal?

a) 1 400
b) 14 000
c) 140 000
d) 1 400 000
→ e) 14 000 000

2 (Enem) A loja Telas & Molduras cobra 20 reais por metro quadrado de tela, 15 reais por metro linear de moldura, mais uma taxa fixa de entrega de 10 reais.

Uma artista plástica precisa encomendar telas e molduras a essa loja, suficientes para 8 quadros retangulares (25 cm × 50 cm). Em seguida, fez uma segunda encomenda, mas agora para 8 quadros retangulares (50 cm × 100 cm). O valor da segunda encomenda será:

a) o dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.
→ b) maior do que o valor da primeira encomenda, mas não o dobro.
c) a metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.
d) menor do que o valor da primeira encomenda, mas não a metade.
e) igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo de entrega será o mesmo.

3 (Enem) O tangram é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

Figura 1

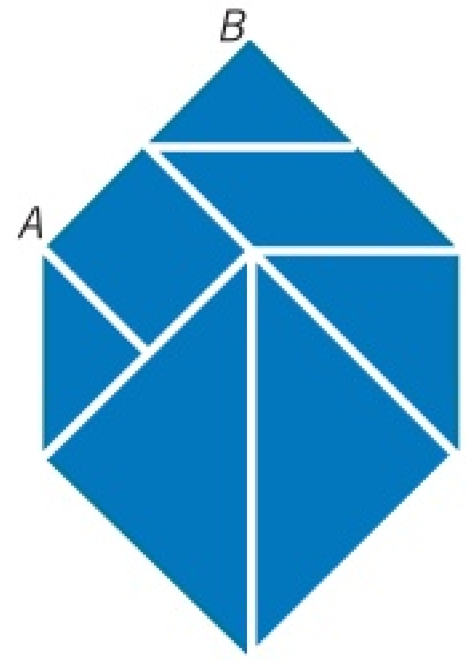


Figura 2

Figura 3

Se o lado $\overline{AB}$ do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a:

a) 4 cm^2.
→ b) 8 cm^2.
c) 12 cm^2.
d) 14 cm^2.
e) 16 cm^2.

4 (Enem)

Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil km^2 de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo.

Disponível em: <www.wwf.org.br>. Acesso em: 23 abr. 2010.

Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por km^2, é de:

a) 250.
→ b) 25.
c) 2,5.
d) 0,25.
e) 0,025.

Anotações

AULA 13

Competência 3 Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade 13 Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

Em classe

CONSTRUÇÃO DE ARGUMENTOS

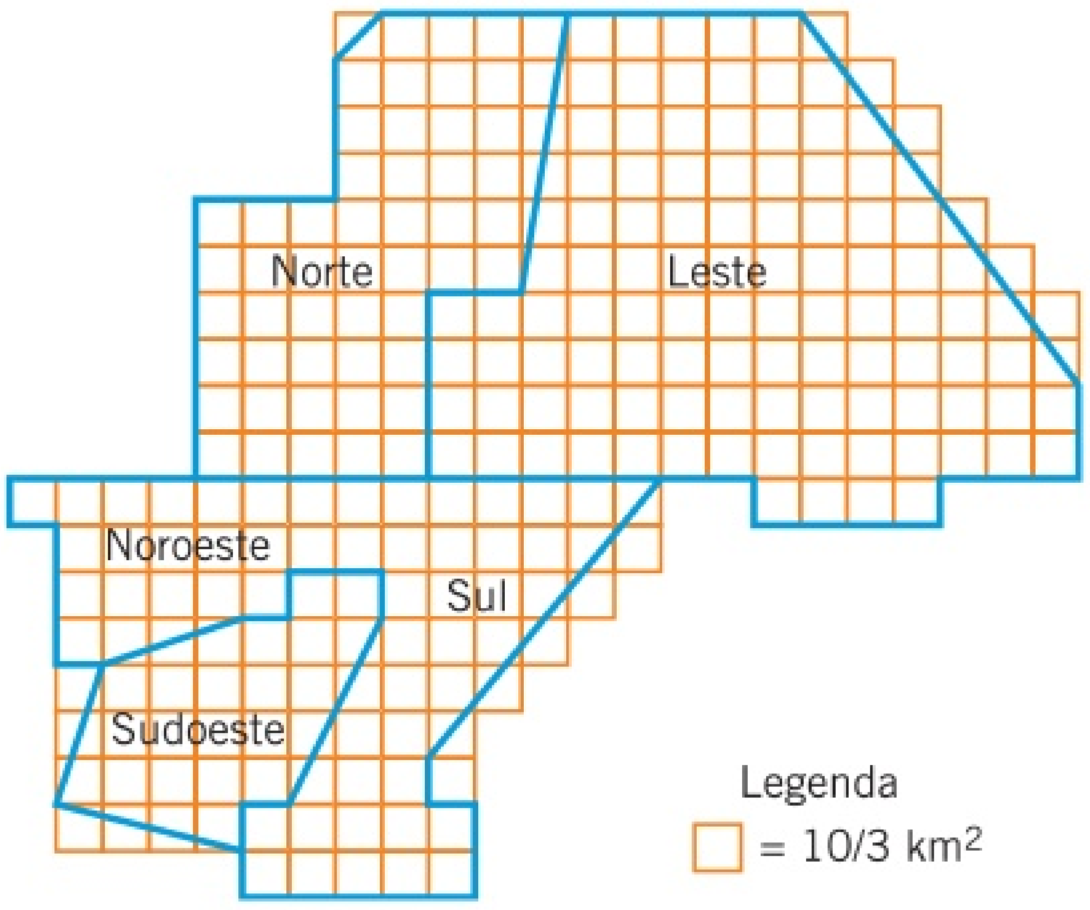
Os grandes problemas contemporâneos de saúde pública exigem a atuação eficiente do Estado que, visando à proteção da saúde da população, emprega tanto os mecanismos de persuasão (informação, fomento) quanto os meios materiais (execução de serviços) e as tradicionais medidas de polícia administrativa (condicionamento e limitação da liberdade individual). Exemplar na implementação de política pública é o caso da dengue, que se expandiu e tem-se apresentado em algumas cidades brasileiras na forma epidêmica clássica, com perspectiva de ocorrências hemorrágicas de elevada letalidade. Um importante desafio no combate à dengue tem sido o acesso aos ambientes particulares, pois os profissionais dos serviços de controle encontram, muitas vezes, os imóveis fechados ou são impedidos pelos proprietários de entrarem nos recintos. Dada a grande capacidade dispersiva do mosquito vetor, *Aedes aegypti*, todo o esforço de controle pode ser comprometido caso os operadores de campo não tenham acesso às habitações.

Programa Nacional de Controle da Dengue. Brasília: Fundação Nacional de Saúde, 2002. Adaptado.

O texto acima faz referência ao combate à dengue. A tabela abaixo fornece alguns dados relativos aos casos de dengue detectados no município de Campinas na primeira metade do ano de 2007. A primeira coluna da tabela indica os distritos do município, segundo a prefeitura. A segunda indica a população aproximada de cada distrito. A terceira informa os casos de dengue confirmados. Na última, são apresentados os coeficientes de incidência de dengue em cada distrito. A figura à direita é uma representação aproximada dos distritos de Campinas.

Distrito de Campinas	População (× 1 000 hab.)	Casos de dengue	Coeficiente de incidência (casos por 1000 hab.)
Norte	181	1399	77,3
Sul	283	1014	35,8
Leste	211	577	26,4
Sudoeste	215	1113	51,8
Noroeste	170	790	
Total	**1060**		

Fonte: Secretaria Municipal de Saúde de Campinas, Coordenadoria de Vigilância e Saúde Ambiental (dados preliminares).



Responda às questões abaixo, tomando por base os dados fornecidos na tabela acima.

a) Calcule o coeficiente de incidência de dengue no distrito Noroeste, em casos por 10 000 habitantes. O coeficiente de incidência de dengue hemorrágica em todo o município de Campinas, no mesmo período, foi de 0,236 caso por 10 000 habitantes. Determine o número de casos de dengue hemorrágica detectados em Campinas no primeiro semestre de 2007.

b) Calcule o coeficiente de incidência de dengue no município de Campinas na primeira metade de 2007 e o crescimento percentual desse coeficiente com relação ao coeficiente do primeiro semestre de 2005, que foi de 1 caso por 10 000 habitantes.

Resolução:

a) O coeficiente de incidência de dengue no distrito Noroeste, em casos por 10 000 habitantes, é dado por: $\frac{790}{170 \cdot 1000} \cdot 10\,000 = 46{,}5$.

Da tabela, a população aproximada do município de Campinas é de 1 060 000 habitantes. Assim, o número de casos de dengue hemorrágica é igual a: $\frac{0{,}236 \cdot 1\,060\,000}{10\,000} = 25$.

Resposta: 46,5 e 25.

b) Da tabela, o coeficiente de incidência de dengue no município, em casos por 10 000 habitantes, é dado por: $\frac{4\,873}{1060 \cdot 10\,000} = 46$.

O crescimento percentual pedido é igual a $\left(\frac{46}{1} - 1\right) \cdot 100\% = 4\,500\%$.

Resposta: 46 e 4 500%.

- Uma das características do Enem é exigir a habilidade de avaliar medições dadas para a elaboração de conclusões. Em Matemática, a partir de um conjunto de informações (hipóteses), é possível concluir uma sequência de afirmações, até chegar a uma conclusão (tese). Nessas afirmações, é possível também efetuar cálculos a fim de que as afirmações não entrem em contradição com outras hipóteses básicas do mundo em que se vive (como resultados absurdos ou incoerentes).

1 (Enem) Segundo as regras da Fórmula 1, o peso mínimo do carro, de tanque vazio, com o piloto, é de 605 kg, e a gasolina deve ter densidade entre 725 e 780 gramas por litro. Entre os circuitos nos quais ocorrem competições dessa categoria, o mais longo é o Spa-Francorchamps, na Bélgica, cujo traçado tem 7 km de extensão. O consumo médio de um carro da Fórmula 1 é de 75 litros para cada 100 km.

Suponha que um piloto de uma equipe específica, que utiliza um tipo de gasolina com densidade de 750 g/L, esteja no circuito de Spa-Francorchamps, parado no *box* para reabastecimento. Caso ele pretenda dar mais 16 voltas, ao ser liberado para retornar à pista, seu carro deverá pesar, no mínimo:

a) 617 kg.
→ b) 668 kg.
c) 680 kg.
d) 689 kg.
e) 717 kg.

O volume V de combustível, em litros, necessário para dar 16 voltas é dado por:

$$\begin{array}{lcl} 75 \text{ litros} & \text{———} & 100 \text{ km} \\ V & \text{———} & 16 \cdot 7 \text{ km} \end{array} \Rightarrow V = 84 \text{ litros}$$

Assim, são necessários 84 litros de combustível.
Como a densidade do combustível é 750 g/L, a massa x, em kg, correspondente ao combustível consumido, é:

$$\begin{array}{lcl} 0{,}75 \text{ kg} & \text{———} & 1 \text{ litro} \\ x & \text{———} & 84 \text{ litros} \end{array} \Rightarrow x = 63 \text{ kg}$$

Logo, o carro deverá ter, no mínimo, $605 + 63 = 668$ kg ao retornar à pista.

2 (Enem) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1 500 telhas ou 1 200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos
b) 360 tijolos
c) 400 tijolos
→ d) 480 tijolos
e) 600 tijolos

O caminhão está carregado com 900 telhas, então pode ainda carregar o equivalente a
$(1\,500 - 900) = 600$ telhas.
Sabemos que 1 500 telhas equivalem ao "peso" de 1 200 tijolos, assim considerando x a quantidade de tijolos que podem ser carregados temos:

$$\begin{array}{lcl} 1\,500 & \text{———} & 1\,200 \\ 600 & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = \frac{1200 \cdot 600}{1500} = 480$$

Portanto, o caminhão ainda pode carregar 480 tijolos.

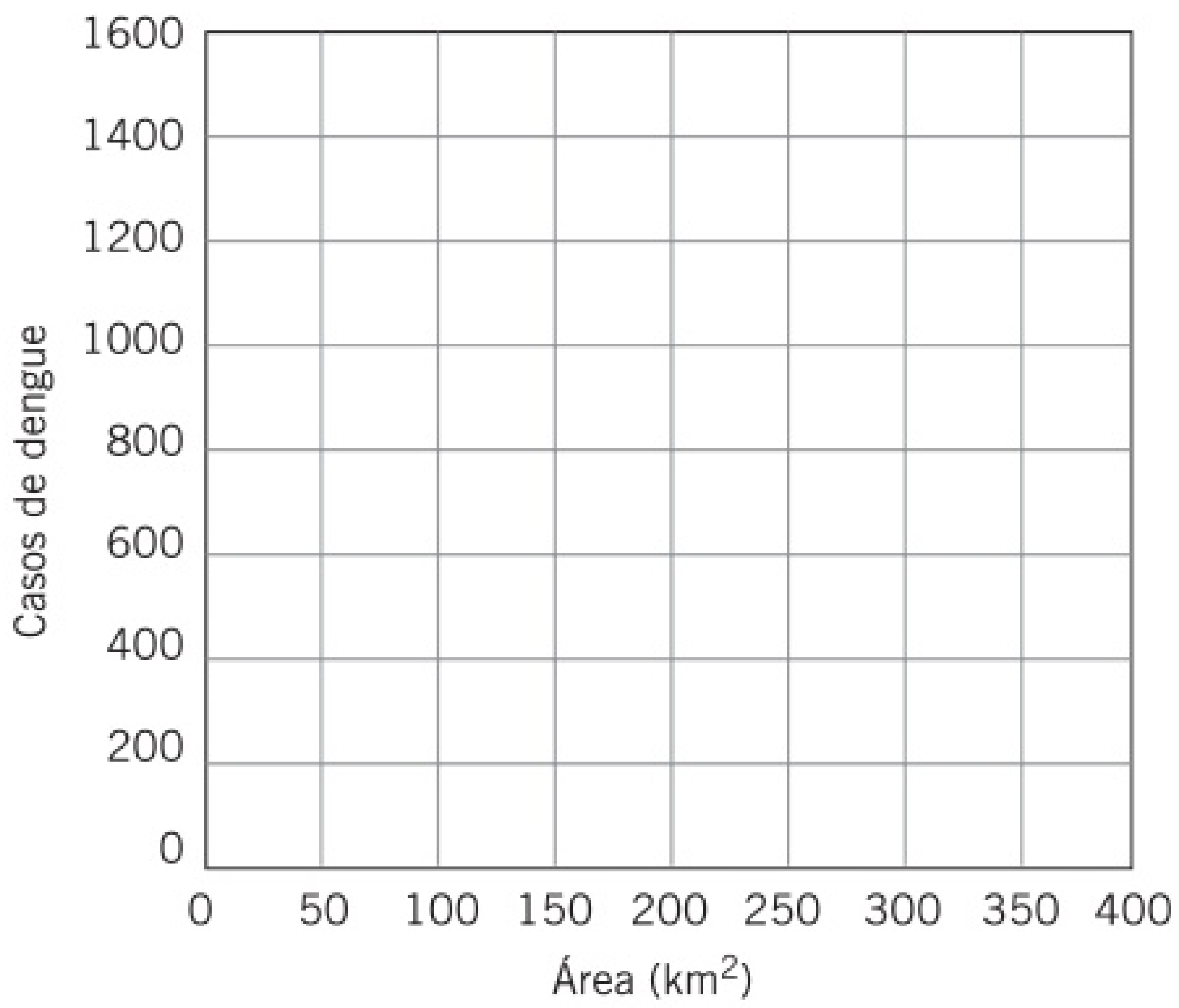
Em casa

TEXTO DE APOIO

Com base nas informações do texto da página 55, resolva os seguintes problemas:

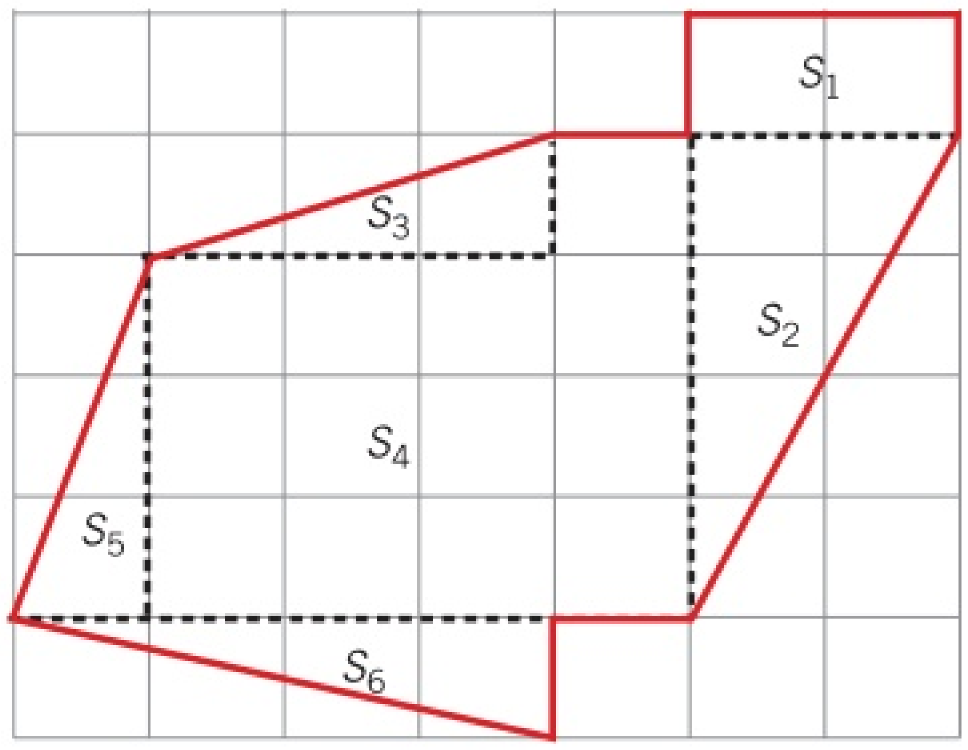
a) Calcule a área total do município de Campinas, sabendo que os distritos Norte, Leste, Sul e Noroeste da cidade têm, respectivamente, 175 km², 350 km², 120 km² e 75 km².

b) Suponha que, como uma medida de combate à dengue, o município de Campinas tenha decidido fazer uma nebulização (ou pulverização) de inseticida. Na fase inicial da nebulização, será atendido o distrito com maior número de casos de dengue por km². No diagrama abaixo, marque os pontos correspondentes aos cinco distritos de Campinas. Identifique claramente o distrito associado a cada ponto. Com base no gráfico obtido, indique o distrito em que será feita essa nebulização inicial. Justifique sua resposta.



Resolução:

a) A figura abaixo representa o distrito Sudoeste.



A área desse distrito (S), em km², é:

$$S = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6) \cdot \frac{10}{3} \Rightarrow$$

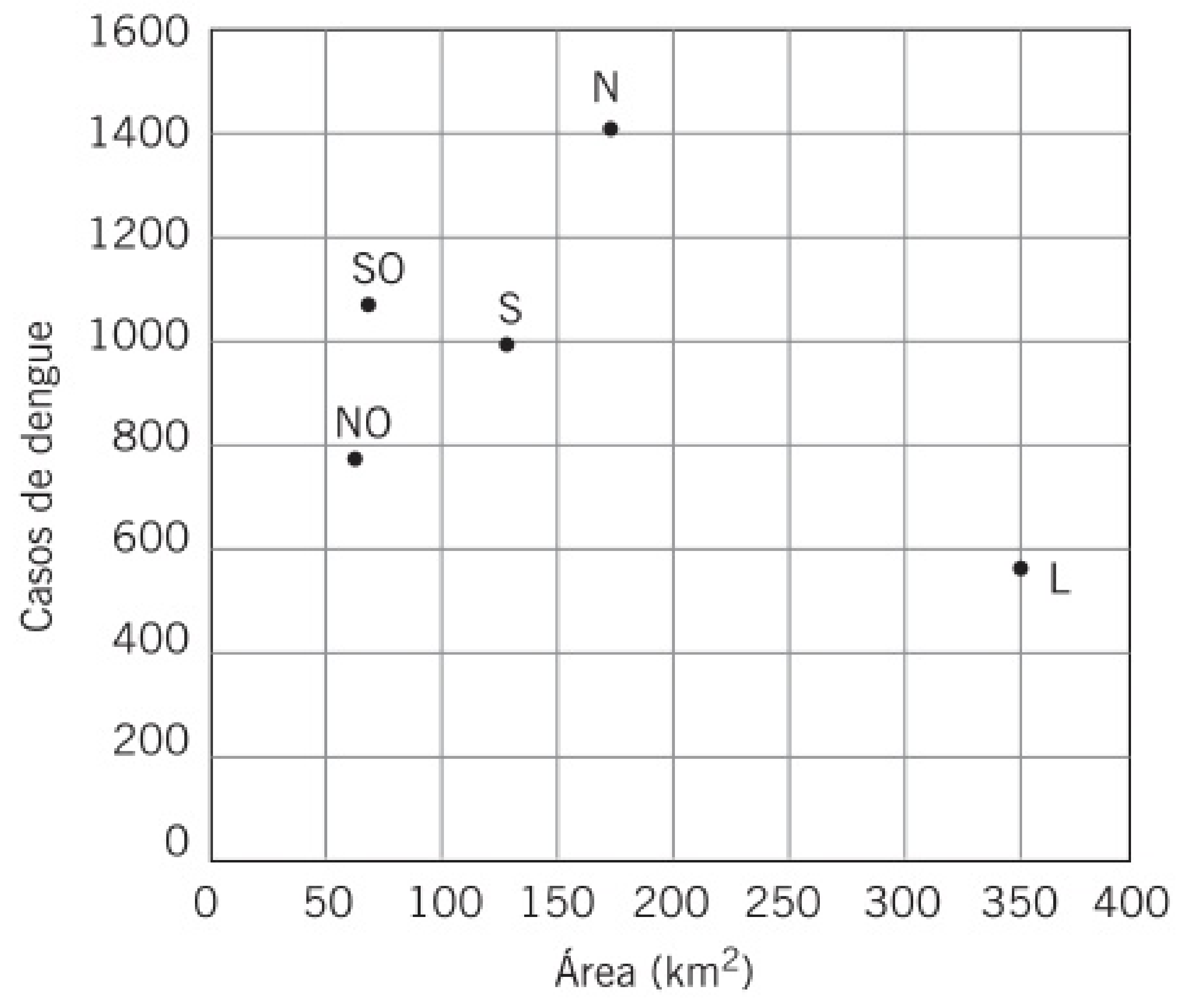
$$\Rightarrow S = \left(2 + \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{3 \cdot 1}{2} + 13 + \frac{3 \cdot 1}{2} + \frac{4 \cdot 1}{2}\right) \cdot \frac{10}{3} \Rightarrow S = 80$$

A área total do município de Campinas, em km², é dada por:

$S_T = 175 + 350 + 120 + 75 + 80 \Rightarrow S_T = 800$

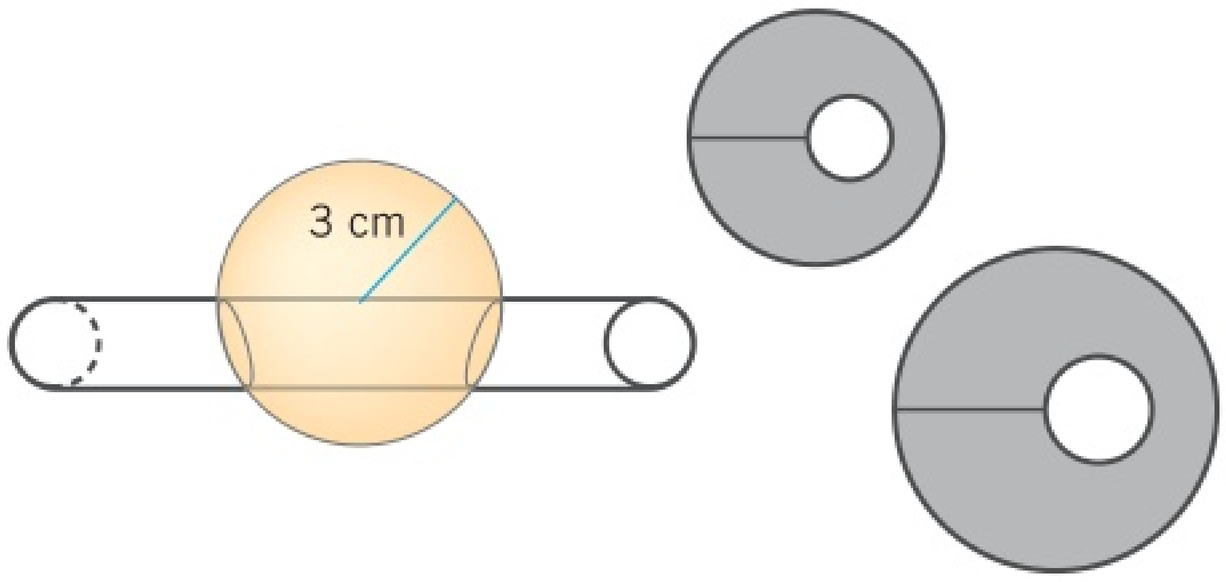
Resposta: 800 km².

b)



A nebulização inicial será feita no distrito Sudoeste (SO), pois, das retas determinadas por cada um dos pontos do gráfico e a origem, a de maior coeficiente angular corresponde ao ponto SO.
Resposta: Sudoeste.

1 (Enem) Um chefe de cozinha utiliza um instrumento cilíndrico afiado para retirar parte do miolo de uma laranja. Em seguida, ele fatia toda a laranja em secções perpendiculares ao corte feito pelo cilindro. Considere que o raio do cilindro e o da laranja sejam iguais a 1 cm e 3 cm, respectivamente.

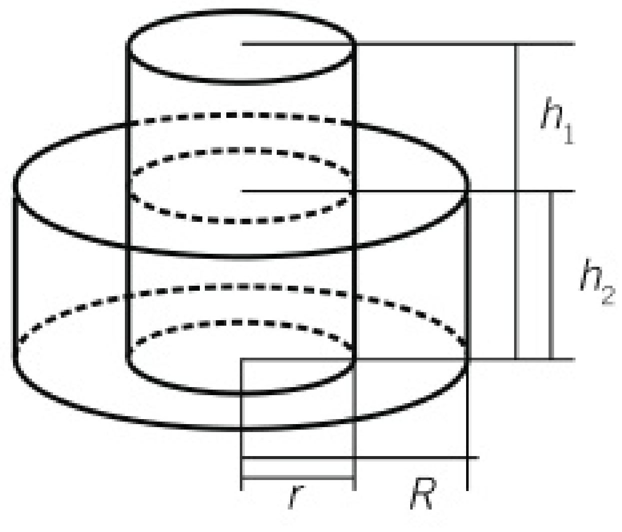


A área da maior fatia possível é:

a) duas vezes a área da secção transversal do cilindro.
b) três vezes a área da secção transversal do cilindro.
c) quatro vezes a área da secção transversal do cilindro.
d) seis vezes a área da secção transversal do cilindro.
→ e) oito vezes a área da secção transversal do cilindro.

2 (Enem) Em uma praça pública, há uma fonte que é formada por dois cilindros, um de raio r e altura h_1, e o outro de raio R e altura h_2. O cilindro do meio enche e, após transbordar, começa a encher o outro. Se $R = r\sqrt{2}$ e $h_2 = \frac{h_1}{3}$, e para encher o cilindro do meio foram necessários 30 minutos, então, para se conseguir encher essa fonte e o segundo cilindro, de modo que fique completamente cheio, serão necessários:

a) 20 min.
b) 30 min.
→ c) 40 min.
d) 50 min.
e) 60 min.



Anotações

AULA 14

Competência 3 Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

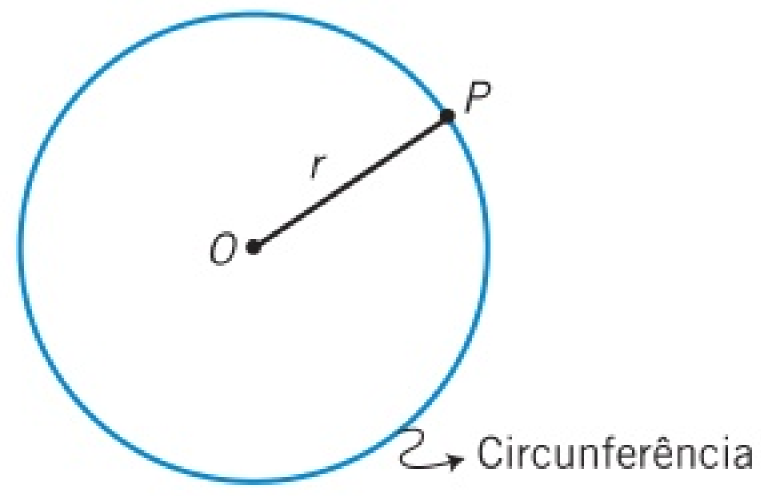
Habilidade 14 Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Em classe

CIRCUNFERÊNCIA

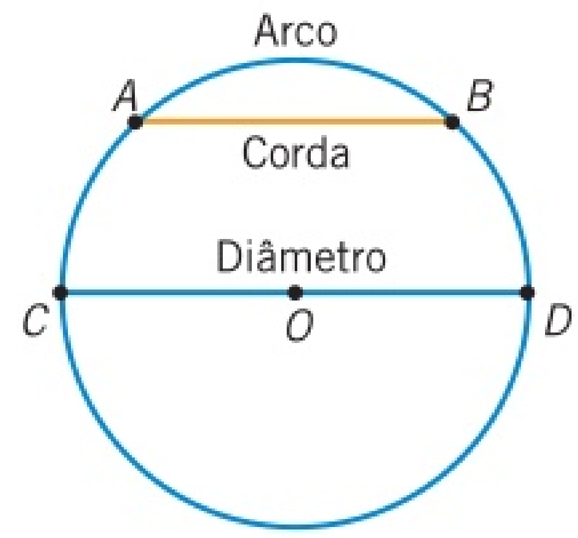
Definição

Num plano, circunferência é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto fixo desse plano. O ponto fixo é denominado centro da circunferência, e a distância de um ponto da circunferência a ele é chamada raio.



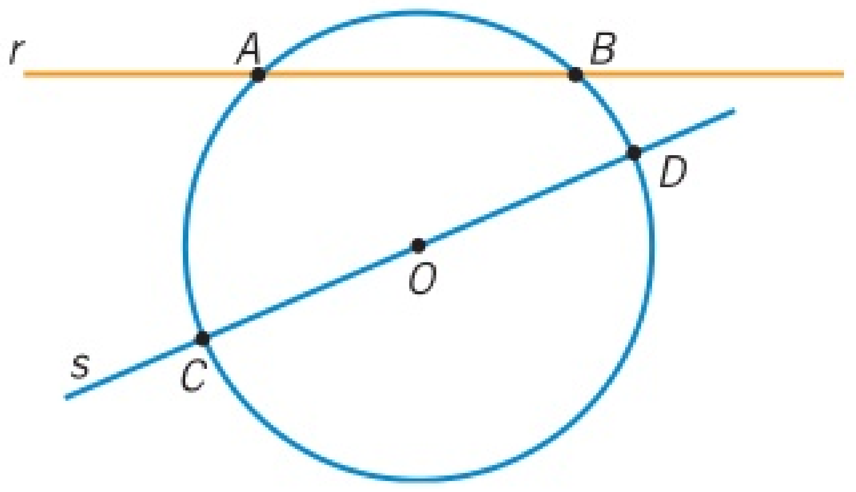
O: centro da circunferência
r: raio da circunferência
P: ponto da circunferência

Elementos

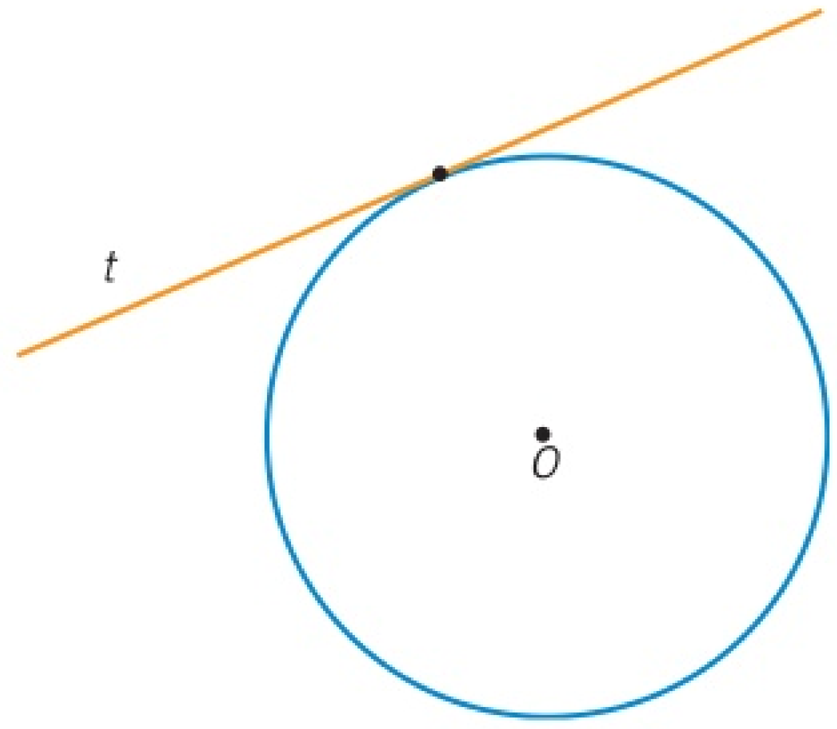


Corda de uma circunferência é um segmento que une dois pontos distintos dessa circunferência. Em particular, **diâmetro** é a corda que passa pelo centro e sua medida é igual ao dobro do raio.

Reta secante e reta tangente



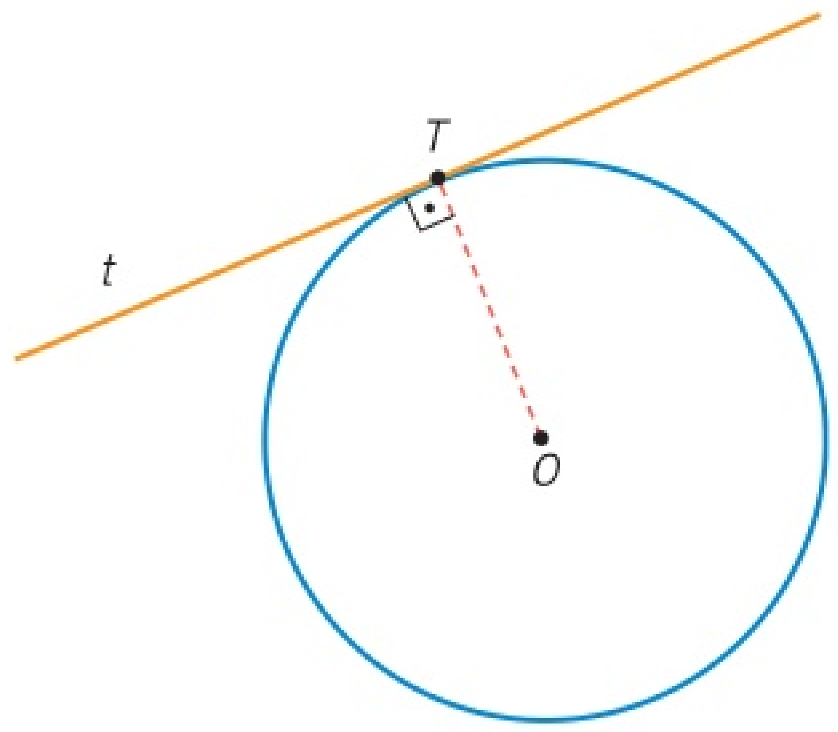
Reta secante a uma circunferência é aquela que intersecta a circunferência em dois pontos distintos. Na figura, as retas *r* e *s* são secantes à circunferência de centro *O*.



Reta tangente a uma circunferência é aquela que intersecta a circunferência em um único ponto. Na figura, a reta t é tangente à circunferência de centro O.

Propriedade

Uma reta tangente a uma circunferência de centro O, num ponto T, é perpendicular ao segmento $\overline{OT}$ (raio).

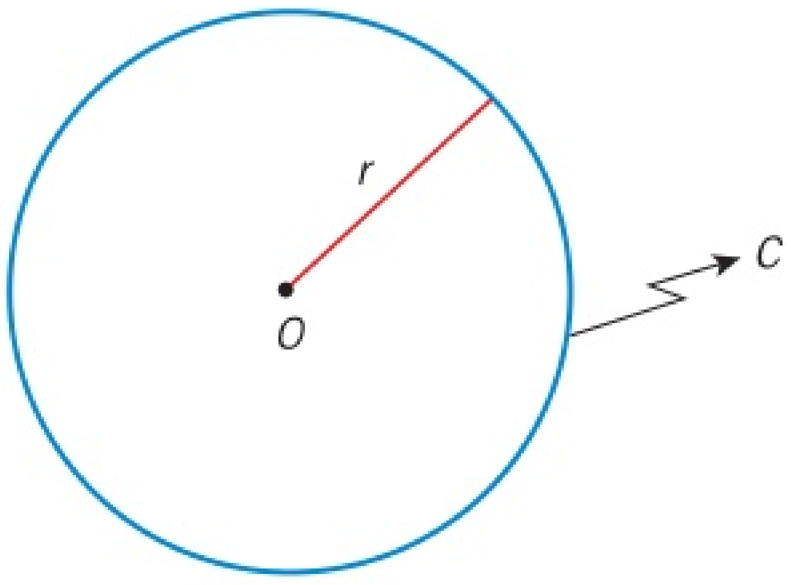


T: ponto de tangência

$\overline{OT} \perp t$

Comprimento de uma circunferência

O comprimento C de uma circunferência de raio r é $C = 2\pi r$.

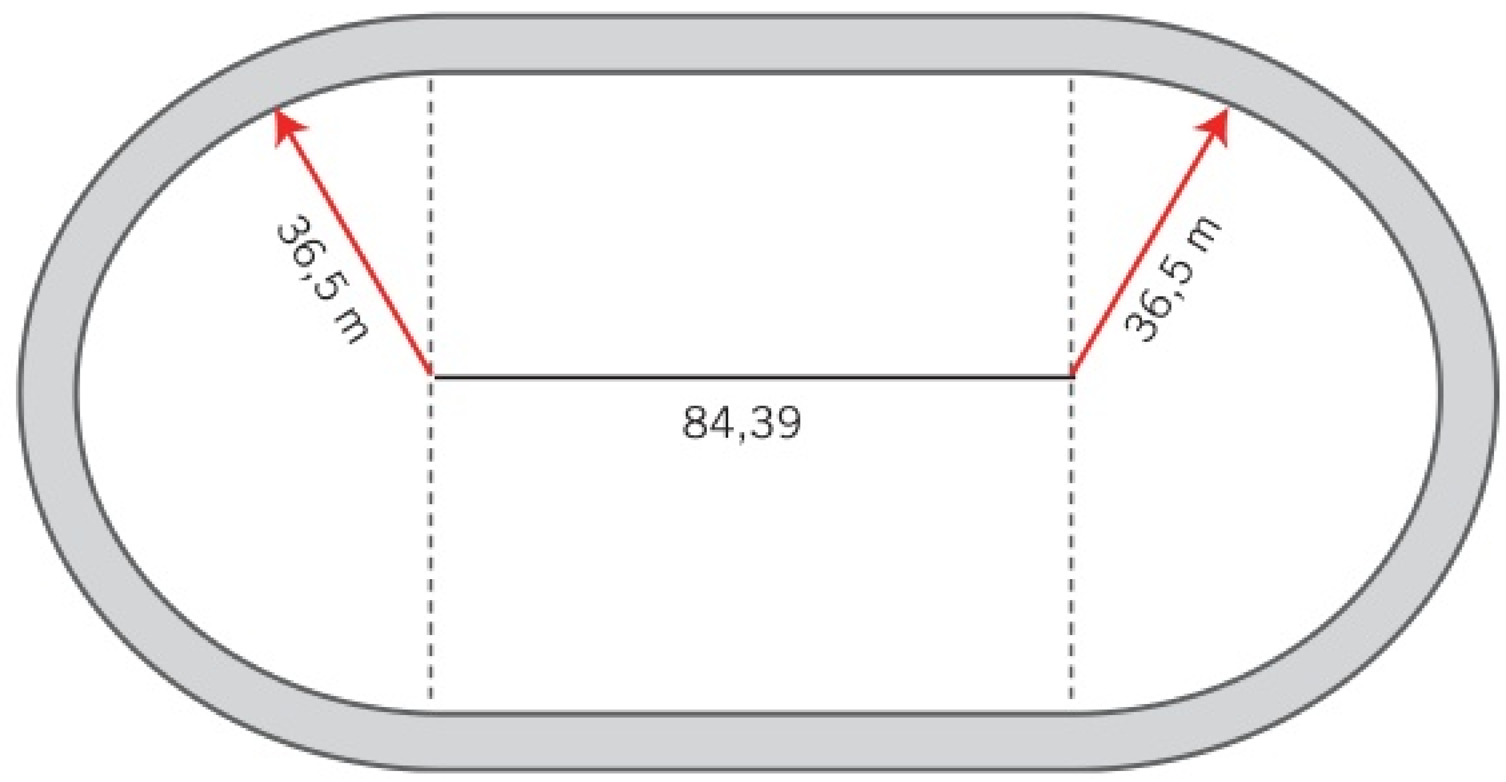


$\boxed{C = 2\pi r}$

$\pi = 3{,}14$ (valor aproximado)

Nota: A área de um círculo de raio r é πr^2.

1 (Enem) O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta por oito raias e tem largura de 9,76 m. As raias são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.



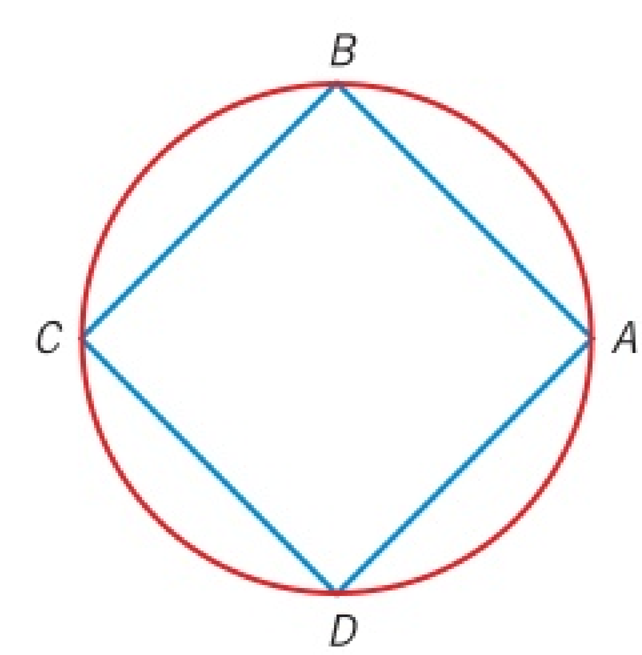
BIEMBENGUT, M. S. Modelação matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus. 1990. Dissertação de mestrado. Rio Claro: IGCE/Unesp, 1990. Adaptado.

Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado?

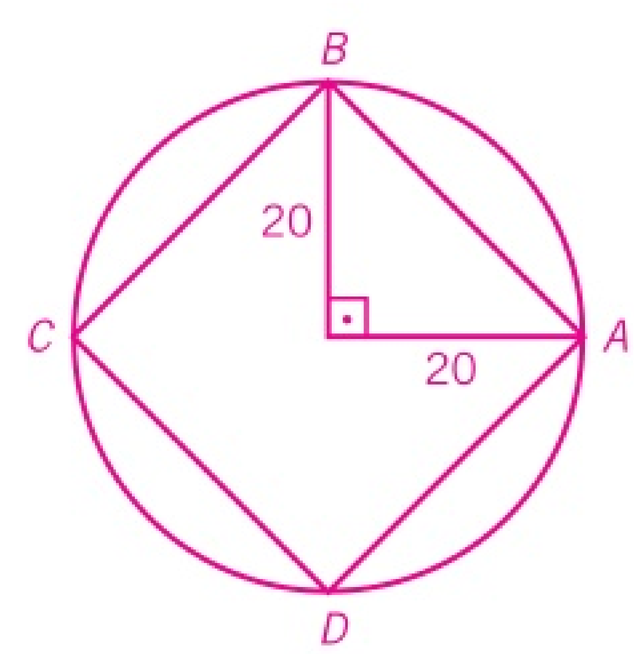
→ a) 1 b) 4 c) 5 d) 7 e) 8

Os arcos de circunferência que delimitam a raia 1 são os de menor comprimento. Assim, o corredor da raia 1 seria aquele que percorre a menor distância, sendo beneficiado.

2 A figura ilustra uma praça circular de raio 20 metros. Se Marina, contornando a praça segundo a circunferência *ABCD*, dá 240 passos, quantos passos ela dará se fizer o percurso *ABCD* segundo os lados do quadrado *ABCD*? (Use $\pi = 3$ e $\sqrt{2} = 1{,}4$)



a) 238
b) 232
→ c) 224
d) 220
e) 188



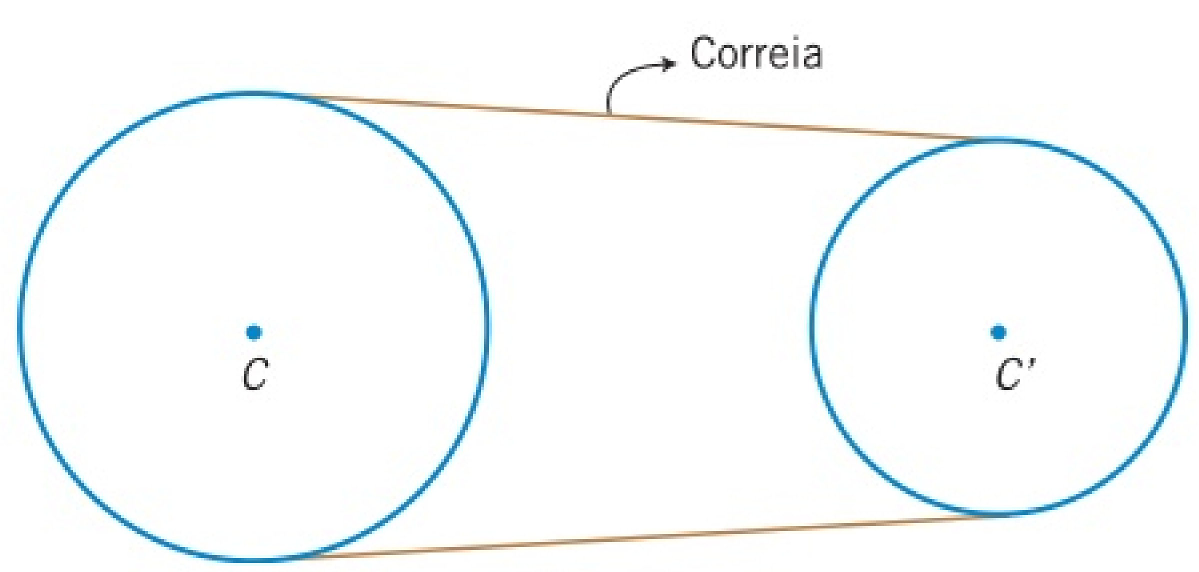
Comprimento da circunferência:
$C = 2 \cdot \pi \cdot 20 = 40 \cdot \pi \Rightarrow$
$\Rightarrow C = 40 \cdot 3 = 120$ m (240 passos)
Perímetro do quadrado:
$(AB)^2 = 20^2 + 20^2 \Rightarrow (AB)^2 = 800 \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = 20\sqrt{2} = 20 \cdot 1{,}4 = 28$

Perímetro $= 4 \cdot 28 = 112$ m

Comprimento	Passos
120	240
112	x

$\Rightarrow x = \dfrac{240 \cdot 112}{120} = 224$

3 A figura ilustra uma engrenagem formada por duas rodas e uma correia. O raio da roda maior é 10 cm maior que o raio da roda menor.



Sabe-se que, se a roda maior der 500 voltas, a menor dará 1 500 voltas. A medida em centímetros do raio da roda menor é:

a) 3,33... cm. b) 4 cm. c) 4,3 cm. → d) 5 cm. e) 6 cm.

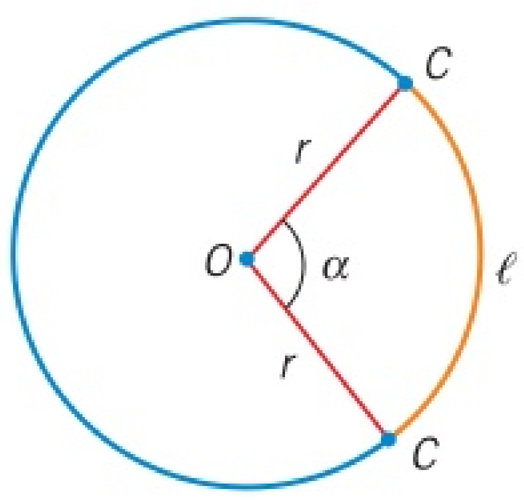
Seja *r* a medida do raio da roda menor. Devemos ter:
$500 \cdot 2\pi \cdot (r + 10) = 1500 \cdot 2\pi r \Rightarrow 2\pi r + 20\pi = 6\pi r \Rightarrow 4\pi r = 20\pi \Rightarrow r = 5$ cm

Em casa

TEXTO DE APOIO

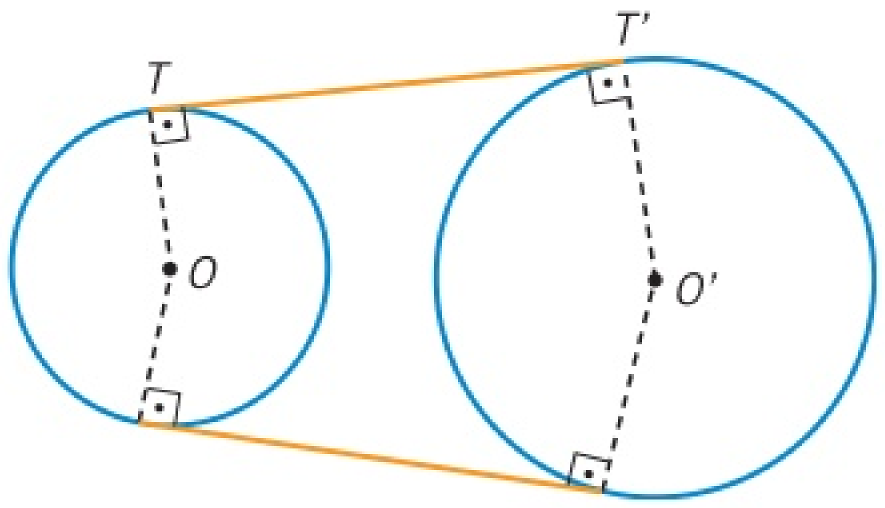
Comprimento de um arco

O comprimento ℓ de um arco de circunferência de raio r e a medida α do arco em graus podem ser relacionados pela regra de três:



$$\begin{array}{lcl} \ell & \text{———————} & 2\pi r \\ \alpha° & \text{———————} & 360° \end{array}$$

Em problemas de polias (roldanas) ligadas por correias, é fundamental nos lembrarmos de que um segmento $\overline{TT'}$ tangente às circunferências de centros O e O', nos pontos T e T', é perpendicular a $\overline{OT}$ e a $\overline{O'T'}$.



1 Adotando $\pi = 3,14$, o comprimento de uma circunferência de raio 10 cm é:

a) 31,4 cm.
b) 34,4 cm.
→c) 62,8 cm.
d) 68,8 cm.
e) 72,4 cm.

2 O diâmetro de uma circunferência de comprimento 24π cm é:

a) 6 cm.
b) 12 cm.
→c) 24 cm.
d) 28 cm.
e) 32 cm.

3 Se o raio de uma pista circular é 30 metros, quanto percorrerá um atleta que der 50 voltas nessa pista? Adote $\pi = 3,14$.

a) 780 m.
b) 840 m.
c) 4,71 km.
→d) 9,42 km.
e) 10 km.

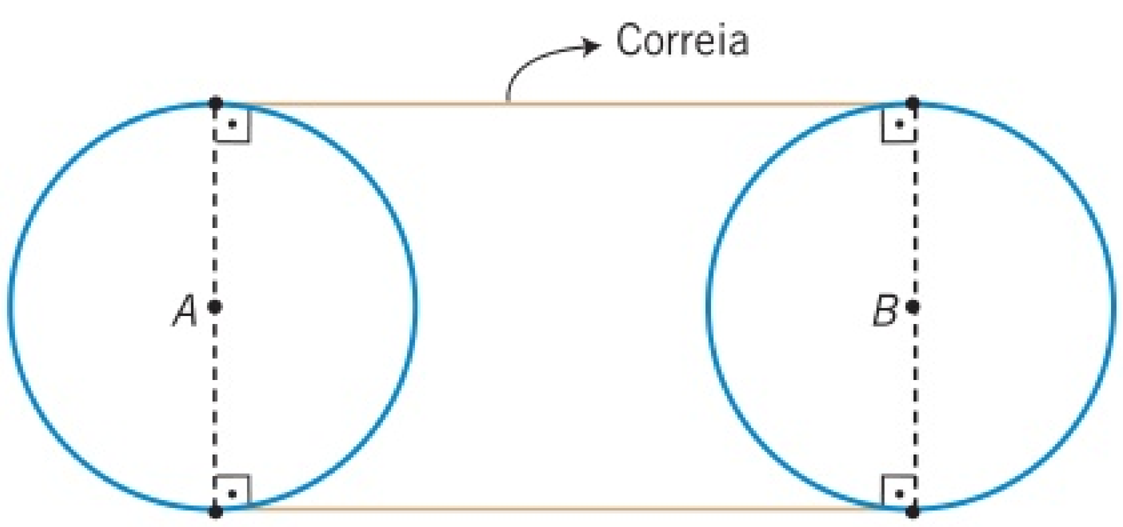
4 Se uma locomotiva percorreu 1 884 metros, quantas voltas deu uma de suas rodas se o raio da roda é 30 cm? Adote $\pi = 3,14$.

a) 380
b) 450
c) 485
d) 500
→e) 1 000

5 Se aumentarmos 1 metro no comprimento de uma circunferência, o raio aumentará:

a) $\frac{1}{\pi}$ m.
→b) $\frac{1}{2\pi}$ m.
c) $\frac{1}{3\pi}$ m.
d) 1 m.
e) 2π m.

6 A figura ilustra uma engrenagem formada por duas polias de raio 15 cm e uma correia de comprimento 164,2 cm.



A distância entre os eixos das polias é: (Adote $\pi = 3,14$.)

a) 25 cm.
→b) 35 cm.
c) 50 cm.
d) 55 cm.
e) 70 cm.

7 O comprimento de um arco de 45° numa circunferência de raio 12 cm é:

a) π cm.
→b) 3π cm.
c) 5π cm.
d) 7π cm.
e) 8π cm.

8 (Fuvest-SP) Um arco de circunferência mede 300° e seu comprimento é 2 km. Qual o número inteiro mais próximo da medida do raio, em metros?

a) 157
b) 284
→c) 382
d) 628
e) 764

AULA 15

Competência 4 Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade 15 Identificar a relação de dependência entre grandezas.

Em classe

GRANDEZAS DIRETAMENTE E INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas são ditas diretamente proporcionais se, e somente se, as razões entre os valores assumidos pela grandeza A e os correspondentes valores assumidos pela grandeza B são iguais. Então ocorre:

$$\frac{A}{B} = k \text{ } (k \text{ é constante})$$

Isto é, o **quociente** entre os valores correspondentes é uma **constante**.

Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são ditas inversamente proporcionais se, e somente se, os produtos entre os valores assumidos pela grandeza A e os correspondentes valores assumidos pela grandeza B são iguais. Então ocorre:

$$A \cdot B = k \text{ } (k \text{ é constante})$$

Isto é, o **produto** entre os valores correspondentes é uma **constante**.

1 (FGV-SP) Na tabela ao lado, x é diretamente proporcional ao quadrado de y. Sendo $y > 0$, os valores de m e p são, respectivamente:

x	y
1	2
m	8
4	p

a) $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{16}$.
b) 4 e 16.
→ c) 16 e 4.
d) $\frac{1}{16}$ e 1.
e) 4 e 8.

Como x é diretamente proporcional ao quadrado de y, temos: $x = k \cdot y^2$.
Considerando os dados da tabela e fazendo as devidas substituições, temos:

$1 = k \cdot 2^2 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

$m = \frac{1}{4} \cdot 8^2 \Rightarrow m = 16$

$4 = \frac{1}{4} \cdot p^2 \Rightarrow p = 4$

2 (Fuvest-SP) Na tabela ao lado, y é inversamente proporcional ao quadrado de x (sendo $x > 0$). Calcule os valores de p e m.

x	y
1	2
2	p
m	8

a) $p = \frac{1}{8}$; $m = \frac{1}{4}$
→ b) $p = \frac{1}{2}$; $m = \frac{1}{2}$
c) $p = \frac{1}{2}$; $m = \frac{1}{4}$
d) $p = \frac{3}{4}$; $m = \frac{3}{4}$
e) $p = \frac{1}{4}$; $m = \frac{1}{8}$

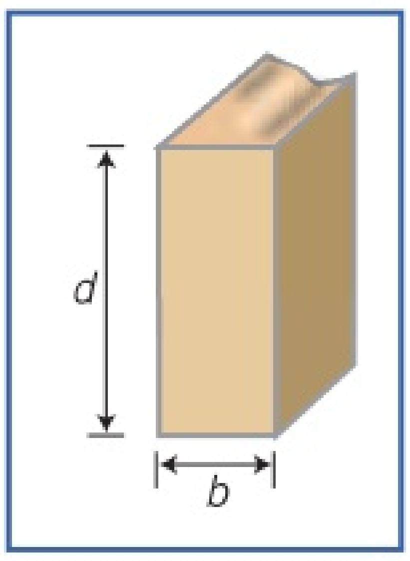
Sendo $y = \frac{k}{x^2}$, da tabela apresentada, temos:

$2 = \frac{k}{1^2} \Rightarrow k = 2$

$p = \frac{2}{2^2} \Rightarrow p = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$8 = \frac{2}{m^2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

3 (Enem) A resistência das vigas de dado comprimento é diretamente proporcional à largura (b) e ao quadrado da altura (d), conforme a figura. A constante de proporcionalidade k varia de acordo com o material utilizado na sua construção.



Considerando-se S como a resistência, a representação algébrica que exprime essa relação é:

a) $S = k \cdot b \cdot d$.
b) $S = b \cdot d^2$.
→ c) $S = k \cdot b \cdot d^2$.
d) $S = \frac{k \cdot b}{d^2}$.
e) $S = \frac{k \cdot d^2}{b}$.

Como S é diretamente proporcional a b e também a d^2, então S é diretamente proporcional ao produto bd^2. Assim, a representação algébrica que exprime essa relação é: $S = k \cdot b \cdot d^2$.

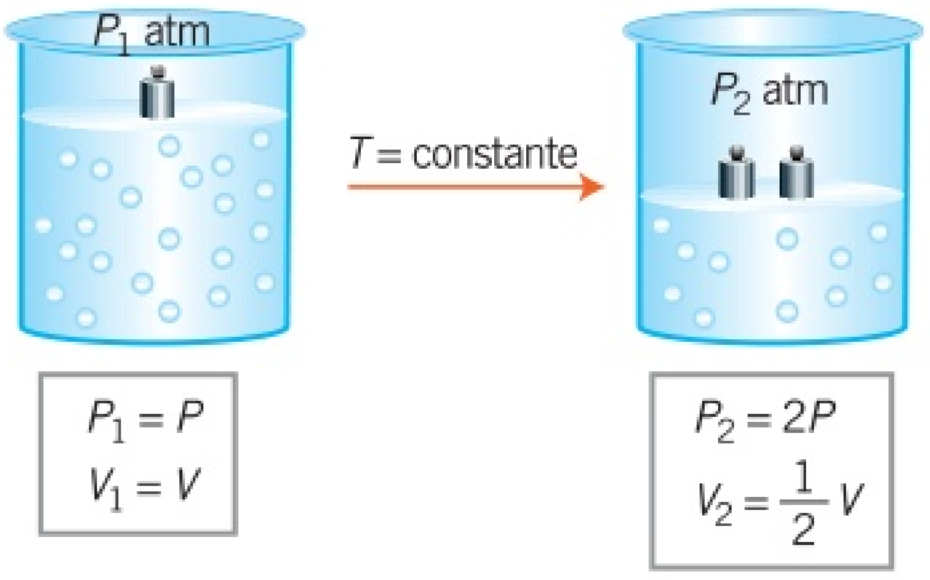
Em casa

TEXTO DE APOIO

Lei de Boyle-Mariotte

A Lei de Boyle-Mariotte pode ser enunciada da seguinte forma:

"À temperatura constante (transformação isotérmica), o produto da pressão e do volume de uma determinada massa de gás é constante; portanto, pressão e volume são inversamente proporcionais. Qualquer aumento de pressão produz uma diminuição de volume, e qualquer aumento de volume produz uma diminuição de pressão".

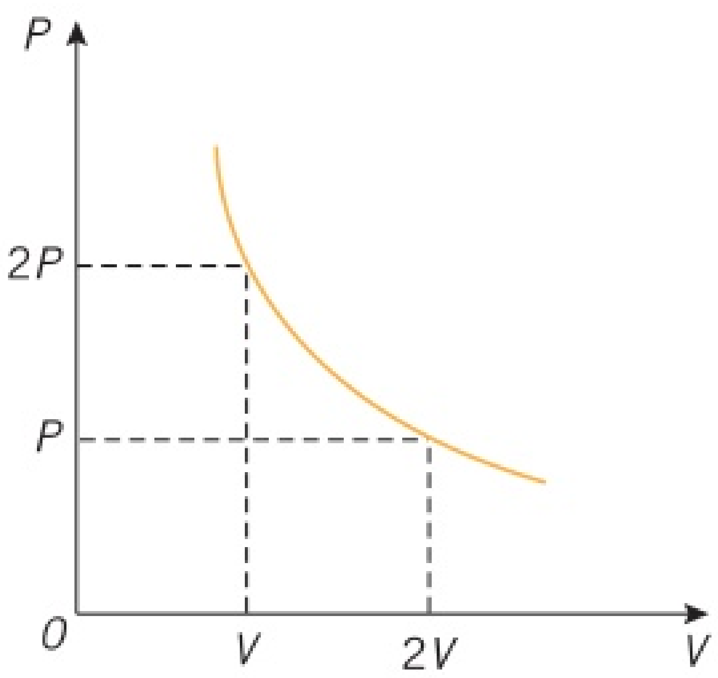


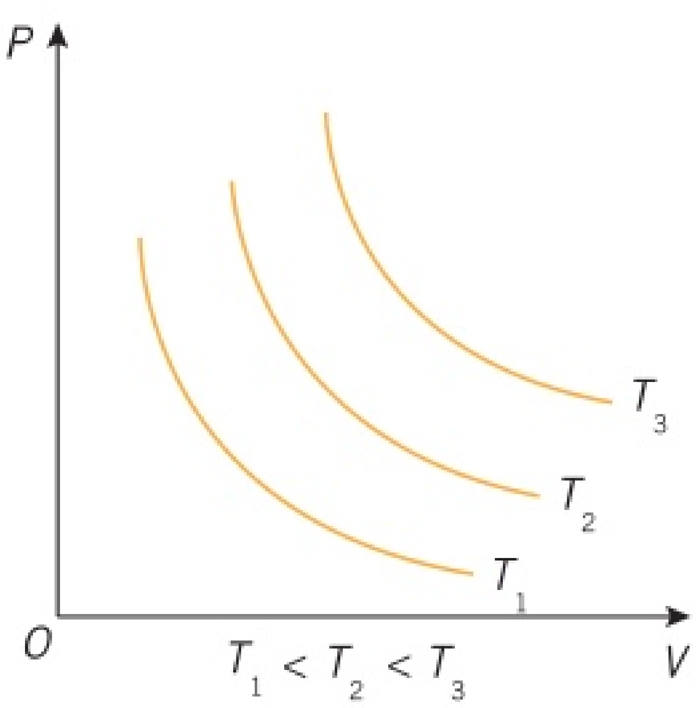
É possível calcular a pressão e o volume desse gás por meio da seguinte expressão algébrica:

$$\boxed{P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2}$$

Nessa expressão, P_1 e P_2 são as pressões inicial e final, respectivamente. Da mesma forma, V_1 e V_2 são os volumes inicial e final.

Sendo $P \cdot V =$ constante, temos as representações cartesianas:

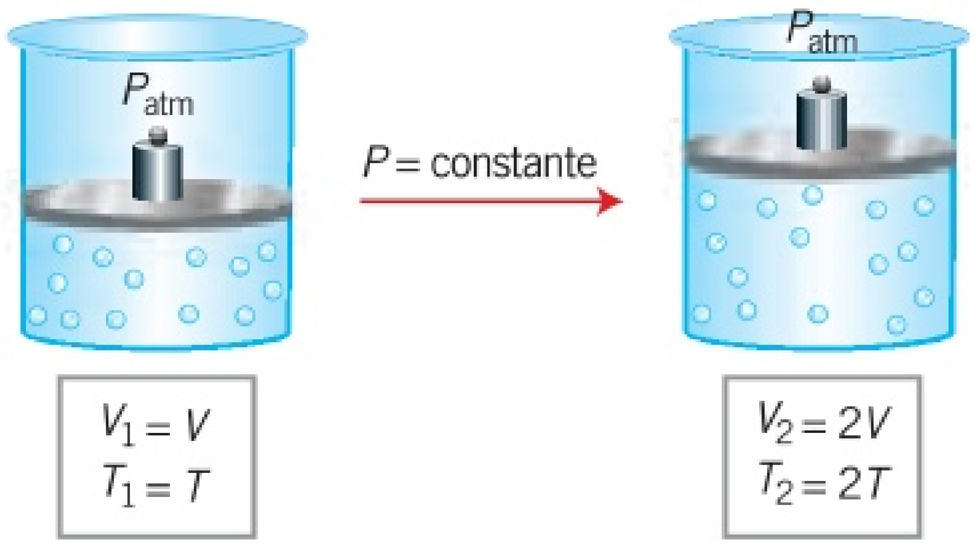




Lei de Charles

A Lei de Charles pode ser enunciada da seguinte forma:

"À pressão constante (transformação isobárica), a razão entre o volume e a temperatura (absoluta) de uma determinada massa de gás é constante; portanto, volume e temperatura são diretamente proporcionais. Qualquer aumento de temperatura produz um aumento de volume, e qualquer diminuição de temperatura produz uma diminuição de volume".

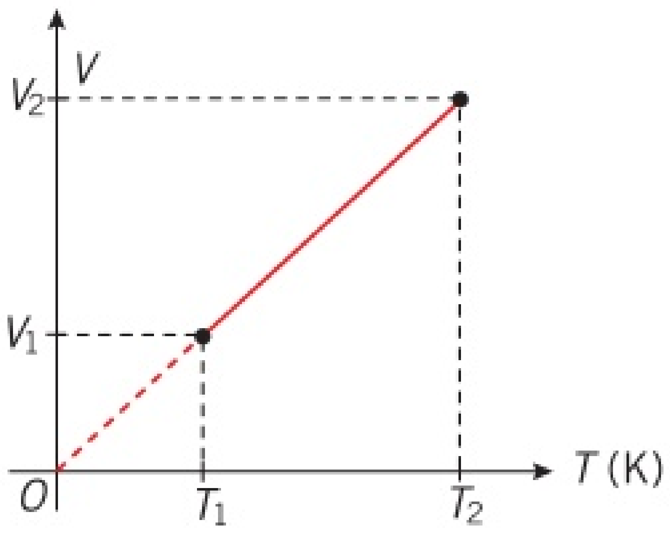


É possível calcular o volume e a temperatura desse gás por meio da expressão algébrica:

$$\boxed{\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}}$$

Nessa expressão, T_1 e T_2 são as temperaturas inicial e final, respectivamente. Da mesma forma, V_1 e V_2 são os volumes inicial e final.

Sendo $\frac{V}{T}$ = constante, temos a representação cartesiana:



Lei de Gay-Lussac

A Lei de Gay-Lussac pode ser enunciada da seguinte forma:

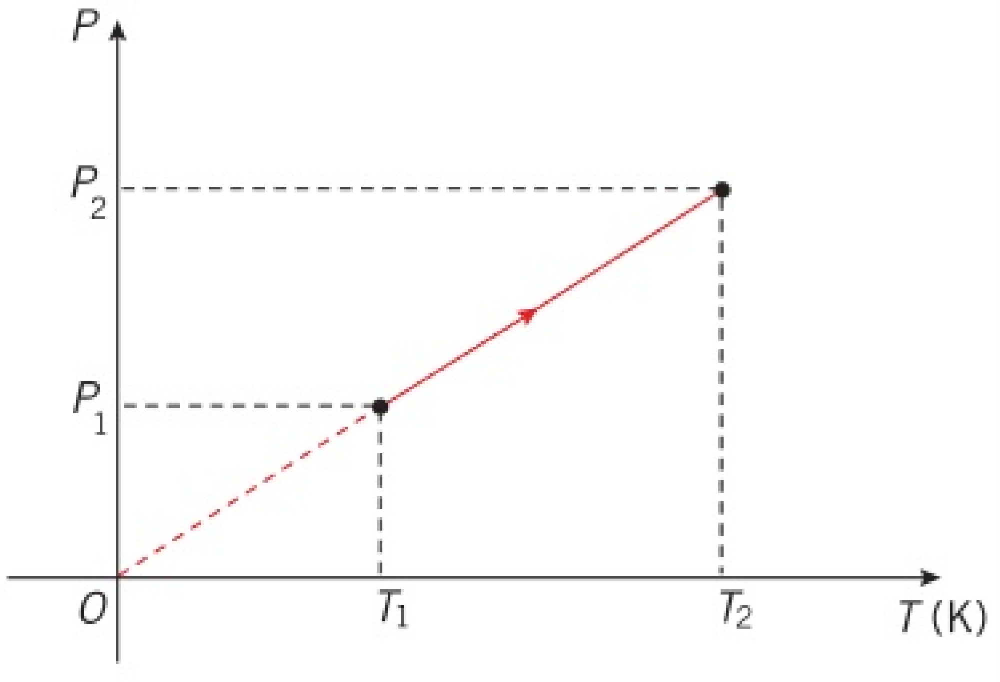
"A volume constante (transformação isométrica), a razão entre a pressão e a temperatura (absoluta) de uma determinada massa de gás é constante; portanto, pressão e temperatura são diretamente proporcionais. Qualquer aumento de temperatura produz um aumento de pressão, e qualquer diminuição de temperatura produz uma diminuição de pressão".

É possível calcular a temperatura e a pressão desse gás por meio da expressão algébrica:

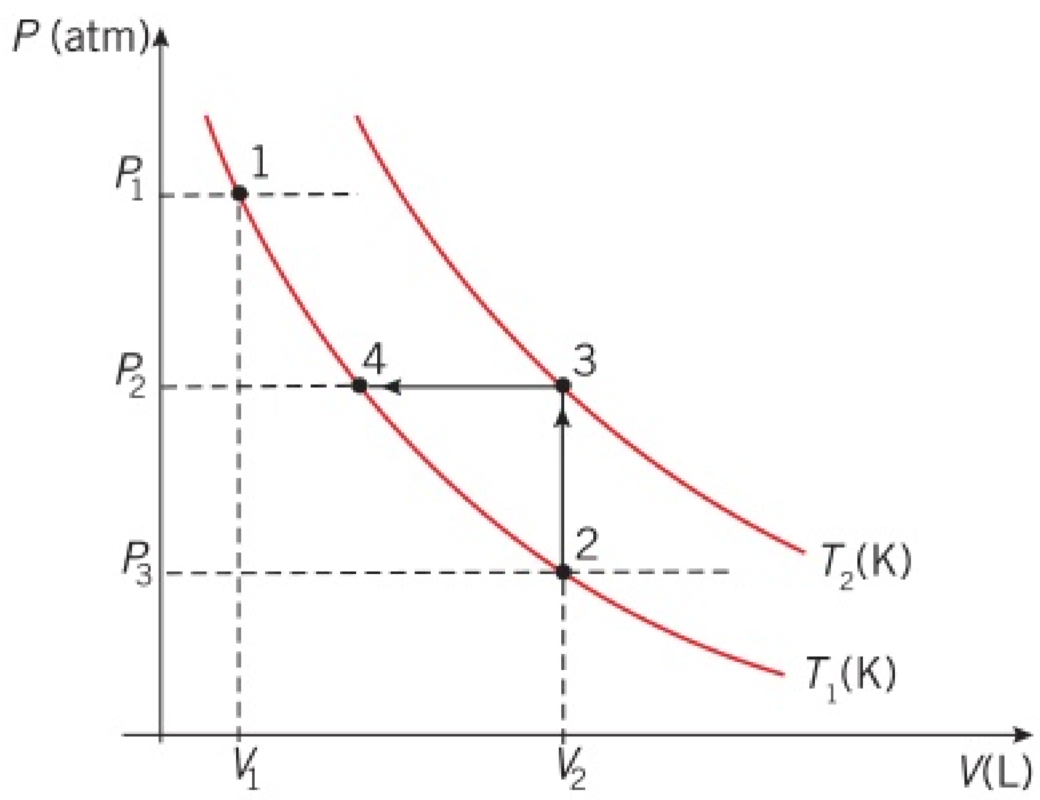
$$\boxed{\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}}$$

Nessa expressão, T_1 e T_2 são as temperaturas inicial e final, respectivamente. Da mesma forma, P_1 e P_2 são as pressões inicial e final.

Sendo $\frac{P}{T}$ = constante, temos a representação cartesiana ao lado.



1 (Cesgranrio-RJ) A análise do gráfico, que mostra as transformações sofridas por um gás ideal quando variamos a sua temperatura, pressão ou volume, nos permite afirmar que o gás evolui:



a) isobaricamente de 1 a 2.

b) isotermicamente de 2 a 3.

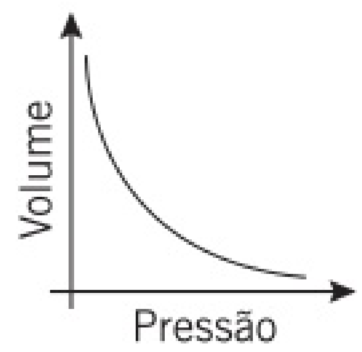
→ c) isobaricamente de 3 a 4.

d) isometricamente de 4 a 2.

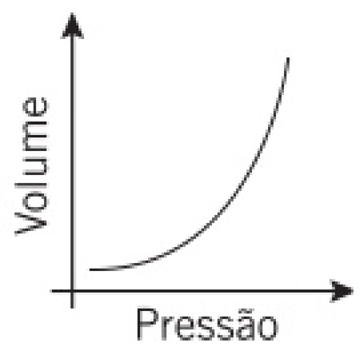
e) isometricamente de 3 a 4.

2 (UFG-GO) O processo contínuo da respiração consiste na expansão e contração de músculos da caixa torácica. Sendo um sistema aberto, quando a pressão intra-alveolar é menor que a atmosférica, ocorre a entrada do ar e os pulmões expandem-se. Após as trocas gasosas, a pressão intra-alveolar aumenta, ficando maior que atmosférica. Assim, com a contração da caixa torácica, os gases são expirados. Considerando a temperatura interna do corpo humano constante e igual a 37,5 °C, o gráfico que representa os eventos descritos é:

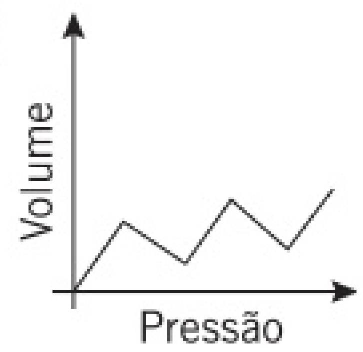
→ a)



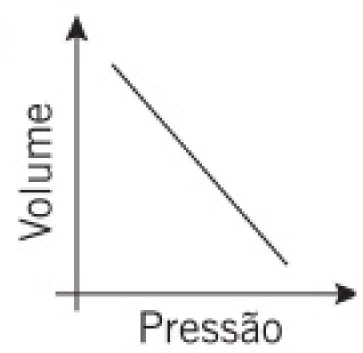
c)



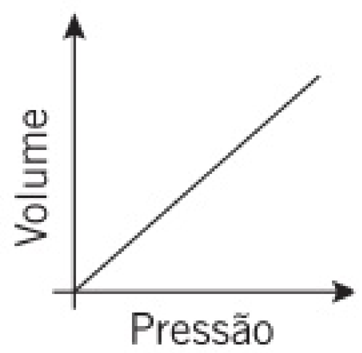
e)



b)



d)



3 (Unitau-SP) Se numa transformação isobárica, uma massa gasosa tiver seu volume aumentado de $\frac{3}{4}$, a temperatura:

a) permanecerá constante.

→ b) aumentará na proporção de $\frac{7}{4}$.

c) diminuirá na proporção de $\frac{7}{4}$.

d) duplicará seu valor.

e) triplicará seu valor.

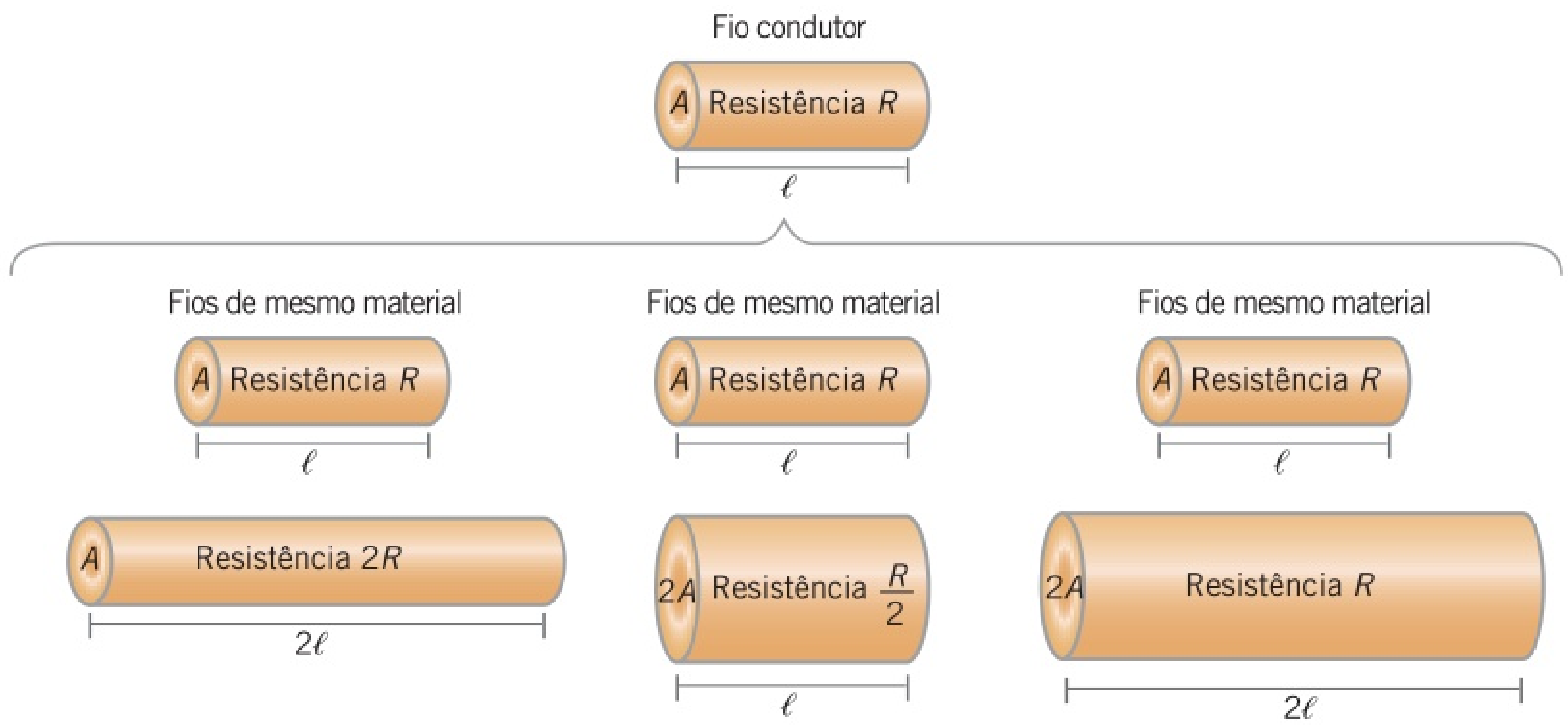
4 (Enem)

A resistência elétrica e as dimensões do condutor

A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre:

- resistência (R) e comprimento (ℓ), dada a mesma secção transversal (A);
- resistência (R) e área da secção transversal (A), dado o mesmo comprimento (ℓ) e
- comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.



As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimento (ℓ), resistência (R) e área da secção transversal (A), e entre comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A) são, respectivamente:

a) direta, direta e direta.
b) direta, direta e inversa.
→ c) direta, inversa e direta.
d) inversa, direta e direta.
e) inversa, direta e inversa.

5 (UPM-SP) Na tabela a seguir, de valores positivos, F é diretamente proporcional ao produto de L pelo quadrado de H.

F	L	H
2000	3	4
3000	2	x

Então x vale:

a) 5.
→ b) 6.
c) 7.
d) 8.
e) 9.

6 (FGV-SP) Uma variável y é inversamente proporcional ao quadrado de outra variável x. Para $x = 3$, y vale 15. Então, se $x = 4$, y deverá valer:

a) $\frac{1}{16}$.
b) $\frac{15}{16}$.
c) $\frac{45}{16}$.
→ d) $\frac{135}{16}$.
e) $\frac{625}{16}$.

Anotações

AULA 16

Competência 4 Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade 16 Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

Em classe

REGRA DE TRÊS

Geralmente podemos usar regra de três para resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

Regra de três simples

É um método prático para resolver problemas que envolvem duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

Veja os exemplos:

1) Certa máquina produz 200 peças trabalhando durante 30 minutos. Quantas peças produzirá em 3 horas e 30 minutos?

Número de peças	Tempo (min)
200 ↑	30 ↑
x	210

$$\frac{200}{x} = \frac{30}{210} \Leftrightarrow x = \frac{200 \cdot 210}{30} = 1\,400$$

2) Um trem, deslocando-se a uma velocidade média de 400 km/h, faz um determinado percurso em 3 horas. Em quanto tempo faria esse mesmo percurso se a velocidade utilizada fosse de 480 km/h?

Velocidade (km/h)	Tempo (h)
400 ↑	3 ↓
480	x

Como são grandezas inversamente proporcionais, temos:

$$\frac{480}{400} = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3 \cdot 400}{480} = 2{,}5$$

Ou seja, o trem faria o percurso em duas horas e meia.

Texto para a próxima questão.

O biodiesel resulta da reação química desencadeada por uma mistura de óleo vegetal (soja, milho, mamona, babaçu e outros) com álcool de cana. O ideal é empregar uma mistura do biodiesel com *diesel* de petróleo, cuja proporção ideal ainda será definida. Quantidades exageradas de biodiesel fazem decair o desempenho do combustível.

(PUCC-SP) A tabela a seguir mostra as anotações feitas por um pesquisador ao testar o desempenho de um certo carro em uma estrada, usando dois tipos de combustível: o *diesel* de petróleo e o *diesel* vegetal.

	Distância percorrida (km)	Consumo (km/L)
Diesel de petróleo	582	$x - 0{,}45$
Diesel vegetal	600	x

Nessas condições, o valor correto que o pesquisador encontrou para x foi:

a) 14,55.
→ b) 15.
c) 15,55.
d) 18.
e) 18,55.

Como o consumo é diretamente proporcional à distância percorrida, temos:

$\frac{582}{600} = \frac{x - 0{,}45}{x} \Rightarrow x = 15$

Em casa

TEXTO DE APOIO

Cálculo estequiométrico é o cálculo envolvido na determinação das quantidades de reagentes e produtos participantes de certa reação química, baseado nos coeficientes da equação que representa a reação.

Quando a equação está balanceada, os coeficientes nos dão a proporção em mols dos reagentes e produtos da reação.

Para exemplificarmos, considere a reação entre monóxido de carbono e gás oxigênio, resultando em dióxido de carbono, representada pela equação balanceada:

$$2\ CO(g) + 1\ O_2(g) \rightarrow 2\ CO_2$$

Massas moleculares: CO (28 g/mol), O_2 (32 g/mol) e CO_2 (44 g/mol).

Analisando a equação, observamos que dois mols de CO reagem com um mol de O_2, formando dois mols de CO_2.

Lembrando que mol é o número de Avogadro ($6{,}02 \times 10^{23}$) de partículas, massa molar é a massa, em gramas, de um mol de partículas e numericamente igual à massa molecular da substância, e que um mol de gás, nas CNTP, ocupa o volume de 22,4 L, podemos construir, com base na reação apresentada e no uso de regra de três, a tabela abaixo:

	2 CO	+	1 O_2	⟶	2 CO_2
Em mols	2 mols de CO	reagem com	1 mol de O_2	resultando	2 mols de CO_2
Em massa	56 g de CO	reagem com	32 g de O_2	resultando	88 g de CO_2
Em volume (CNTP)	44,8 L de CO	reagem com	22,4 L de O_2	resultando	44,8 L de CO_2
Em moléculas	$12 \cdot 10^{23}$ moléculas de CO	reagem com	$6 \cdot 10^{23}$ moléculas de O_2	resultando	$12 \cdot 10^{23}$ moléculas de CO_2

1 Qual é a massa, em quilograma, de monóxido de carbono necessária para reagir com 640 g de oxigênio?

a) 0,61
b) 0,84
→ c) 1,12
d) 1,68
e) 2,24

2 Quantas moléculas de oxigênio são necessárias para reagir com 12 mols de monóxido de carbono?

a) $0,4 \cdot 10^{24}$
b) $1,2 \cdot 10^{24}$
c) $2,0 \cdot 10^{24}$
d) $2,4 \cdot 10^{24}$
→ e) $3,6 \cdot 10^{24}$

3 Que volume de dióxido de carbono, nas CNTP, será fornecido, sabendo-se que na reação o oxigênio participou com 1 280 g?

a) 224 L
b) 448 L
c) 896 L
→ d) 1 792 L
e) 2 016 L

4 (Enem)

Observe as dicas para calcular a quantidade certa de alimentos e bebidas para as festas de fim de ano:

- Para o prato principal, estime 250 gramas de carne para cada pessoa.
- Um copo americano cheio de arroz rende o suficiente para quatro pessoas.
- Para a farofa, calcule quatro colheres de sopa por convidado.
- Uma garrafa de vinho serve seis pessoas.
- Uma garrafa de cerveja serve duas.
- Uma garrafa de espumante serve três convidados.

Quem organiza festas faz esses cálculos em cima do total de convidados, independente do gosto de cada um.

Quantidade certa de alimentos e bebidas evita o desperdício da ceia. Disponível em: <www.g1.globo.com/jornal-hoje/noticia/2010/12/quantidade-certa-de-alimentos-e-bebidas-evita-o-desperdicio-da-ceia.html>. Acesso em: 17 dez. 2010. Adaptado.

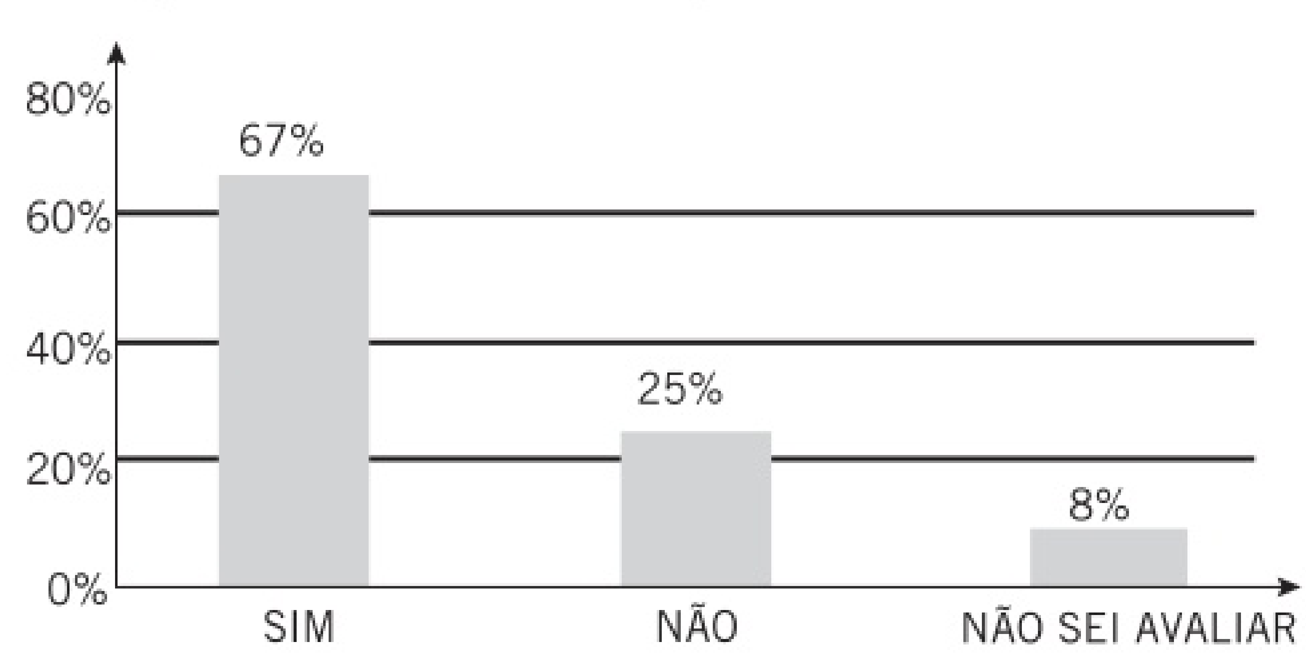
Um anfitrião decidiu seguir essas dicas ao se preparar para receber 30 convidados para a ceia de Natal. Para seguir essas orientações à risca, o anfitrião deverá dispor de:

a) 120 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.
b) 120 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 30 de cerveja e 10 de espumante.
c) 75 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.
d) 7,5 kg de carne, 7 copos americanos, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 30 de cerveja e 10 de espumante.
→ e) 7,5 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.

5 (Enem) Muitas medidas podem ser tomadas em nossas casas visando à utilização racional de energia elétrica. Isso deve ser uma atitude diária de cidadania. Uma delas pode ser a redução do tempo no banho. Um chuveiro com potência de 4 800 W consome 4,8 kW por hora. Uma pessoa que toma dois banhos diariamente, de 10 minutos cada, consumirá, em sete dias, quantos kW?

a) 0,8
b) 1,6
c) 5,6
→ d) 11,2
e) 33,6

6 (Enem) Uma enquete, realizada em março de 2010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três as alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico.



ÉPOCA. Globo, ed. 619, 29 mar. 2010. Adaptado.

Analisando os dados do gráfico, quantos internautas responderam "NÃO" à enquete?

a) Menos de 23.
b) Mais de 23 e menos de 25.
→ c) Mais de 50 e menos de 75.
d) Mais de 100 e menos de 190.
e) Mais de 200.

AULA 17

Competência 4 Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade 17 Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

Em classe

PORCENTAGEM E JUROS

Porcentagem

Porcentagem é uma razão centesimal, ou seja, o denominador é igual a 100. Assim, ao escrevermos $x\%$, estamos representando o número $\frac{x}{100}$.

Exemplo:

$\frac{30}{100}$, que se indica 30%.

Isso significa que a porcentagem é uma medida que relaciona um todo de cem partes iguais (denominador) com uma determinada parcela desse todo (numerador).

Porcentagem sobre um determinado valor

Exemplo:

Calcule 20% de 500.

$$\frac{20}{100} \cdot 500 = 100$$

Porcentagem sobre porcentagem

Exemplo:

Calcule 20% de 30%.

$$\frac{20}{100} \cdot \frac{30}{100} = \frac{6}{100} = 6\%$$

Juros simples

Investido ou emprestado um capital C a uma taxa i (em porcentagem), durante um período t, o cálculo do juro simples é dado por:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

Os juros simples são sempre calculados sobre o capital inicial, sendo diretamente proporcionais ao capital e ao tempo de aplicação.

A taxa i e o tempo t referem-se sempre à mesma unidade de tempo.

Juros compostos

Investido ou emprestado um capital C a uma taxa i (em porcentagem), durante um período t, o cálculo do juro composto é dado por:

$$J = \left[\left(1 + \frac{i}{100}\right)^t - 1\right] \cdot C$$

Os juros compostos são sempre calculados sobre o montante, que é a soma do capital inicial com os juros, sendo a modalidade de juros usada na prática no mercado financeiro.

A taxa i e o tempo t referem-se sempre à mesma unidade de tempo.

Montante

O montante (M) é a soma do capital (C) mais o juro (J), ou seja:

$$M = C + J$$

Aumento e desconto

Sendo V_i um valor inicial e V_f um valor final, temos:

Aumento:

$V_f = V_i \cdot F$, em que F denota um fator de correção dado por $1 + \frac{x}{100}$, sendo x o percentual de aumento.

Desconto:

$V_f = V_i \cdot F$, em que F denota um fator de correção dado por $1 - \frac{x}{100}$, sendo x o percentual de desconto.

1 (Enem)

Nos últimos cinco anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram internadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil internações pelo mesmo motivo.

ÉPOCA. São Paulo: 26 abr. 2010. Adaptado.

Suponha que, nos próximos cinco anos, haja um acréscimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção. De acordo com as informações dadas, o número de homens que seriam internados por AVC, nos próximos cinco anos, corresponderia a:

a) 4 mil.
b) 9 mil.
c) 21 mil.
→ d) 35 mil.
e) 39 mil.

Do enunciado, temos que a porcentagem de crescimento de internação das mulheres é de:

$\frac{8\,000}{32\,000} = 0,25 = 25\%$

Como o acréscimo do número de internações de homens será o mesmo que o de mulheres, então o número de homens com AVC será: $28\,000 \cdot 1,25 = 35\,000$ homens

2 (Enem) Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R$ 3 800,00 gerado pela aplicação. A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de:

a) R$ 4 222,22.
b) R$ 4 523,80.
→ c) R$ 5 000,00.
d) R$ 13 300,00.
e) R$ 17 100,00.

Sendo C o capital empregado, temos:
$0,7 \cdot C + 0,2 \cdot 0,3 \cdot C = 3\,800,00 \Rightarrow C = 5\,000,00$

3 (Enem)

Em 2006, a produção mundial de etanol foi de 40 bilhões de litros e a de biodiesel, de 6,5 bilhões. Neste mesmo ano, a produção brasileira de etanol correspondeu a 43% da produção mundial, ao passo que a produção dos Estados Unidos da América, usando milho, foi de 45%.

Disponível em: <http://planetasustentavel.abril.com.br>. Acesso em: 2 maio 2009.

Considerando que, em 2009, a produção mundial de etanol seja a mesma de 2006 e que os Estados Unidos produzirão somente a metade de sua produção de 2006, para que o total produzido pelo Brasil e pelos Estados Unidos continue correspondendo a 88% da produção mundial, o Brasil deve aumentar sua produção em, aproximadamente:

a) 22,5%.
b) 50,0%.
→ c) 52,3%.
d) 65,5%.
e) 77,5%.

- Produção brasileira de etanol em 2006:
  43% de 40 = 17,2 bilhões de litros
- Produção dos Estados Unidos em 2006:
  45% de 40 = 18,0 bilhões de litros

Portanto, em 2006, o Brasil e os Estados Unidos produziram 35,2 bilhões de litros de etanol.
Produção dos Estados Unidos em 2009: 9,0 bilhões de litros (metade da sua produção de 2006).
Logo, o aumento da produção brasileira, em 2009, é de 9,0 bilhões de litros para manter a produção de 35,2 bilhões de litros.
O aumento percentual da produção brasileira é dado por:

$\frac{9,0}{17,2} \cdot 100\% = 52,3\%$

Em casa

TEXTO DE APOIO

Brasileiro quer retorno alto sem riscos

Pesquisa afirma que as pessoas têm alta expectativa de retorno financeiro, mas pouca propensão a ter perda nas aplicações

© FABIO FERSA/SHUTTERSTOCK

Segundo o levantamento, contudo, 33% dos brasileiros não têm qualquer tipo de investimento (Pedro Rubens).

Se não quiserem correr riscos, os investidores brasileiros terão de se adaptar à nova realidade do país, de menores retornos financeiros. A opinião é do diretor e responsável pela Franklin Templeton Investments no Brasil, Heitor de Souza Lima, ao analisar a Pesquisa Global de Opinião dos Investidores feita pela empresa. "Diante de um novo panorama de juros baixos, o brasileiro vai viver um dilema: ou aumenta os riscos ou reduz a expectativa de retorno."

De acordo com o levantamento, o brasileiro tem uma das maiores expectativas de retorno do mundo, mas é um dos menos propensos a ter perda nas aplicações: 48% dos investidores do país esperam obter retorno entre 5% e 15%, o que Lima classifica de "relevante". Outros 30% acreditam que obterão um retorno de 15% a 25%. "Esse retorno alto é muito advindo do que o país teve nos últimos anos. Porém, é uma situação que não vai se repetir daqui para frente."

Há, no entanto, outro dado relevante no estudo. São poucos os brasileiros investidores. O resultado aponta que 33% não têm qualquer tipo de investimento, 29% têm imóveis e 7,7% investem em renda variável. "Com esse aumento da classe C, você começa a ter pessoas preocupadas com suas aposentadorias, por exemplo. Tudo isso parte do aumento da renda da população e houve um inequívoco avanço nesse aspecto", afirmou Lima.

Lima observou que a importância que o investidor dá é para o retorno garantido, ou seja, não está disposto a perder dinheiro. "Isso acontece porque, até hoje, o investidor brasileiro tem surfado essa onda de juros reais altos e conseguia ter um retorno bem razoável, com pouquíssimo risco."

O panorama do país está mudando e os investidores precisam adaptar suas expectativas. "Os juros tendem a ser certamente mais baixos do que foram no passado. Os retornos também serão menores. A própria poupança, que dava o retorno sem risco, já não dá mais o mesmo retorno", afirmou o executivo.

Otimismo – Na pesquisa, 22% dos aplicadores brasileiros declararam-se extremamente otimistas; 23% muito otimistas; 18% otimistas; 26% neutros; e 6% um pouco pessimistas em relação à perspectiva econômica do país nos próximos três anos. "O brasileiro é um dos mais otimistas, muito por conta da boa performance da economia brasileira dos últimos anos. E é natural que o investidor na Europa, por exemplo, seja mais pessimista que o do Brasil", disse Lima.

A pesquisa da Franklin Templeton apontou ainda que os brasileiros não se entusiasmam tanto com o investimento internacional. Questionados sobre onde aplicariam se tivessem de escolher um só lugar, a maioria (74%) respondeu o próprio país. "Esse investimento fora do país para pessoas físicas é possível através de fundos multimercados que investem até 20% fora, mas ainda é um percentual baixo que é utilizado para isso, então os próprios gestores vão ter de aprender como fazer isso se quiserem ampliar o cardápio de investimentos", declarou Lima.

Foram entrevistados 20 623 investidores de 19 países: Brasil, Chile, México, Canadá, Estados Unidos, Austrália, China, Japão, Hong Kong, Índia, Malásia, Coreia do Sul, Cingapura, Bélgica, França, Alemanha, Itália, Polônia e Reino Unido. As entrevistas foram feitas entre 30 de janeiro e 13 de fevereiro, com exceção do Canadá, onde a pesquisa foi realizada de 2 a 8 de março.

Brasileiro quer retorno alto sem riscos. Disponível em: <http://veja.abril.com.br/noticia/economia/brasileiro-quer-retorno-alto-sem-riscos>. Acesso em: 10 abr. 2013.

Um tema que tem chamado a atenção dos brasileiros, sabendo das limitações dos planos de aposentadoria do INSS, é a complementação de aposentadorias através de planos privados de previdência.

Imaginemos que um funcionário de uma empresa decida participar de um plano privado de aposentadoria. Sabendo que ele deseja receber uma complementação mensal de certo valor e considerando uma taxa real de juros, desconsiderada a inflação, qual deverá ser o depósito mensal a ser efetuado durante o tempo em que estiver trabalhando para ele garantir, após parar de trabalhar, a quantia a ser retirada durante um período estabelecido?

Temos aqui uma situação na qual o conceito de juros compostos se faz necessário.

Para exemplificar, consideremos a seguinte situação:

- Idade atual do funcionário: 20 anos.
- Anos de contribuição: 35 anos ($n = 420$ meses).
- Valor da aposentadoria correspondente a valores de hoje: R$ 2 000,00 mensais (R).
- Tempo de retirada: 20 anos ($p = 240$ meses).

Para tanto, devemos responder à pergunta: qual deve ser o valor do depósito mensal (C) que o funcionário deverá efetuar, a partir de hoje, a fim de garantir a retirada pretendida, considerando uma taxa (i) de 0,5% ao mês?

Nos livros de Matemática Financeira, encontramos as fórmulas que dão resposta a essa pergunta. Para tanto, temos:

1) Seja M a quantia a ser aplicada a uma taxa (i) de 0,5% ao mês para gerar uma retirada mensal (R) de R$ 2 000,00 durante 240 meses (p);
2) Seja C o depósito mensal a ser aplicado a uma taxa (i) de 0,5% ao mês, que irá gerar um montante M, ao final de 420 meses (n).

$$M = C \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \text{ e } M = R \cdot \left[\frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^p \cdot i}\right]$$

Fazendo a substituição dos valores e utilizando uma calculadora, temos:

$$M = C \cdot \left[\frac{(1+0{,}005)^{420} - 1}{0{,}005}\right] \text{ e } M = 2000 \cdot \left[\frac{(1+0{,}005)^{240} - 1}{(1+0{,}005)^{240} \cdot 0{,}005}\right]$$

O valor M representa, na primeira fórmula, o montante que será acumulado ao longo dos 420 meses de contribuição e será também o valor M, na segunda fórmula, do qual serão feitas as retiradas a partir do momento em que o funcionário começar a receber as parcelas da aposentadoria.

Logo, devemos igualar as duas fórmulas para obter o valor (C) do depósito mensal:

$$C \cdot \left[\frac{(1+0{,}005)^{420} - 1}{0{,}005}\right] = 2000 \cdot \left[\frac{(1+0{,}005)^{240} - 1}{(1+0{,}005)^{240} \cdot 0{,}005}\right],$$

do qual resulta $C =$ R$ 195,94.

1 Segundo a matéria da *Veja* na página anterior e considerando uma população de 192 000 000 de brasileiros, quantos são os que não têm qualquer tipo de investimento?

a) 33 000 000
b) 48 680 000
→ c) 63 360 000
d) 96 848 000
e) 124 680 000

2 Ainda nessa matéria da *Veja*, considere aqueles aplicadores que se declaram extremamente otimistas e muito otimistas como investidores potenciais para planos privados de aposentadoria. Pode-se afirmar que o número estimado de brasileiros que pretendem investir em plano de previdência privada, considerando uma população de 192 000 000 de pessoas, é aproximadamente:

→ a) 55% maior do que o número dos que investem em imóveis.
b) 35% maior do que o número dos que investem em imóveis.
c) 45% menor do que o número dos que investem em imóveis.
d) 35% menor do que o número dos que investem em imóveis.
e) 55% menor do que o número dos que investem em imóveis.

3 Suponha que uma pessoa que tem 55 anos e que vai se aposentar aos 65 anos decida fazer um plano de previdência privada, investindo mensalmente durante todos os meses que lhe restam até se aposentar. Considerando-se uma taxa de juros de 0,8% ao mês e que pretende usufruir do benefício pelo mesmo período que contribuiu, quanto deverá investir mensalmente para ter uma retirada mensal de R$ 2600,00?

Considere: $1{,}008^{240} = 6{,}76$.

a) R$ 600,00
b) R$ 700,00
c) R$ 800,00
d) R$ 900,00
→ e) R$ 1000,00

4 (Enem) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento *A*: 3% ao mês.

Investimento *B*: 36% ao ano.

Investimento *C*: 18% ao semestre.

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	$1{,}03^n$
3	1,093
6	1,194
6	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá:

a) escolher qualquer um dos investimentos *A*, *B* ou *C*, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
b) escolher os investimentos *A* ou *C*, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.
→ c) escolher o investimento *A*, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos *B* e *C*.
d) escolher o investimento *B*, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento *A* e de 18% do investimento *C*.
e) escolher o investimento *C*, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos *A* e *B*.

5 (Enem)

Uma resolução do Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) estabeleceu a obrigatoriedade de adição de biodiesel ao óleo *diesel* comercializado nos postos. A exigência é que, a partir de 1º de julho de 2009, 4% do volume da mistura final seja formada por biodiesel. Até junho de 2009, esse percentual era de 3%. Essa medida estimula a demanda de biodiesel, bem como possibilita a redução da importação de *diesel* de petróleo.

Disponível em: <www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 12 jul. 2009. Adaptado.

Estimativas indicam que, com a adição de 4% de biodiesel ao *diesel*, serão consumidos 925 milhões de litros de biodiesel no segundo semestre de 2009. Considerando-se essa estimativa, para o mesmo volume da mistura final *diesel*/biodiesel consumida no segundo semestre de 2009, qual seria o consumo de biodiesel com a adição de 3%?

a) 27,75 milhões de litros.
b) 37,00 milhões de litros.
c) 231,25 milhões de litros.
→ d) 693,75 milhões de litros.
e) 888,00 milhões de litros.

Anotações

AULA 18

Competência 4 Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

Habilidade 18 Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Em classe

RAZÃO E PROPORÇÃO

Razão entre dois números

Razão entre dois números a e b, nesta ordem, com $b \neq 0$, é o quociente (divisão) do primeiro pelo segundo.

Exemplo:

A razão entre os números $a = 5$ e $b = 10$ é $\frac{1}{2}$.

Proporção

Chama-se proporção à igualdade entre duas razões. De um modo genérico, representa-se uma proporção por uma das formas:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ou } a : b = c : d}$$

Duas propriedades importantes das proporções

1)

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c}$$

2)

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}}$$

1 (Unama-PA) O salário de um operário é de R$ 240,00, e o de seu chefe, R$ 600,00. Nessas condições podemos afirmar que o salário:

a) do operário é $\frac{3}{5}$ do salário do chefe.

→ b) do chefe é $\frac{5}{2}$ do salário do operário.

c) do operário é $\frac{3}{4}$ do salário do chefe.

d) do chefe é $\frac{8}{3}$ do salário do operário.

Fazendo o quociente do salário do chefe pelo do operário, temos:

$\frac{600}{240} = \frac{5}{2}$

2 (Univali-SC) Um número é dividido em duas partes diretamente proporcionais a 3 e a 2, respectivamente. Além disso, a primeira parte menos a metade da segunda parte é 20. O número é:

a) 40.
b) 10.
→ c) 50.
d) 12.
e) 15.

Sendo x a primeira parte e y a segunda, do enunciado, temos:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} \text{ e } x - \frac{y}{2} = 20$$

Resolvendo o sistema, temos $x = 30$ e $y = 20$ e, portanto, $x + y = 50$.

3 Considere as regras e fórmulas para cálculo de dose de medicamento com base no peso (massa) de um paciente:

Nome da regra ou fórmula	Particularidade da regra	Fórmula
Regra de Clark	Peso corporal < 30 kg	$DP = \frac{DA \times \text{Peso da criança (kg)}}{70 \text{ kg}}$
Regra de Law	< de 1 ano de idade	$DP = \frac{DA \times \text{Idade da criança (em meses)}}{150}$
Regra de Young	De 1 a 12 anos de idade	$DP = \frac{DA \times \text{Idade da criança (em anos)}}{(\text{Idade da criança} + 12)}$

DP = dose pediátrica

DA = dose do adulto já estabelecida

Disponível em: <http://portal.saude.gov.br/portal/arquivos/multimedia/paginacartilha/docs/farmacosc.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2013.

Considere as seguintes afirmações:

I) Um médico receita, para uma criança de 8 anos, uma dose de 12 mg. A dose correspondente para um adulto será de 30 mg, usando a regra de Young.

II) Considerando os valores de $DP = 12$ mg e $DA = 30$ mg, o peso (massa) de uma criança será 40% do peso de um adulto de 70 kg, segundo a regra de Clark.

III) Na regra de Law, a dose de um adulto correspondente à de uma criança de 10 meses será 15 vezes a dose pediátrica.

Assinale a alternativa correta:

a) somente (I) é verdadeira.
b) somente (II) é verdadeira.
c) somente (III) é verdadeira.
→ d) todas são verdadeiras.
e) nenhuma das três é verdadeira.

Analisando as afirmações, temos:

I) $12 = \frac{8 \times DA}{8 + 12} \Rightarrow DA = 30 \text{ mg}$

II) $12 = \frac{30 \times \text{Peso da criança (kg)}}{70 \text{ kg}} \Rightarrow \text{Peso da criança} = \frac{12}{30} \cdot 70 = 40\% \text{ de } 70 \text{ kg}$

III) $DP = \frac{10 \times DA}{150} \Rightarrow DA = 15 \cdot DP$

Em casa

TEXTOS DE APOIO

Poema

O misterioso número de ouro

Do número nasce a proporção
Da proporção se segue a consonância
A consonância causa deleitação
A nenhum sentido apraz a dissonância

Unidade, igualdade e semelhança
São princípios do contentamento
Em todos os sentidos o experimento
A alma na unidade glória alcança

Em todas as quantidades a igualdade
E a perfeição remota ou a mais chegada
Segundo a natural autoridade

E assim esta nas qualidades assentada
Da mesma maneira a semelhança
Diva de ser sentida e contemplada

MOURA, Vasco Graça. *Camões e a Divina Proporção*. 2. ed. Lisboa: INCM, 1993.

A divina proporção

A qual proporção o poeta se refere no ensaio lido?

A proporção áurea, número de ouro, número áureo ou proporção de ouro é uma constante real algébrica irracional denotada pela letra grega Φ (Phi), em homenagem ao escultor *Phidias* (Fídias), que a teria utilizado para conceber o Parthenon, e com o valor arredondado a três casas decimais de 1,618. Também é chamada de seção áurea (do latim *sectio aurea*), razão áurea, razão de ouro, média e extrema razão (Euclides), divina proporção, divina seção (do latim *sectio divina*), proporção em extrema razão, divisão de extrema razão ou áurea excelência. O número de ouro é ainda frequentemente chamado razão de Fidias.

Desde a Antiguidade, a proporção áurea é empregada na arte. É frequente a sua utilização em pinturas renascentistas, como as do mestre Giotto. Esse número está envolvido com a natureza do crescimento. Phi (não confundir com o número Pi, π), como também é chamado o número de ouro, pode ser encontrado na proporção das conchas (o náutilus, por exemplo), dos seres humanos (o tamanho das falanges, ossos dos dedos, por exemplo) e nas colmeias, entre inúmeros outros exemplos que envolvem a ordem do crescimento.

Justamente por estar envolvido no crescimento, esse número se torna tão frequente. E justamente por haver essa frequência, o número de ouro ganhou um *status* de "quase mágico", sendo alvo de pesquisadores, artistas e escritores. Apesar desse *status*, o número de ouro é apenas o que é devido aos contextos em que está inserido: está envolvido em crescimentos biológicos, por exemplo. O fato de ser encontrado através de desenvolvimento matemático é que o torna fascinante.

Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Proporção_áurea>. Acesso em: 10 abr. 2013. Adaptado.

Definição algébrica

Euclides de Alexandria descreveu a razão áurea em sua proposição "dividir um segmento de reta em média e extrema razão". Diz-se que "o ponto B divide o segmento $\overline{AC}$ em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo, isto é, $AB/BC = BC/AC$".

Dado um segmento $\overline{AC}$ de medida 1 e um ponto B interior a esse segmento e que determina no segmento $\overline{AC}$ duas partes, sendo uma parte menor $\overline{AB}$ de medida $1 - x$ e uma parte maior de medida x.

Assim, podemos escrever:

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1} = \phi$$

A igualdade acima nos conduz à equação $x^2 + x - 1 = 0$ e, como x é positivo, obtemos que $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ e consequentemente:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618 = \phi$$

1 (Cesgranrio-RJ)

O conceito de simetria surgiu na Grécia antiga, como uma tentativa de explicar a beleza por bases racionais. Os gregos não eram dados a muita subjetividade — eles gostavam de achar que havia lógica por trás de tudo. Por isso, conceberam a ideia de proporção áurea, uma relação matemática segundo a qual a divisão da medida da maior parte pela menor parte de um segmento (dividido em duas partes) é igual à divisão do segmento inteiro pela parte maior. E procuravam essa proporção mágica em tudo, inclusive em seres humanos.

SUPERINTERESSANTE. São Paulo: Abril, n. 194, nov. 2013. Adaptado.

Considere um segmento de reta $\overline{AB}$, dividido em duas partes, a e b, com $b < a$. De acordo com a descrição acima, a proporção áurea se verificaria para a igualdade:

a) $\frac{b}{a} = \frac{(a + b)}{(a - b)}$.

b) $\frac{(a - b) \cdot b}{\frac{b}{a}} = \frac{(a + b)}{b}$.

c) $\frac{a}{b} = \frac{(a - b)}{a}$.

d) $\frac{a}{b} = \frac{(a + b)}{(a - b)}$.

→ e) $\frac{a}{b} = \frac{(a + b)}{a}$.

2 De maneira geral, os televisores têm telas retangulares com medidas da base e da altura, respectivamente, na proporção 4:3. É a medida da diagonal que define de quantas polegadas é o aparelho. Imagine um monitor de computador em que a razão entre suas medidas de base e altura seja $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}62$. Qual é a área, aproximadamente, em polegadas quadradas, de um monitor de 19 polegadas? Considere $\sqrt{3{,}62} = 1{,}9$.

a) 136

b) 142

c) 158

→ d) 162

e) 188

3 Considere um retângulo em que a razão entre as medidas de seus lados seja $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (proporção áurea). Qual é a razão entre a medida de seu lado maior e seu semiperímetro? Considere $\sqrt{5} = 2{,}24$.

a) 0,42

→ b) 0,62

c) 1,24

d) 1,62

e) 2,24

4 (Enem) Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade *A*, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade *B*, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2 000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, *A* e *B*, era 8 cm. Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de:

a) 1 : 250.

b) 1 : 2 500.

c) 1 : 25 000.

d) 1 : 250 000.

→ e) 1 : 25 000 000.

5 (Enem) Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1 : 250. Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?

a) 4,8 e 11,2

b) 7,0 e 3,0

→ c) 11,2 e 4,8

d) 28,0 e 12,0

e) 30,0 e 70,0

Anotações

AULA 19

Competência 5 Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

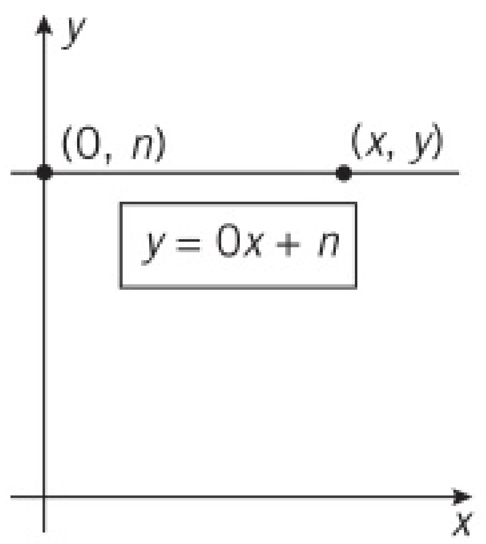
Habilidade 19 Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

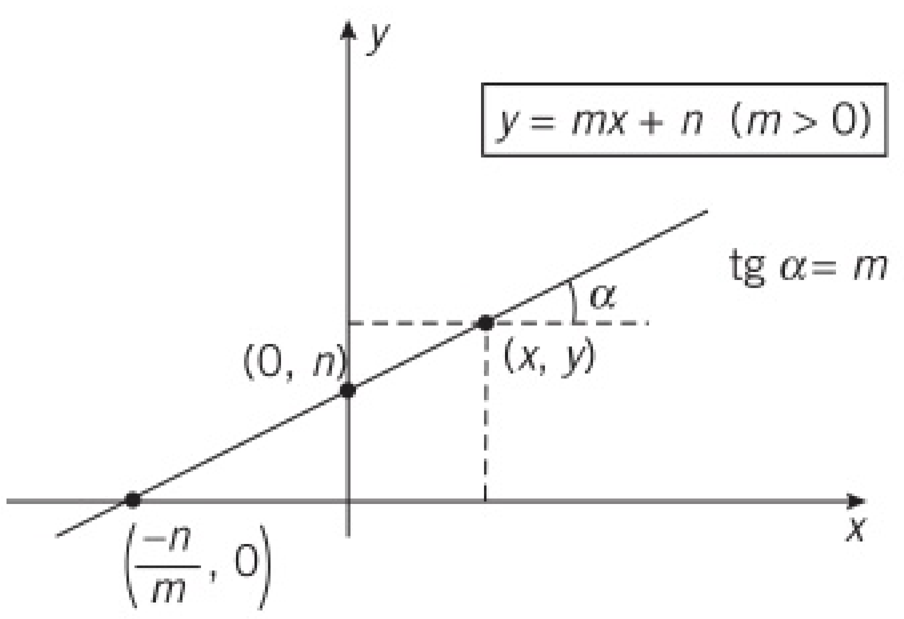
Em classe

FUNÇÃO AFIM E FUNÇÃO QUADRÁTICA

Ao estudar fenômenos, procura-se saber como as grandezas estão relacionadas entre si. Nos casos mais simples, selecionam-se duas grandezas de medidas y e x e observa-se como uma varia em função da outra; procura-se apresentar a interdependência entre y e x mediante tabelas, gráficos, equações e inequações.

Comecemos com aquelas da forma $y = mx + n$, em que m e n são constantes reais. Sendo x e y variáveis reais, podemos representar os pares ordenados (x, y) por uma reta.



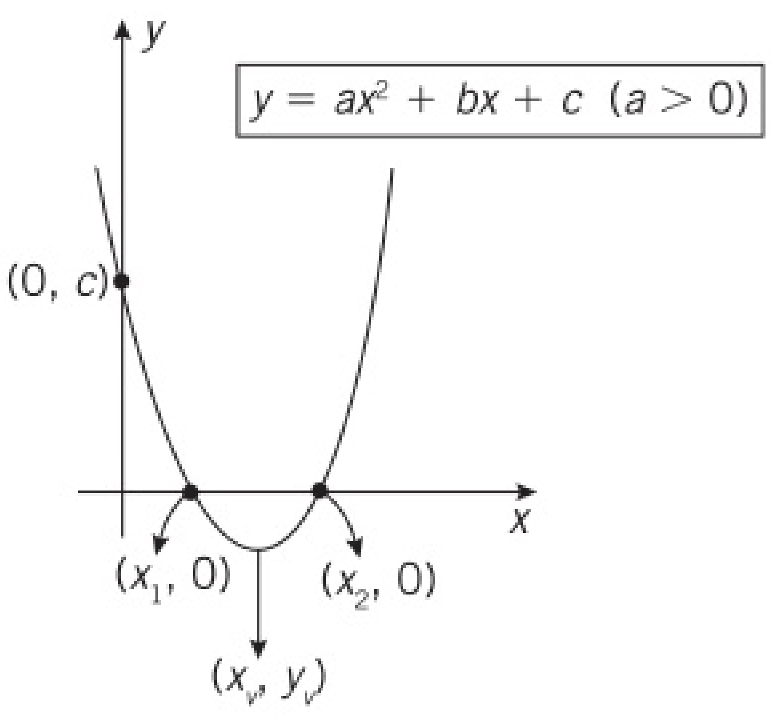


Sendo $P_0(x_0, y_0)$ e $P(x, y)$ pontos distintos da reta dada pela equação $y = mx + n$, temos que $m = \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ $\left(\text{coeficiente angular } \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$. Dessa igualdade, temos $y - y_0 = m(x - x_0)$.

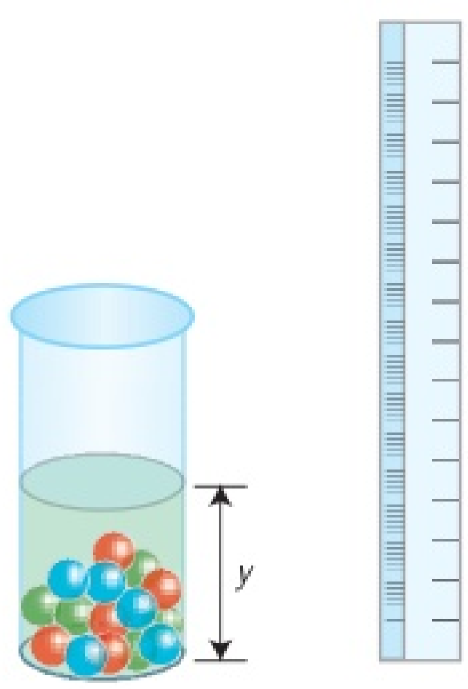
Um conjunto de pares ordenados (x, y) de números reais quaisquer, tais que se tenha uma relação da forma $y = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$ e b e c são constantes reais, pode ser representado por uma parábola.

Para quaisquer constantes reais a, $a \neq 0$, b e c:

- o vértice da parábola tem abscissa e ordenada iguais a $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ e $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$;
- a parábola intersecta o eixo y no ponto $(0, c)$;
- se $a \geqslant 0$, a parábola intersecta o eixo x nos pontos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$; com $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- com $a > 0$, a parábola tem a concavidade no sentido do eixo y;
- com $a < 0$, a parábola tem a concavidade no sentido oposto ao do eixo y.



1 (Enem) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

Número de bolas (x)	Nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: <www.penta.ufrgs.br>.
Acesso em: 13 jan. 2009. Adaptado.

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

a) $y = 30x$
b) $y = 25x + 20,2$
c) $y = 1,27x$
d) $y = 0,7x$
→ e) $y = 0,07x + 6$

A cada acréscimo de 5 bolas, o nível da água aumenta 0,35 cm. Logo, para uma variação de 5 unidades de x, temos que y varia 0,35. Assim, o nível de água (y) em função do número de bolas (x) é dado por $y = ax + b$.
Da tabela, podemos dizer que para $x = 5$, $y = 6,35$ e para $x = 10$, $y = 6,70$.
Com isso, obtemos o sistema de equações abaixo:
$$\begin{cases} 5a + b = 6,35 \\ 10a + b = 6,70 \end{cases}$$
Resolvendo o sistema, obtemos $a = 0,07$ e $b = 6$.
Logo, $y = 0,07x + 6$.

2 Diante de um sanduíche e de uma porção de batatas fritas, um garoto, muito interessado na quantidade de calorias que pode ingerir em cada refeição, analisa os dados de que dispõe. Ele sabe que a porção de batatas tem 200 g, o que equivale a 560 calorias, e que o sanduíche tem 250 g e 500 calorias. Como deseja comer um pouco do sanduíche e um pouco das batatas, ele se vê diante da questão: "Quantos gramas de sanduíche e quantos gramas de batata eu posso comer para ingerir apenas as 462 calorias permitidas para esta refeição?".

Considerando que x e y representam em gramas, respectivamente, as quantidades do sanduíche e das batatas que o garoto pode ingerir, assinale a alternativa correspondente à expressão algébrica que relaciona corretamente essas quantidades.

→ a) $2x + 2,8y = 462$
b) $2,8x + 2y = 462$
c) $1,8x + 2,3y = 1\,060$
d) $\frac{1}{2}x + 0,4y = 462$
e) $0,4x + \frac{1}{2}y = 462$

Para cada 250 g de sanduíche, temos 500 calorias; portanto, para cada x g de sanduíche temos $2x$ calorias.
Para cada 200 g de batatas, temos 560 calorias; portanto, para cada y g de batatas temos $2,8y$ calorias.
Com x g de sanduíche e y g de batatas, temos a condição $2x + 2,8y = 462$.

3 (Enem) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo.
Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função:

$$T(t) = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, \text{ para } 0 \leqslant t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, \text{ para } t \geqslant 100 \end{cases},$$

em que T é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e t é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado.

Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48 °C e retirada quando a temperatura for 200 °C. O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a:

a) 100.
b) 108.
c) 128.
→ d) 130.
e) 150.

Observe que, para $0 \leqslant t < 100$, $T(t) = \frac{7}{5}t + 20$ é uma função do 1º grau crescente.
Fazendo $T(0) = \frac{7}{5} \cdot 0 + 20$ e $T(100) = \frac{7}{5} \cdot 100 + 20 = 160$, concluímos que: $0 \leqslant T < 100 \Leftrightarrow 20 \leqslant T < 160$.
Como a peça é colocada quando está a 48 °C, o tempo decorrido desde que o forno foi ligado é dado por:
$\frac{7}{5} \cdot t + 20 = 48 \Rightarrow t = 20$, ou seja, 20 minutos
A peça deve ser retirada quando estiver a 200 °C. Assim, o tempo (t) é dado por:
$\frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320 = 200$ para $t \geqslant 100$
$t^2 - 200t + 7\,500 = 0$
Resolvendo essa equação, temos $t = 150$.
Desse modo, o tempo que a peça deve ficar no forno é dado por:
$150 + 20 = 130$, ou seja, 130 minutos.

Em casa

TEXTO DE APOIO

Para relações de dependência do primeiro grau, temos que se y é uma função de x, o que frequentemente é denotado por $y = f(x)$, é de se esperar que para uma variação Δx da variável x corresponda uma variação Δy (nula ou não) da variável y. A maneira mais comum de comparar Δy com Δx é estudando o quociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, chamado de **razão incremental**.

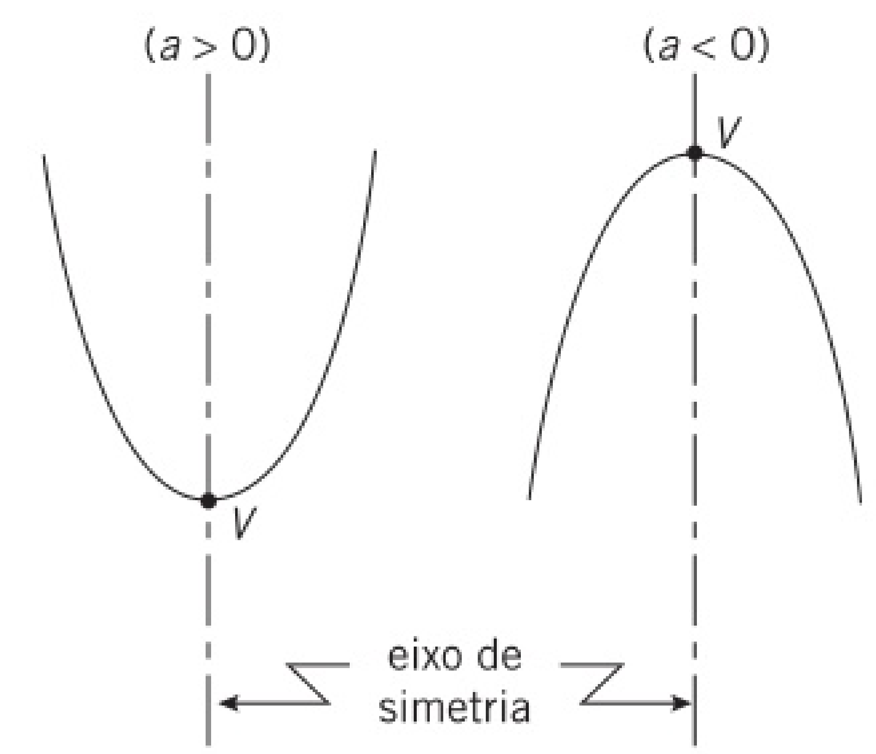
Com mais detalhes, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, em que x_1 e x_2 são valores distintos assumidos pela variável x.

Além disso, temos que:

Uma função do tipo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = ax^2 + bx + c$, a, b e c constantes reais e $a \neq 0$, é chamada função do 2º grau (ou função quadrática) e seu gráfico é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo y.

1. $\begin{cases} \text{Se } a > 0 \text{, a parábola terá concavidade ("boca") para cima.} \\ \text{Se } a < 0 \text{, a parábola terá concavidade ("boca") para baixo.} \end{cases}$
2. O ponto V é chamado vértice da parábola e, no plano cartesiano, é obtido por:

$$\boxed{V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) (\Delta = b^2 - 4ac)}$$



Considere então esta questão do Enem:

Um posto de combustível vende 10 000 litros de álcool por dia a R\$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R\$ 1,48, foram vendidos 10 200 litros.

Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R\$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é:

a) $V = 10\,000 + 50x - x^2$.
b) $V = 10\,000 + 50x + x^2$.
c) $V = 15\,000 - 50x - x^2$.
d) $V = 15\,000 + 50x - x^2$.
e) $V = 15\,000 - 50x - x^2$.

Resolução:

Ao resolver esse problema, considere a tabela:

Preço por litro (R\$)	Litros de álcool vendidos (L)	Valor arrecadado com a venda (R\$)
1,50	10 000	$1{,}50 \cdot 10\,000 = 15\,000$
1,49	10 100	$1{,}49 \cdot 10\,100 = 15\,059$
1,48	10 200	$1{,}48 \cdot 10\,200 = 15\,096$
1,47	10 300	$1{,}47 \cdot 10\,300 = 15\,141$

Então:

- O preço do litro, com x centavos de desconto, é $(150 - x)$ centavos, ou seja, $\frac{150 - x}{100}$ reais.
- Para x centavos de desconto, são vendidos $10\,000 + 100x$ litros.
- Assim, o valor V arrecadado é dado por $V = (10\,000 + 100x) \cdot \frac{150x}{100}$.
- Logo, $V = (100 + x) \cdot (150 - x)$, ou seja, $V = -x^2 + 50x + 15\,000$.

Perceba que outra pergunta relacionada ao assunto poderia ser: qual o valor do preço por litro para que o valor arrecadado seja o maior possível?

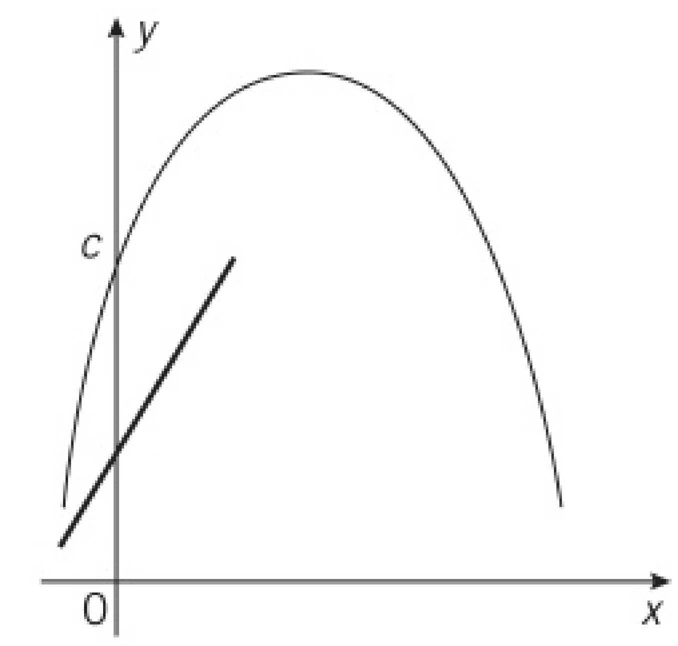
Continuemos a tabela anterior:

Preço por litro (R$)	Litros de álcool vendidos (L)	Valor arrecadado com a venda (R$)
1,46	10 400	$1{,}46 \cdot 10\,400 = 15\,184$
1,45	10 500	$1{,}45 \cdot 10\,500 = 15\,225$
1,44	10 600	$1{,}44 \cdot 10\,600 = 15\,264$

Aparentemente, parece que o valor arrecadado sempre aumentará, não importa qual seja o desconto a ser dado. Mas note-se que, com o preço a R$ 1,04 (desconto de R$ 0,46), serão vendidos $10\,000 + 46 \cdot 100 = 14\,600$ litros e, com isso, o valor arrecadado será $1{,}04 \cdot 14\,600 = 15\,184$.

Então, deve haver um valor de x tal que o valor arrecadado seja o maior possível.

O gráfico de uma função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma parábola. Nesse problema, $a < 0$ ($a = -1$) e, portanto, o gráfico pode ser esquematizado como se vê ao lado.



O vértice dessa parábola é o ponto P, tal que $x_P = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_p = f(x_v)$.

Assim, para saber o maior valor arrecadado, basta perceber que o desconto x a ser dado é tal que $x = x_P = -\dfrac{(-50)}{2 \cdot 1} = 25$ centavos.

Logo, o preço do litro será $1{,}50 - 0{,}25 = 1{,}25$ real.

1 (Enem) Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo t, em horas, em que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes são dados pelas funções $V_1(t) = 250t^3 - 100t + 3000$ e

$V_2(t) = 150t^3 + 69t + 3000$.

Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante $t = 0$ e, também, no tempo t igual a:

→ a) 1,3 h.
b) 1,69 h.
c) 10,0 h.
d) 13,0 h.
e) 16,9 h.

2 (Enem)

Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.

EXAME. São Paulo: Abril, 21 abr. 2010.

A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período, é:

a) $f(x) = 3x$.
b) $f(x) = 24$.
c) $f(x) = 27$.
→ d) $f(x) = 3x + 24$.
e) $f(x) = 24x + 3$.

3 (Enem) Certa marca de suco é vendida no mercado em embalagens tradicionais de forma cilíndrica. Relançando a marca, o fabricante pôs à venda embalagens menores, reduzindo a embalagem tradicional à terça parte de sua capacidade. Por questões operacionais, a fábrica que fornece as embalagens manteve a mesma forma, porém reduziu à metade o valor do raio da base da embalagem tradicional na construção da nova embalagem. Para atender à solicitação de redução da capacidade, após a redução no raio, foi necessário determinar a altura da nova embalagem.

Que expressão relaciona a medida da altura da nova embalagem de suco (a) com a altura da embalagem tradicional (h)?

a) $a = \dfrac{h}{12}$
b) $a = \dfrac{h}{6}$
c) $a = \dfrac{2h}{3}$
→ d) $a = \dfrac{4h}{3}$
e) $a = \dfrac{4h}{9}$

AULA 20

Competência 5 Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade 20 Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

Em classe

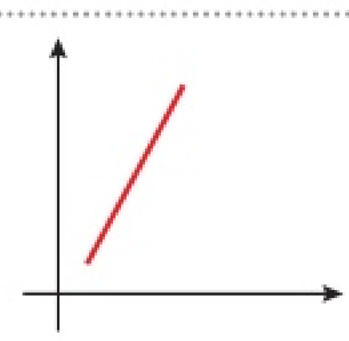
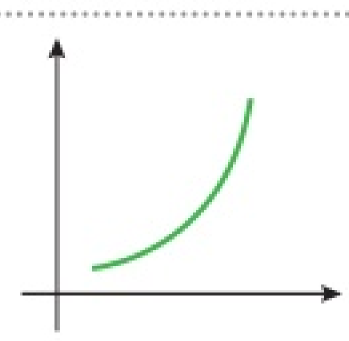
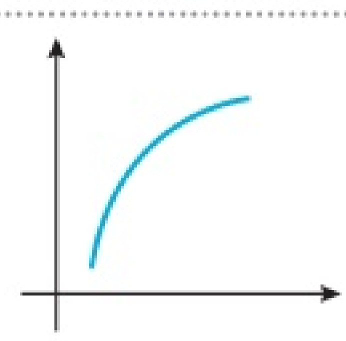
GRÁFICO DE FUNÇÃO

Funções crescentes

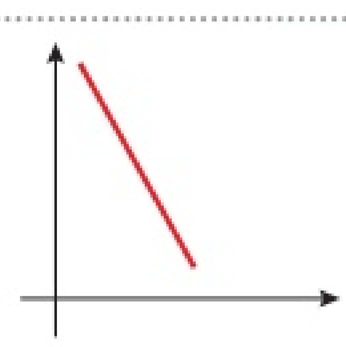
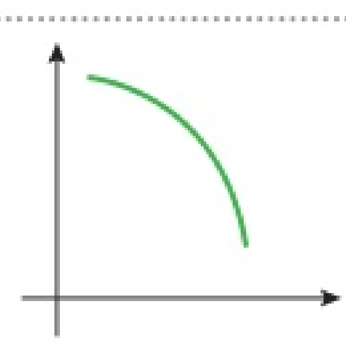
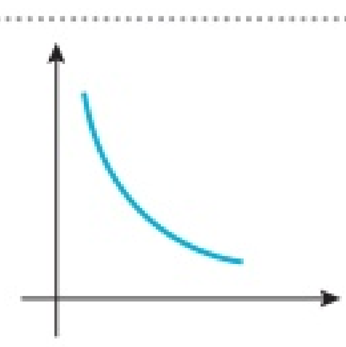
Exemplos:

x	$f(x) = 2x$	Δf	$g(x) = x^2$	Δg	$h(x) = \sqrt{x}$	Δh
0	0		0		0	
1	2	2	1	1	1	1
2	4	2	4	3	1,41	0,41
3	6	2	9	5	1,73	0,32
4	8	2	16	7	2	0,27
5	10	2	25	9	2,24	0,24
6	12	2	36	11	2,45	0,21
7	14	2	49	13	2,65	0,20
8	16	2	64	15	2,83	0,18
9	18	2	81	17	3	0,17

Com variações iguais de x, temos:

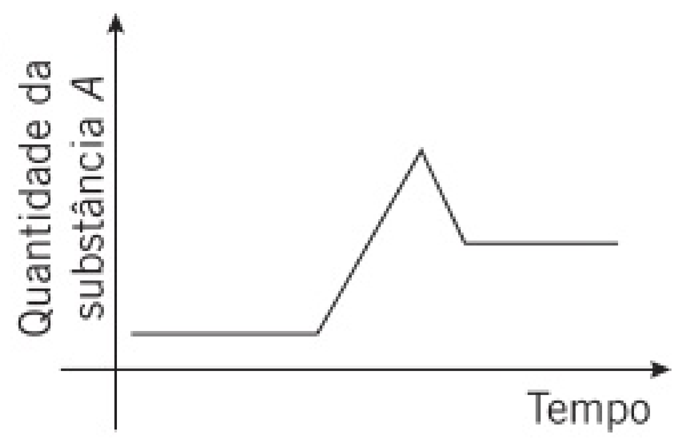
Variação da função	Δf: as variações de $f(x)$ são iguais	Δg: as variações de $g(x)$ aumentam	Δh: as variações de $h(x)$ diminuem
Crescimento da função	$f(x)$ cresce uniformemente	$g(x)$ cresce a taxas crescentes	$h(x)$ cresce a taxas decrescentes
Concavidade do gráfico			

Funções decrescentes

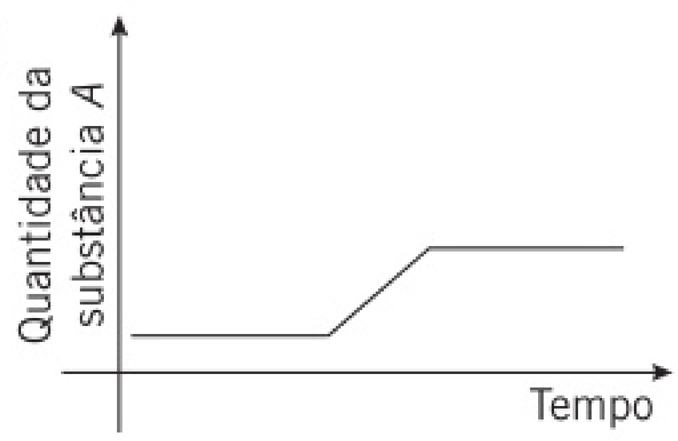
Variação da função	Δf: as variações de $f(x)$ são iguais	Δg: as variações de $g(x)$ diminuem	Δh: as variações de $h(x)$ aumentam
Crescimento da função	$f(x)$ decresce uniformemente	$g(x)$ decresce a taxas decrescentes	$h(x)$ decresce a taxas crescentes
Concavidade do gráfico			

1 (Enem) Muitas vezes o objetivo de um remédio é aumentar a quantidade de uma ou mais substâncias já existentes no corpo do indivíduo para melhorar as defesas do organismo. Depois de alcançar o objetivo, essa quantidade deve voltar ao normal. Se uma determinada pessoa ingere um medicamento para aumentar a concentração da substância *A* em seu organismo, a quantidade dessa substância no organismo da pessoa, em relação ao tempo, pode ser mais bem representada pelo gráfico:

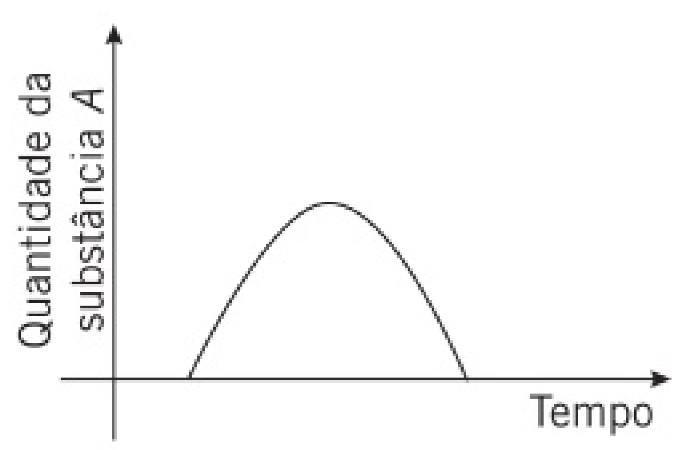
a)



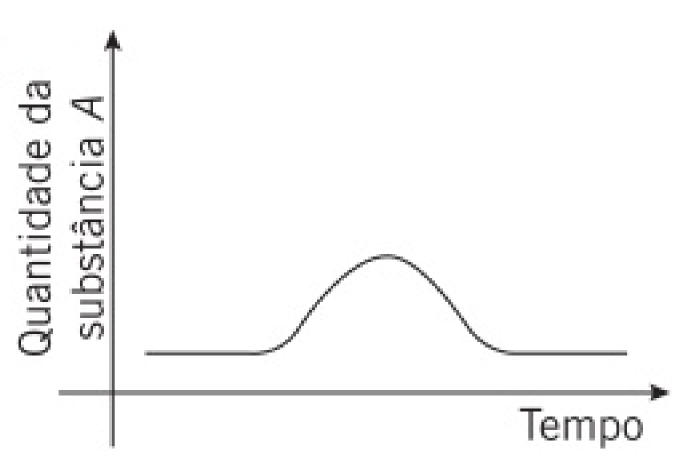
b)



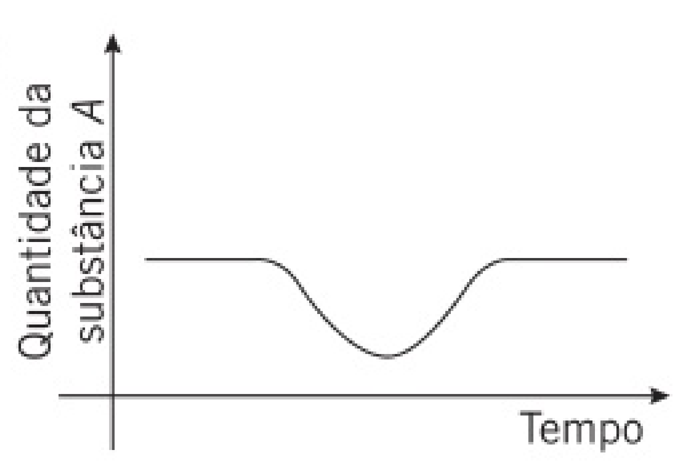
c)



→ d)

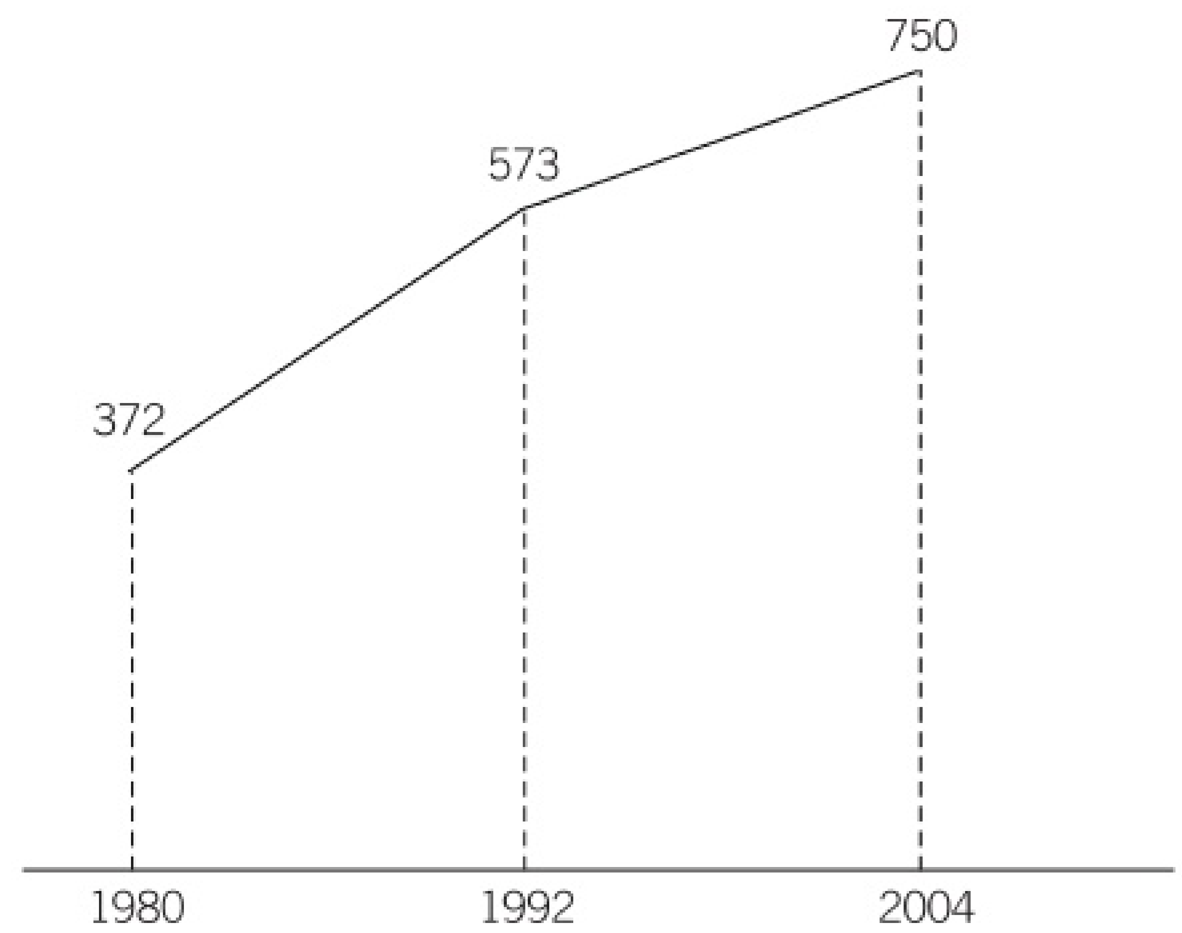


e)



Dos gráficos apresentados, o único em que a concentração aumenta para, depois, voltar ao seu valor inicial encontra-se na alternativa **d**.

2 (Enem) O gráfico mostra o número de favelas no município do Rio de Janeiro entre 1980 e 2004, considerando que a variação nesse número entre os anos considerados é linear.



ÉPOCA. Globo, n. 621, 12 abr. 2010. Adaptado.

Se o padrão na variação do período 2004/2010 se mantiver nos próximos 6 anos, e sabendo que o número de favelas em 2010 é 968, então o número de favelas em 2016 será:

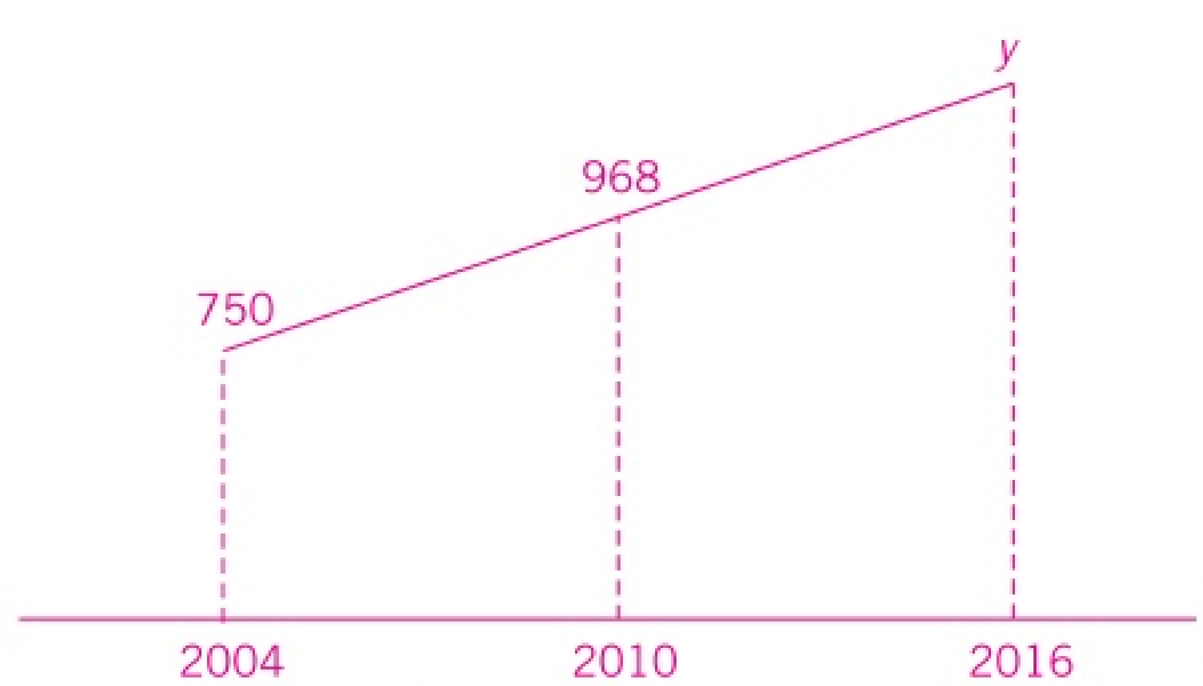
a) menor que 1 150.

b) 218 unidades maior que em 2004.

→ c) maior que 1 150 e menor que 1200.

d) 177 unidades maior que em 2010.

e) maior que 1 200.



Sendo y o número de favelas em 2016, temos $y - 968 = 968 - 750$.
Dessa igualdade, resulta $y = 1\,186$.
Portanto, o número de favelas em 2016 será maior que 1 150 e menor que 1 200.

Anotações

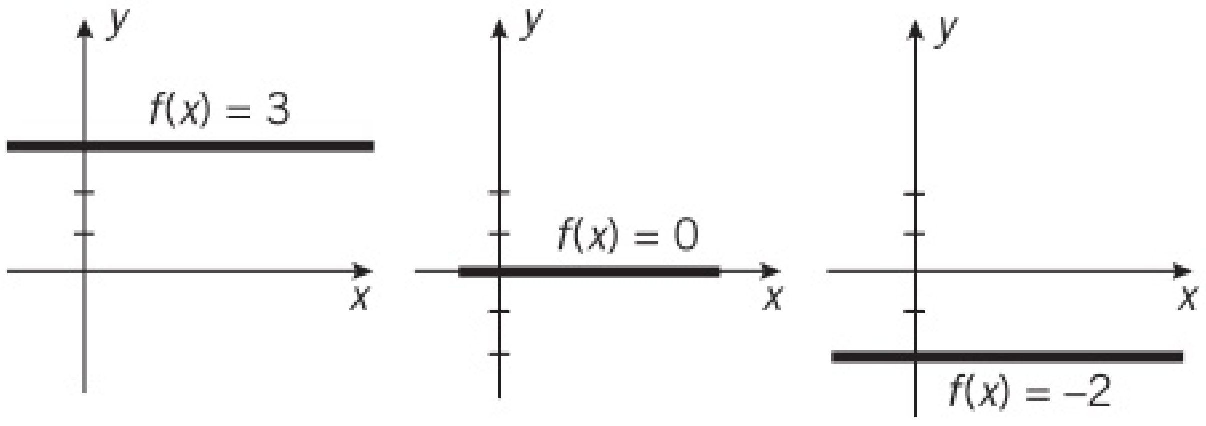
Em casa

TEXTO DE APOIO

Função constante

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, em que c é uma constante real. O gráfico é uma reta paralela ao eixo x (das abscissas).

Exemplos:

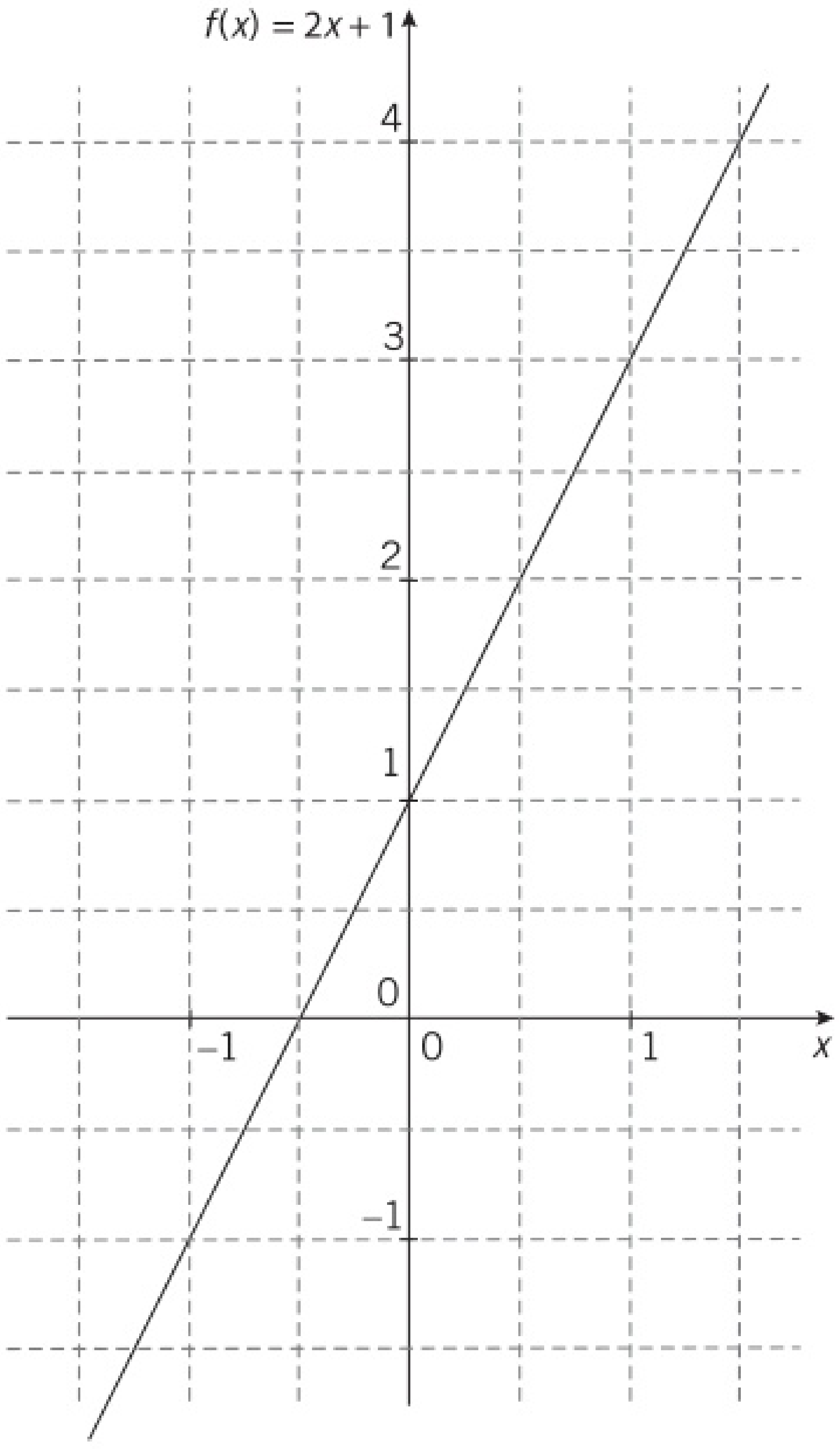


Função afim (função polinomial do 1º grau)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$, em que m e n são constantes reais, com $m \neq 0$. O gráfico de f é a reta que intersecta o eixo y (das ordenadas) no ponto $(0, n)$ e o eixo x (das abscissas) no ponto $\left(-\frac{n}{m}, 0\right)$.

Exemplo:

$f(x) = 2x + 1$



$f(0) = 1$; o gráfico intersecta o eixo y no ponto (0,1).

$f(x) = 0$

$$2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

O gráfico intersecta o eixo x no ponto $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$.

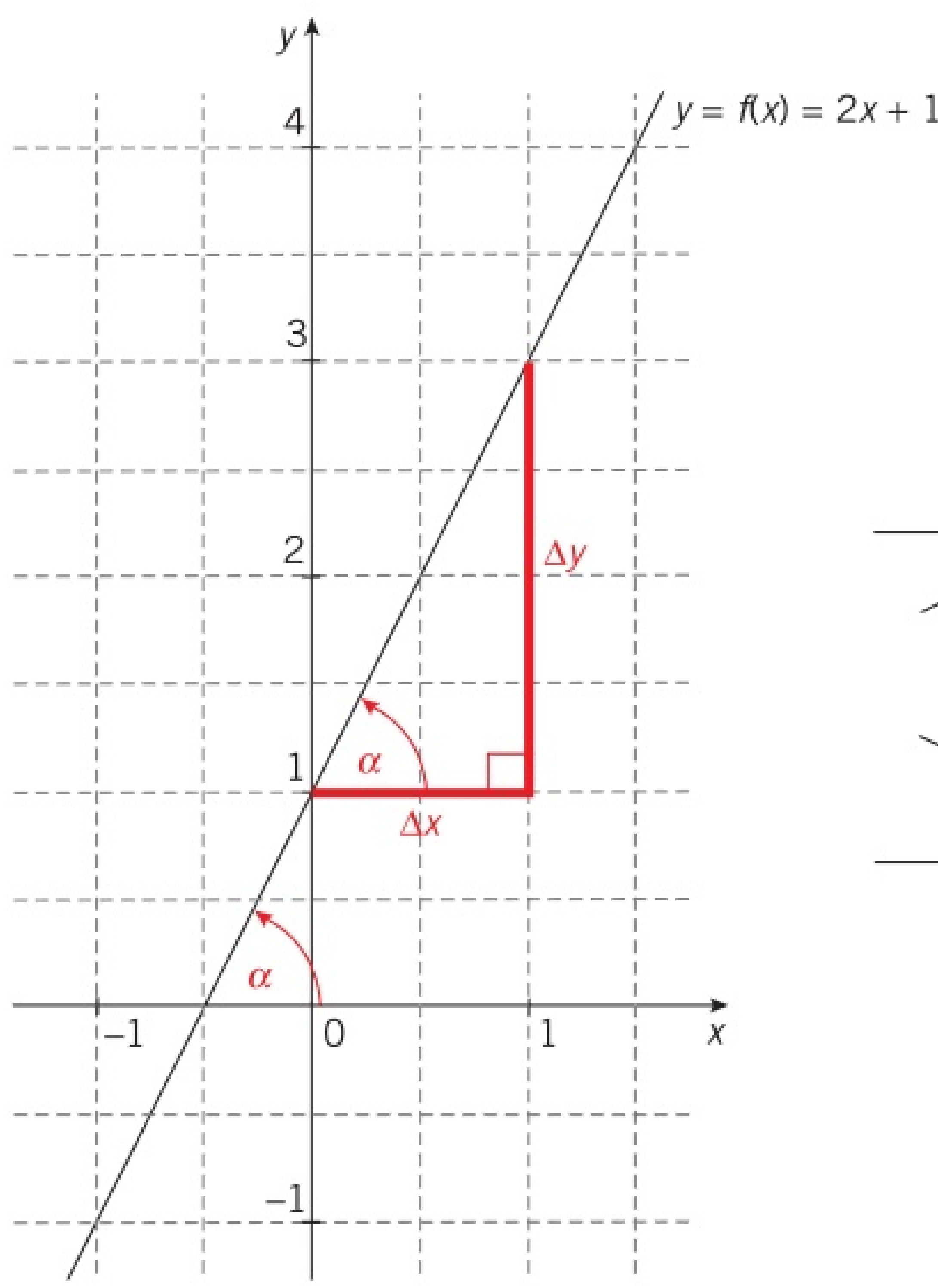
Sendo x_1 e x_2 valores quaisquer de x, com $x_1 \neq x_2$, temos, com $f(x) = mx + n$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$ (taxa de variação é constante).

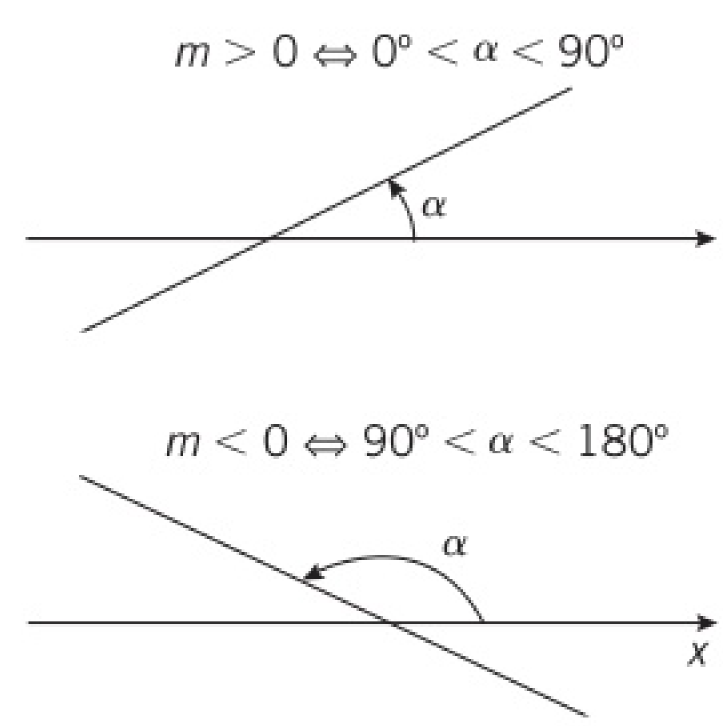
Assim, pelo exemplo dado, com $f(x) = 2x + 1$, podemos considerar $x_1 = 12$ e $x_2 = 51$.

Temos $f(x_1) = f(12) = 2 \cdot 12 + 1$, $f(x_2) = 2 \cdot 51 + 1$ e:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(2 \cdot 51 + 1) - (2 \cdot 12 + 1)}{51 - 12} = \frac{2 \cdot 51 + 1 - 2 \cdot 12 - 1}{51 - 12} = \frac{2(51 - 12)}{51 - 12} = 2$$

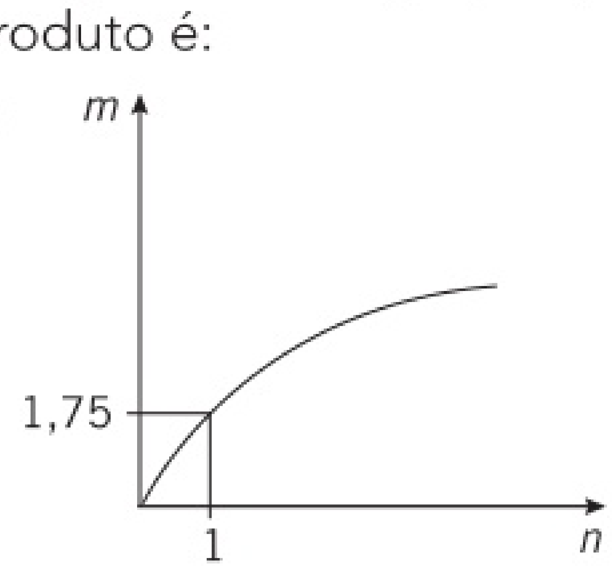
No gráfico, temos $m = \text{tg}\ \alpha$, em que α é a medida do ângulo que a reta r (dada pela equação $y = mx + n$) forma com o eixo das abscissas.

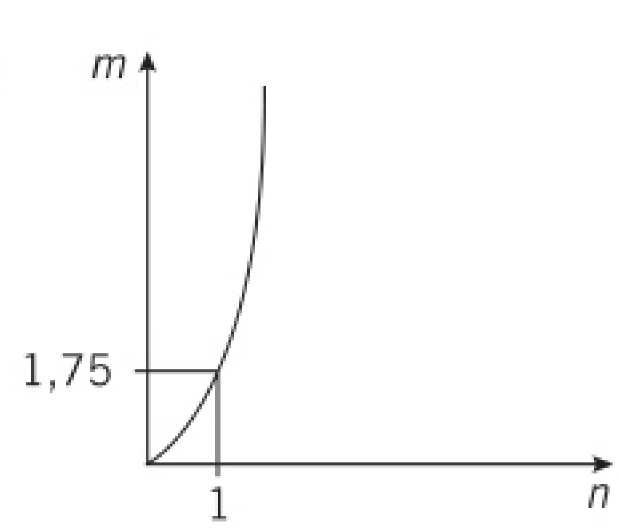


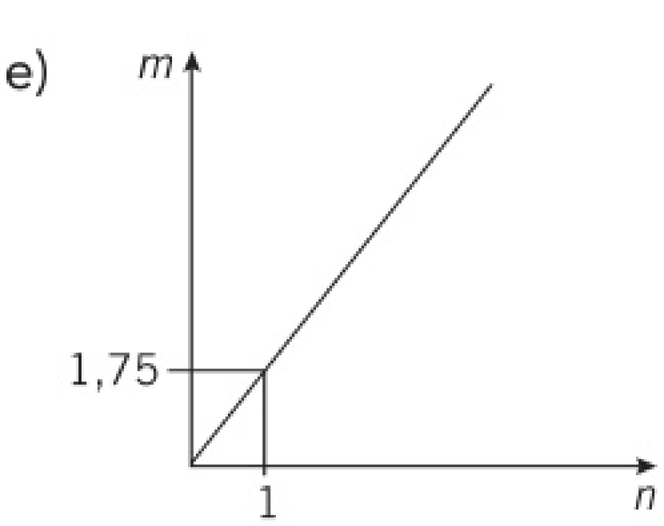


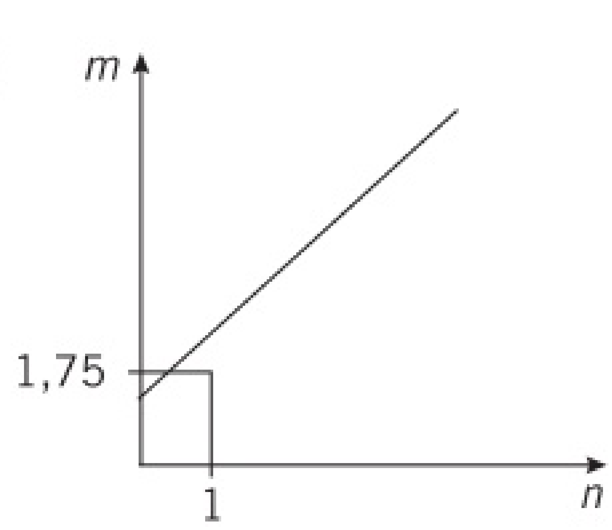
1 (Enem) As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma.

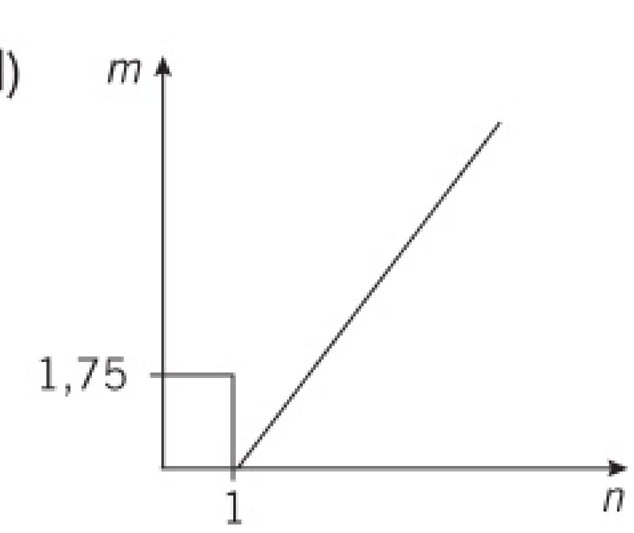
Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é:

a) 

c) 

→ e) 

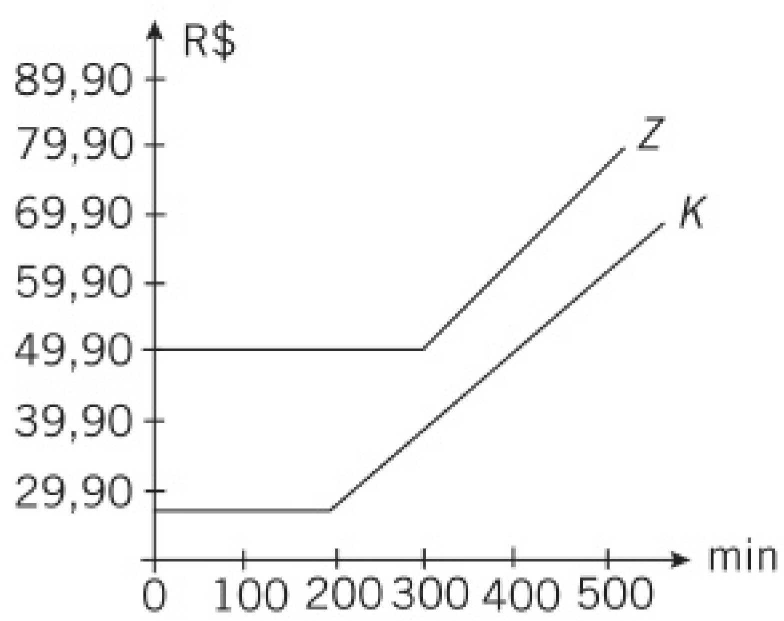
b) 

d) 

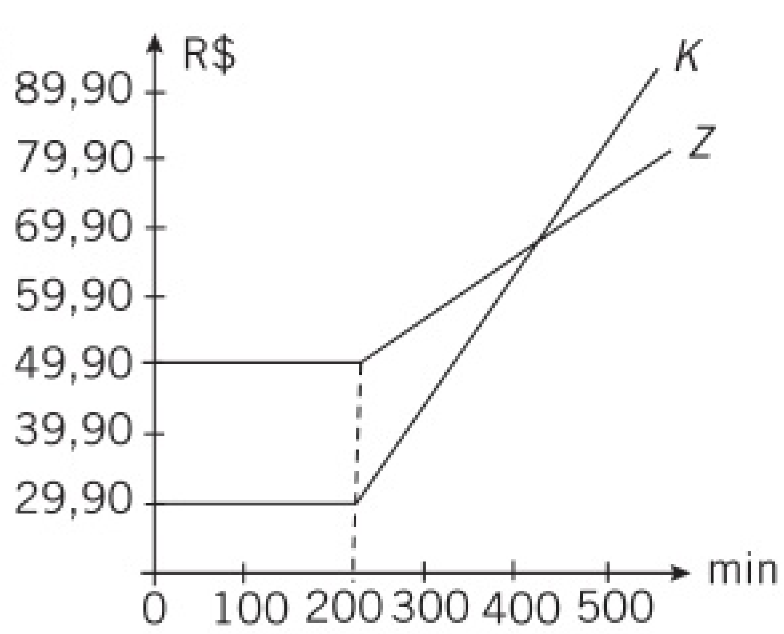
2 (Enem) Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano *K*, o cliente paga R\$ 29,90 por 200 minutos mensais e R\$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano *Z*, paga R\$ 49,90 por 300 minutos mensais e R\$ 0,10 por cada minuto excedente.

O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é:

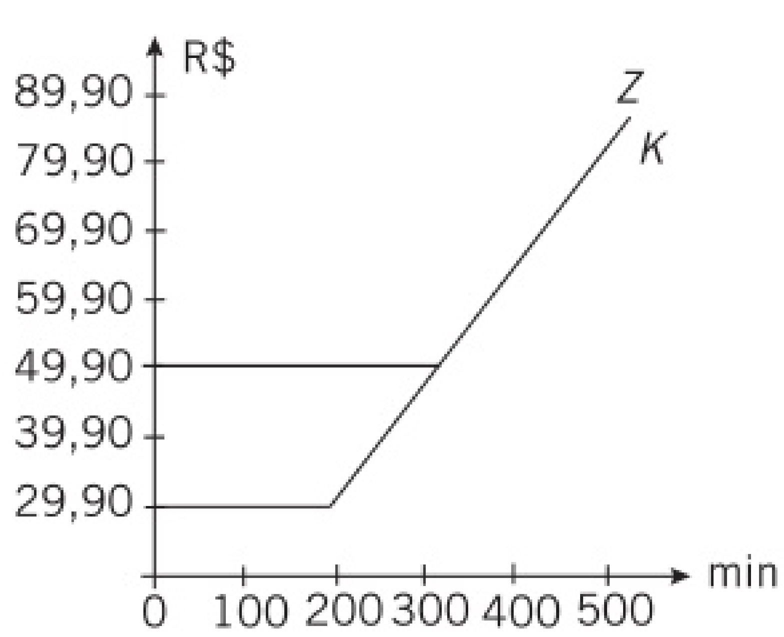
a)



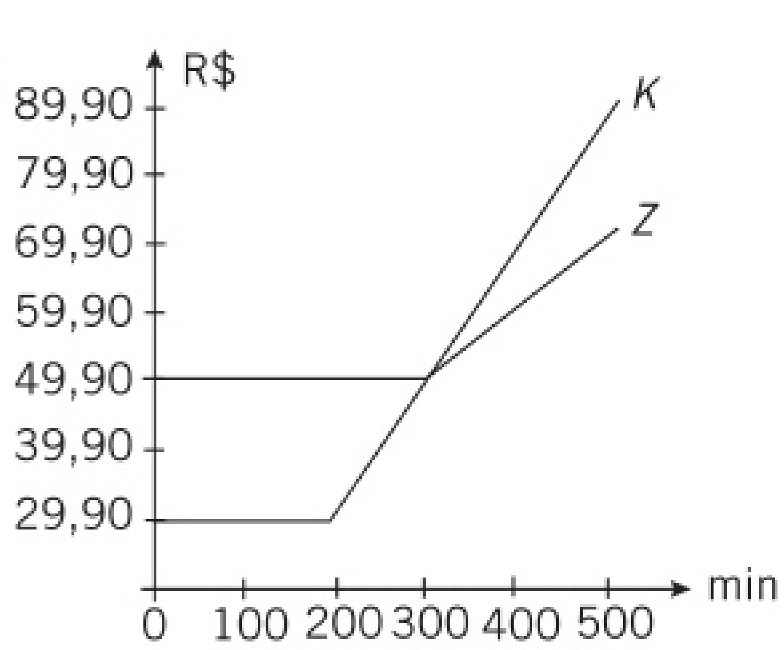
b)



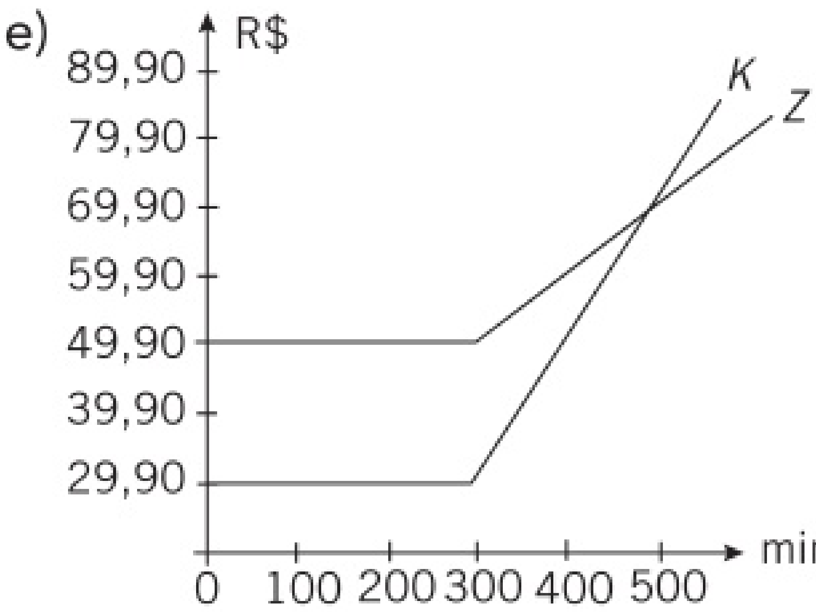
c)



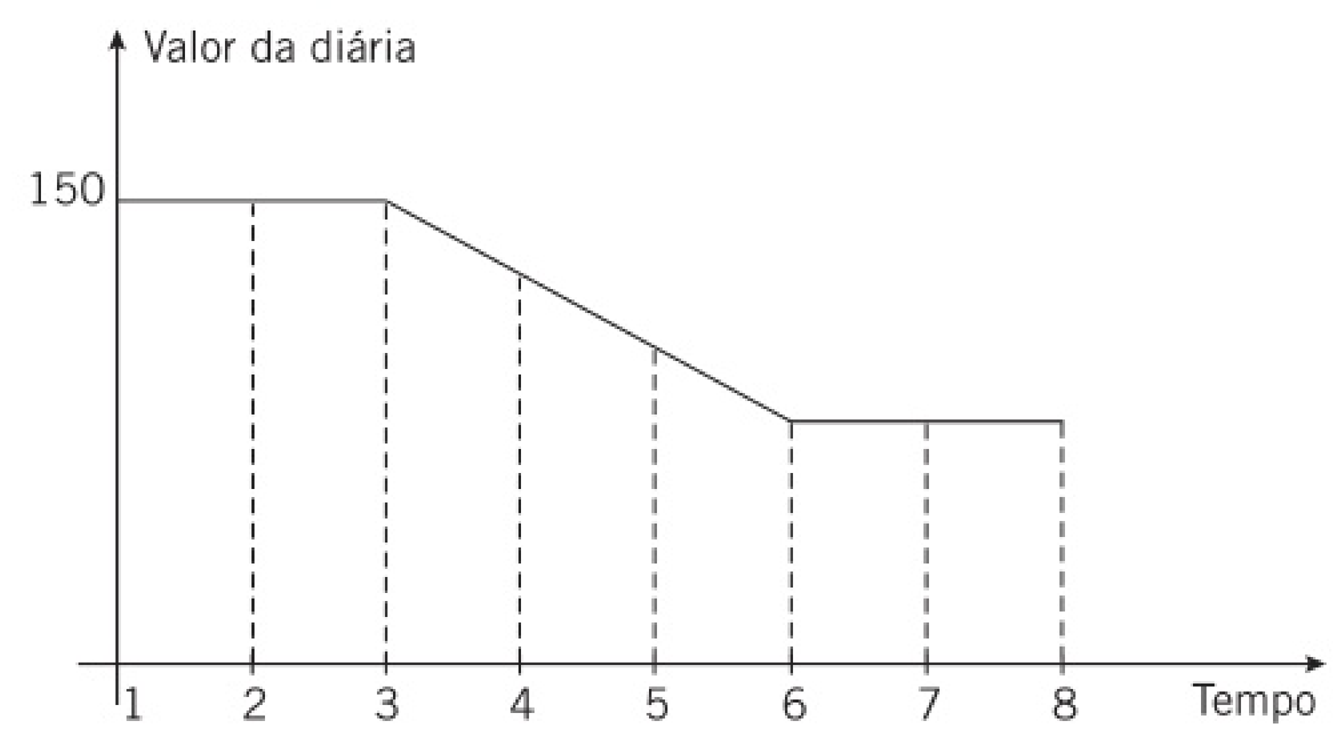
→ d)



e)



3 (Enem) Uma pousada oferece pacotes promocionais para atrair casais a se hospedarem por até oito dias. A hospedagem seria em apartamento de luxo e, nos três primeiros dias, a diária custaria R\$ 150,00, preço da diária fora da promoção. Nos três dias seguintes, seria aplicada uma redução no valor da diária, cuja taxa média de variação, a cada dia, seria de R\$ 20,00. Nos dias restantes, seria mantido o preço do sexto dia. Nessas condições, um modelo para a promoção idealizada é apresentado no gráfico a seguir, no qual o valor da diária é função do tempo medido em número de dias.

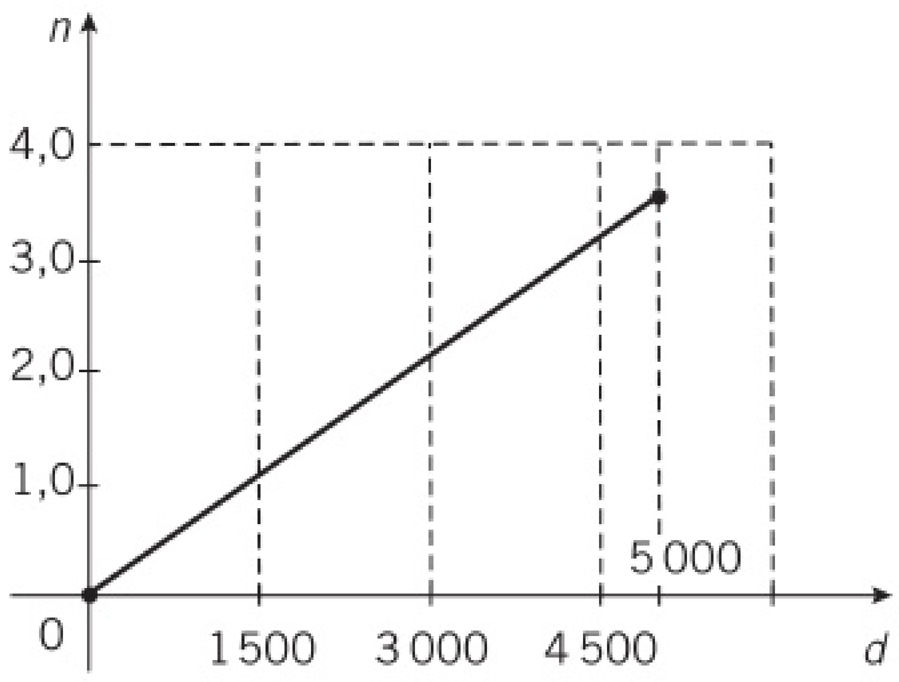


De acordo com os dados e com o modelo, comparando o preço que um casal pagaria pela hospedagem por sete dias fora da promoção, um casal que adquirir o pacote promocional por oito dias fará uma economia de:

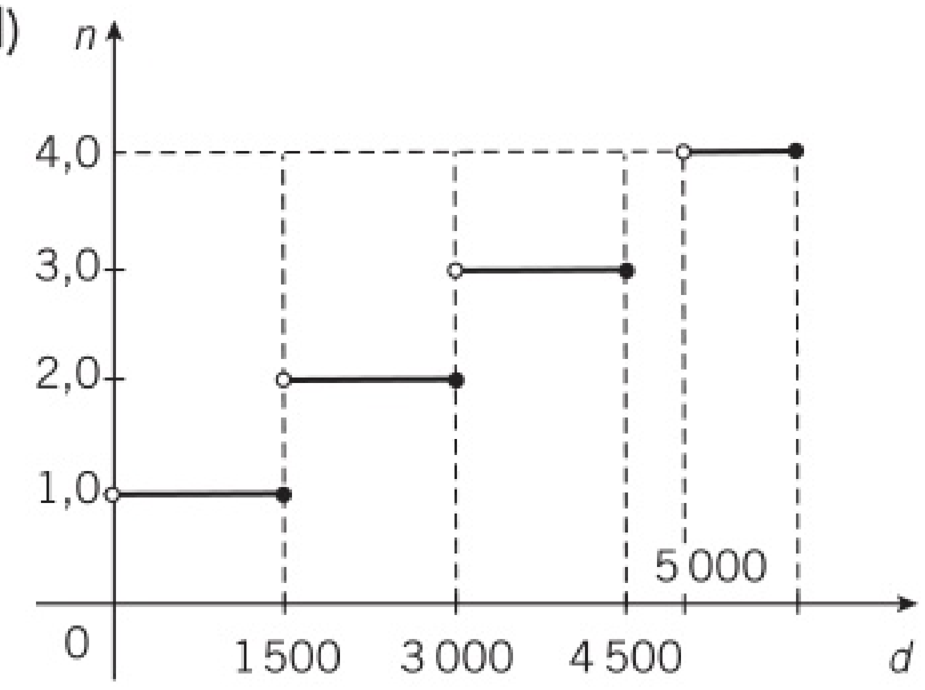
→ a) R\$ 90,00.
b) R\$ 110,00.
c) R\$ 130,00.
d) R\$ 150,00.
e) R\$ 170,00.

4 (Enem) Em São Paulo, no Parque do Ibirapuera, há uma pista de *cooper*, em que se completa uma volta a cada 1 500 metros. Num sábado de manhã, Pedrinho andou 5 000 metros nessa pista e, portanto, não completou 4 voltas. Sendo assim, qual é a figura que melhor representa o número de voltas completas dadas por Pedrinho em função da distância, em metros, que ele andou?

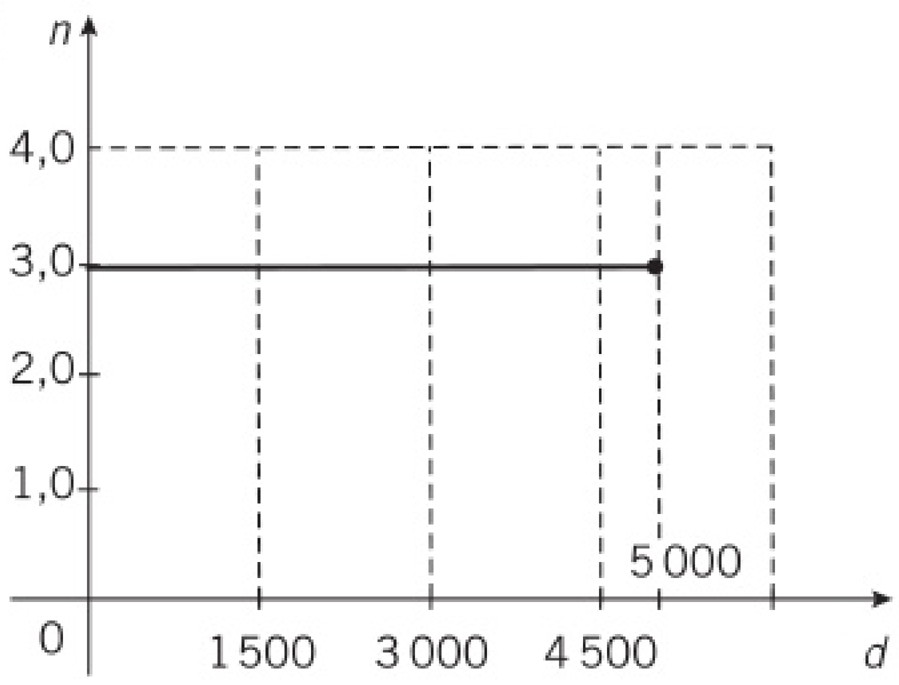
a)



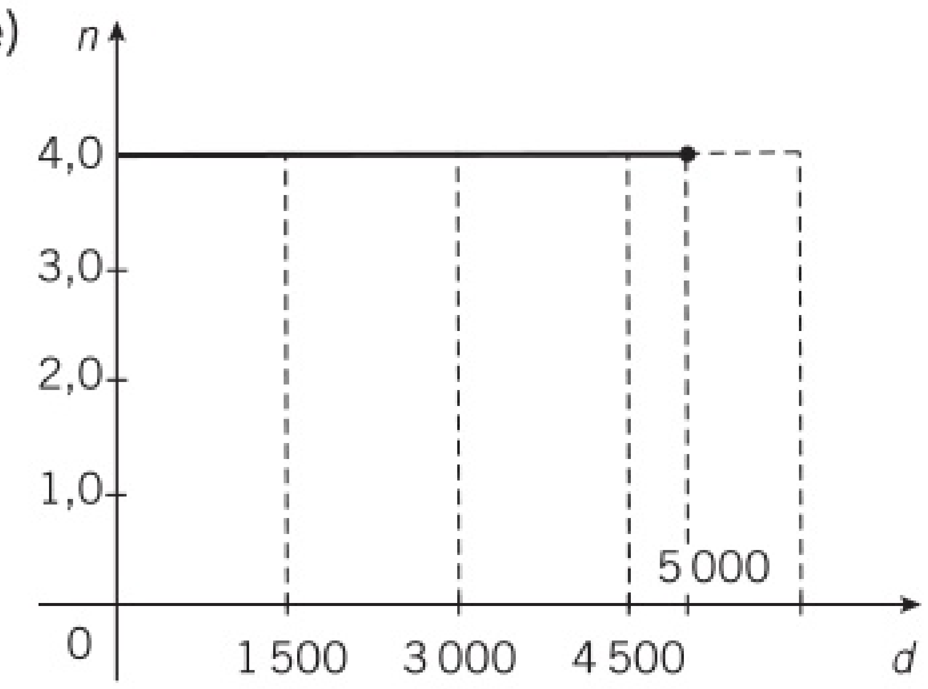
d)



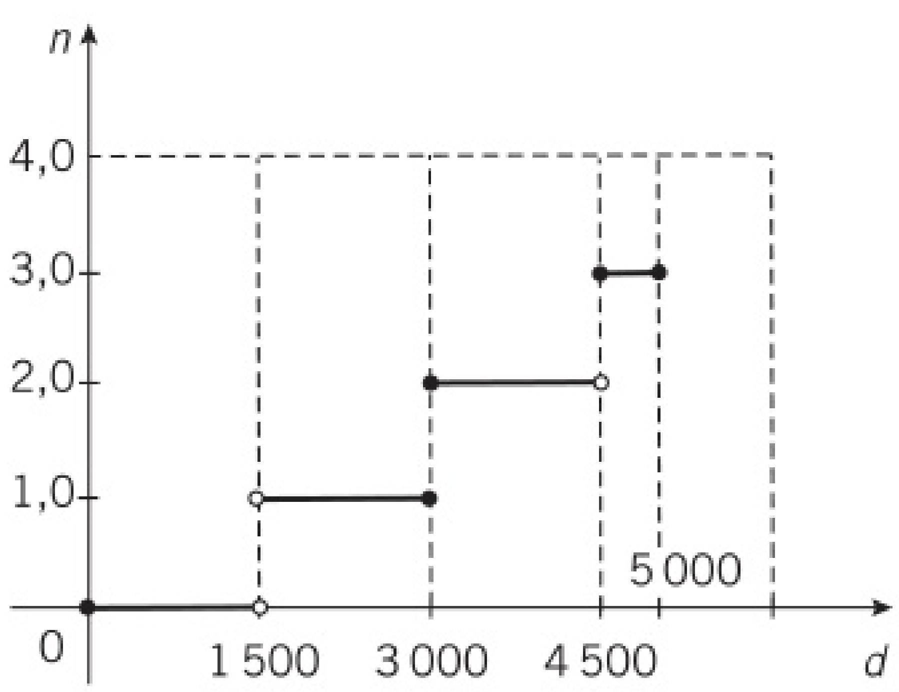
b)



e)



c)



Anotações

AULA 21

Competência 5 Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade 21 Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

Em classe

MODELOS MATEMÁTICOS

Resolver problemas em Matemática pode não ser uma tarefa fácil, pois isso exige uma série de habilidades, tais como leitura, interpretação de textos e organização de dados, que precisam ser relacionadas.

Modelar algebricamente um problema significa transpor as informações do texto para sentenças matemáticas (igualdades ou desigualdades), a fim de aplicar os métodos matemáticos para obter a solução do problema.

Muitos matemáticos procuraram criar procedimentos que organizassem as etapas para a resolução de problemas. Um deles, George Pólya (1888-1985), escreveu livros sobre esse assunto. Em seu livro mais famoso, *How to Solve it*, Pólya resumiu a resolução de um problema em quatro passos:

1. Entenda o problema

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Quais as condições? É possível satisfazer as condições? Faça uma figura. Introduza a notação adequada.

2. Construa uma estratégia de resolução

Encontre conexões entre os dados e a incógnita. Você já encontrou esse problema ou algo parecido? Olhe para a incógnita e tente achar um problema familiar, que tenha uma incógnita semelhante. Você está levando em consideração todos os dados? Quais são as condições?

3. Execute a estratégia

Modele o seu problema algébrico por meio de uma equação (ou várias). Resolva a equação. Qual o melhor método para resolver essa equação?

4. Revise

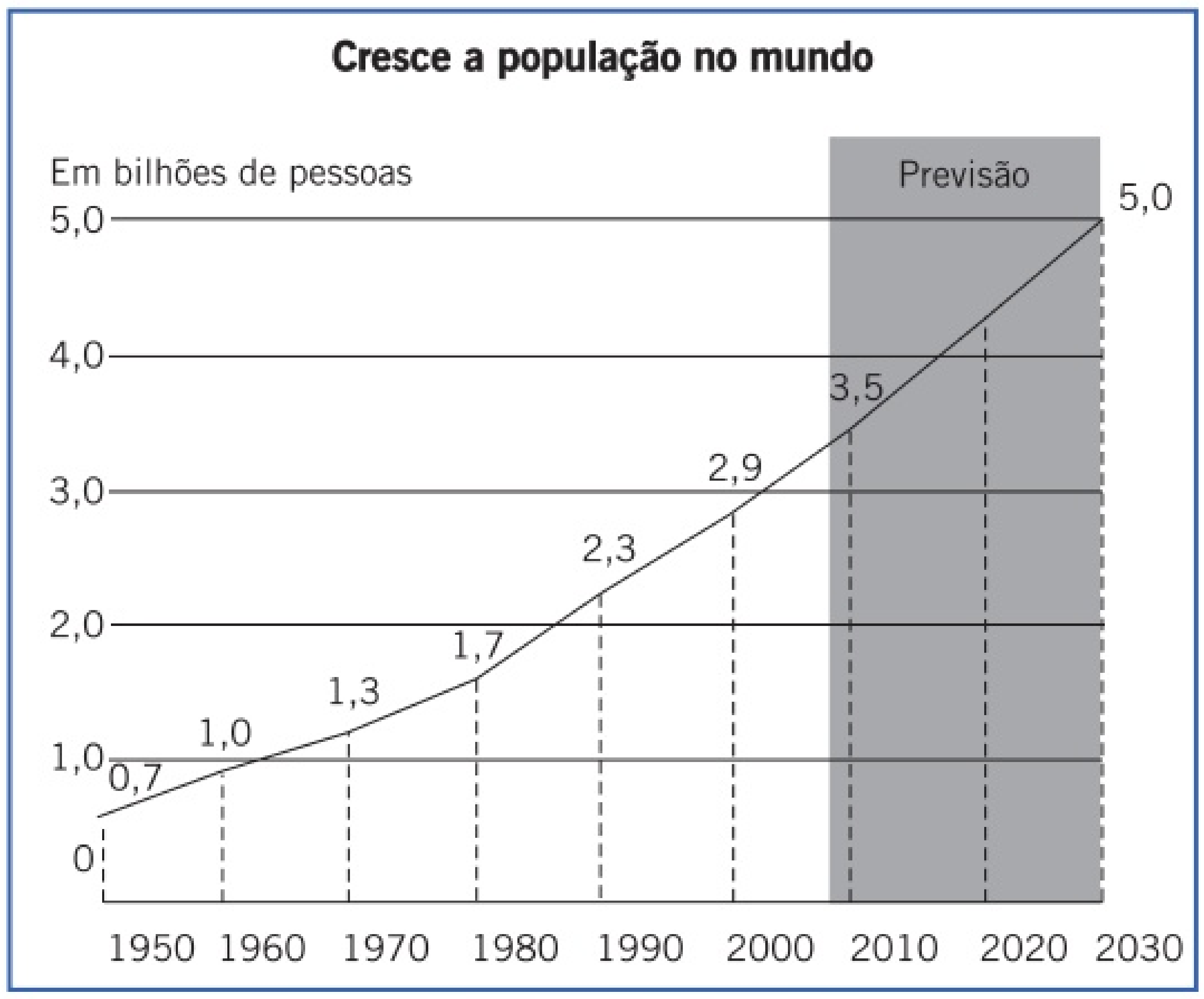
Examine a solução obtida. Verifique o resultado e o argumento. São coerentes? Convêm?

É comum que as pessoas pulem as primeiras etapas, partindo diretamente para a execução da estratégia.

Nesta aula, veremos como alguns problemas se tornam mais fáceis quando modelados e resolvidos de maneira organizada.

Anotações

1 (Enem) Uma pesquisa da ONU estima que, já em 2008, pela primeira vez na história das civilizações, a maioria das pessoas viverá na zona urbana. O gráfico a seguir mostra o crescimento da população urbana desde 1950, quando essa população era de 700 milhões de pessoas, e apresenta uma previsão para 2030, baseada em crescimento linear no período de 2008 a 2030.



Almanaque Abril 2008, p. 128. São Paulo: Abril. Adaptado.

De acordo com o gráfico, a população urbana mundial em 2020 corresponderá, aproximadamente, a quantos bilhões de pessoas?

a) 4,00 b) 4,10 c) 4,15 → d) 4,25 e) 4,50

No gráfico, observa-se uma linearidade entre 2010 e 2030. Assim, a população urbana mundial em 2020 corresponderá a aproximadamente: $\frac{3{,}5+5{,}0}{2} = 4{,}25$ bilhões de pessoas.

2 (Enem) O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído (*n*), acrescidos de um valor fixo de R$ 350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120 000,00 por km construído (*n*), acrescidos de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

→ a) $100n + 350 = 120n + 150$
b) $100n + 150 = 120n + 350$
c) $100(n + 350) = 120(n + 150)$
d) $100(n + 350\,000) = 120(n + 150\,000)$
e) $350(n + 100\,000) = 150(n + 120\,000)$

Sendo C_I e C_{II} os valores cobrados, temos:

$$\begin{cases} C_I = 100n + 350 \\ C_{II} = 120n + 150 \end{cases}$$

Do enunciado:

$C_I = C_{II} \Rightarrow 100n + 350 = 120n + 150$

Em casa

TEXTO DE APOIO

Muitos problemas, provenientes de situações concretas, recaem em equações cujas soluções são inteiras; a essas equações damos o nome de **diofantinas**, em homenagem ao matemático Diofanto de Alexandria (século III a.C.), que foi um dos precursores nesse assunto.

Um problema, passível de ser equacionado, pode ter tantas soluções quantas forem as suas incógnitas, podendo ter até um número infinito de soluções. No entanto, buscando entre as soluções possíveis (aquelas que são números inteiros), pode-se encontrar um número finito de respostas.

Observe o seguinte exemplo:

As medidas dos lados de um retângulo são inteiras. Quais devem ser essas medidas para que o perímetro e a área sejam representados pelo mesmo número?

Resolução:

Sejam x e y as medidas dos lados do retângulo, temos:

Perímetro $= 2x + 2y$ e área $= x \cdot y$.

Como o perímetro e a área devem representar o mesmo número, devemos ter:

$2x + 2y = x \cdot y$

Assim:

$$x \cdot y - 2x = 2y \Rightarrow x \cdot (y - 2) = 2y \Rightarrow x = \frac{2y}{y-2}$$

Como x e y devem ser números positivos, $y - 2$ também será positivo, portanto, podemos escrever:

$$x = \frac{2(y-2)+4}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2} \quad \text{(I)}$$

Assim, temos que x deve ser um número inteiro e consequentemente, $\frac{4}{y-2}$ também o será, isto é, $y - 2$ deve ser divisor de 4.

Logo, temos as seguintes possibilidades:

- $y - 2 = 1 \Rightarrow y = 3$, substituindo em (I) temos: $x = 6$;
- $y - 2 = 2 \Rightarrow y = 4$, substituindo em (I) temos: $x = 4$;

As possíveis medidas para os lados do retângulo são 3 e 6 ou 4 e 4.

1 (FGV-SP) Daqui 12 anos eu terei o triplo da idade que você tinha há 12 anos. Se hoje eu tenho 15 anos, que idade você terá daqui a 12 anos?

a) 12 anos b) 21 anos c) 15 anos →d) 33 anos e) 27 anos

2 (Enem) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

a) R$ 14,00 b) R$ 17,00 c) R$ 22,00 →d) R$ 32,00 e) R$ 57,00

3 (Enem) O Indicador do CadÚnico (ICadÚnico), que compõe o cálculo do Índice de Gestão Descentralizada do Programa Bolsa Família (IGD), é obtido por meio da média aritmética entre a taxa de cobertura qualificada de cadastros (TC) e a taxa de atualização de cadastros (TA), em que $TC = \frac{NV}{NF}$, $TA = \frac{NA}{NV}$, NV é o número de cadastros domiciliares válidos no perfil do CadÚnico, NF é o número de famílias estimadas como público-alvo do CadÚnico e NA é o número de cadastros domiciliares atualizados no perfil do CadÚnico.

Portaria n. 148 de 27 de abril de 2006. Adaptado.

Suponha que o ICadÚnico de um município específico é 0,6. Porém, dobrando o *NF* o ICadÚnico cairá para 0,5. Se $NA + NV = 3600$, então o *NF* é igual a:

a) 10000.

b) 7500.

→c) 5000.

d) 4500.

e) 3000.

Anotações

AULA 22

Competência 5 Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

Habilidade 22 Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

Em classe

EXPONENCIAIS E LOGARITMOS

Potência de expoente real

Sendo b um número real positivo, temos as seguintes propriedades:

- $b^x > 0$, para todo x real;
- $b^0 = 1$;
- $b^1 = b$;
- $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$;
- $b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$;
- $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$;
- $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$;
- $(b^m)^n = b^{mn}$;
- $b_1^x \cdot b_2^x = (b_1 \cdot b_2)^x$;
- $\frac{b_1^x}{b_2^x} = \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^x$;
- Com $b > 0$ e $b \neq 1$, $b^x = b^y \Leftrightarrow x = y$.

Logaritmo

Com $a > 0$, $b > 0$, e $b \neq 1$, existe um único número real x, tal que $b^x = a$. Nessas condições, dizemos que x é o logaritmo de a na base b e escrevemos:

$$x = \log_b a$$

Com $b > 0$ e $b \neq 1$, temos:

- $\log_b b = 1$;
- $\log_b 1 = 0$;
- $\log_b b^c = c$;
- $b^{\log_b a} = a$.

Propriedades

Com $A > 0$, $B > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$, temos:

- $\log_b (AB) = \log_b A + \log_b B$;
- $\log_b \left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B$;
- $\log_b A = \frac{\log_p A}{\log_p b}$ (mudança da base b para a base p).

Nos **logaritmos decimais**, aqueles na base 10, é muito comum usar a notação simplificada $\log A$, em vez de $\log_{10} A$. Por exemplo: $\log 1\,000 = 3$.

1 (Enem)

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS é denotada como M_W), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina · cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes.

Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>. Acesso em: 1º maio 2010. Adaptado.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. USGS Earthquake Magnitude Policy.

Disponível em: <http://earthquake.usgs.gov>. Acesso em: 1º maio 2010. Adaptado.

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina · cm)?

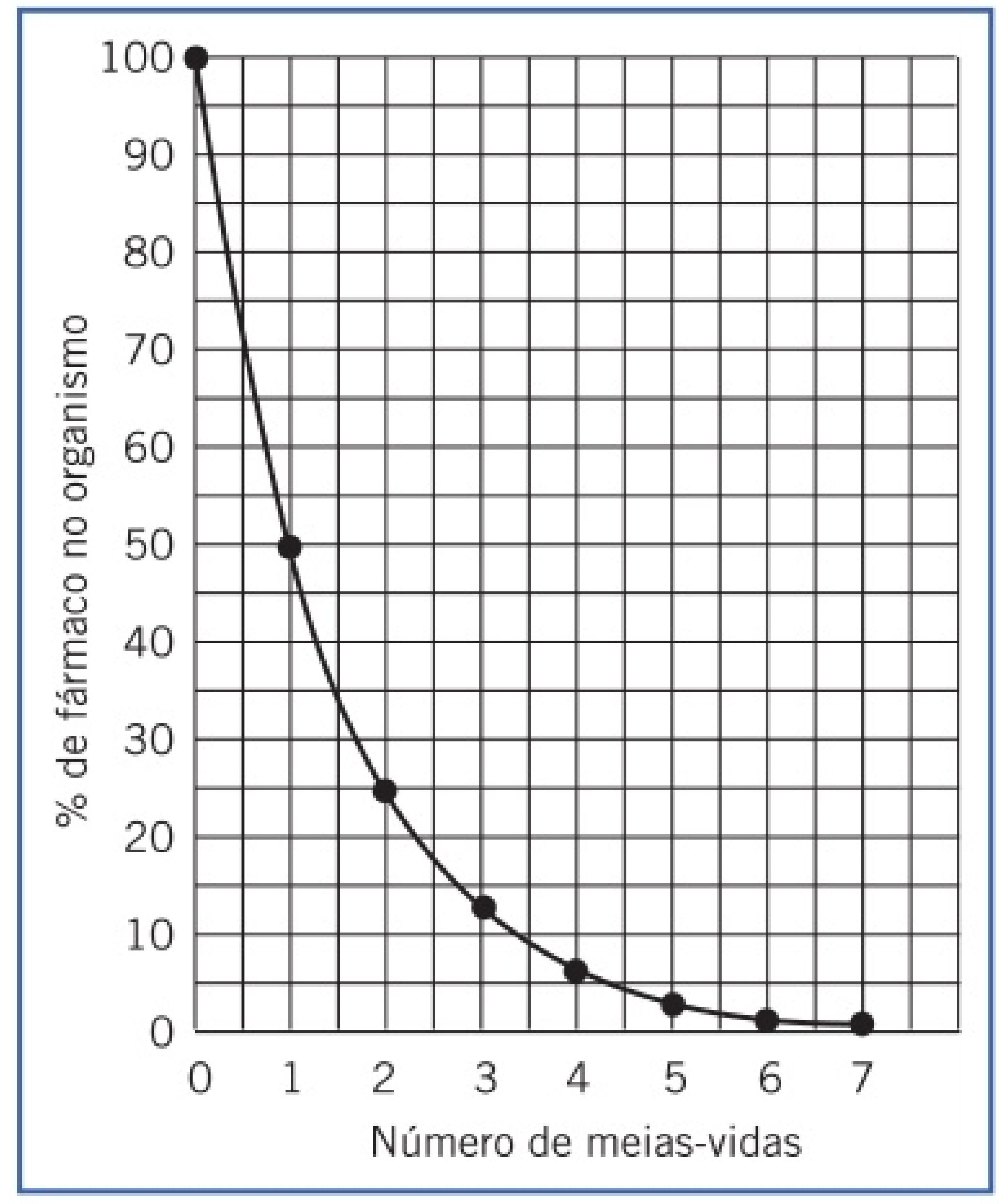
a) $10^{-5,10}$
b) $10^{-0,73}$
c) $10^{12,00}$
d) $10^{21,65}$
→ e) $10^{27,00}$

Com $M_W = 7{,}3$, temos:

$-10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10} M_0 = 7{,}3 \Rightarrow \frac{2}{3}\log_{10} M_0 = 7{,}3 + 10{,}7 = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{10} M_0 = 27 \Rightarrow M_0 = 10^{27}$

2 (Enem) A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo. O gráfico representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

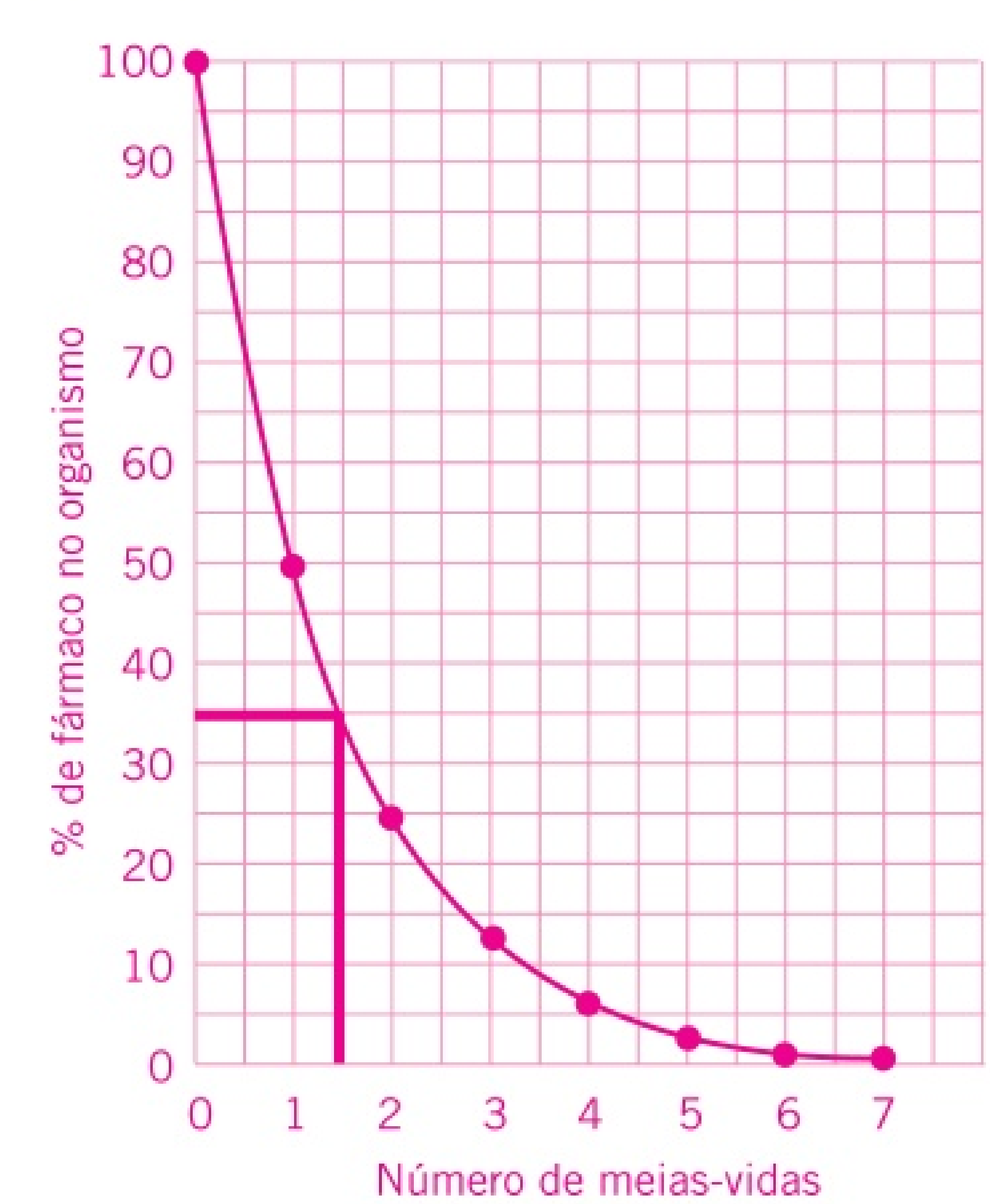


FUCHS, F. D.; WANNMA, Cher l. *Farmacologia Clínica*. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan,1992, p. 40.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13h30min será aproximadamente de:

a) 10%.
b) 15%.
c) 25%.
→ d) 35%.
e) 50%.

Das 12h às 13h30min, temos decorrida 1,5 hora. Como a meia-vida da amoxicilina é de 1 hora, passou-se 1,5 meia-vida.



Logo, de acordo com o gráfico, o percentual dessa dose que restará no organismo do paciente será, aproximadamente, de 35%.

3 Dado que a fórmula $Q_t = Q_0 \cdot 0{,}8^{0{,}05t}$ fornece a quantidade de um fármaco remanescente no organismo de uma pessoa t minutos após sua introdução, podemos afirmar que essa quantidade reduz-se em 20% a cada 20 minutos. Considerando $\log 2 \simeq 0{,}30$, podemos concluir que a meia-vida deste fármaco é de aproximadamente:

a) 40 minutos. b) 45 minutos. c) 50 minutos. → d) 60 minutos. e) 80 minutos.

Como $Q_t = Q_0 \cdot \frac{1}{2}$, temos:

$Q_0 \cdot 0{,}8^{0{,}05t} = Q_0 \cdot 2^{-1} \Rightarrow \log 0{,}8^{0{,}05t} = \log 2^{-1} \Rightarrow \log 0{,}8^{0{,}05t} = \log 2^{-1} \Rightarrow 0{,}05t \cdot \log 0{,}8 = -\log 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}05t \cdot (3\log 2 - \log 10) = -\log 2 \Rightarrow 0{,}05t \cdot (0{,}9 - 1) = -0{,}3 \Rightarrow 0{,}05t \cdot 0{,}1 = 0{,}3 \Rightarrow 5t = 300 \Rightarrow t = 60$

Podemos chegar a esse resultado de outro modo.

A cada meia-vida, a quantidade é reduzida em 20%, ou seja, em $\frac{1}{5}$.

Logo, a quantidade remanescente é $\frac{4}{5}$ da anterior. A tabela a seguir mostra que a meia-vida é de aproximadamente 60 minutos.

Tempo (min)	**0**	**20**	**40**	**60**
Quantidade	$Q_0 \cdot 1$	$Q_0 \cdot \frac{4}{5}$	$Q_0 \cdot \frac{16}{25}$	$Q_0 \cdot \frac{64}{125}$

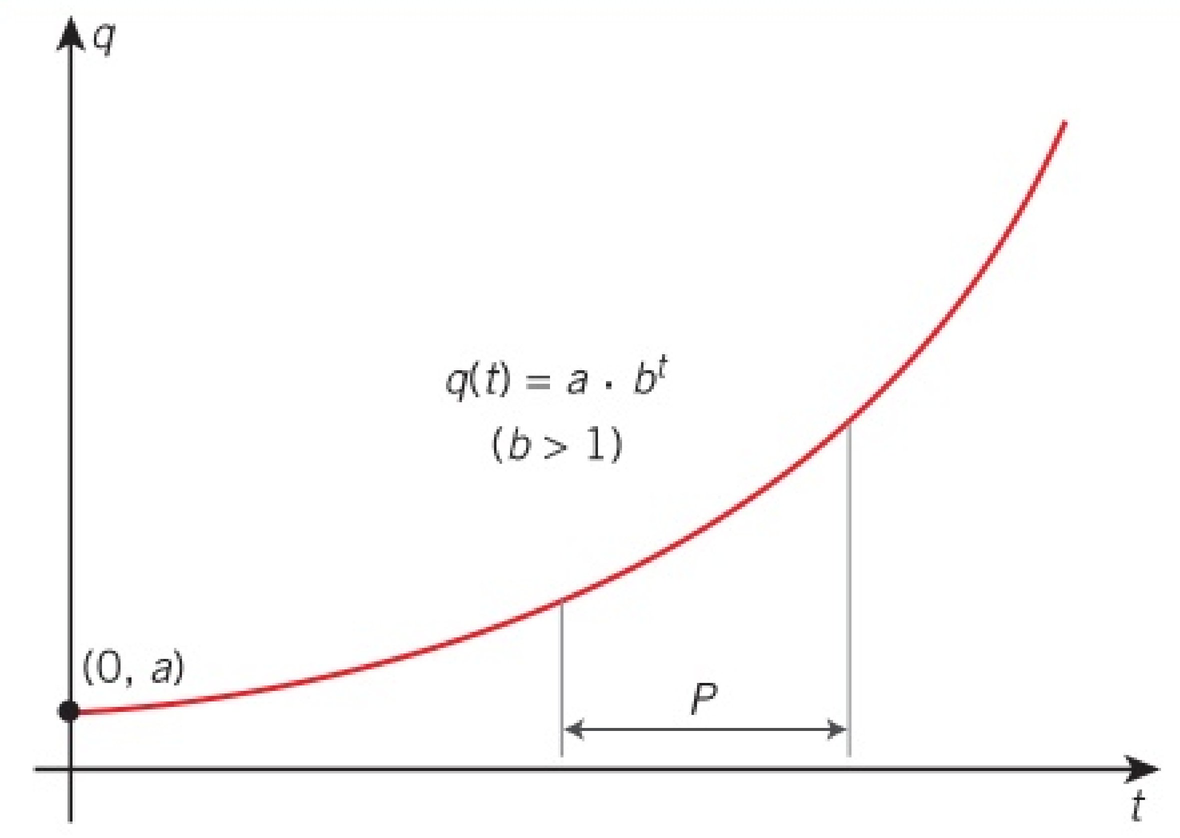
Em casa

TEXTO DE APOIO

Em estudos quantitativos sobre (de)crescimentos de populações, lida-se frequentemente com funções da forma $q(t) = a \cdot b^t$, em que a e b são constantes positivas, com $b \neq 1$. A variável t é o tempo decorrido a partir do instante inicial da observação. Note que, em todos os casos, $q(0) = a$; assim, temos $q(t) = q(0) \cdot b^t$.

O ponto $(0, a)$ é a intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas. Em relação à base b, vamos destacar dois casos:

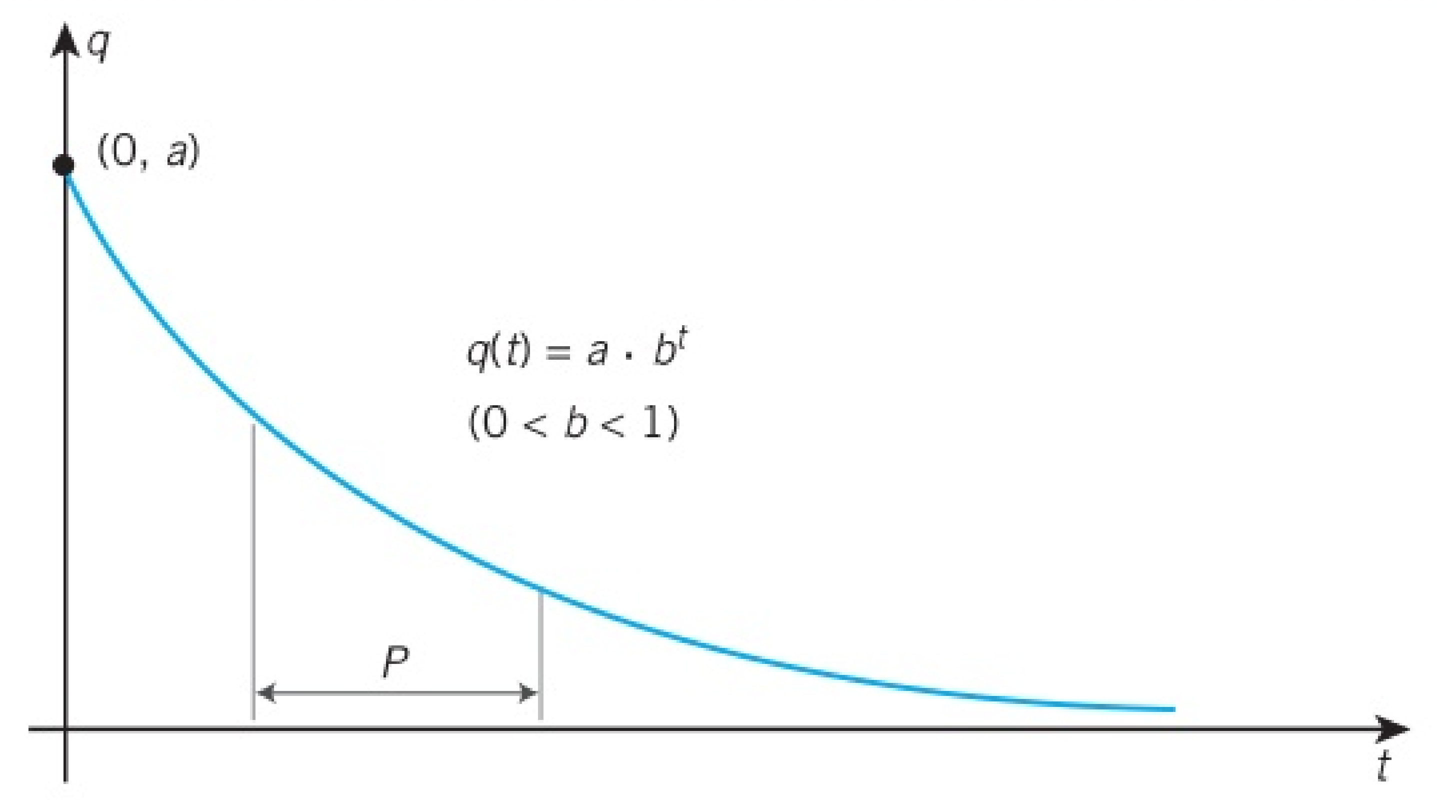
- Com $b > 1$, temos uma função crescente.



(Base b maior que 1: $q(t)$ cresce cada vez mais)

P é o intervalo de tempo (Δt) em que a quantidade $q(t)$ é dobrada: P é chamado de **tempo de duplicação** (*doubling time*).

- Com $0 < b < 1$, temos uma função decrescente.



(Base b entre 0 e 1: $q(t)$ decresce cada vez menos)

P é o intervalo de tempo (Δt) em que a quantidade $q(t)$ é reduzida à metade: P é chamado de **meia-vida** (*half-life*).

Logaritmos na base e

Nos estudos quantitativos sobre (de)crescimentos de populações, surge quase sempre uma constante cujo valor é aproximadamente 2,71828. Essa constante é um número irracional e geralmente simbolizado pela letra **e**, em homenagem ao matemático Leonhard Euler (1707-1783).

Os **logaritmos na base e** têm um papel fundamental na Matemática; são chamados de **logaritmos naturais**, justamente por serem comuns em estudos sobre fenômenos naturais. Há também muitos autores que chamam esses logaritmos de **logaritmos neperianos**, em homenagem ao matemático John Napier (1550-1617), um dos inventores dos logaritmos.

O logaritmo de x na base **e**, $\log_e x$, é usualmente indicado por $\ln x$. Como exemplos, temos: $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$ e $\ln\sqrt{e} = 0{,}5$.

Exemplos de aplicações

Vejamos algumas aplicações.

- Na Matemática financeira, $C(n) = C(0) \cdot (1 + r\%)^n$ relaciona o montante $C(n)$ ao número n de períodos de aplicação de um capital inicial $C(0)$ a uma taxa de $r\%$ de juros por período.
- Na Biologia, $I(x) = I(0) \cdot b^x$ relaciona a intensidade $I(x)$ da luz solar à profundidade x em lagos e mares.
- Na Química, $M(t) = M(0) \cdot b^t$ relaciona a massa $M(t)$ de uma substância radioativa no instante t da observação de uma experiência.
- Na Física, quando um corpo de temperatura T_c encontra-se em um ambiente de temperatura T_l constante, com $T_l > T_c$, a diferença $D(t) = T_c - T_l$ decresce, em função do tempo t, de acordo com a fórmula $D(t) = a \cdot b^{-c \cdot t}$.

Exposição à radiação

Suponhamos que um tecido vivo seja exposto a uma radiação ionizante, um feixe de partículas subatômicas. O dano sofrido pelo tecido pode ser expresso pelo número de suas moléculas alteradas. Indicando por M_0 o número inicial de moléculas não danificadas e por M o número de moléculas não danificadas após uma exposição a uma dose de P partículas por cm^2 do tecido, tem-se $M < M_0$. Experiências mostram que $M = M_0 \cdot e^{-k \cdot P}$, em que k é uma constante positiva.

O isótopo radioativo carbono-14

A incidência de raios cósmicos nas camadas superiores da atmosfera converte parte do nitrogênio em um isótopo radioativo de carbono, ^{14}C. A vegetação, por meio da absorção de dióxido de carbono (CO_2) da atmosfera, retém um pouco desse isótopo. Todas as demais formas de vida também acabam retendo ^{14}C através da cadeia alimentar. Enquanto vivo, o nível desse isótopo no organismo é constante. Quando a planta ou o animal morre, cessa a reposição de ^{14}C no organismo e esse nível decresce gradualmente com o decorrer do tempo; a cada 5 730 anos o nível de ^{14}C reduz-se à metade.

Nessas condições, o nível, t anos após a morte, é dado por $N(t) = N(0) \cdot e^{-0,000121 \cdot t}$.

Vejamos, com um exemplo, como podemos proceder para obter uma estimativa da idade de um fóssil.

Suponhamos que o nível de radioatividade em um fóssil corresponda a 74% do nível encontrado atualmente nos seres vivos.

De $N(t) = N(0) \cdot e^{-0,000121 \cdot t}$ e $N(t) = N(0) \cdot 0,74$, temos que $e^{-0,000121 \cdot t} = 0,74$.

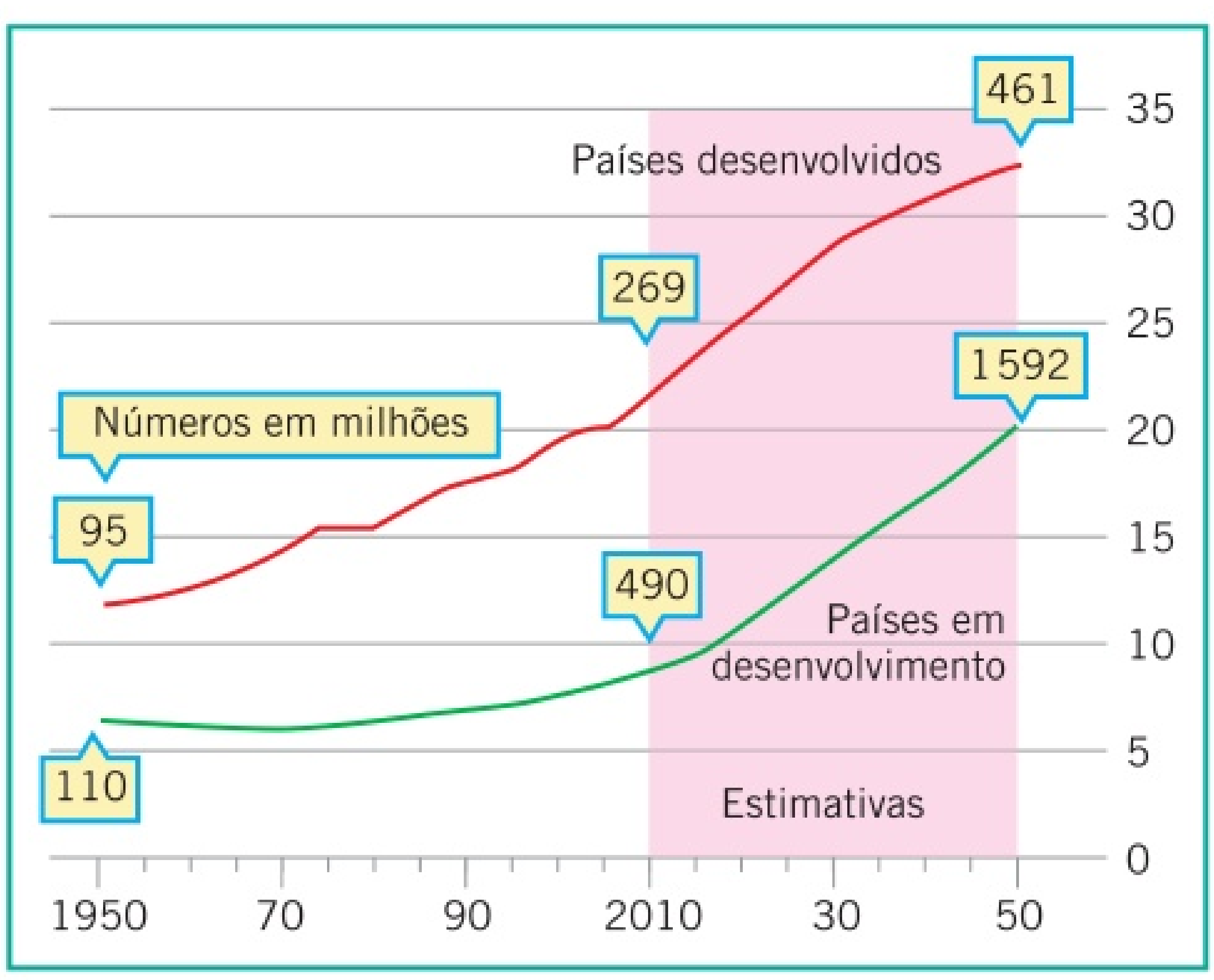
Portanto, $-0,000121 \cdot t = \log_e 0,74$.

Com uma calculadora científica podemos obter $\log_e 0,74 = -0,301105$, assim:

$$-0,000121 \cdot t = -0,301105 \Rightarrow t = \frac{-0,301105}{-0,000121} \simeq 2488$$

Logo, a idade desse fóssil é de 2 488 anos.

1 (Enem) A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por uma pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Disponível em: <www.economist.com>. Acesso em: 9 jul. 2009. Adaptado.

Suponha que o modelo exponencial $y = 363 \cdot e^{0,03x}$, em que $x = 0$ corresponde ao ano 2000, $x = 1$ corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0,3} = 1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre:

a) 490 e 510 milhões.
b) 550 e 620 milhões.
c) 780 e 800 milhões.
d) 810 e 860 milhões.
→ e) 870 e 910 milhões.

2 (Vunesp-SP) Uma cultura de bactérias cresce segundo a lei $N(t) = \alpha \cdot 10^{\lambda t}$, onde $N(t)$ é o número de bactérias em t horas, $t \geqslant 0$, e α e λ são constantes estritamente positivas. Se após 2 horas o número inicial de bactérias, $N(0)$, é duplicado, após 6 horas o número de bactérias será:

a) 4α. b) $2\alpha\sqrt{2}$. c) 6α. → d) 8α. e) $8\alpha\sqrt{2}$.

3 (PUC-SP) Um capital C, aplicado a juros compostos a uma taxa unitária i por período, produz, ao final de n períodos, o montante M, dado por $M = C \cdot (1 + i)^n$. Nessas condições, utilizando-se $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, o capital de R$ 2 000,00, aplicado a juros compostos à taxa de 20% ao ano, produzirá o montante de R$ 5 000,00, ao final de um período de:

a) 4 anos.
b) 4 anos e 2 meses.
c) 4 anos e 8 meses.
→ d) 5 anos.
e) 5 anos e 2 meses.

4 (Vunesp-SP/Adaptada) Suponhamos que uma represa de área igual a 128 km² tenha sido infestada por uma vegetação aquática. Suponhamos também que, por ocasião de um estudo sobre o problema, a área tomada pela vegetação fosse de 8 km² e que esse estudo tivesse concluído que a taxa de aumento da área cumulativamente infestada era de 50% ao ano. Nessas condições, em quantos anos a vegetação tomaria conta de toda a represa?

(Use os valores aproximados $\log_{10} 2 = 0,3$ e $\log_{10} 3 = 0,48$.)

a) 4 anos e 3 meses
b) 5 anos e 4 meses
c) 6 anos e 2 meses
→ d) 6 anos e 8 meses
e) 7 anos e 4 meses

AULA 23

Competência 5 Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

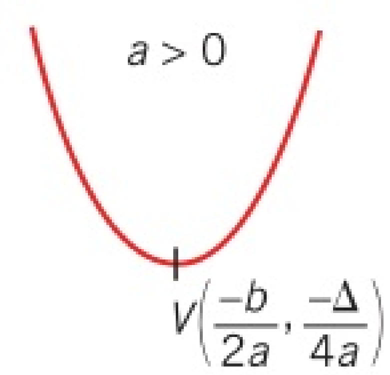
Habilidade 23 Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Em classe

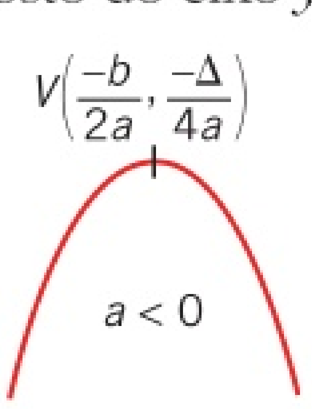
FUNÇÃO QUADRÁTICA

Função quadrática ou função polinomial do 2º grau é uma aplicação do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são constantes reais, com $a \neq 0$.

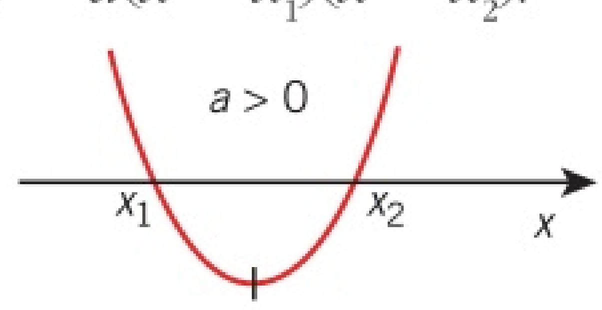
- O discriminante do trinômio é $\Delta = b^2 - 4ac$. O gráfico de f é uma parábola.
- O gráfico intersecta o eixo y (das ordenadas) no ponto $(0, c)$.
- O vértice da parábola é o ponto $V(x_v, y_v)$, com $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$.
- $a > 0$
  A concavidade da parábola tem o sentido do eixo y. O vértice corresponde ao mínimo da função.

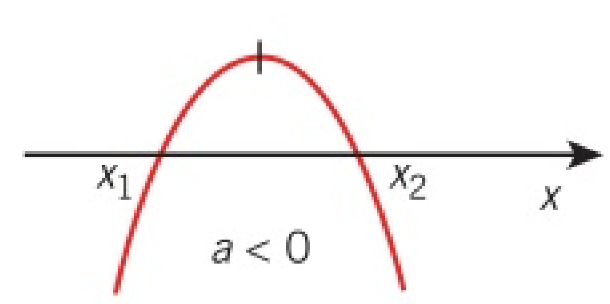


- $a < 0$
  A concavidade da parábola tem o sentido oposto do eixo y. O vértice corresponde ao máximo da função.

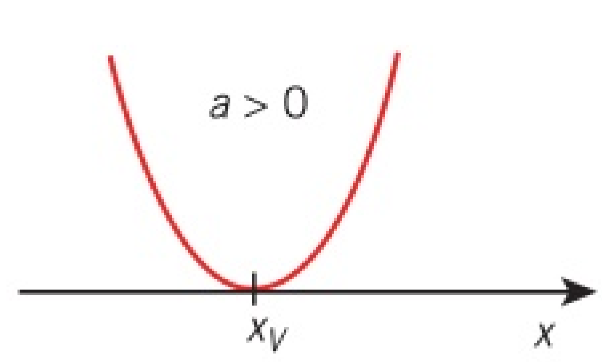


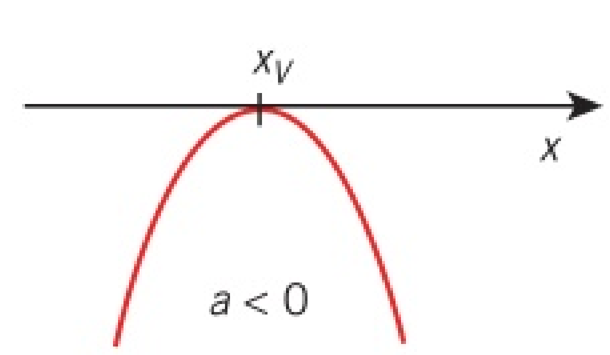
- $\Delta > 0$
  A parábola intersecta o eixo x em dois pontos distintos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$, com $x_1 < x_2$, $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  Nesse caso, temos $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.



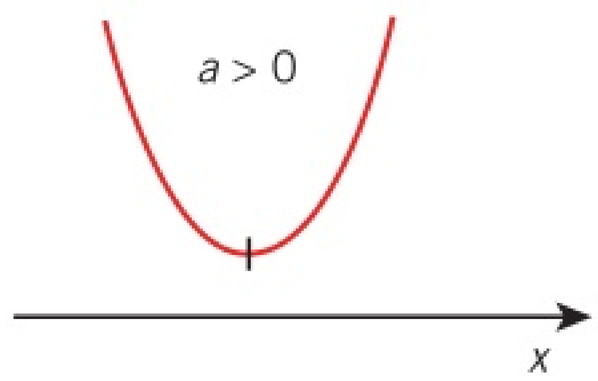


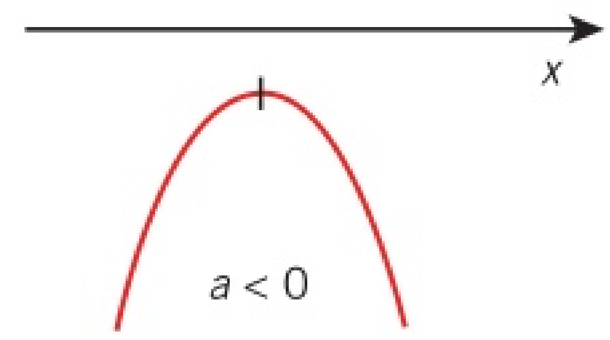
- $\Delta = 0$
  A parábola é tangente ao eixo x no ponto $V(x_V, 0)$, com $x_V = \dfrac{-b}{2a}$. Nesse caso, temos $f(x) = a(x - x_V)^2$.





- $\Delta < 0$
  A parábola não intersecta o eixo x. Nesse caso, para todo x real, $f(x)$ tem o mesmo sinal que a constante a.





Texto para as questões 1 a 4.

(Unicamp-SP/Adaptada) Em um pomar em que existiam 30 laranjeiras produzindo, cada uma, 600 laranjas por ano, foram plantadas n novas laranjeiras. Depois de um certo tempo constatou-se que, devido à competição por nutrientes do solo, cada laranjeira (tanto nova como velha) estava produzindo 10 laranjas a menos, por ano, por cada nova laranjeira plantada no pomar. Seja $P(n)$ a produção anual do pomar.

1 O valor máximo de n é:

a) 30.
b) 40.
c) 50.
→ d) 60.
e) 300.

Inicialmente, cada laranjeira produzia 600 laranjas por ano. De acordo com o texto, "cada laranjeira (tanto nova como velha) estava produzindo 10 laranjas a menos, por ano, por cada nova laranjeira plantada no pomar", portanto, conclui-se que:
$600 - 10n \geqslant 0 \Rightarrow n \leqslant 60$

2 $P(n)$ é igual a:

a) $(30 + n)(60 - n)$.
b) $(300 + n)(600 - 10n)$.
→ c) $(30 + n)(600 - 10n)$.
d) $18\,000 - 600n$.
e) $18\,000 - 300n$.

Número de laranjeiras: $30 + n$.
Produção anual de cada laranjeira: $600 - 10n$, com $n \leqslant 60$.
Produção anual do pomar: $P(n) = (30 + n)(600 - 10n)$.

3 Quantas novas laranjeiras deveriam ter sido plantadas para que o pomar tivesse produção máxima?

a) 12
→ b) 15
c) 30
d) 51
e) 64

O gráfico da função dada por $P(n)$ é um conjunto de 61 pontos de uma parábola, pois $P(n)$ é uma função polinomial do 2º grau e os valores de n são os números naturais de 0 a 60.
O valor de n, para o qual $P(n)$ é máximo, é dado pela abscissa do vértice da parábola; no caso, a média entre -30 e 60 (zeros de $P(n)$), que corresponde a:
$\frac{-30 + 60}{2} = 15$

4 Qual é a produção anual máxima desse pomar?

a) 18 000
b) 18 600
c) 19 400
d) 20 000
→ e) 20 250

$P(n) = (30 + n)(600 - 10n) \Rightarrow P(15) = (30 + 15)(600 - 150) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(15) = 45 \cdot 450 = 20\,250$

5 Se u e v são dois números reais, tais que $3u - 4v = 9$, então o maior valor possível do produto de u por v é obtido com v igual a:

a) $-1{,}075$.
→ b) $-1{,}125$.
c) $-2{,}000$.
d) $-2{,}050$.
e) $-2{,}250$.

$3u = 9 + 4v \Rightarrow u = \frac{9 + 4v}{3}$

Sendo $P = uv$, temos $P = \frac{1}{3}(4v^2 + 9v)$, que é máximo na abscissa do vértice da parábola, isto é, quando $v = \frac{-9}{8} = -1{,}125$.

Em casa

TEXTO DE APOIO

Existem muitos procedimentos para maximizar ganhos e para minimizar custos. Um desses consiste em comparar a média aritmética de números não negativos com a sua média geométrica. Dados n números não negativos x_1, x_2, ... e x_n, temos as definições:

$$\text{Média aritmética: } A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

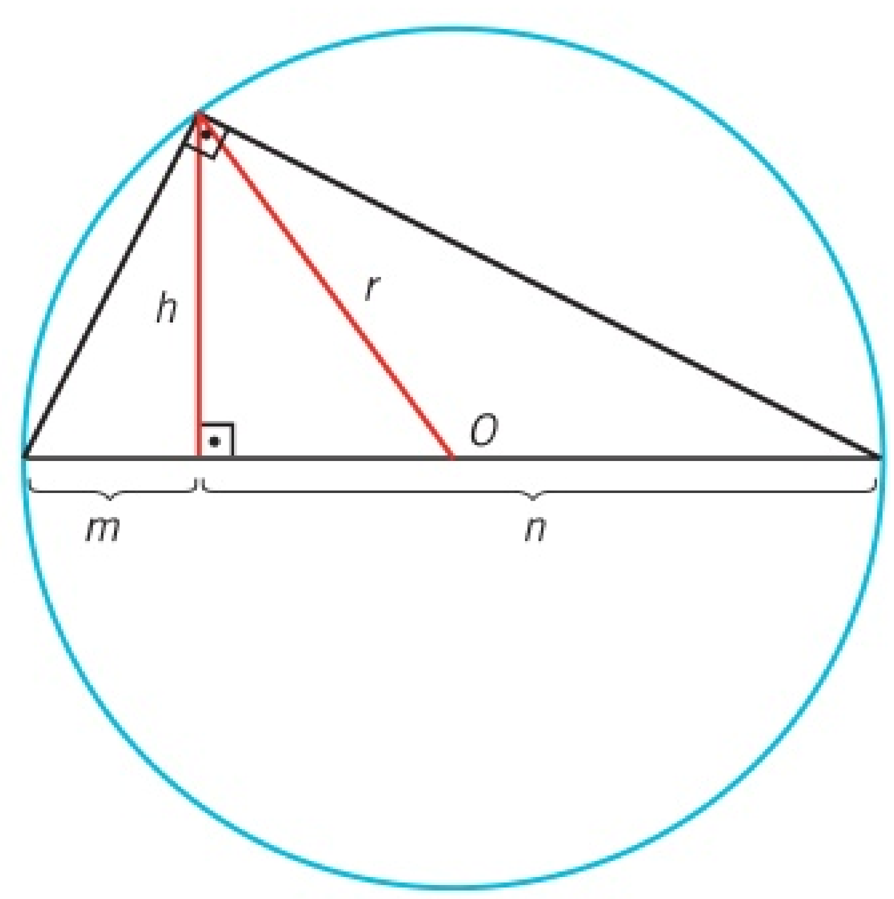
$$\text{Média geométrica: } G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Nessas condições, prova-se que $A \geqslant G$, isto é, a média aritmética é maior ou igual à média geométrica.

Temos $A = G$ se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Isto é, as médias aritmética e geométrica são iguais se, e somente se, todos os seus elementos são iguais.

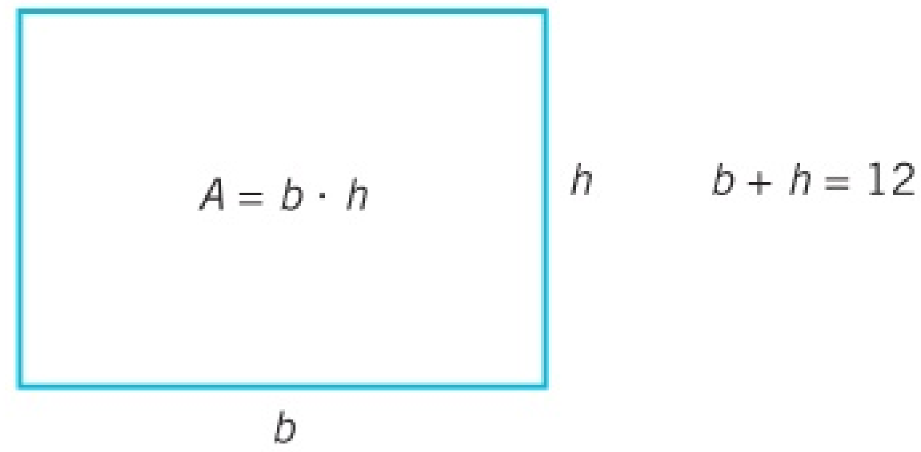
Vejamos alguns exemplos:

- $\frac{1+9}{2} > \sqrt[2]{1 \cdot 9}$, pois $5 > 3$;
- $\frac{7+7+7}{3} = \sqrt[3]{7 \cdot 7 \cdot 7}$, pois $7 = 7$.
- Na figura, temos $r = \frac{m+n}{2}$ (raio) e $h^2 = \sqrt{mn}$ ou $h = mn$ (altura relativa à hipotenusa).



Note que quando $m \neq n$, teremos $r > h$, já quando $m = n$, teremos $r = h$.

- De todos os retângulos de semiperímetro 12, o de maior área é o quadrado: com $\sqrt{b \cdot h} \leqslant \frac{b+h}{2}$ e $b + h = 12$, temos $\sqrt{b \cdot h} \leqslant 6$; portanto, $b \cdot h \leqslant 36$.



Assim, podemos concluir que a área não é maior que 36.

A área $b \cdot h$ é igual a 36 se, e somente se, $b = h = 6$.

Logo, o quadrado de lado 6 é, nas condições dadas, o retângulo de área máxima.

Texto para as questões 1 e 2.

(FGV-SP/Adaptada) Um hotel tem 30 quartos para casais. O gerente verificou que, cobrando R$ 120,00 por dia de permanência de cada casal, o hotel permanecia lotado e que cada aumento de R$ 5,00 na diária fazia com que um quarto ficasse vazio.

1 Sendo x o preço da diária e y o número de quartos ocupados, qual a relação entre x e y?

→ a) $y = \frac{-x}{5} + 54$

b) $y = \frac{x}{5} + 54$

c) $x = \frac{-y}{5} + 54$

d) $x = \frac{y}{5} + 54$

e) $x + 5y = 54$

2 Qual é o preço que deve ser cobrado por dia para maximizar a receita do hotel?

a) R$ 132,50

→ b) R$ 135,00

c) R$ 137,50

d) R$ 140,00

e) R$ 150,00

3 (Enem) A empresa WQTU Cosmético vende um determinado produto, cujo custo de fabricação de cada x unidades é dado por $3x^2 + 232$, e o seu valor de venda é expresso pela função $180x - 116$. A empresa vendeu 10 unidades do produto, contudo a mesma deseja saber quantas unidades precisa vender para obter um lucro máximo. A quantidade máxima de unidades a serem vendidas pela empresa WQTU para a obtenção do maior lucro é:

a) 10.

→ b) 30.

c) 58.

d) 116.

e) 232.

4 (Enem) Um posto de combustível vende 10000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10200 litros. Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é:

a) $V = 10000 + 50x - x^2$.

b) $V = 10000 + 50x + x^2$.

c) $V = 15000 - 50x - x^2$.

→ d) $V = 15000 + 50x - x^2$.

e) $V = 15000 - 50x + x^2$.

5 Nas condições da questão anterior, qual deve ser o valor de x para que o valor de V seja máximo?

a) 15

b) 20

→ c) 25

d) 30

e) 50

Anotações

AULA 24

Competência 6 Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

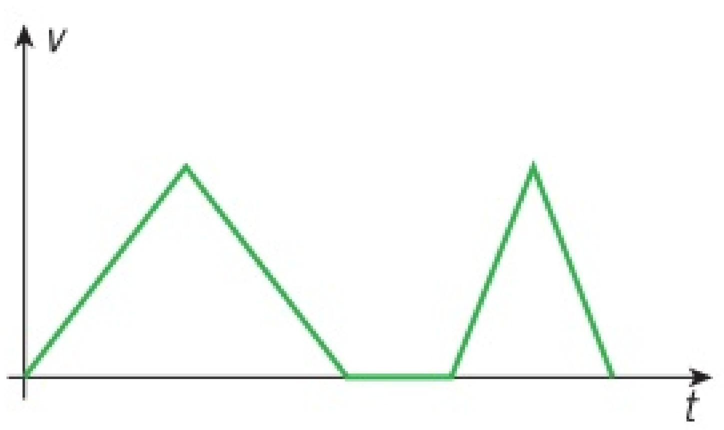
Habilidade 24 Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

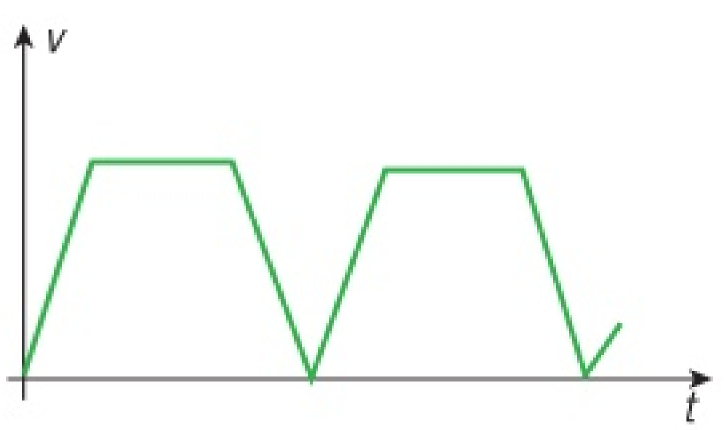
Em classe

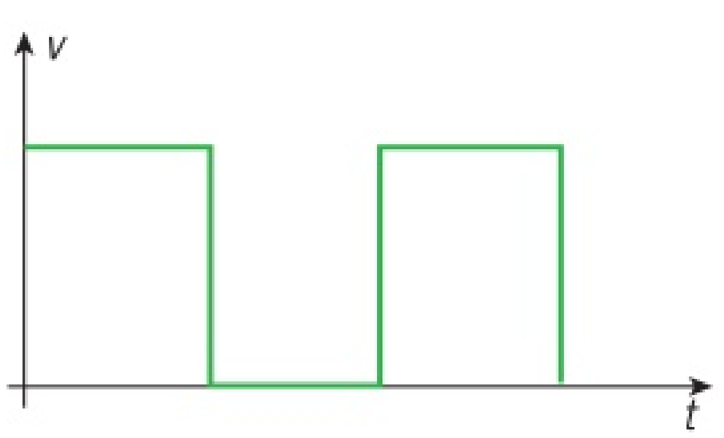
ANÁLISE DE GRÁFICOS

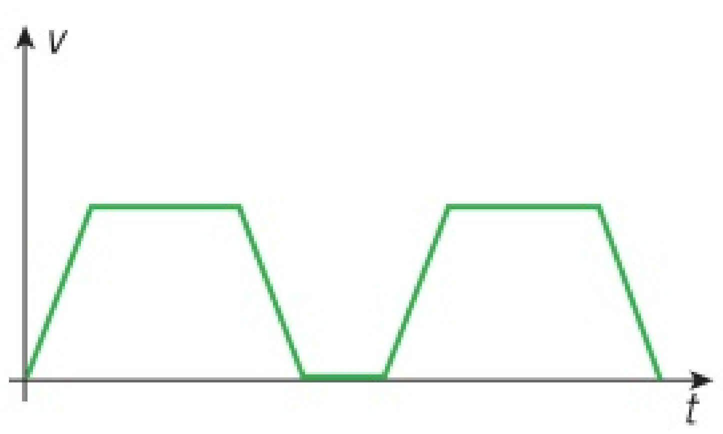
Existem muitas maneiras de representar informações. Os gráficos são uma delas.
Observe os exemplos:

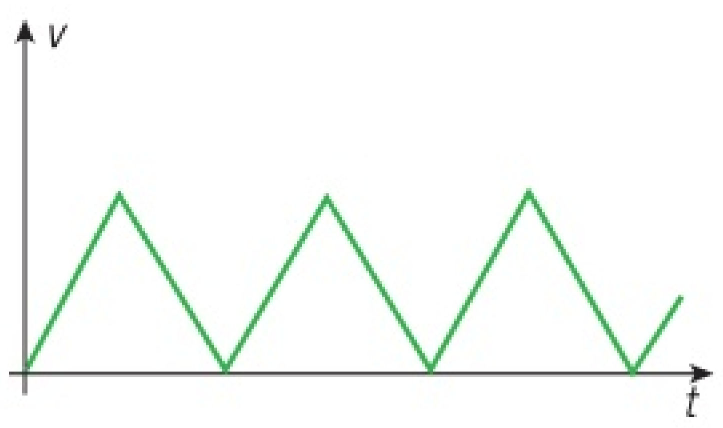
1) Uma composição metroviária movimenta-se entre duas estações com velocidade variável, de maneira a proporcionar o mínimo incômodo possível aos passageiros.
Entre os gráficos apresentados, qual é o mais adequado para representar a situação descrita?

a) 

b) 

c) 

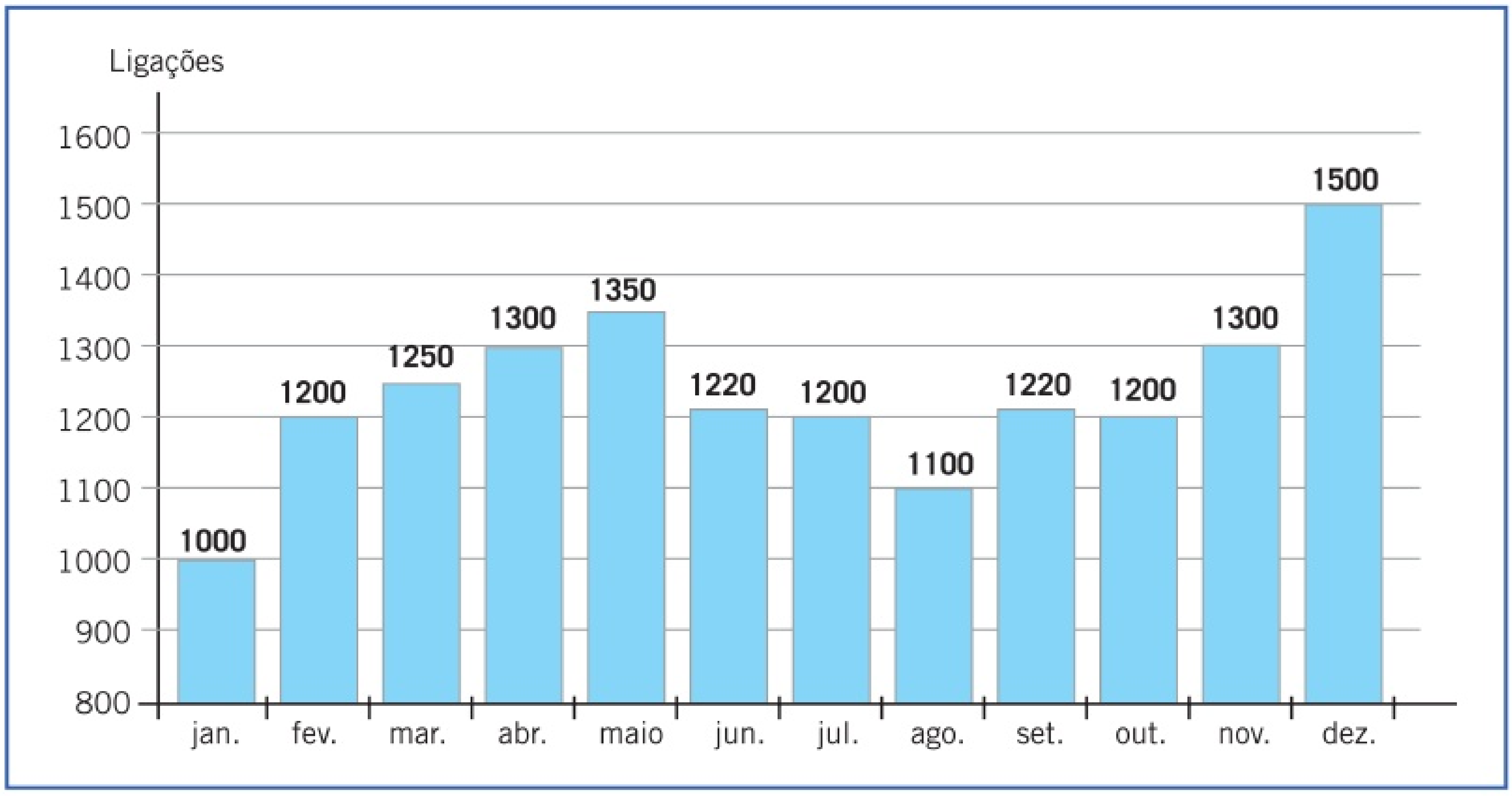
d) 

e) 

Resolução:
Fazendo uma análise cuidadosa, observamos que o trem deve:
- partir do repouso (parado na primeira estação);
- acelerar até atingir uma velocidade limite constante;
- manter a velocidade constante;
- desacelerar até o repouso;
- manter esse estado por algum tempo, na estação seguinte.

A partir daí, o ciclo deve ser reiniciado.
Portanto, dos gráficos apresentados, o mais adequado é o gráfico da alternativa **d**.

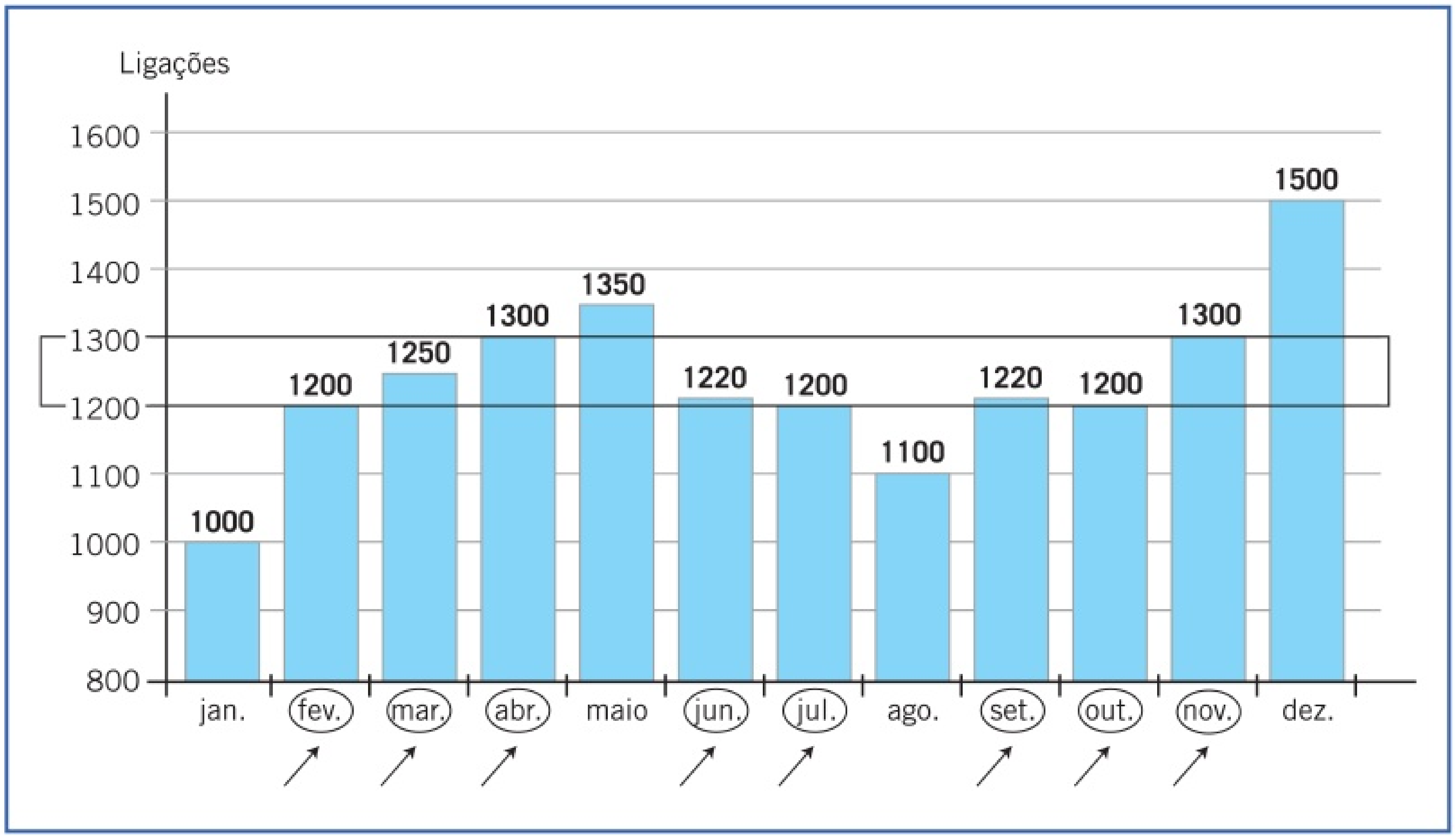
2) (Vunesp-SP) O número de ligações telefônicas de uma empresa, mês a mês, no ano de 2005, pode ser representado pelo gráfico abaixo.



Com base no gráfico, pode-se afirmar que a quantidade total de meses em que o número de ligações foi maior ou igual a 1 200 e menor ou igual a 1 300 é:

a) 2.
b) 4.
c) 6.
d) 7.
e) 8.

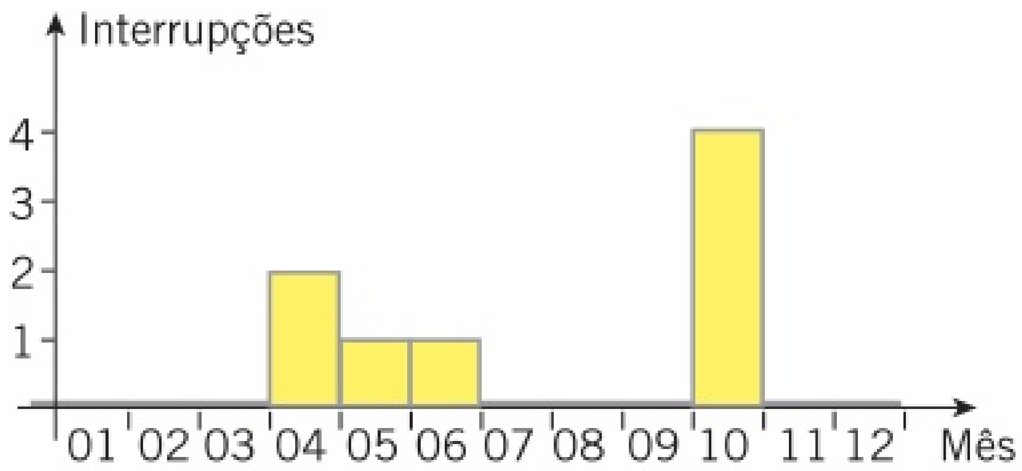
Resolução:

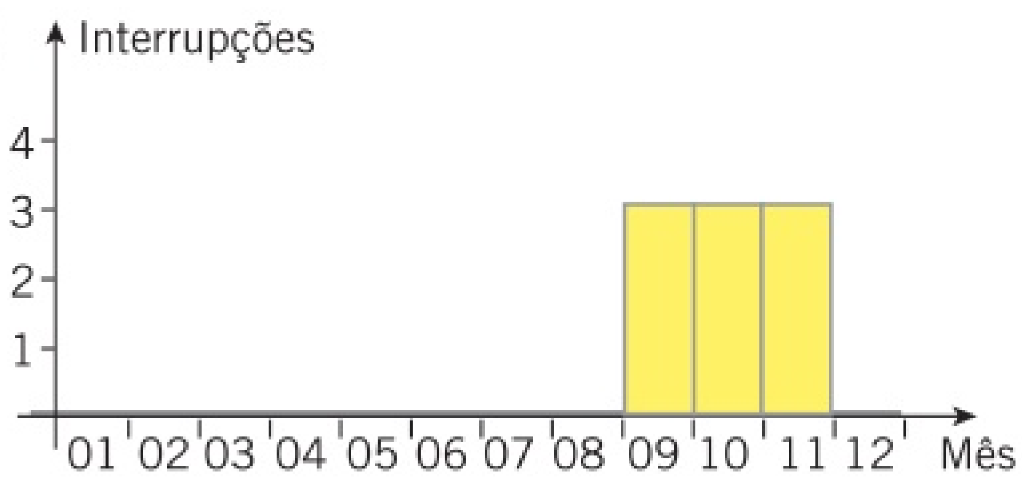


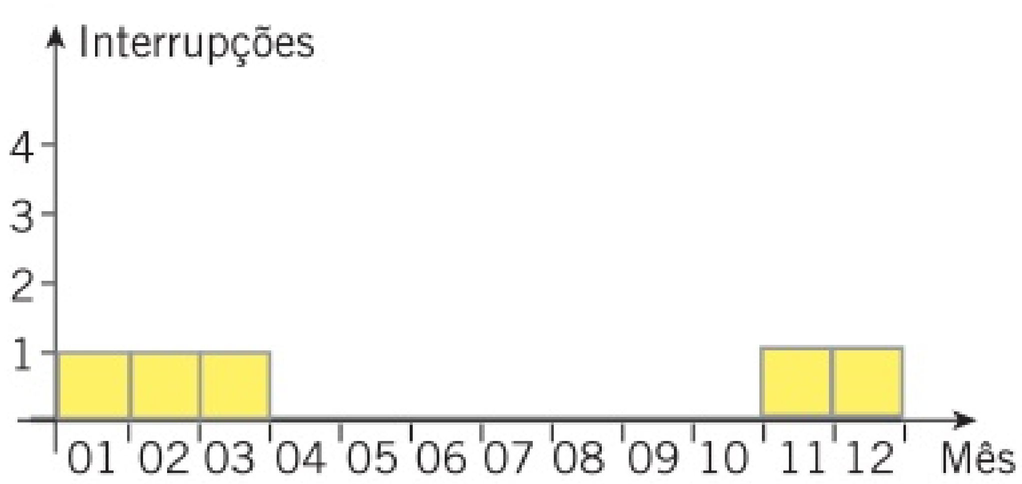
O número de ligações foi maior ou igual a 1 200 e menor ou igual a 1 300 nos 8 meses indicados: fev., mar., abr., jun., jul., set., out. e nov. Logo, a alternativa **e** é a correta.

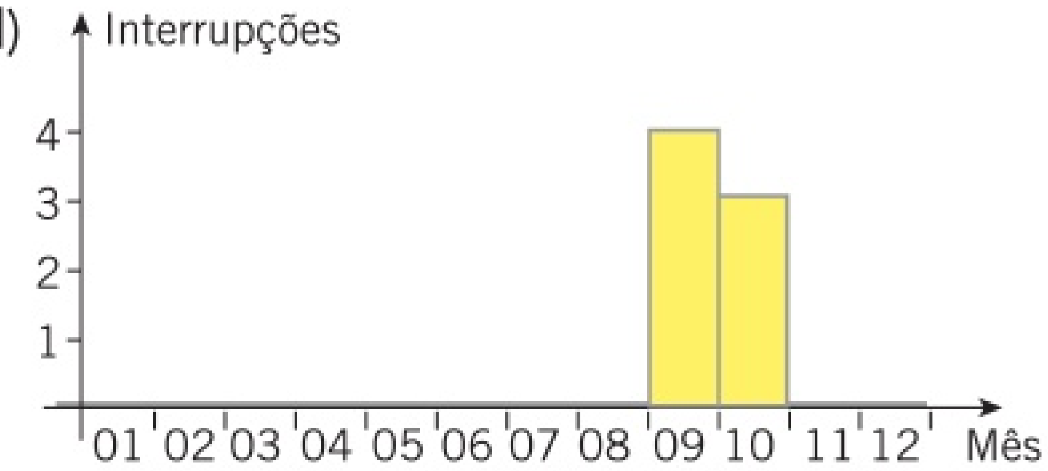
1 O aumento do uso do computador nas atividades industriais e de serviços, principalmente nos grandes centros urbanos, gerou uma demanda crescente de energia elétrica de boa qualidade. Essa qualidade pode ser medida, de modo geral, pelo número médio de interrupções de fornecimento, ao longo do ano, de uma dada fonte de distribuição.

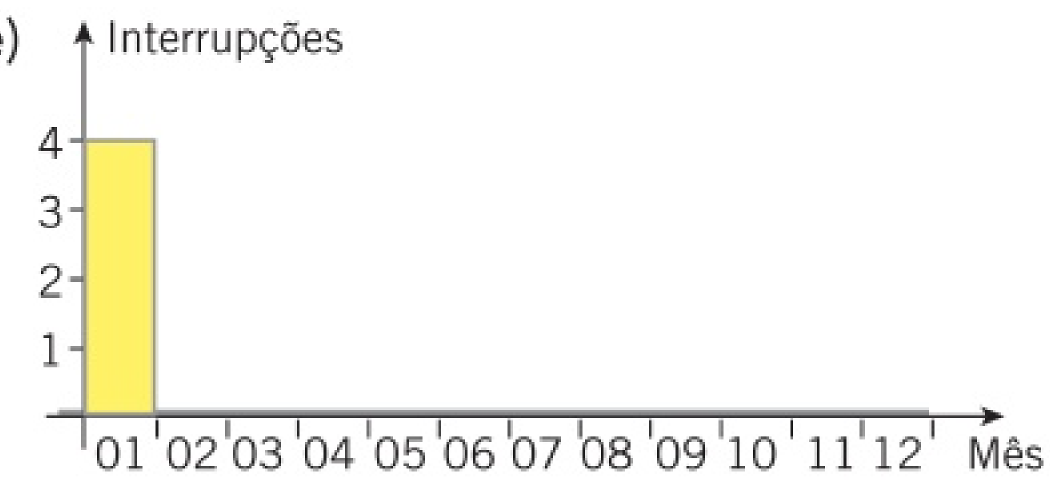
As figuras representam diagramas de qualidade para diversas fontes de energia ao longo do ano de 2001. Qual delas proporcionou energia elétrica de melhor qualidade?

a)


b)


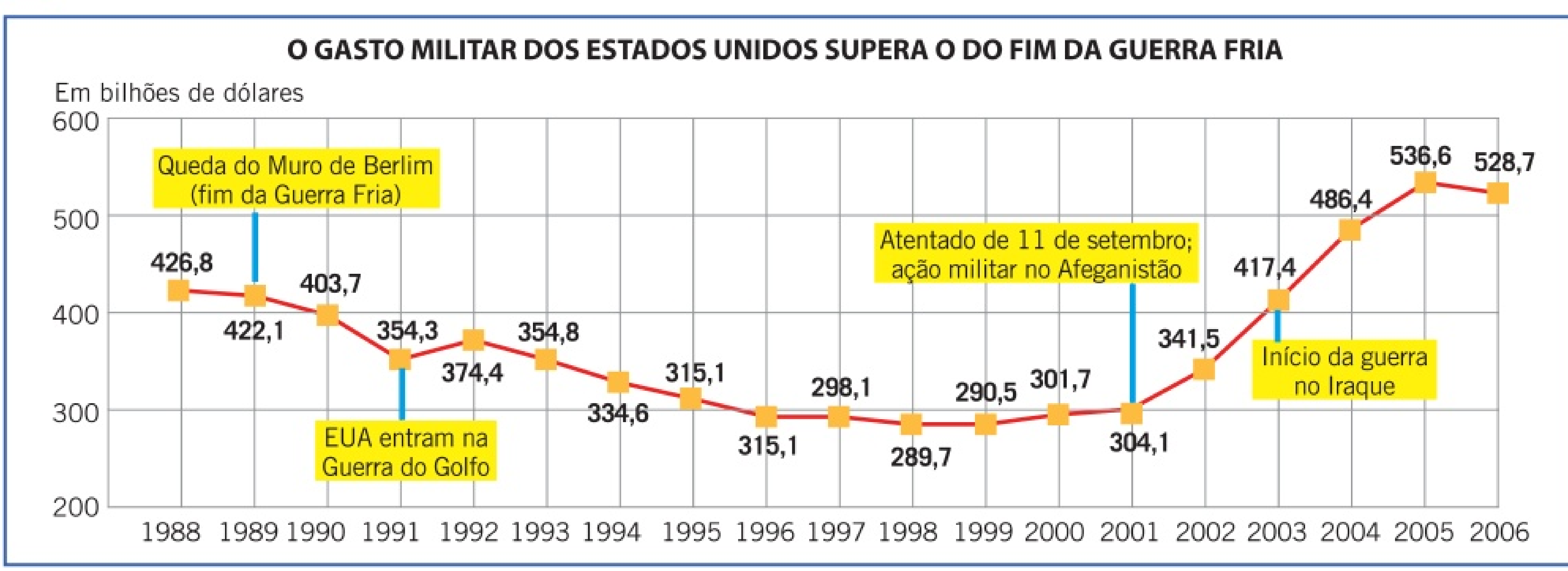
c)


d)


→ e)


Analisando os gráficos, temos que os números totais de interrupções em 2001, representados nos gráficos das alternativas **a**, **b**, **c**, **d** e **e**, são respectivamente: 8, 9, 5, 7 e 4. Como a alternativa **e** apresenta o menor número de interrupções, concluímos que essa fonte proporcionou a energia elétrica de melhor qualidade.

2 (Enem) O gráfico a seguir apresenta o gasto militar dos Estados Unidos, no período de 1988 a 2006.



Instituto Internacional de Pesquisa da Paz de Estocolmo (Sipri). *Almanaque Abril 2008*. São Paulo: Abril.

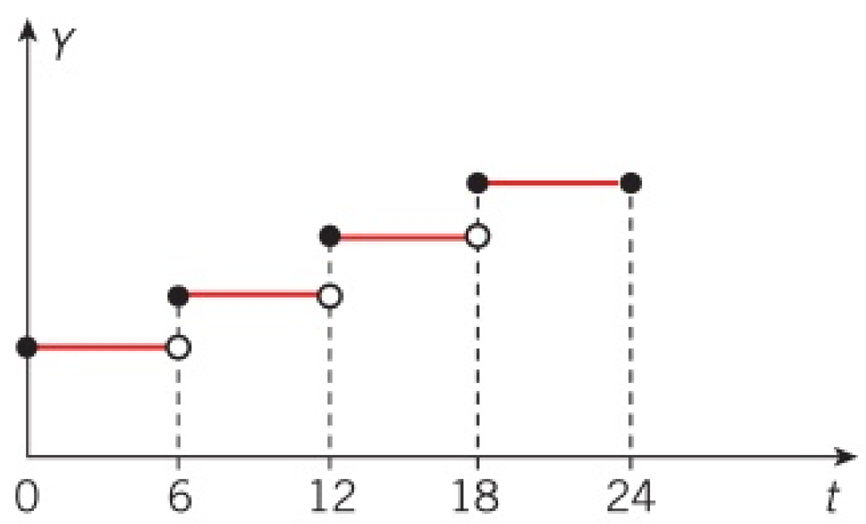
Com base no gráfico, o gasto militar no início da guerra no Iraque foi de:

a) US$ 4 174 000,00.
b) US$ 41 740 000,00.
c) US$ 417 400 000,00.
d) US$ 41 740 000 000,00.
→ e) US$ 417 400 000 000,00.

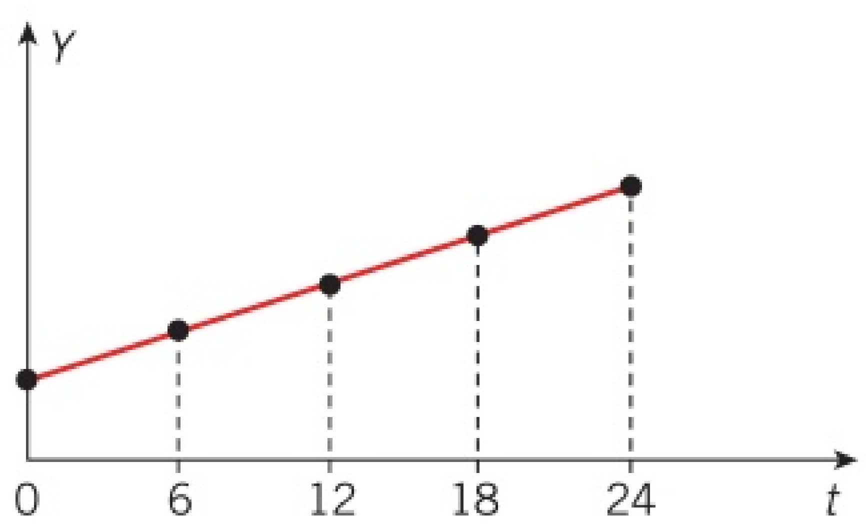
Temos, marcado no gráfico, o ano de início da guerra no Iraque com valor de 417,4 na ordenada. Observando a legenda, vemos que a unidade do eixo é bilhões de dólares, portanto o gasto é de US$ 417 400 000 000,00.

3 (Unifesp) Uma forma experimental de insulina está sendo injetada a cada 6 horas em um paciente com diabetes. O organismo usa ou elimina a cada 6 horas 50% da droga presente no corpo. O gráfico que melhor representa a quantidade *Y* da droga no organismo como função do tempo *t*, em um período de 24 horas, é:

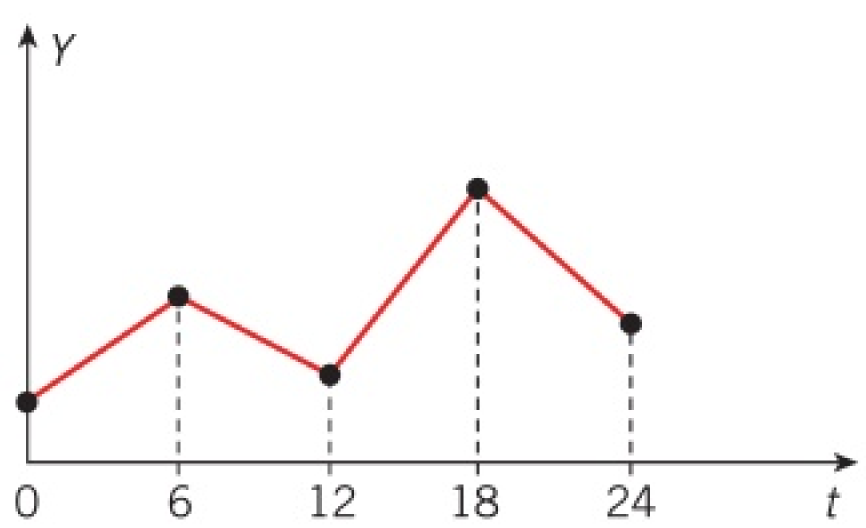
a)



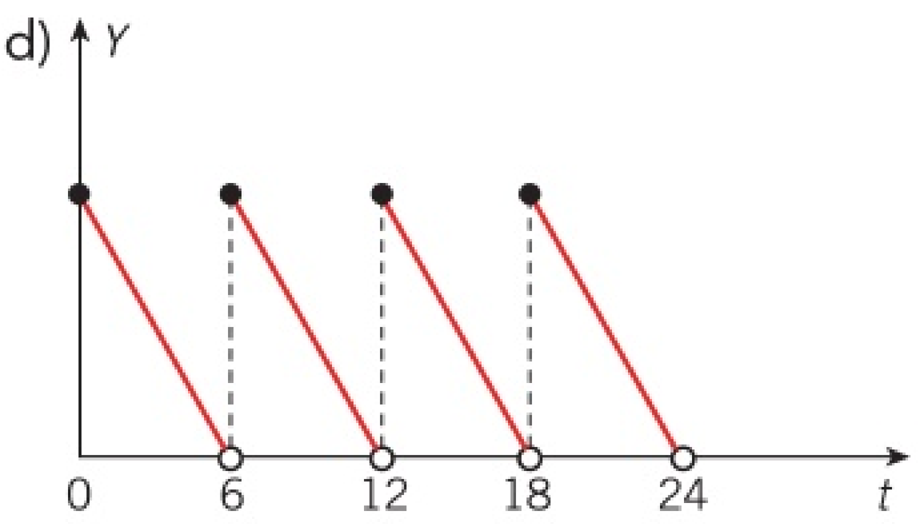
b)



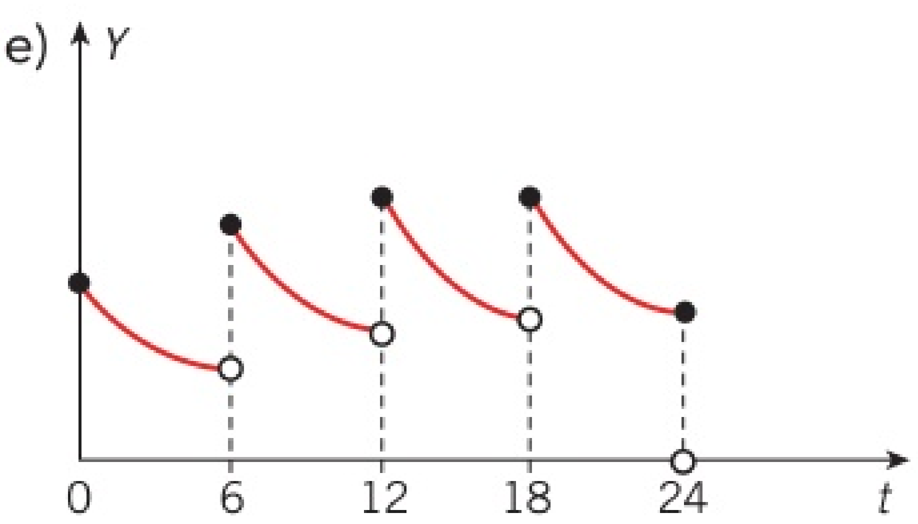
c)



d)



→ e)



O gráfico deverá ter as seguintes características:
I) Ser estritamente decrescente em cada um dos intervalos: [0, 6[, [6, 12[, [12, 18[e [18, 24[.
II) No final de cada intervalo, a quantidade *Y* da droga deverá tender para a metade da quantidade inicial do intervalo.
Nessas condições, o gráfico que melhor representa a quantidade *Y* em função do tempo *t* é o da alternativa **e**.

Em casa

TEXTO DE APOIO

Organogramas

Organograma é uma forma de se representar a estrutura formal de uma organização. Eles ilustram como estão dispostas as unidades funcionais, a hierarquia e as relações de comunicação existentes entre estas.

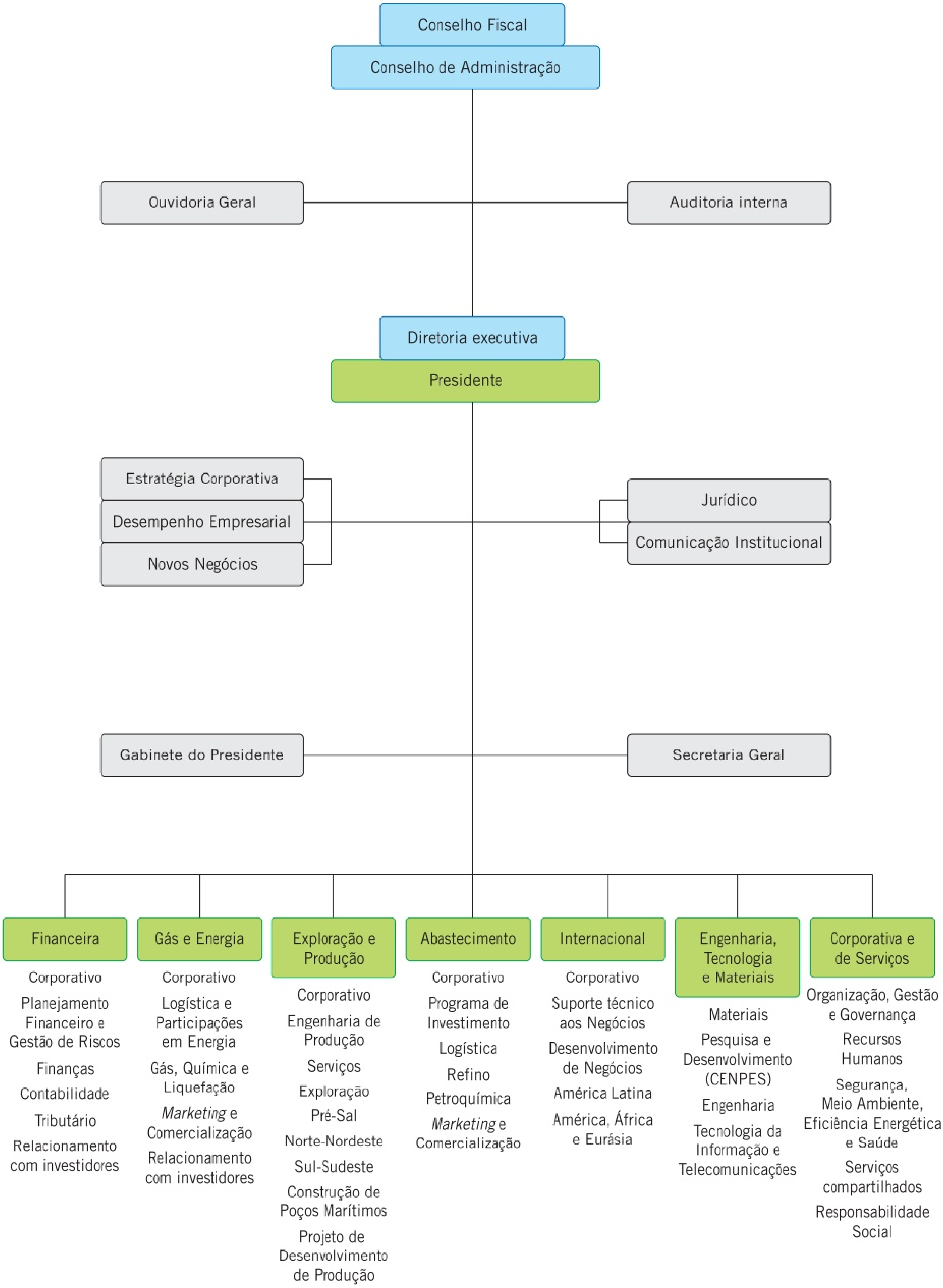
Os órgãos, ou unidades funcionais, são departamentos administrativos com funções bem definidas, por exemplo, Tesouraria, Departamento de Compras, Portaria, Biblioteca, Setor de Produção, Gerência Administrativa, Diretoria Técnica, Secretaria, etc. Cada órgão possui um responsável, cujo cargo pode ser chefe, supervisor, gerente, coordenador, diretor, secretário, governador, presidente, etc., além disso, existem os colaboradores (funcionários) e um determinado espaço físico.

Em um organograma, os órgãos estão dispostos em níveis que representam a hierarquia existente entre eles. Quanto mais alto estiver o órgão, maior a autoridade e a abrangência da atividade.

Para visualizar, observe o organograma da Petrobras:

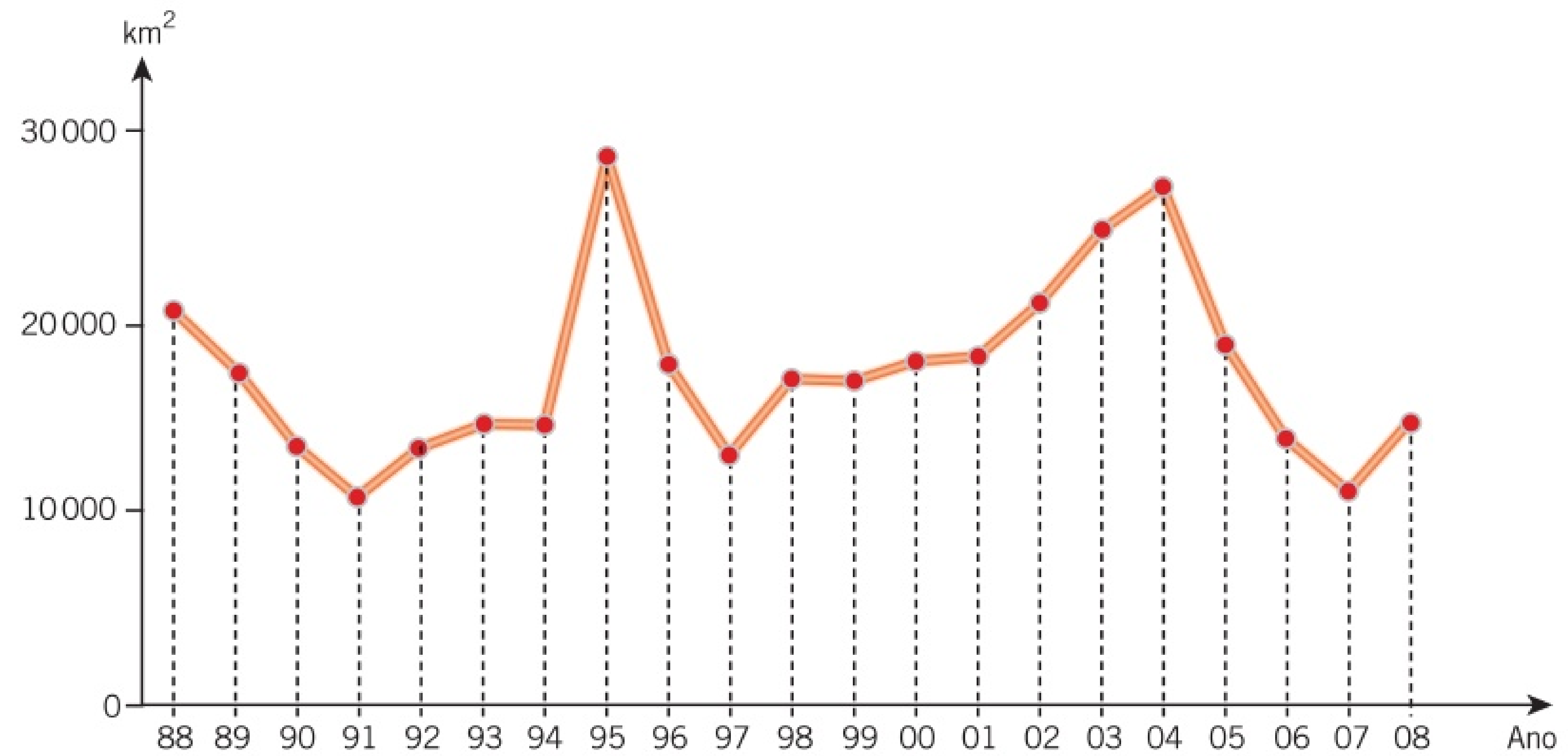
Nosso modelo de organização, aprovado pelo Conselho de Administração em outubro de 2000, adota as melhores práticas de governança corporativa.

A estrutura é composta por quatro áreas de Negócio e pelas áreas Corporativa, Financeira e de Serviços.



Disponível em: <www.petrobras.com.br/ptquem-somos/perfil/organograma/>. Acesso em: 22 maio 2013.

1 (Enem) O gráfico abaixo mostra a área desmatada da Amazônia, em km², a cada ano, no período de 1988 a 2008.



As informações do gráfico indicam que:

a) o maior desmatamento ocorreu em 2004.

b) a área desmatada foi menor em 1997 que em 2007.

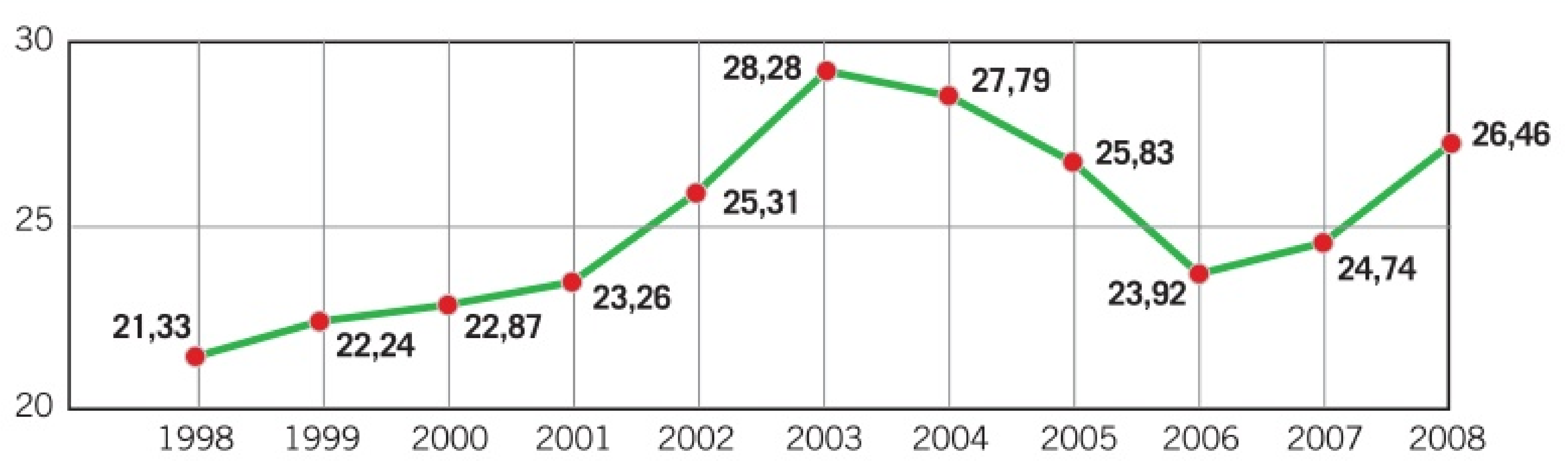
c) a área desmatada a cada ano manteve-se constante entre 1998 e 2001.

→ d) a área desmatada por ano foi maior entre 1994 e 1995 que entre 1997 e 1998.

e) o total de área desmatada em 1992, 1993 e 1994 é maior que 60000 km².

2 (Enem) O termo agronegócio não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos.

O gráfico seguinte mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro:



Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA). *Almanaque Abril 2010*. São Paulo: Abril, ano 36. Adaptado.

Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais.

Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de:

a) 1998 e 2001.

b) 2001 e 2003.

→ c) 2003 e 2006.

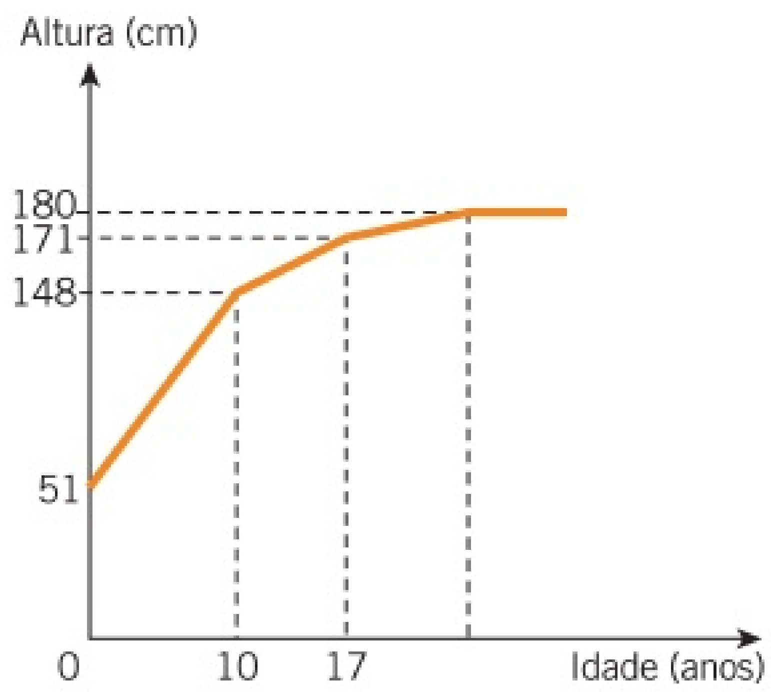
d) 2003 e 2007.

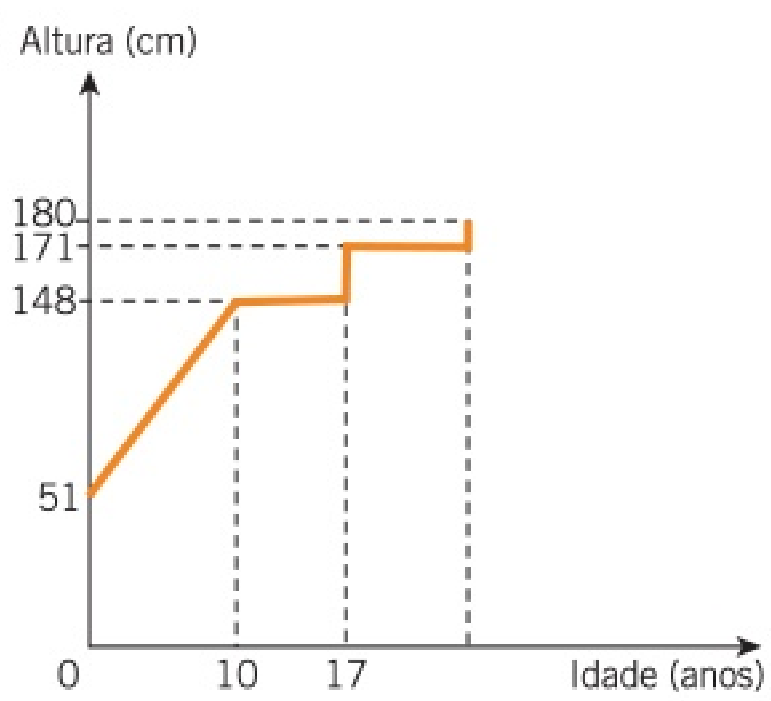
e) 2003 e 2008.

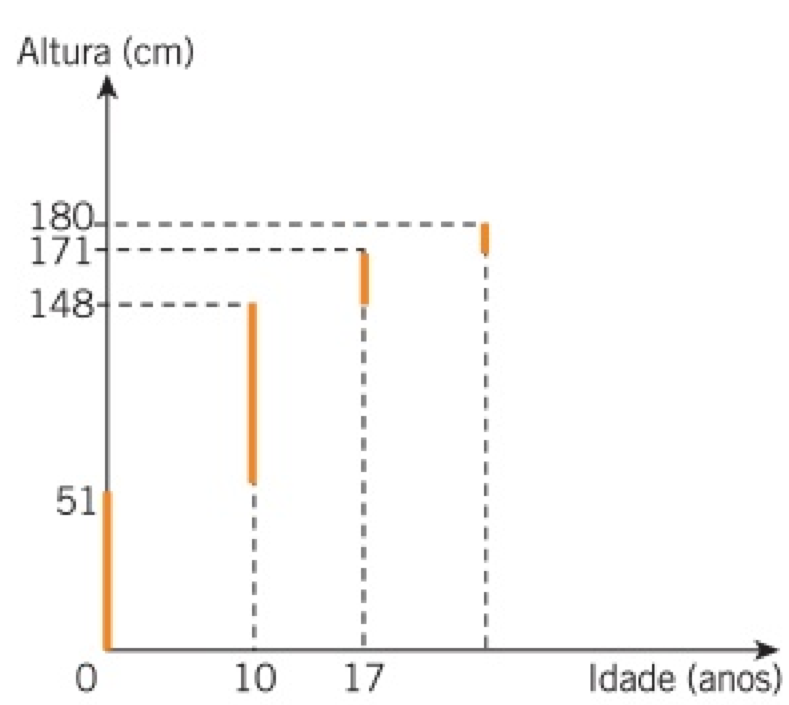
3 (Enem) Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura se dava de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível.

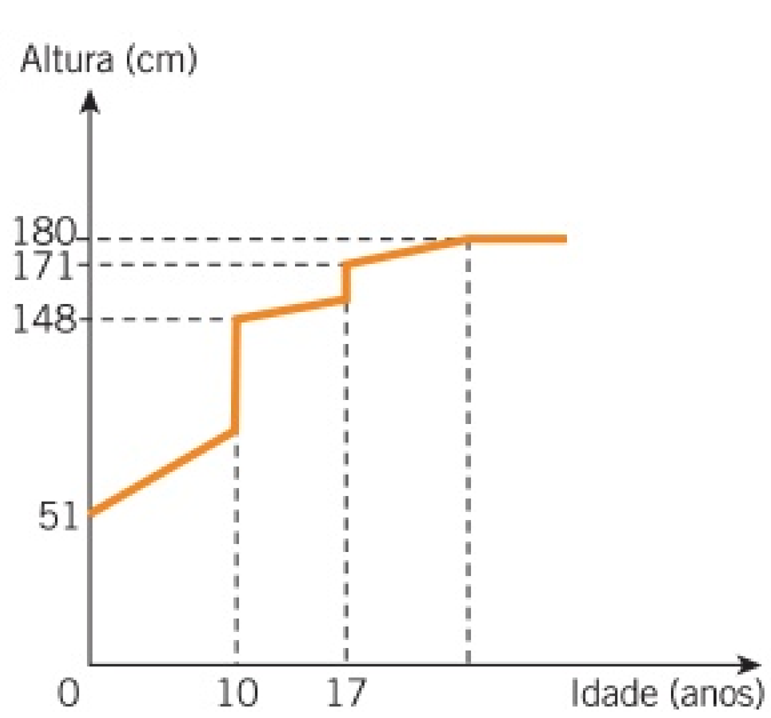
Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico relacionando as alturas do filho nas idades consideradas.

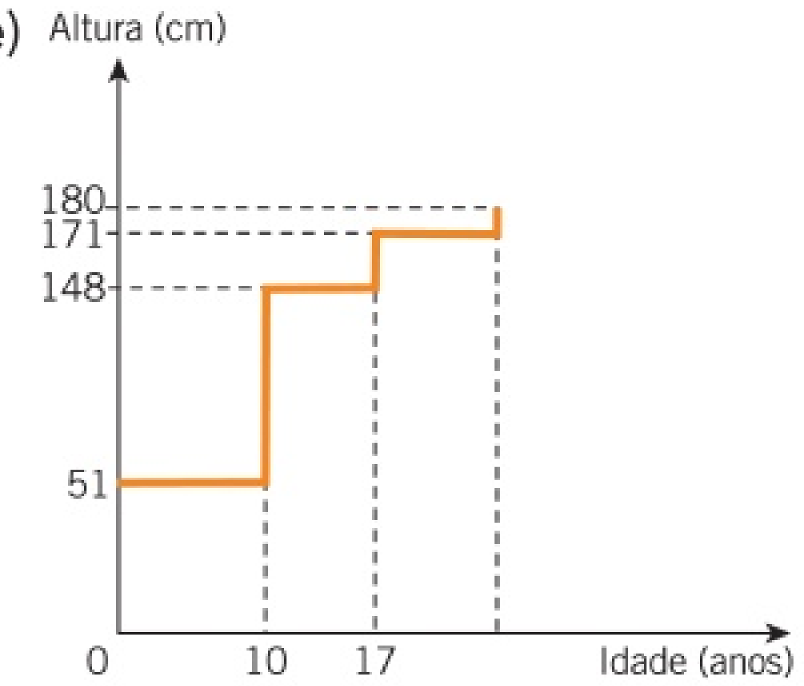
Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?

→ a) 

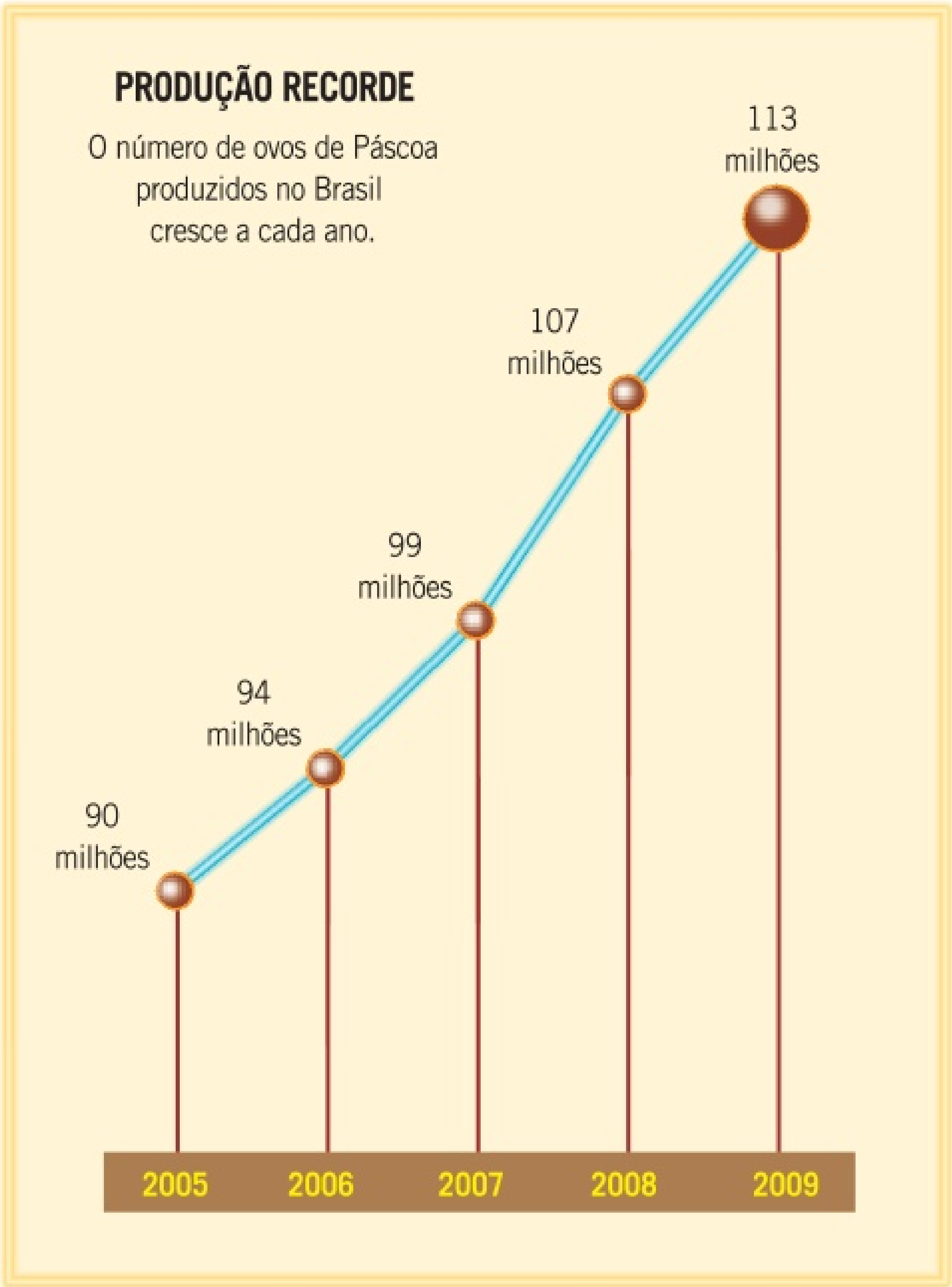
b) 

c) 

d) 

e) 

4 (Enem) Para conseguir chegar a um número recorde de produção de ovos de Páscoa, as empresas brasileiras começam a se planejar para esse período com um ano de antecedência. O gráfico a seguir mostra o número de ovos de Páscoa produzidos no Brasil no período de 2005 a 2009.



Veja. São Paulo: Abril, ed. 2107, n. 14, ano 42.

De acordo com o gráfico, o biênio que apresentou maior produção acumulada foi:

a) 2004-2005.
b) 2005-2006.
c) 2006-2007.
d) 2007-2008.
→ e) 2008-2009.

AULA 25

Competência 6 Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

Habilidade 25 Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

Em classe

ANÁLISE DE TABELA

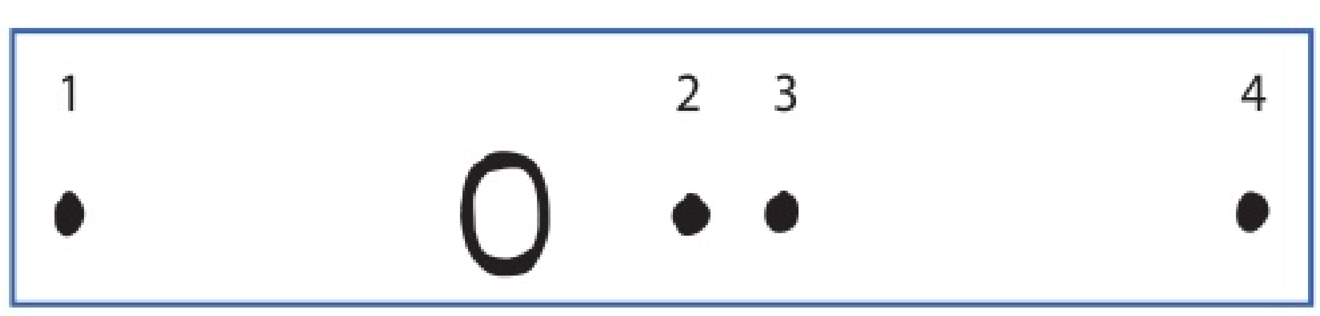
Existem muitas maneiras de representar informações. Na aula anterior, vimos os gráficos e os organogramas; agora, vamos estudar as tabelas.

Observe os exemplos:

1) (Enem) A tabela abaixo resume alguns dados importantes sobre os satélites de Júpiter:

Nome	Diâmetro (km)	Distância média ao centro de Júpiter (km)	Período orbital (dias terrestres)
Io	3 642	421 800	1,8
Europa	3 138	670 900	3,6
Ganimedes	5 262	1 070 000	7,2
Calisto	4 800	1 880 000	16,7

Ao observar os satélites de Júpiter pela primeira vez, Galileu Galilei fez diversas anotações e tirou importantes conclusões sobre a estrutura de nosso Universo. A figura abaixo reproduz uma anotação de Galileu referente a Júpiter e seus satélites.



De acordo com essa representação e com os dados da tabela, os pontos indicados por 1, 2, 3 e 4 correspondem, respectivamente, a:

a) Io, Europa, Ganimedes e Calisto.
b) Ganimedes, Io, Europa e Calisto.
c) Europa, Calisto, Ganimedes e Io.
d) Calisto, Ganimedes, Io e Europa.
e) Calisto, Io, Europa e Ganimedes.

Resolução:
Da figura, concluímos que, sendo r a distância de cada satélite a Júpiter:
$r_2 < r_3 < r_1 < r_4$.
Como a tabela mostra os satélites em ordem crescente de distância a Júpiter, temos que:
2 corresponde a Io;
3 corresponde a Europa;
1 corresponde a Ganimedes;
4 corresponde a Calisto.
Logo, a sequência é Ganimedes, Io, Europa e Calisto.

2) (Enem) A pesca não predatória pressupõe que cada peixe retirado de seu *habitat* já tenha procriado, pelo menos uma vez. Para algumas espécies, isso ocorre depois dos peixes apresentarem a máxima variação anual de seu peso.
O controle de pesca no Pantanal é feito com base no peso de cada espécie.
A tabela fornece o peso do pacu, uma dessas espécies, em cada ano.

Idade (anos)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Peso (kg)	1,1	1,7	2,6	3,9	5,1	6,1	7	7,8	8,5	8,9	9,1	9,3	9,4

Considerando esses dados, a pesca do pacu deve ser autorizada para espécimes com peso de, no mínimo:

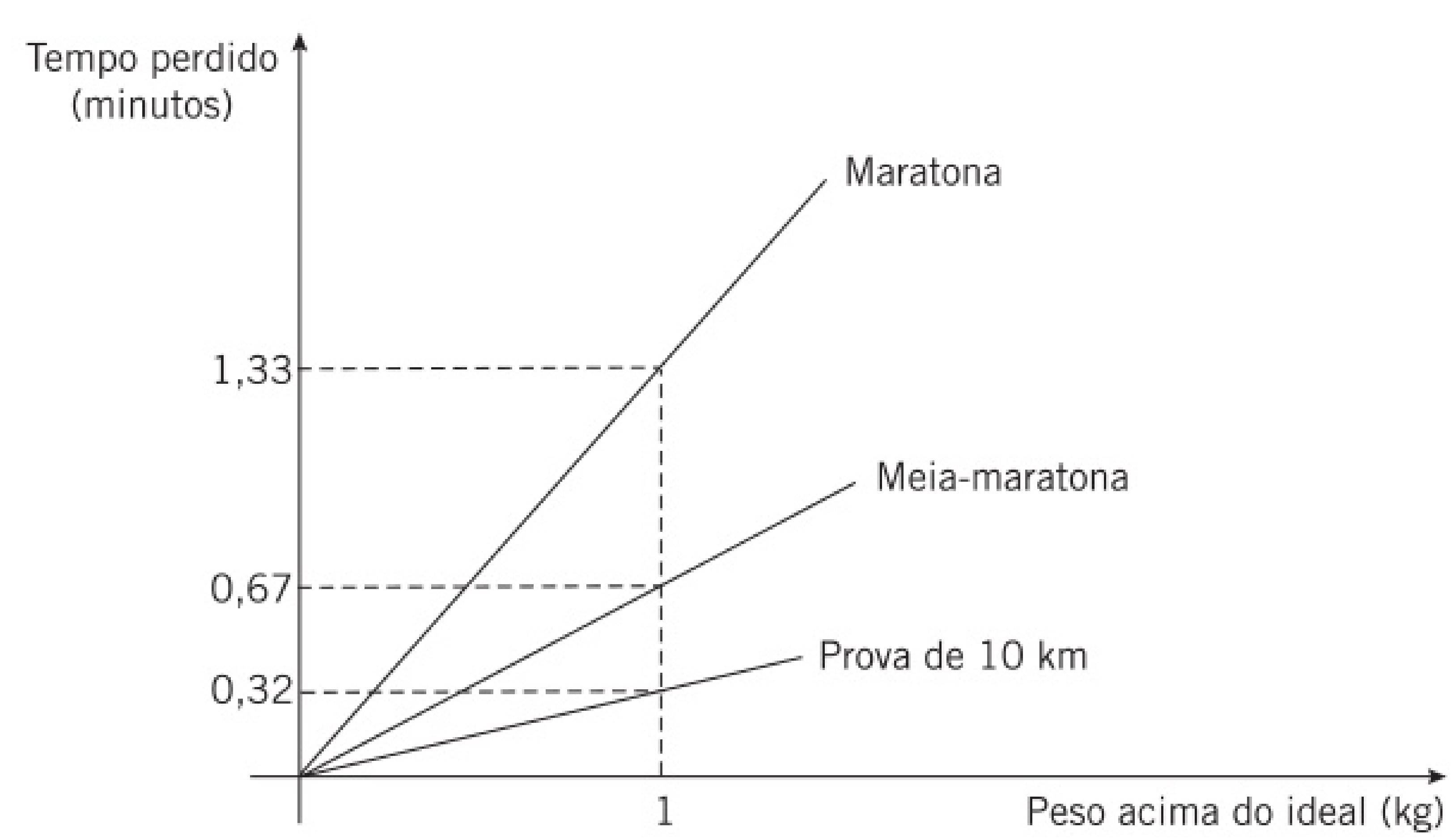
a) 4 kg. b) 5 kg. c) 7 kg. d) 9 kg. e) 11 kg.

Resolução:
De acordo com a tabela, a maior variação de peso se dá do terceiro para o quarto ano de vida do pacu (variação de 1,3 kg). Portanto, é mais provável que peixes com peso superior a 4 kg já tenham passado pelo processo de reprodução.

1 (Enem) O excesso de peso pode prejudicar o desempenho de um atleta profissional em corridas de longa distância como a maratona (42,2 km), a meia-maratona (21,1 km) ou uma prova de 10 km. Para saber uma aproximação do intervalo de tempo a mais perdido para completar uma corrida devido ao excesso de peso, muitos atletas utilizam os dados apresentados na tabela e no gráfico:

Altura (m)	Peso (kg) ideal para atleta masculino de ossatura grande, corredor de longa distância
1,57	56,9
1,58	57,4
1,59	58,0
1,60	58,5
⋮	⋮

Tempo × Peso
(Modelo Wilmore e Benke)



Usando essas informações, um atleta de ossatura grande, pesando 63 kg e com altura igual a 1,59 m, que tenha corrido uma meia-maratona, pode estimar que, em condições de peso ideal, teria melhorado seu tempo na prova em:

a) 0,32 minuto. b) 0,67 minuto. c) 1,60 minuto. d) 2,68 minutos. → e) 3,35 minutos.

De acordo com a tabela, o atleta em questão deveria "pesar" 58 kg, isto é, ele está 5 kg acima do "peso ideal".
Consultando-se o gráfico, para a meia-maratona, cada 1 kg acima do ideal corresponde a uma perda de 0,67 minuto.
Assim:

$$\begin{matrix} 1\text{ kg} & \text{———} & 0{,}67\text{ min} \\ 5\text{ kg} & \text{———} & x\text{ min} \end{matrix} \Rightarrow x = 3{,}35\text{ minutos}$$

2 (Enem) O quadro apresenta informações da área aproximada de cada bioma brasileiro.

Biomas continentais brasileiros	Área aproximada (km^2)	Área/Brasil
Amazônia	4 196 943	49,29%
Cerrado	2 036 448	23,92%
Mata Atlântica	1 110 182	13,04%
Caatinga	844 453	9,92%
Pampa	176 496	2,07%
Pantanal	150 355	1,76%
Área total Brasil	**8 514 877**	

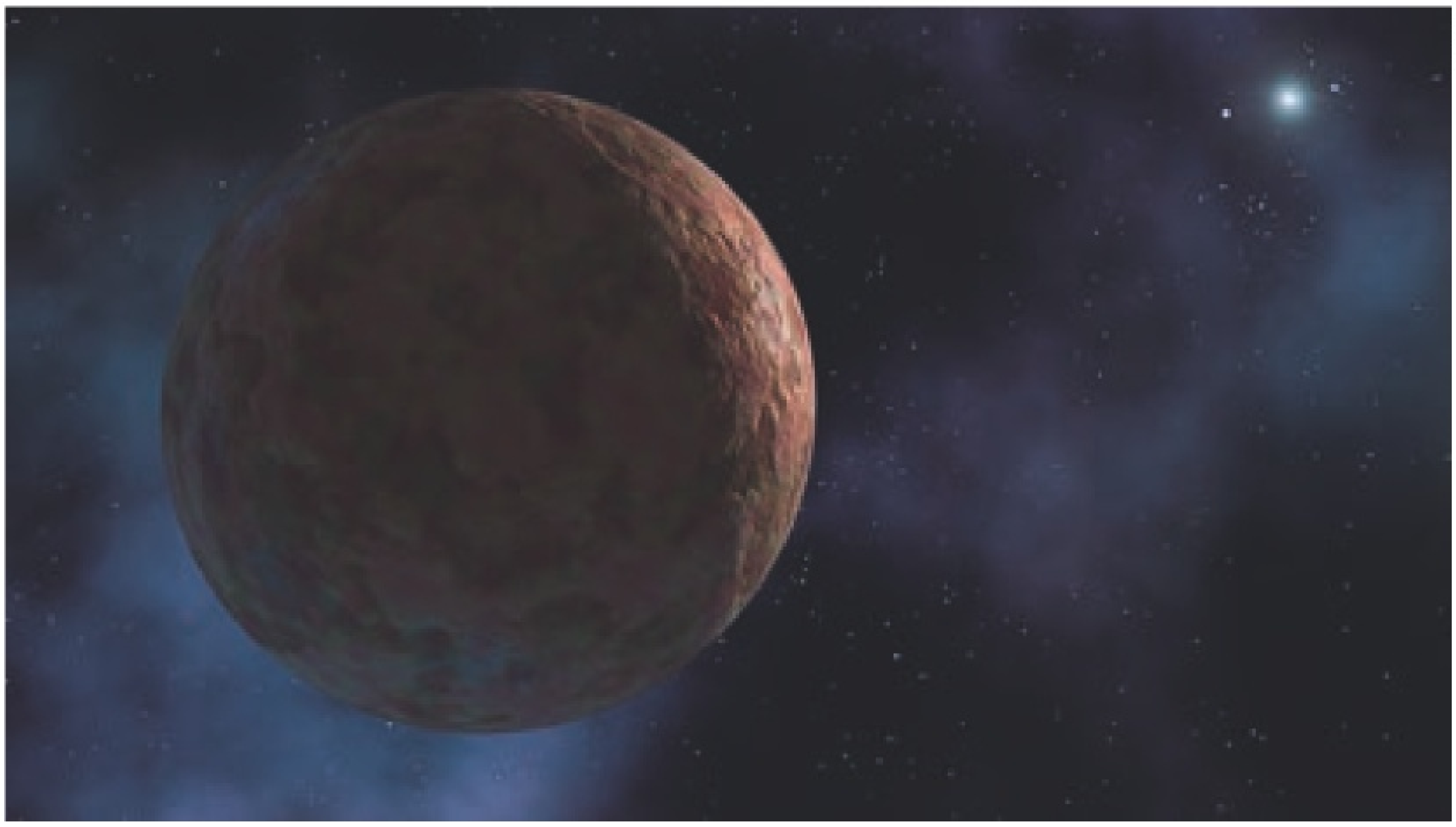
É comum em conversas informais, ou mesmo em noticiários, o uso de múltiplos da área de um campo de futebol (com as medidas de 120 m × 90 m) para auxiliar a visualização de áreas consideradas extensas. Nesse caso, qual é o número de campos de futebol correspondente à área aproximada do bioma Pantanal?

a) 1 400
b) 14 000
c) 140 000
d) 1 400 000
→ e) 14 000 000

A área de um campo de futebol, em m^2, é dada por $90 \cdot 120 = 10\,800$. Do enunciado, a área aproximada do Pantanal é $150\,355\ km^2 = 150\,355 \cdot 10^6\ m^2$. Assim, o número de campos de futebol pedido é igual a $\frac{150\,355 \cdot 10^6}{10\,800}$, ou seja, $13{,}9 \cdot 10^6 \simeq 14 \cdot 10^6$.

3 A notícia a seguir foi publicada na internet em março de 2004:

Astrônomos encontram possível décimo planeta do Sistema Solar



© NASA

Disponível em: <www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 14 maio 2013. Adaptado.

Um objeto gelado a 13 bilhões de quilômetros da Terra pode ser o décimo planeta do Sistema Solar.

Chamado de **Sedna**, o planetoide possui entre 1 290 e 1 770 quilômetros de diâmetro — o equivalente a três quartos do tamanho de Plutão.

De acordo com os astrônomos, Sedna é o maior e mais distante objeto já descoberto no Sistema Solar desde Plutão, que está a 6 bilhões de quilômetros do Sol.

A tabela abaixo expõe algumas características dos nove planetas já conhecidos:

Os 9 planetas conhecidos	*D*	*P*	*R*	*M*
Mercúrio	0,4	0,2	0,38	0,06
Vênus	0,7	0,7	0,95	0,82
Terra	1,0	1,0	1,00	1,00
Marte	1,5	1,9	0,53	0,11
Júpiter	5,2	11,9	11,21	317,70
Saturno	9,5	29,2	9,46	95,15
Urano	19,2	84,0	4,01	14,53
Netuno	30,0	164,8	3,88	17,15
Plutão	39,6	247,7	0,18	0,002

Na tabela:

- *D* é a distância do planeta ao Sol, tomando-se como unidade a distância da Terra ao Sol. Netuno, por exemplo, está 30 vezes mais distante do Sol do que a Terra.
- *P* é o período de tempo (em anos) que o planeta leva para completar uma volta em torno do Sol. Plutão, por exemplo, demora quase 2 séculos e meio!
- *R* é o raio do planeta, tomando-se o da Terra como referência. Saturno, por exemplo, tem um raio quase 10 vezes maior que o da Terra.
- *M* é a massa do planeta comparada com a da Terra, que é adotada como unitária. A massa de Marte, por exemplo, é um pouco mais que um décimo da massa da Terra.

Com base na notícia e na tabela, podemos concluir que Sedna:

a) tem raio certamente maior que o de Mercúrio.

b) tem massa quase igual à da Terra.

→ c) deve levar alguns séculos para completar uma volta em torno do Sol.

d) tem uma órbita em torno do Sol cuja duração deve estar entre a de Júpiter e a de Saturno.

e) é maior que qualquer outro planeta do Sistema Solar.

a) Errado. A tabela mostra que o raio de Plutão é menor que o de Mercúrio. O texto revela que o raio de Sedna é cerca de $\frac{3}{4}$ o raio de Plutão. Logo, Sedna tem raio menor que Mercúrio.

b) Errado. A massa de Plutão equivale a 0,02 da massa da Terra (tabela). Como Sedna possui raio ainda menor que o de Plutão, pode-se afirmar que a massa de Sedna é menor que a da Terra.

c) Certo. A tabela mostra que, quanto maior a distância entre o planeta e o Sol, maior é o tempo gasto para completar uma volta em torno do Sol. Como Sedna está localizado além de Plutão, pode-se concluir que deve levar mais que 247 anos para completar uma volta em torno do Sol.

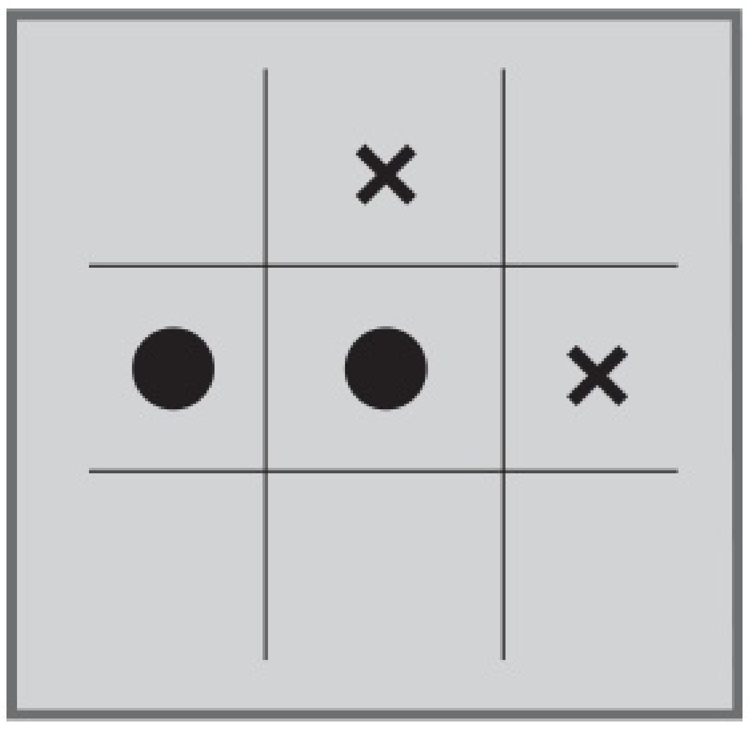
d) Errado. O texto indica que a órbita de Sedna é mais externa que a órbita de Plutão.

e) Errado. O texto e a tabela mostram que o raio de Sedna é menor que o de qualquer planeta do nosso Sistema Solar.

Em casa

1 (Enem) O jogo da velha é um jogo popular, originado na Inglaterra. O nome "velha" surgiu do fato de esse jogo ser praticado, à época em que foi criado, por senhoras idosas que tinham dificuldades de visão e não conseguiam mais bordar. Esse jogo consiste na disputa de dois adversários que, em um tabuleiro 3 × 3, devem conseguir alinhar verticalmente, horizontalmente ou na diagonal, 3 peças de formato idêntico.

Cada jogador, após escolher o formato da peça com a qual irá jogar, coloca uma peça por vez, em qualquer casa do tabuleiro, e passa a vez para o adversário. Vence o primeiro que alinhar 3 peças.



No tabuleiro representado acima, estão registradas as jogadas de dois adversários em um dado momento. Observe que uma das peças tem formato de círculo e a outra tem a forma de um xis. Considere as regras do jogo da velha e o fato de que, neste momento, é a vez do jogador que utiliza os círculos. Para garantir a vitória na sua próxima jogada, esse jogador pode posicionar a peça no tabuleiro de:

a) uma só maneira.
→ b) duas maneiras distintas.
c) três maneiras distintas.
d) quatro maneiras distintas.
e) cinco maneiras distintas.

2 (Enem) A cor de uma estrela tem relação com a temperatura em sua superfície. Estrelas não muito quentes (cerca de 3000 K) nos parecem avermelhadas. Já as estrelas amarelas, como o Sol, possuem temperatura em torno dos 6000 K; as mais quentes são brancas ou azuis porque sua temperatura fica acima dos 10000 K.

A tabela apresenta uma classificação espectral e outros dados para as estrelas dessas classes.

Estrelas de Sequência Principal				
Classe Especial	Temperatura	Luminosidade	Massa	Raio
O5	40000	$5 \cdot 10^5$	40	18
B0	28000	$2 \cdot 10^4$	18	7
A0	9900	80	3	2,5
G2	5770	1	1	1
M0	3480	0,06	0,5	0,6

Obs.: temperatura em Kelvin. Luminosidade, massa e raio, tomando o Sol como unidade.

Disponível em: <www.zenite.nu>. Acesso em: 1º maio 2010. Adaptado.

Se tomarmos uma estrela que tenha temperatura 5 vezes maior que a temperatura do Sol, qual será a ordem de grandeza de sua luminosidade?

→ a) 20000 vezes a luminosidade do Sol.
b) 28000 vezes a luminosidade do Sol.
c) 28850 vezes a luminosidade do Sol.
d) 30000 vezes a luminosidade do Sol.
e) 50000 vezes a luminosidade do Sol.

3 (Enem) A tabela compara o consumo mensal, em kWh, dos consumidores residenciais e dos de baixa renda, antes e depois da redução da tarifa de energia no estado de Pernambuco.

Como fica a tarifa

Residencial			
Consumo mensal (kWh)	Antes	Depois	Economia
140	R$ 71,04	R$ 64,75	R$ 6,29
185	R$ 93,88	R$ 85,56	R$ 8,32
350	R$ 177,60	R$ 161,86	R$ 15,74
500	R$ 253,72	R$ 231,24	R$ 22,48

Baixa renda			
Consumo mensal (kWh)	Antes	Depois	Economia
30	R$ 3,80	R$ 3,65	R$ 0,45
65	R$ 11,53	R$ 10,04	R$ 1,49
80	R$ 14,84	R$ 12,90	R$ 1,94
100	R$ 19,31	R$ 16,73	R$ 2,59
140	R$ 32,72	R$ 28,20	R$ 4,53

Celpe. *Diário de Pernambuco*, 28 abr. 2010. Adaptado.

Considere dois consumidores: um que é de baixa renda e gastou 100 kWh e outro do tipo residencial que gastou 185 kWh. A diferença entre o gasto desses consumidores com 1 kWh, depois da redução da tarifa de energia, mais aproximada, é de:

a) R$ 0,27.
→ b) R$ 0,29.
c) R$ 0,32.
d) R$ 0,34.
e) R$ 0,61.

Anotações

AULA 26

Competência 6 Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

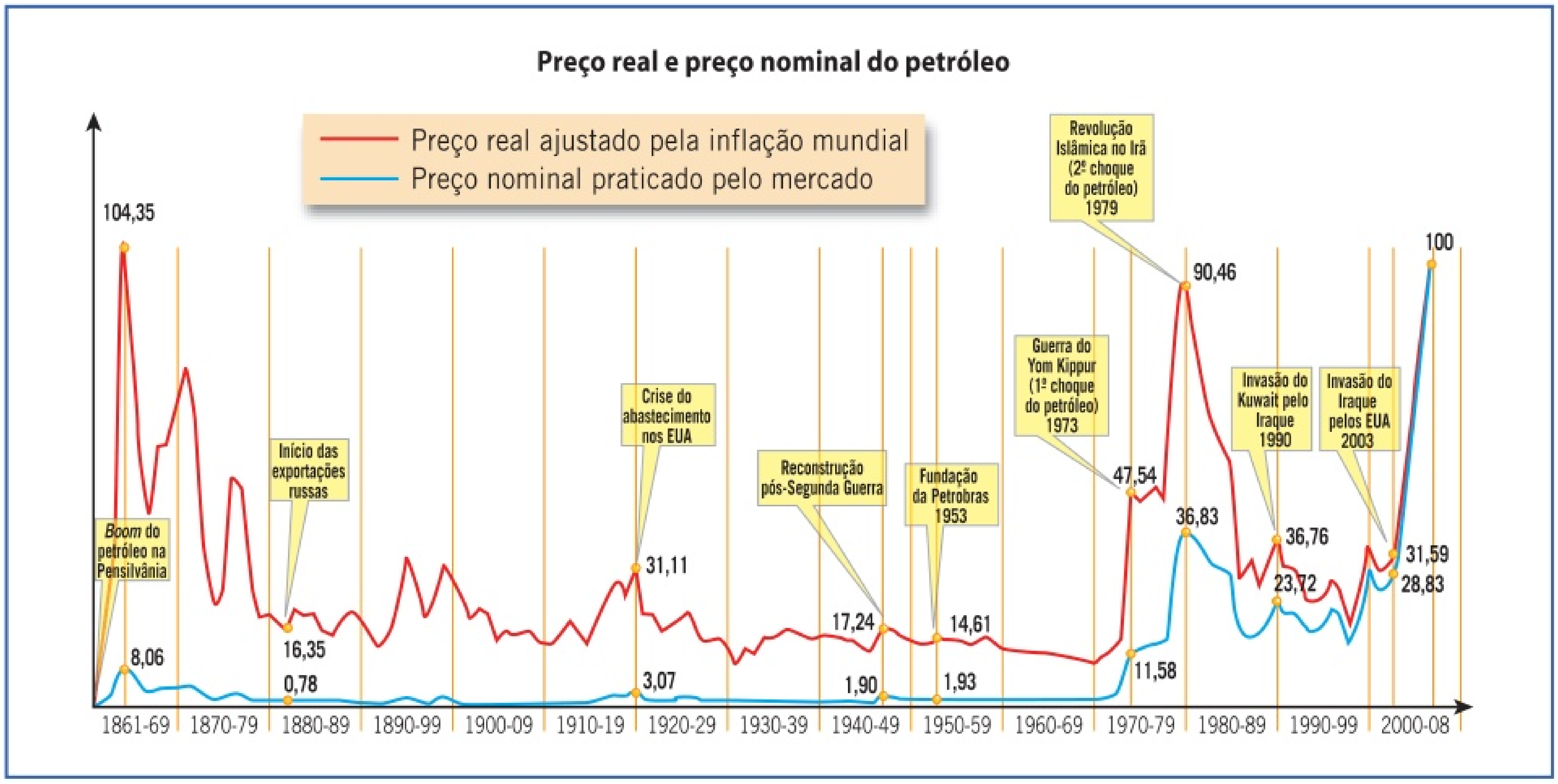
Habilidade 26 Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Em classe

ANÁLISE DE INFORMAÇÃO

Uma das habilidades exigidas pelo Enem consiste em analisar informações apresentadas em um gráfico ou em uma tabela, para elaborar argumentos.

Em 9 de abril de 2008, o preço do petróleo bateu um novo recorde, chegando a custar US$ 107 o barril. Considere o gráfico abaixo, extraído de uma questão do Enem, em que é possível observar alguns fatos que influenciam as variações de preço do petróleo no mercado internacional:



BP Statistical Review of World Energy 2007.

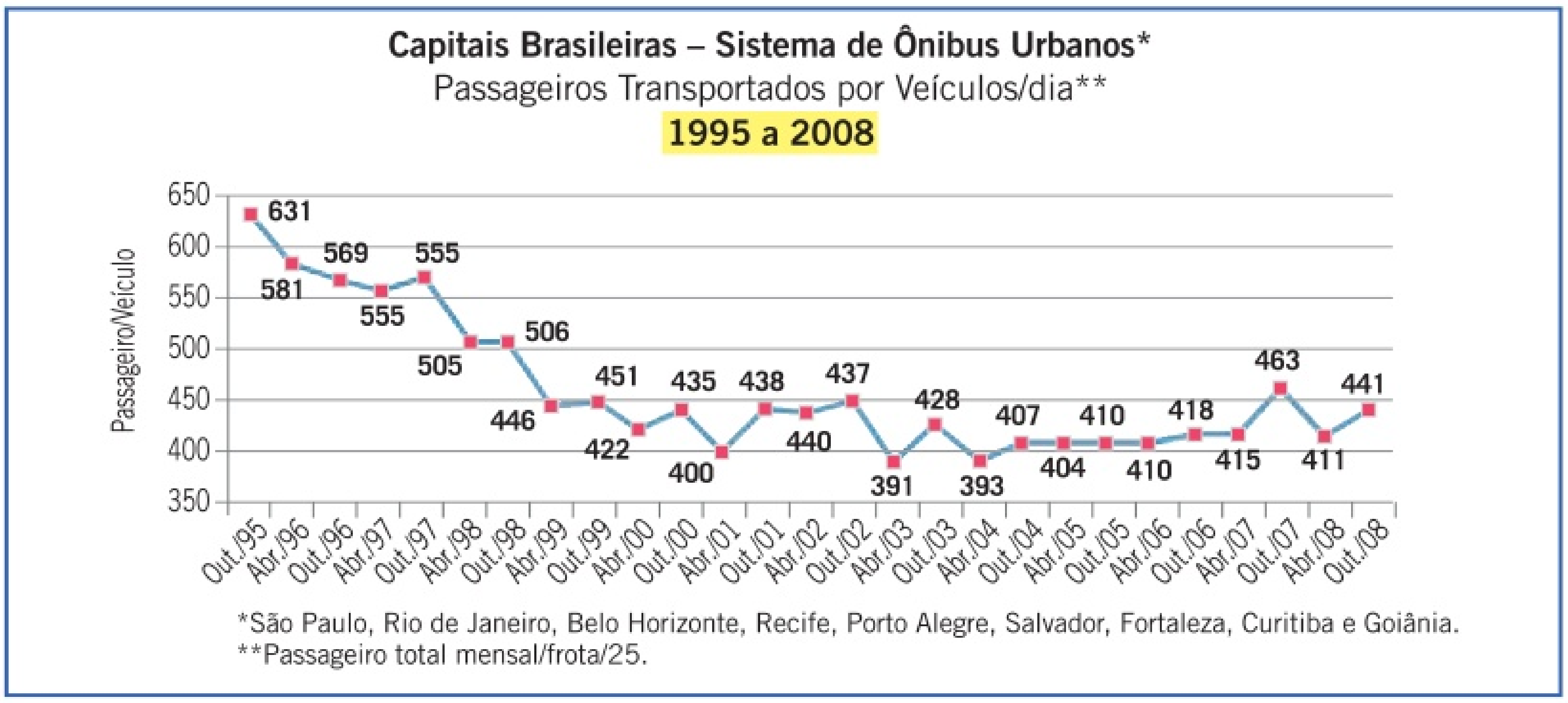
Analisando as informações contidas nesse gráfico, quais são as possíveis conclusões que podemos extrair?

Uma possível conclusão é que o preço nominal do petróleo só passou a oscilar de forma semelhante à curva do preço real a partir de 1973, quando ocorreu a primeira Crise do Petróleo, e que desde então os acontecimentos do Oriente Médio sempre tiveram grande impacto nas altas de preços desse recurso no mercado.

Nesta aula, veremos como esses argumentos podem ser construídos a partir da análise das informações contidas em gráficos e tabelas. Para isso, veremos exemplos de questões das provas do Enem 2009 e 2010.

1 (Enem) Dados da Associação Nacional de Empresas de Transportes Urbanos (ANTU) mostram que o número de passageiros transportados mensalmente nas principais regiões metropolitanas do país vem caindo sistematicamente. Eram 476,7 milhões de passageiros em 1995, e esse número caiu para 321,9 milhões em abril de 2001. Nesse período, o tamanho da frota de veículos mudou pouco, tendo no final de 2008 praticamente o mesmo tamanho que tinha em 2001.

O gráfico a seguir mostra um índice de produtividade utilizado pelas empresas do setor, que é a razão entre o total de passageiros transportados por dia e o tamanho da frota de veículos.



*São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte, Recife, Porto Alegre, Salvador, Fortaleza, Curitiba e Goiânia.
**Passageiro total mensal/frota/25.

Supondo que as frotas totais de veículos naquelas regiões metropolitanas em abril de 2001 e em outubro de 2008 eram do mesmo tamanho, os dados do gráfico permitem inferir que o total de passageiros transportados no mês de outubro de 2008 foi aproximadamente igual a:

→ a) 355 milhões. b) 400 milhões. c) 426 milhões. d) 441 milhões. e) 477 milhões.

Em abril de 2001 o número de passageiros era 321,9 milhões e o índice de produtividade era 400; logo, sendo *f* o tamanho da frota, em milhões de veículos, temos:

$$\frac{321{,}9}{f} = 400 \Rightarrow f = \frac{321{,}9}{400}$$

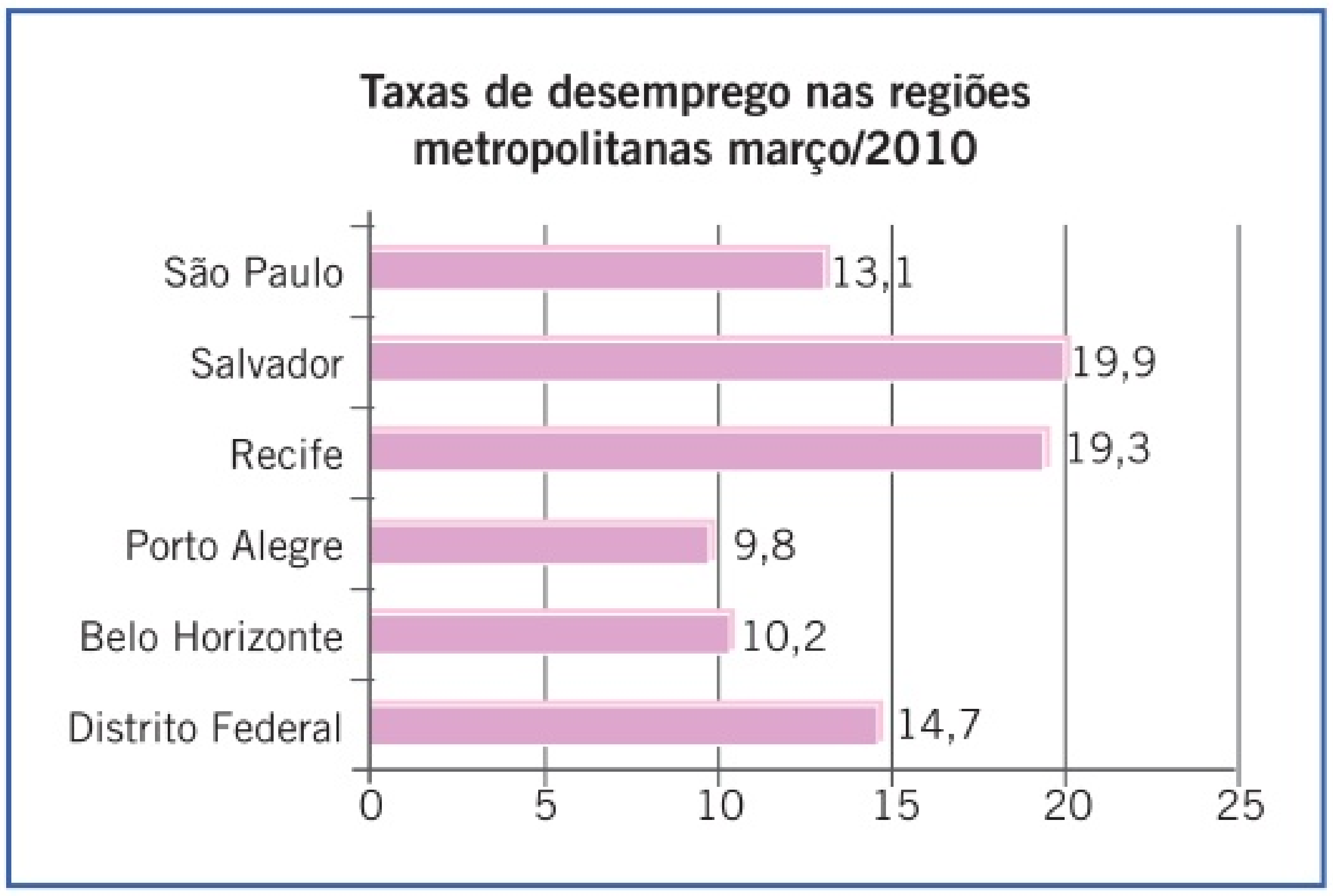
Em outubro de 2008, o índice é 441. Sendo *n* o número de passageiros transportados (em milhões), temos:

$$\frac{n}{f} = 441 \Rightarrow n = \frac{321{,}9}{400} \cdot 441 \Rightarrow n \simeq 354{,}9 \text{ milhões}$$

2 (Enem) Os dados do gráfico ao lado foram gerados a partir de dados colhidos no conjunto de seis regiões metropolitanas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese).

Supondo que o total de pessoas pesquisadas na região metropolitana de Porto Alegre equivale a 250 000, o número de desempregados em março de 2010, nessa região, foi de:

→ a) 24 500.
b) 25 000.
c) 220 500.
d) 223 000.
e) 227 500.



Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 28 abr. 2010. Adaptado.

Do gráfico, temos que 9,8% das 250 000 pessoas pesquisadas em Porto Alegre estão desempregadas. O número de desempregados entre os pesquisados em março de 2010 é dado por: $\frac{9{,}8}{100} \cdot 250\,000 = 24\,500$, ou seja, 24 500 pessoas.

Em casa

TEXTO DE APOIO

Jogos Olímpicos do Rio de Janeiro

Em 2016, o Rio de Janeiro sediará pela primeira vez os Jogos Olímpicos. Também pela primeira vez na América do Sul, o evento irá comemorar 120 anos. A cidade carioca esteve na disputa com Madri até a última rodada de votações no Comitê Olímpico Internacional (COI), nesta sexta-feira, em Copenhague, na Dinamarca.

DIVULGAÇÃO

Confira o local de todas as sedes, a partir de 1896:

1896	Atenas, Grécia	1956	Melbourne, Austrália
1900	Paris, França	1960	Roma, Itália
1904	Saint Louis, Estados Unidos	1964	Tóquio, Japão
1906	Atenas, Grécia (*)	1968	Cidade do México, México
1908	Londres, Reino Unido	1972	Munique, Alemanha Ocidental
1912	Estocolmo, Suécia	1976	Montreal, Canadá
1916	Não realizada (I Guerra Mundial)	1980	Moscou, União Soviética
1920	Antuérpia, Bélgica	1984	Los Angeles, Estados Unidos
1924	Paris, França	1988	Seul, Coreia do Sul
1928	Amsterdã, Holanda	1992	Barcelona, Espanha
1932	Los Angeles, Estados Unidos	1996	Atlanta, Estados Unidos
1936	Berlim, Alemanha	2000	Sydney, Austrália
1940	Não realizada (II Guerra Mundial)	2004	Atenas, Grécia
1944	Não realizada (II Guerra Mundial)	2008	Pequim, China
1948	Londres, Reino Unido	2012	Londres, Reino Unido
1952	Helsinque, Finlândia	2016	Rio de Janeiro, Brasil

(*) Os Jogos Olímpicos Intercalados de 1906 foram um evento celebrado em Atenas, Grécia, com pretexto de comemorar o décimo aniversário do recomeço dos jogos, em 1896. Essa edição não é considerada oficial pelo COI, visto ter sido realizada fora do ciclo de quatro anos denominado Olimpíada.

O Estado de S. Paulo. São Paulo.

No ano de 2068 haverá Olimpíadas?

Um dos procedimentos para responder a essa pergunta é o seguinte: primeiro, observar na tabela da notícia que no ano de 2016 haverá Olimpíadas; segundo, perceber que as Olimpíadas acontecem de 4 em 4 anos; finalmente, listar os anos 2016, 2020, 2024, ..., até confirmar se o ano 2068 configurará nessa lista.

Contudo, essa não é uma ideia interessante, uma vez que essa lista pode ser bem longa. Uma outra maneira é perceber que os anos olímpicos (ou seja, 2016, 2020, ...) são números múltiplos de 4 e, assim, basta verificar se 2068 também é múltiplo de 4.

Para saber se um número é múltiplo de 4, basta dividi-lo por 4 e verificar se o resto é zero.

Assim:

$$\begin{array}{r|l} 2\,068 & 4 \\ \hline \text{Resto} \longrightarrow 0 & 517 \end{array}$$

Portanto, 2 068 é múltiplo de 4.

Analogamente, para saber os múltiplos de um número inteiro N, efetua-se a divisão por N e verifica-se o resto zero. Veja, a seguir, os conjuntos dos múltiplos (positivos) de:

- 2: {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ...}
- 3: {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ...}

Nota-se que nesses dois conjuntos, existem números comuns: 6, 12, 18, ... O menor desses números comuns é chamado de **mínimo múltiplo comum** e representa-se por mmc(2, 3) = 6.

1 Observe o infográfico abaixo, relacionado aos impactos causados nos ecossistemas terrestres pelo aumento da temperatura global.

FOLHAPRESS

ABOMINÁVEL mundo novo. *Folha de S.Paulo*, São Paulo, 7 abr. 2007. Primeiro caderno, p. A18. Adaptado.

Fonte líquida de carbono é a quantidade de gás carbônico produzida pelas emissões (combustão, respiração, decomposição) menos a utilizada (sequestrada) pela fotossíntese.

Trata-se, portanto, do "saldo" de gás carbônico que se acumula no ambiente.

Escolha a alternativa que lhe parecer correta, em vista das informações fornecidas pelo esquema:

a) Havendo entre 4 °C e 5 °C de aumento na temperatura global, de 15% a 40% da biosfera se transformarão em uma fonte de sequestro de carbono.

b) Apenas se a temperatura global aumentar cerca de 5 °C é que ocorrerá aumento na taxa de extinção de anfíbios.

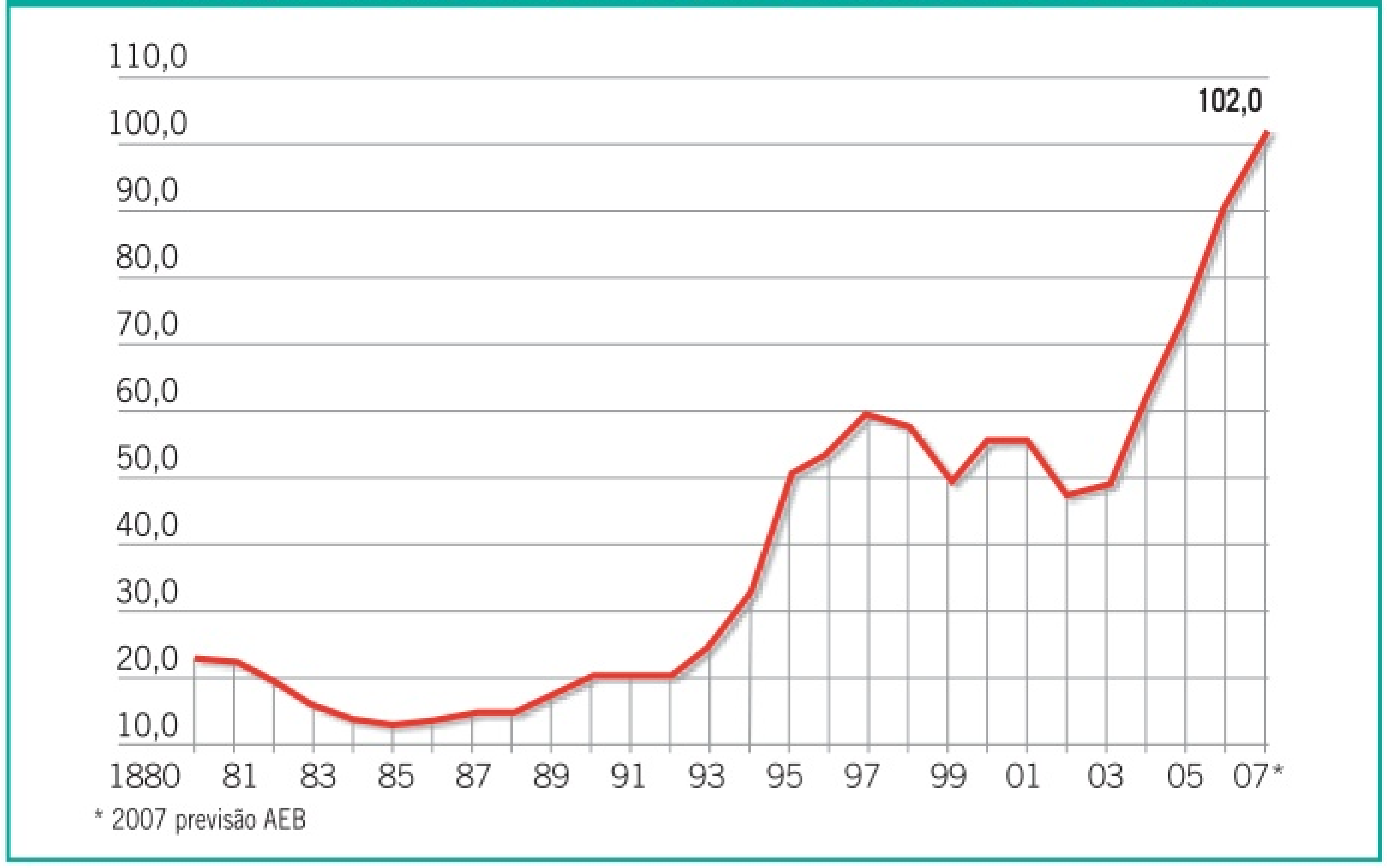
→ c) Aumentos na temperatura global de 2 °C a 3,5 °C acarretarão um risco de extinção de aproximadamente 20% a 30% das espécies.

d) Cerca de 20% da Amazônia sofrerão um processo de savanização (transformação em savanas ou cerrados), apenas se a temperatura global aumentar em 1 °C.

e) Grandes extinções no mundo todo ocorrerão apenas se a elevação da temperatura global atingir valores superiores a 6 °C.

2 Esse gráfico foi apresentado no jornal *O Estado de S. Paulo* do dia 22 de abril de 2007. Com base nele, assinale a alternativa correta.

Evolução da importação do país (em bilhões de dólares)



O Estado de S. Paulo, São Paulo, p. 30, 22 abr. 2007.

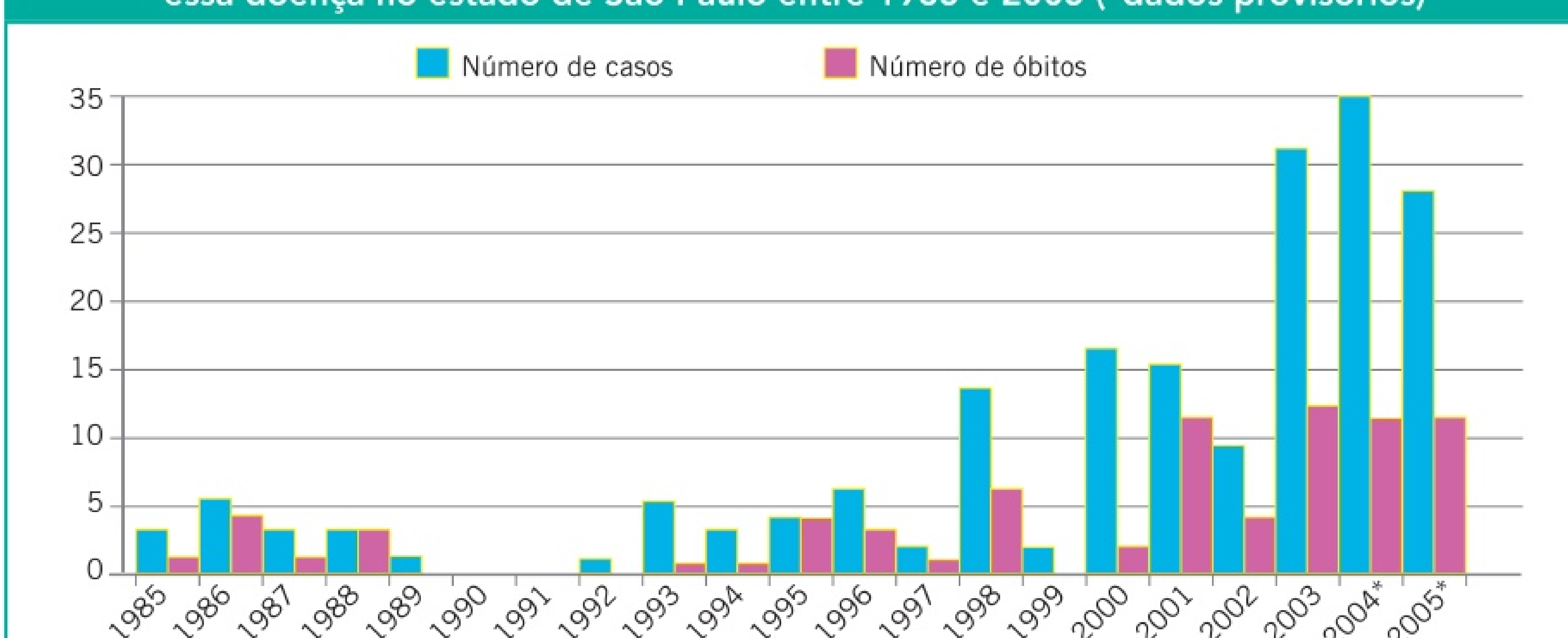
a) De 1880 até 2007, a importação anual foi inferior a 20 bilhões de dólares em apenas 4 anos.
b) Um ano depois do último governo militar, a importação já era superior a 20 bilhões de dólares por ano.
c) No período correspondente aos dois mandatos de Fernando Henrique Cardoso, a importação sempre aumentou de um ano para o ano consecutivo.
→ d) De 2004 a 2007, a importação aumentou, em média, mais do que 10 bilhões de dólares por ano.
e) Houve apenas um ano em que a importação anual foi superior a 60 bilhões de dólares.

3 A febre maculosa brasileira (FMB) é uma doença infecciosa causada pela bactéria *Rickettsia rickettsii* e transmitida pelo carrapato-estrela ou micuim (*Amblyomma cajennense*).

Esse carrapato pode infestar, além do homem, animais silvestres (a capivara, por exemplo) e domésticos.

O número de casos de FMB em seres humanos e de óbitos provocados por ela, anualmente, no estado de São Paulo estão demonstrados no gráfico que segue.

EPIDEMIOLOGIA – Número de casos de febre maculosa e de óbitos provocados por essa doença no estado de São Paulo entre 1985 e 2005 (*dados provisórios)



Jornal da Cremesp – Conselho Regional de Medicina de São Paulo, nov. 2006, p. 16.

Assinale a alternativa que corresponde a uma interpretação correta desse gráfico.

a) Em todos os anos em que houve registro de casos, ocorreram óbitos.

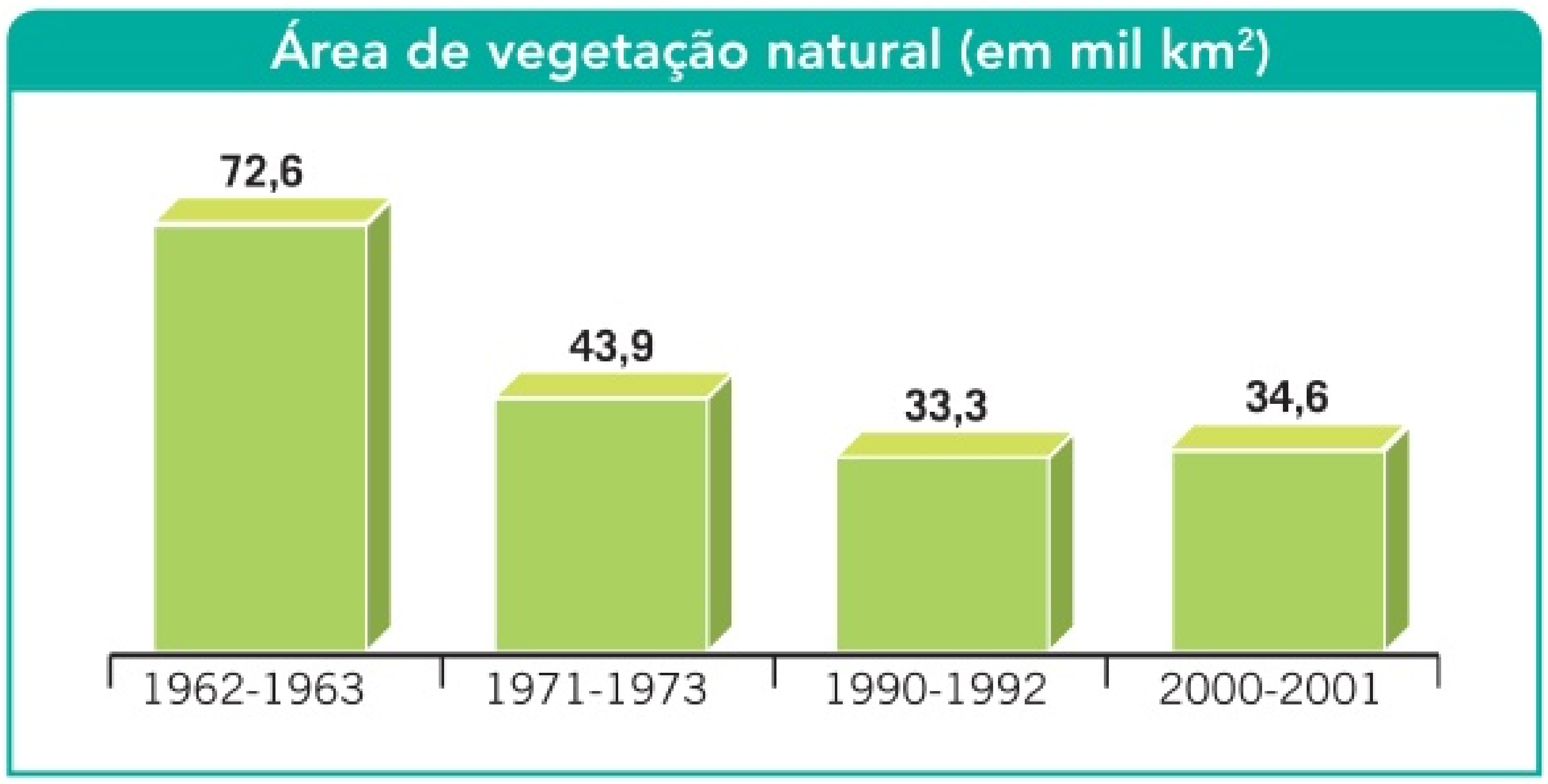
→ b) Em alguns anos, o número de casos e o de óbitos coincidiram.

c) Nos três últimos anos (de 2003 a 2005) o número de óbitos foi cerca de três vezes maior que o número de casos do ano 2000.

d) Em todo o período considerado, o número de casos aumentou gradativamente.

e) Em 2004, o número de óbitos foi proporcionalmente maior que em 2005.

4 (Enem) Em um estudo feito pelo Instituto Florestal, foi possível acompanhar a evolução de ecossistemas paulistas desde 1962. Desse estudo publicou-se o Inventário Florestal de São Paulo, que mostrou resultados de décadas de transformações da Mata Atlântica.



Pesquisa. 91, São Paulo: FAPESP, set. 2003, p. 48.

Examinando o gráfico da área de vegetação natural remanescente (em mil km^2) pode-se inferir que:

a) a Mata Atlântica teve sua área devastada em 50% entre 1963 e 1973.

b) a vegetação natural da Mata Atlântica aumentou antes da década de 60, mas reduziu nas décadas posteriores.

c) a devastação da Mata Atlântica remanescente vem sendo contida desde a década de 60.

d) em 2000-2001, a área de Mata Atlântica preservada em relação ao período de 1990-1992 foi de 34,6%.

→ e) a área preservada da Mata Atlântica nos anos 2000 e 2001 é maior do que a registrada no período de 1990-1992.

Anotações

AULA 27

Competência 7 Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade 27 Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados ou em gráficos.

Em classe

ESTATÍSTICA

Medidas de tendência central

Para compreender o que são as medidas de tendência central é preciso esclarecer dois conceitos importantes:

- **Rol** é o nome dado a toda sequência de números em que cada termo, a partir do segundo, é maior ou igual ao termo anterior, ou ainda, pode ser descrito como sendo toda sequência de números em que cada termo, a partir do segundo, é menor ou igual ao termo anterior.
- **Amplitude do rol** é a diferença entre o maior e o menor termo de um rol.

Média aritmética

A média aritmética (ou média) de n valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é o número $\bar{x}$ tal que:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

Exemplo:
A média entre 20, 20, 12, 15 e 8 é:

$$\bar{x} = \frac{20 + 20 + 12 + 15 + 8}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

Mediana

Colocados os números em um rol, a mediana (Md) é o termo central desse rol. Assim, para um rol de n termos, temos:

- Se n é ímpar, a mediana é o $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\text{o}}$ termo.

  A mediana do rol (8, 12, 15, 20, 20) é o 3º termo, isto é, $Md = 15$.
- Se n é par, a mediana é a média entre os dois termos centrais, isto é, entre o $\left(\frac{n}{2}\right)^{\text{o}}$ e o $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{o}}$ termos.

  A mediana do rol (8, 12, 15, 20, 20, 22) é a média entre o 3º e 4º termos, isto é, $Md = \frac{15 + 20}{2} = 17{,}5$.

Moda

Moda (Mo) é o termo de maior frequência, ou seja, é o termo que se repete mais vezes em um determinado rol.

Assim:
- O rol (8, 12, 15, 20, 20) apresenta $Mo = 20$.
- O rol (8, 12, 12, 15, 20, 20) apresenta duas modas, $Mo = 12$ e $Mo = 20$.

1 (Enem) A participação dos estudantes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) aumenta a cada ano. O quadro indica o percentual de medalhistas de ouro, por região, nas edições da OBMEP de 2005 a 2009:

Região	2005	2006	2007	2008	2009
Norte	2%	2%	1%	2%	1%
Nordeste	18%	19%	21%	15%	19%
Centro-Oeste	5%	6%	7%	8%	9%
Sudeste	55%	61%	58%	66%	60%
Sul	21%	12%	13%	9%	11%

Disponível em: <www.obmep.org.br>. Acesso em: abr. 2010. Adaptado.

Em relação às edições de 2005 a 2009 da OBMEP, qual o percentual médio de medalhistas de ouro da região Nordeste?

a) 14,6% b) 18,2% → c) 18,4% d) 19,0% e) 21,0%

Da tabela, temos:

$\frac{18+19+21+15+19}{5}=18{,}4$

Logo, o percentual médio é de 18,4%.

2 (Enem) Na tabela, são apresentados dados da cotação mensal do ovo extra branco vendido no atacado, em Brasília, em reais, por caixa de 30 dúzias de ovos, em alguns meses dos anos 2007 e 2008.

Mês	Cotação	Ano
Outubro	R$ 83,00	2007
Novembro	R$ 73,10	2007
Dezembro	R$ 81,60	2007
Janeiro	R$ 82,00	2008
Fevereiro	R$ 85,30	2008
Março	R$ 84,00	2008
Abril	R$ 84,60	2008

De acordo com esses dados, o valor da mediana das cotações mensais do ovo extra branco nesse período era igual a:

a) R$ 73,10. b) R$ 81,50. c) R$ 82,00. → d) R$ 83,00. e) R$ 85,30.

Colocando em rol, isto é, ordenando os valores apresentados na tabela, temos:
(73,10; 81,60; 82,00; 83,00; 84,00; 84,60; 85,30)
Como há um número ímpar de dados nesse conjunto, a mediana é o termo central do rol, ou seja, R$ 83,00.

3 (Enem) Depois de jogar um dado em forma de cubo e de faces numeradas de 1 a 6, por 10 vezes consecutivas, e anotar o número obtido em cada jogada, construiu-se a seguinte tabela de distribuição de frequências.

Número obtido	Frequência
1	4
2	1
4	2
5	2
6	1

A média, a mediana e a moda dessa distribuição de frequências são, respectivamente:

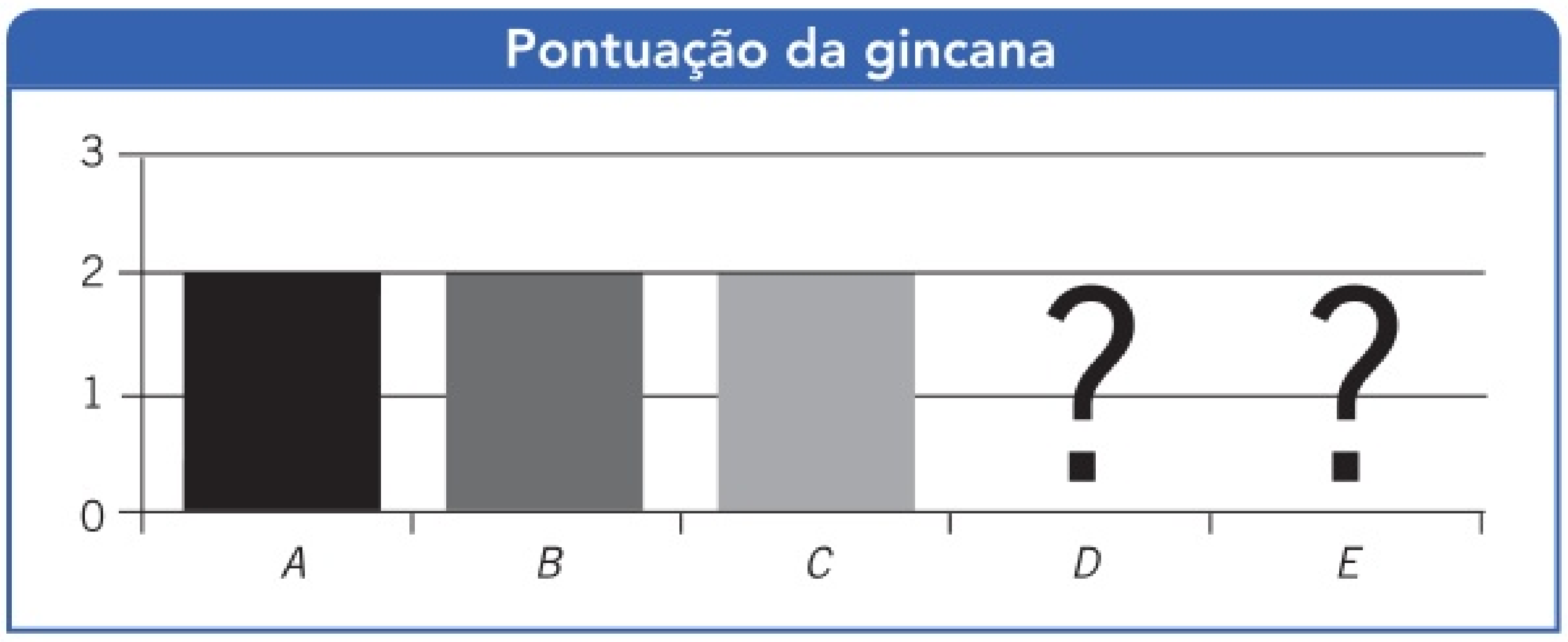
a) 3, 2 e 1. → b) 3, 3 e 1. c) 3, 4 e 2. d) 5, 4 e 2. e) 6, 2 e 4.

Consideremos a sequência de 10 termos: (1, 1, 1, 1, 2, 4, 4, 5, 5, 6).

- Média: $\frac{(1 \cdot 4) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) + (5 \cdot 2) + (6 \cdot 1)}{10} = 3$
- Mediana: 3 (média dos termos centrais, que são os números 2 e 4)
- Moda: 1 (maior frequência)

4 (Enem) Cinco equipes *A*, *B*, *C*, *D* e *E* disputaram uma prova de gincana na qual as pontuações recebidas podiam ser 0, 1, 2 ou 3. A média das cinco equipes foi de 2 pontos.

As notas das equipes foram colocadas no gráfico a seguir, entretanto, esqueceram de representar as notas da equipe *D* e da equipe *E*.



Mesmo sem aparecer as notas das equipes *D* e *E*, pode-se concluir que os valores da moda e da mediana são, respectivamente:

a) 1,5 e 2,0. b) 2,0 e 1,5. → c) 2,0 e 2,0. d) 2,0 e 3,0. e) 3,0 e 2,0.

Sendo *m* e *n*, nessa ordem, as notas das equipes *D* e *E*, temos:

$\frac{2+2+2+m+n}{5} = 2 \Rightarrow m + n = 4$

Do enunciado, temos $(m, n) = (1, 3)$, ou $(m, n) = (2, 2)$, ou $(m, n) = (3, 1)$.

Tanto na sequência (1, 2, 2, 2, 3) quanto em (2, 2, 2, 2, 2), a moda e a mediana são iguais a 2,0.

Em casa

TEXTO DE APOIO

Para encontrarmos a média de um rol, quando seus elementos estão agrupados em intervalos de classes, elegemos o ponto médio de cada intervalo para representar o elemento de sua classe.

Veja alguns exemplos:

1) Considere a série abaixo que consiste no saldo da poupança dos 25 funcionários de uma empresa.

Classe	Saldo em reais	Número de contas
1	0 ⊢—— 10 000,00	5
2	10 000,00 ⊢—— 20 000,00	10
3	20 000,00 ⊢—— 30 000,00	8
4	30 000,00 ⊢—— 40 000,00	2

Determine a média do saldo da poupança dos funcionários dessa empresa.

Resolução:

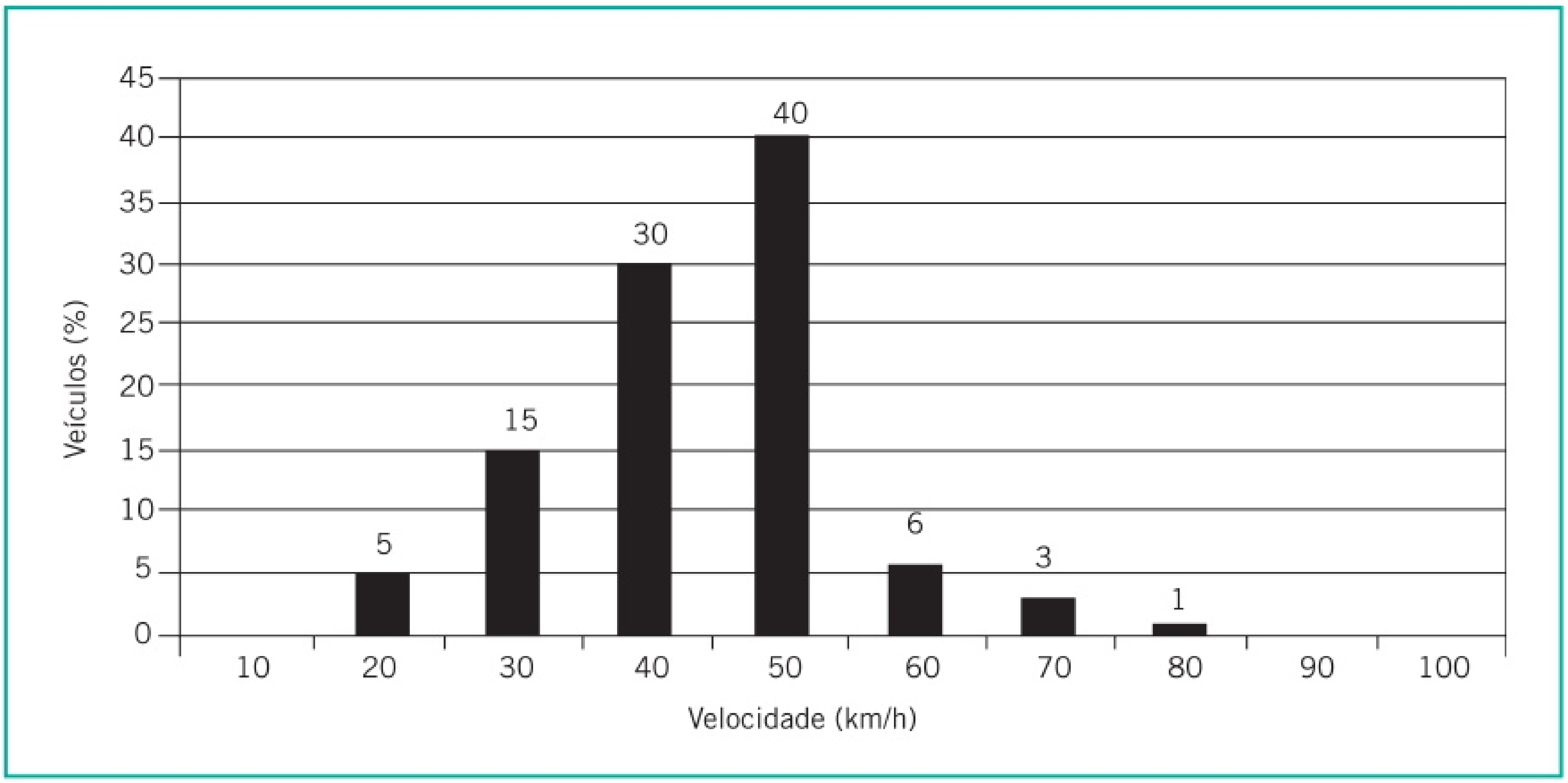
Os elementos das classes serão os pontos médios dos intervalos, isto é, serão respectivamente iguais a 5 000, 15 000, 25 000 e 35 000.

Assim:

$$\bar{x} = \frac{(5\,000 \cdot 5) + (15\,000 \cdot 10) + (25\,000 \cdot 8) + (35\,000 \cdot 2)}{25} = \frac{445\,000}{25} = 17\,800$$

Resposta: R$ 17 800,00.

2) (Enem) Um sistema de radar é programado para registrar automaticamente a velocidade de todos os veículos trafegando por uma avenida, onde passam em média 300 veículos por hora, sendo 55 km/h a máxima velocidade permitida. Um levantamento estatístico dos registros do radar permitiu a elaboração da distribuição percentual de veículos de acordo com sua velocidade aproximada.



A velocidade média dos veículos que trafegam nessa avenida é de:
a) 35 km/h.
b) 44 km/h.
c) 55 km/h.
d) 76 km/h.
e) 85 km/h.

Resolução:
A média das velocidades é dada por:

$$v_m = \frac{(20 \cdot 5) + (30 \cdot 15) + (40 \cdot 30) + (50 \cdot 40) + (60 \cdot 6) + (70 \cdot 3) + (80 \cdot 1)}{100} = 44 \text{ km/h}$$

Resposta: alternativa **b**.

3) (Enem) Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos. As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a:
a) 17 °C, 17 °C e 13,5 °C.
b) 17 °C, 18 °C e 13,5 °C.
c) 17 °C, 13,5 °C e 18 °C.
d) 17 °C, 18 °C e 21,5 °C.
e) 17 °C, 13,5 °C e 21,5 °C.

Resolução:
Ordenando os valores apresentados no quadro, temos o rol:
(13,5; 13,5; 13,5; 13,5; 14; 15,5; 16; 18; 18; 18,5; 19,5; 20; 20; 20; 21,5)

- Média ($\overline{x}$)

$$\overline{x} = \frac{(4 \cdot 13{,}5) + 14 + 15{,}5 + 16 + (2 \cdot 18) + 18{,}5 + 19{,}5 + (3 \cdot 20) + 21{,}5}{15} \Rightarrow \overline{x} = \frac{255}{5} \Rightarrow \overline{x} = 17\ °C$$

- Mediana (*Md*): sendo ímpar a quantidade de dados, temos que o elemento central será a mediana, ou seja, $Md = 18\ °C$.
- Moda (*Mo*): o valor que apresenta maior frequência é 13,5. Logo, $Mo = 13{,}5\ °C$.

Apenas observando a mediana e a moda já localizaríamos a alternativa correta.

Resposta: alternativa **c**.

4) (Enem) O quadro mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então:

a) $X = Y < Z$.
b) $Z < X = Y$.
c) $Y < Z < X$.
d) $Z < X < Y$.
e) $Z < Y < X$.

Resolução:

A média X de gols por partida é:

$$X = \frac{(0 \cdot 5) + (1 \cdot 3) + (2 \cdot 4) + (3 \cdot 3) + (4 \cdot 2) + (5 \cdot 2) + (7 \cdot 1)}{20} = \frac{45}{20} = 2{,}25$$

No rol dos gols marcados por partida, a mediana Y é a média entre os gols marcados na 10ª e 11ª partidas.

Assim:

$$Y = \frac{2 + 2}{2} = 2$$

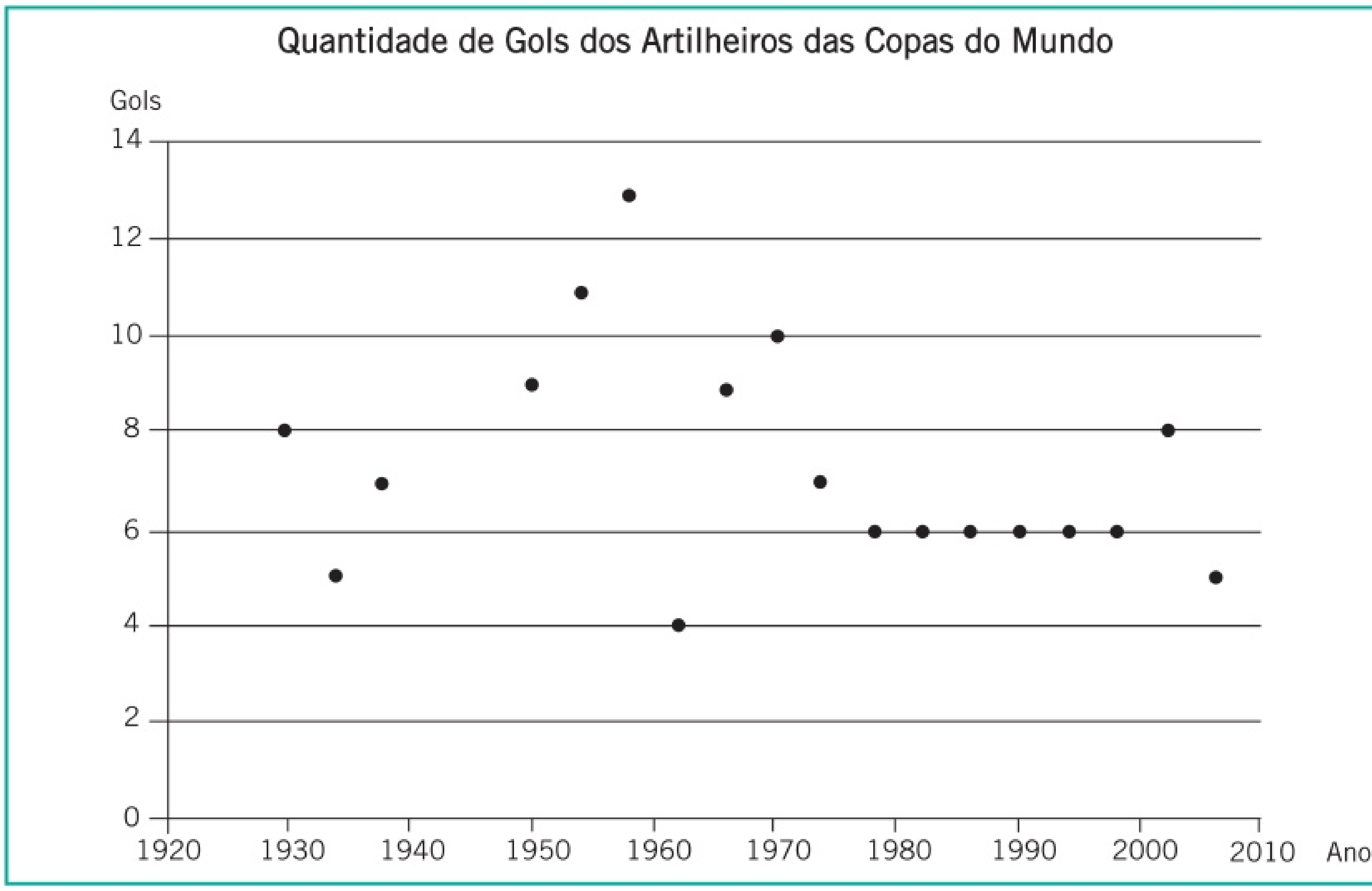
A moda Z dos gols marcados é:

$Z = 0$

Logo, $Z < Y < X$.

Resposta: alternativa **e**.

1 (Enem) O gráfico apresenta a quantidade de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo desde a Copa de 1930 até a de 2006.



Disponível em: <www.suapesquisa.com>. Acesso em: 23 abr. 2010. Adaptado.

A partir dos dados apresentados, qual a mediana das quantidades de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo?

a) 6 gols →b) 6,5 gols c) 7 gols d) 7,3 gols e) 8,5 gols

2 (Enem) Brasil e França têm relações comerciais há mais de 200 anos. Enquanto a França é a 5ª nação mais rica do planeta, o Brasil é a 10ª, e ambas se destacam na economia mundial. No entanto, devido a uma série de restrições, o comércio entre esses dois países ainda não é adequadamente explorado, como mostra a tabela seguinte, referente ao período 2003-2007.

Investimentos bilaterais (em milhões de dólares)		
Ano	Brasil na França	França no Brasil
2003	367	825
2004	357	485
2005	354	1 458
2006	539	744
2007	280	1 214

Disponível em: <www.cartacapital.com.br>. Acesso em: 7 jul. 2009.

Os dados da tabela mostram que, no período considerado, os valores médios dos investimentos da França no Brasil foram maiores que os investimentos do Brasil na França em um valor:

a) inferior a 300 milhões de dólares.
b) superior a 300 milhões de dólares, mas inferior a 400 milhões de dólares.
c) superior a 400 milhões de dólares, mas inferior a 500 milhões de dólares.
→d) superior a 500 milhões de dólares, mas inferior a 600 milhões de dólares.
e) superior a 600 milhões de dólares.

3 Para ser aprovado em um curso, um estudante precisa submeter-se a três provas parciais durante o período letivo e a uma prova final, com pesos 1, 1, 2 e 3, respectivamente, e obter média no mínimo igual a 7. Se um estudante obteve nas provas parciais as notas 5, 7 e 5, respectivamente, a nota mínima que necessita obter na prova final para ser aprovado é:

→a) 9.
b) 8.
c) 7.
d) 6.
e) 5.

AULA 28

Competência 7 Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade 28 Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

Em classe

ESTATÍSTICA

Medidas de dispersão

Variância e desvio padrão

Considere os n valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ e a sua média $\bar{x}$.

- **Desvio** do valor x_i é o número d_i dado por: $d_i = x_i - \bar{x}$.

  Assim, por exemplo, para os valores 1, 3, 0 e 4, temos:

$$\bar{x} = \frac{1+3+0+4}{4} = 2 \begin{cases} d_1 = 1-2 = -1 \\ d_2 = 3-2 = 1 \\ d_3 = 0-2 = -2 \\ d_4 = 4-2 = 2 \end{cases}$$

O desvio de um valor x indica quanto esse valor se distancia da média. Sendo positivo, o valor está acima da média e sendo negativo o valor está abaixo da média. A soma dos desvios é sempre igual a zero.

- **Variância** (σ^2) é a soma dos desvios, tomados ao quadrado, dividida por n.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

Assim, para os valores 1, 3, 0 e 4, cuja média é 2, temos:

$$\sigma^2 = \frac{(1-2)^2+(3-2)^2+(0-2)^2+(4-2)^2}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$$

- **Desvio padrão** (σ) é a raiz quadrada da variância.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \text{ ou ainda } s = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+(x_3-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

Assim, para os valores 1, 3, 0 e 4, cuja variância é 2,5, temos:

$$\sigma = \sqrt{2,5} \approx 1,58$$

Importante: As medidas de dispersão comparam o afastamento dos valores em relação a média. Comparando dois rols de mesmo número de valores e mesma média, aquele que tiver valores mais concentrados em torno da média, necessariamente terá variância menor e desvio padrão menor.

1 (Enem) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso:

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é:

a) Marco, pois a média e a mediana são iguais.
→ b) Marco, pois obteve menor desvio padrão.
c) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.
d) Paulo, pois obteve maior mediana.
e) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

Da tabela, o candidato com pontuação mais regular é Marco, pois obteve o menor desvio padrão.

2 De duas marcas *A* e *B* de baterias elétricas, foram escolhidas 5 baterias cada uma e foram registrados os tempos de duração, obtendo-se a tabela:

	Tempo em meses				
A	23	21	24	21	26
B	21	20	23	26	25

a) Calcule as médias dos tempos de duração das baterias de cada uma das marcas.
b) Calcule o desvio padrão de *A* e o desvio padrão de *B* e diga qual dessas marcas tem um desempenho mais regular.

a) rol de *A*: (21, 21, 23, 24, 26) e rol de *B*: (20, 21, 23, 25, 26).

$\overline{x}_A = \dfrac{21 \cdot 2 + 23 + 24 + 26}{5} = 23$

$\overline{x}_B = \dfrac{20 + 21 + 23 + 25 + 26}{5} = 23$

As médias são iguais a 23 meses.

b) $\sigma_A = \sqrt{\dfrac{(21-23)^2 \cdot 2 + (23-23)^2 + (24-23)^2 + (26-23)^2}{5}} = \sqrt{\dfrac{8+0+1+9}{5}} = \sqrt{3{,}6} \approx 1{,}90$

$\sigma_B = \sqrt{\dfrac{(20-23)^2 + (21-23)^2 + (23-23)^2 + (25-23)^2 + (26-23)^2}{5}} = \sqrt{\dfrac{9+4+0+4+9}{5}} = \sqrt{5{,}2} \approx 2{,}28$

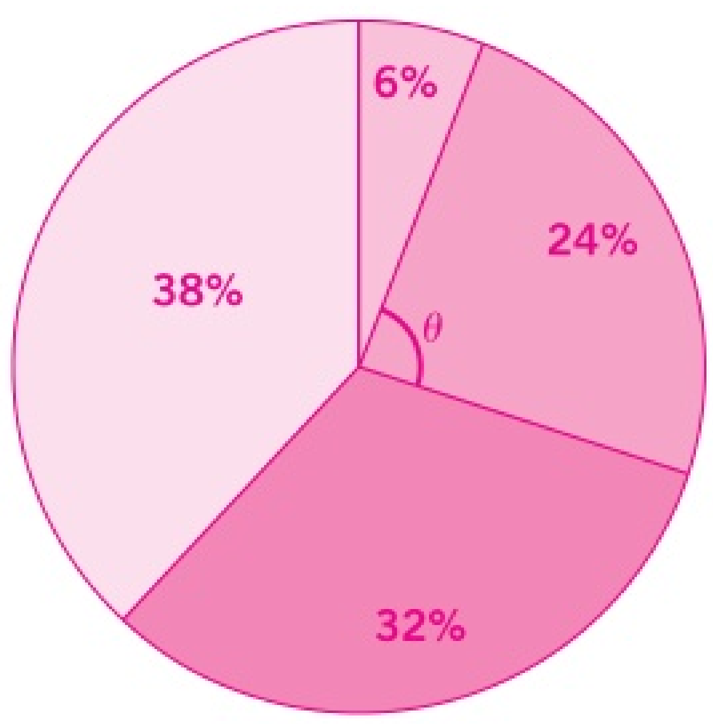
Logo, por ter um desvio padrão menor, a marca *A* tem um desempenho mais regular.

3 (ESPM-SP) A composição de uma certa população, por faixa etária, é verificada na tabela abaixo:

Crianças (0 a 14 anos)	Jovens (15 a 24 anos)	Adultos (25 a 60 anos)	Idosos (+ de 60 anos)
32%	24%	38%	6%

Num gráfico de setores, o ângulo central correspondente à população de jovens medirá, aproximadamente:

→ a) 86° b) 54° c) 78° d) 67° e) 94°



No gráfico de setores, temos:

100% ——— 360°

24% ——— θ

$\theta = \frac{24 \cdot 360}{100} \approx 86°$

4 A prova da 1ª fase da Fuvest-SP de um determinado ano constou de 12 testes de Matemática, apresentando a seguinte distribuição por assunto:

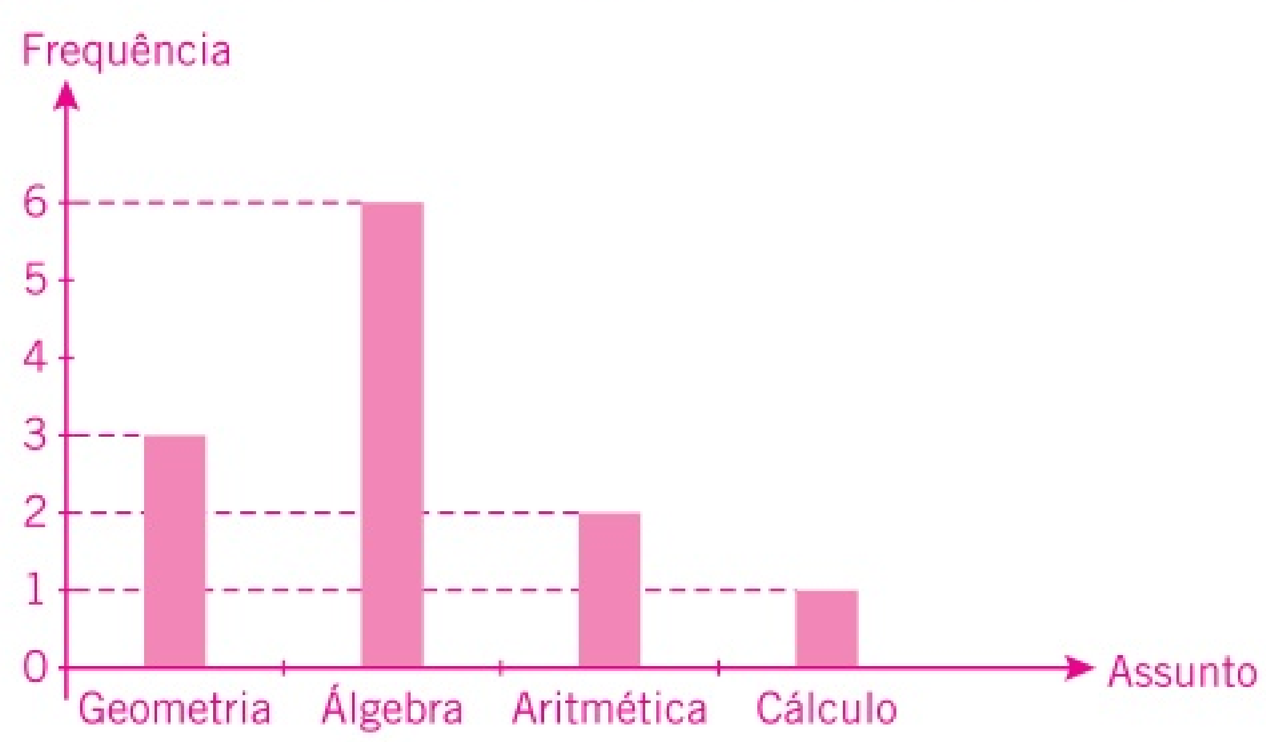
Assunto	Frequência (nº de testes)	Frequência relativa percentual
Geometria	3	
Álgebra	6	
Aritmética	2	
Cálculo	1	
Total	12	

a) Complete a coluna da frequência relativa percentual.

b) Represente esses dados em um gráfico de barras verticais.

a) $\frac{3}{12} \cdot 100\% = 25\%$; $\frac{6}{12} \cdot 100\% = 50\%$; $\frac{12}{12} \cdot 100\% = 100\%$; $\frac{2}{12} \cdot 100\% = 16{,}666...\%$; $\frac{1}{12} \cdot 100\% = 8{,}333...\%$; $\frac{12}{12} \cdot 100\% = 100\%$

b)



Em casa

TEXTO DE APOIO

Para compreender melhor os conceitos sobre medidas de dispersão, veja os exemplos:

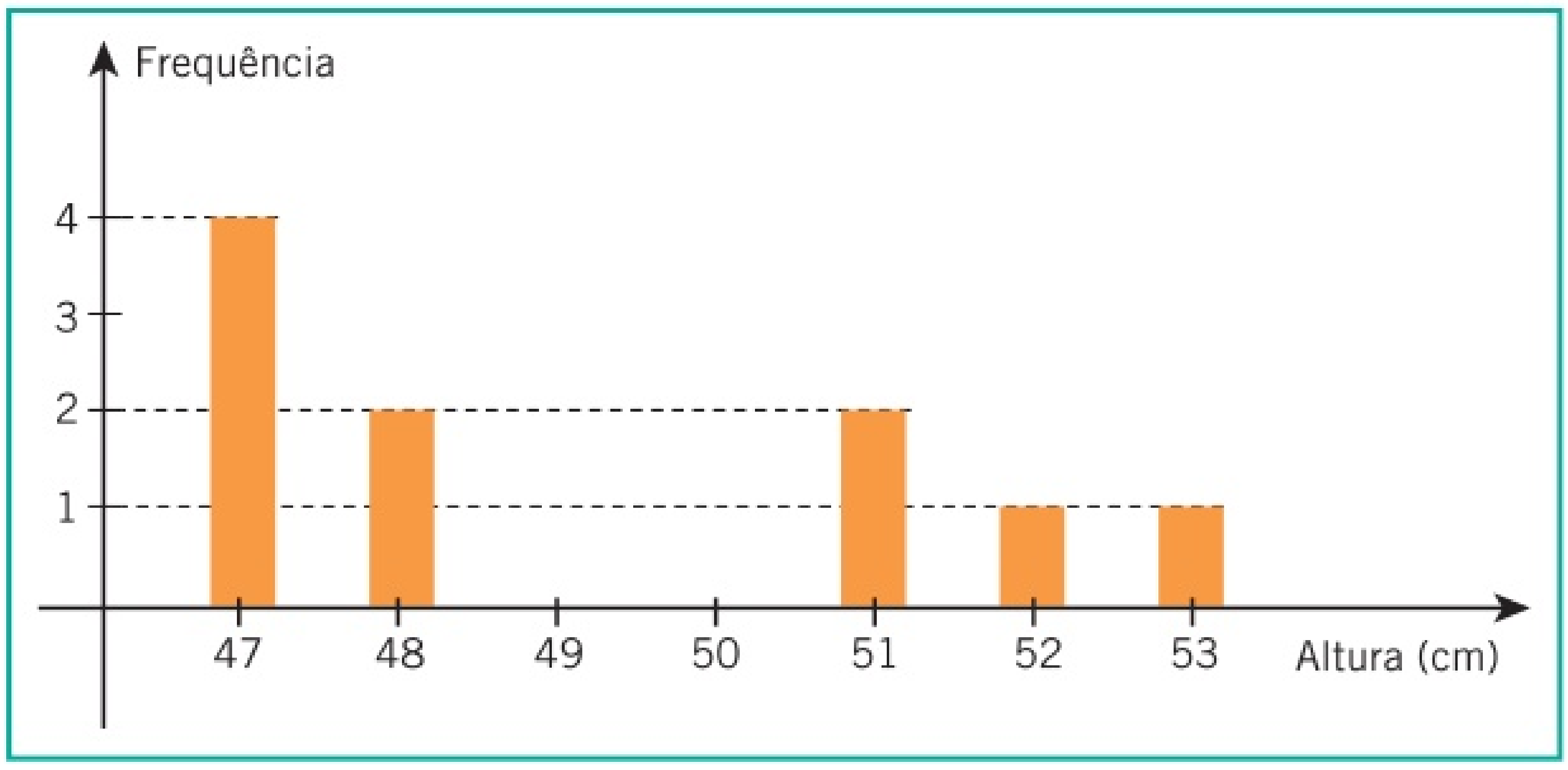
1) Observe as alturas de 10 crianças nascidas no mesmo dia, em uma maternidade.

Criança	Altura (cm)
Mariana	52
Jorge	48
Paulo	51
Mário	47
Tarsila	47
Priscila	51
Silvana	53
Alberto	47
Vítor	47
Ricardo	48

a) Elabore um gráfico de colunas que descreva a frequência das alturas dos recém-nascidos da tabela.
b) Calcule e interprete o percentual que a diferença entre as alturas médias das meninas e dos meninos representa em relação à altura média dos meninos.

Resolução:
a) Do enunciado, temos a seguinte tabela:

Altura (cm)	Frequência
47	4
48	2
51	2
52	1
53	1



b) A altura média das meninas e a dos meninos é dada, nessa ordem, por:

$$\frac{52+47+51+53}{4} = 50{,}75\text{, isto é, } 50{,}75 \text{ cm}$$

$$\frac{2 \cdot 48 + 3 \cdot 47 + 51}{6} = 48\text{, isto é, } 48 \text{ cm}$$

O percentual pedido é dado por:

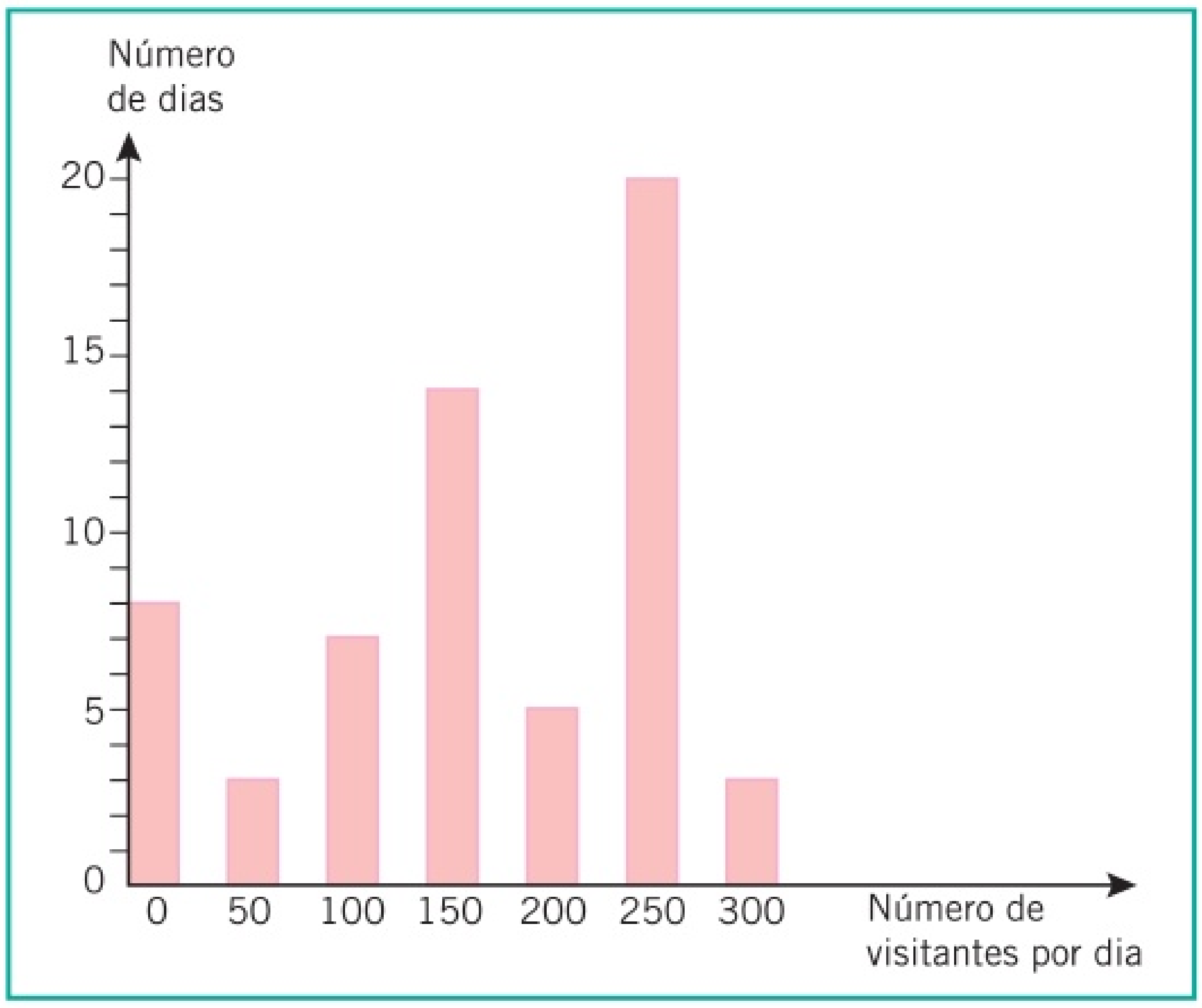
$$\frac{50{,}75 - 48}{48} = 0{,}0573\text{, ou seja, } 5{,}73\%$$

Resposta: Nesse dia, a altura média das meninas nascidas foi 5,73% maior que a altura média dos meninos nascidos.

2) (UEL-PR) Observe a obra *Noite de São João*, de Candido Portinari (1903-1949), reproduzida na figura a seguir e responda à questão.


UEL-PR

O gráfico a seguir apresenta dados referentes ao número de visitantes em uma galeria de arte, durante uma exposição de Candido Portinari.



De acordo com o gráfico, visitaram a exposição:

a) 3 pessoas por dia.
b) 100 pessoas no sétimo dia.
c) 750 pessoas em 20 dias.
d) 1 050 pessoas por 60 dias.
e) 9 850 pessoas em 60 dias.

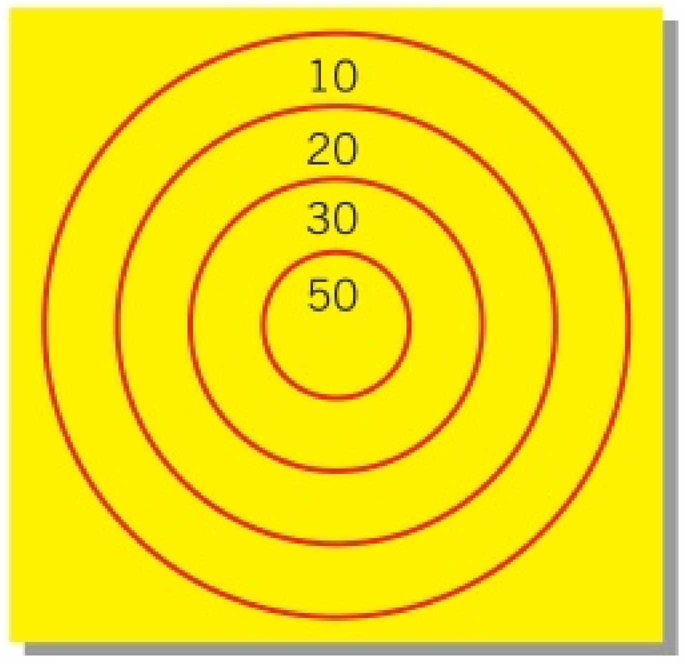
Resolução:
De acordo com o gráfico, temos:

- 08 dias com 0 visitante
- 03 dias com 50 visitantes
- 07 dias com 100 visitantes
- 14 dias com 150 visitantes
- 05 dias com 200 visitantes
- 20 dias com 250 visitantes
- 03 dias com 300 visitantes

No total, em número de visitantes, temos:
$8 \cdot 0 + 3 \cdot 50 + 7 \cdot 100 + 14 \cdot 150 + 5 \cdot 200 + 20 \cdot 250 + 3 \cdot 300 = 9850$ em 60 dias

Resposta: alternativa **e**.

1 (Fuvest-SP) Dois atiradores X e Y obtiveram numa série de 20 tiros num alvo da forma indicada na figura os seguintes resultados.



	RESULTADO				
Atirador	50	30	20	10	0
X	4	6	5	4	1
Y	6	3	5	3	3

a) Qual é a média de pontos por tiro de cada um dos atiradores?
b) Compare os desvios padrão de cada uma das séries de tiros e decida qual é o atirador com desempenho mais regular.

2 (Fuvest-SP) A distribuição de salários de uma empresa é dada pela tabela abaixo:

Salário em R$	Nº de funcionários
500,00	10
1 000,00	5
1 500,00	1
2 000,00	10
5 000,00	4
10 500,00	1
Total	31

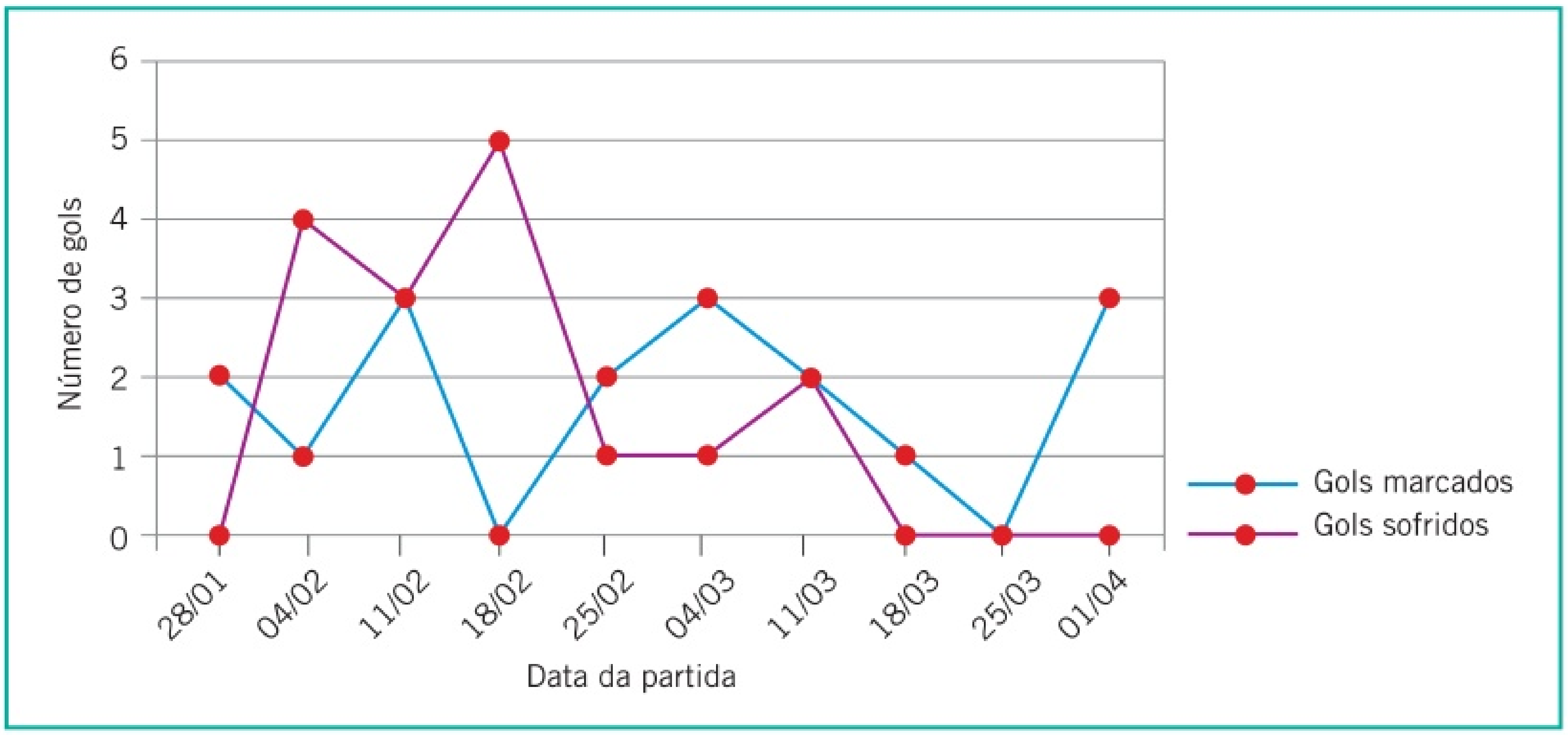
a) Qual é a média e qual é a mediana dos salários dessa empresa?
b) Suponha que sejam contratados dois novos funcionários com salários de R$ 2 000,00 cada. A variância de nova distribuição de salários ficará menor, igual ou maior que a anterior?

3 (Vunesp-SP) Durante o ano letivo, um professor de Matemática aplicou cinco provas para seus alunos. A tabela apresenta as notas obtidas por um determinado aluno em quatro das cinco provas realizadas e os pesos estabelecidos pelo professor para cada prova.

Prova	I	II	III	IV	V
Nota	6,5	7,3	7,5	**?**	6,2
Peso	1	2	3	2	2

Se o aluno foi aprovado com média final ponderada igual a 7,3, calculada entre as cinco provas, a nota obtida por esse aluno na prova IV foi:
a) 9,0.
→ b) 8,5.
c) 8,3.
d) 8,0.
e) 7,5.

4 (Enem) No gráfico estão representados os gols marcados e os gols sofridos por uma equipe de futebol nas dez primeiras partidas de um determinado campeonato.



Considerando que, neste campeonato, as equipes ganham 3 pontos para cada vitória, 1 ponto por empate e 0 ponto em caso de derrota, a equipe em questão, ao final da décima partida, terá acumulado um número de pontos igual a:

a) 15.
b) 17.
→ c) 18.
d) 20.
e) 24.

Anotações

AULA 29

Competência 7 Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade 29 Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

Em classe

PROBABILIDADE EM UM ESPAÇO AMOSTRAL EQUIPROVÁVEL

Definição e adição de probabilidades

Probabilidade com eventos elementares equiprováveis

Seja E um espaço amostral finito e equiprovável, e seja A um evento qualquer de E. Sendo $n(A)$ e $n(E)$, nessa ordem, o número de elementos de A e o número de elementos de E, a probabilidade de A é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(E)} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número total de casos possíveis}}$$

Probabilidade do evento complementar

Se $\overline{A}$ é o complementar de A, $\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$, então:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Probabilidade da união de dois eventos

Sendo A e B dois eventos quaisquer de E, a probabilidade de ocorrer A ou B é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Se A e B são disjuntos, isto é, $A \cap B = \varnothing$, dizemos que A e B são **mutuamente exclusivos**, e nesse caso $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

1 (Enem) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo.

A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é:

a) 8%. b) 9%. → c) 11%. d) 12%. e) 22%.

Da tabela, temos que o total de pessoas vacinadas é 200, das quais 22 apresentam doença crônica.
Logo, a probabilidade pedida é:

$P = \frac{22}{200} = 11\%$

2 (Enem) A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração do clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. A tabela abaixo apresenta números relativos à pacientes internados em um hospital no período da queima da cana.

Pacientes	Problemas respiratórios causados pelas queimadas	Problemas respiratórios resultantes de outras causas	Outras doenças	Total
Idosos	50	150	60	260
Crianças	150	210	90	450

Escolhendo-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é igual a:

a) 0,26, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios.

b) 0,50, o que comprova ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população nas regiões das queimadas.

c) 0,63, o que mostra que nenhum aspecto relativo à saúde infantil pode ser negligenciado.

d) 0,67, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.

→ e) 0,75, o que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.

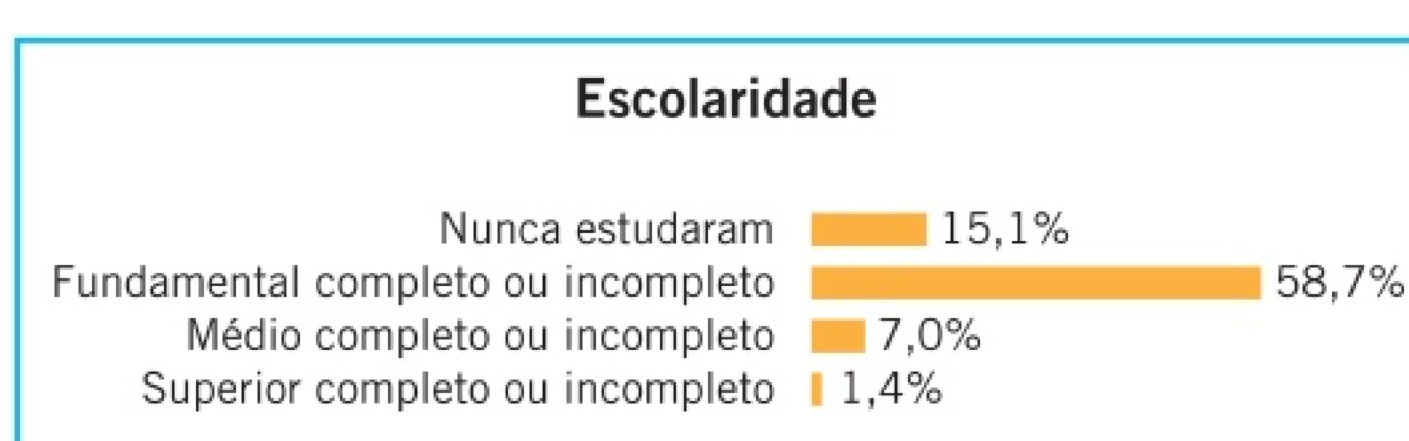
Da tabela, temos que o número de pacientes internados com problemas respiratórios causados pelas queimadas é 50 + 150 = 200. O número de crianças nesse grupo é igual a 150. Assim, a probabilidade pedida é:

$P = \frac{150}{200} = 0{,}75$

Texto para as questões 3 e 4.

A vida na rua como ela é

O Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome (MDS) realizou, em parceria com a ONU, uma pesquisa nacional sobre a população que vive na rua, tendo sido ouvidas 31 922 pessoas em 71 cidades brasileiras. Nesse levantamento, constatou-se que a maioria dessa população sabe ler e escrever (74%), que apenas 15,1% vivem de esmolas e que, entre os moradores de rua que ingressaram no ensino superior, 0,7% se diplomou. Outros dados da pesquisa são apresentados nos quadros abaixo.



ISTOÉ. São Paulo: Três, 7 mar. 2008. p. 21. Adaptado.

3 (Enem) No universo pesquisado, considere que P seja o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos de alcoolismo/drogas e Q seja o conjunto daquelas cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa. Escolhendo-se ao acaso uma pessoa no grupo pesquisado e supondo-se que seja igual a 40% a probabilidade de que essa pessoa faça parte do conjunto P ou do conjunto Q, então a probabilidade de que ela faça parte do conjunto interseção de P e Q é igual a:

→ a) 12%. b) 16%. c) 20%. d) 36%. e) 52%.

$P(P \cup Q) = P(P) + P(Q) - P(P \cap Q)$
Do enunciado, vem:
$40\% = 36\% + 16\% - P(P \cap Q) \Rightarrow P(P \cap Q) = 12\%$

4 (Enem) As informações apresentadas no texto são suficientes para se concluir que:

a) as pessoas que vivem na rua e sobrevivem de esmolas são aquelas que nunca estudaram.
b) as pessoas que vivem na rua e cursaram o ensino fundamental, completo ou incompleto, são aquelas que sabem ler e escrever.
→ c) existem pessoas que declararam mais de um motivo para estarem vivendo na rua.
d) mais da metade das pessoas que vivem na rua e que ingressaram no ensino superior se diplomou.
e) as pessoas que declararam o desemprego como motivo para viver na rua também declararam a decepção amorosa.

A soma das probabilidades de motivos por que uma pessoa vive na rua resulta em mais de 100% (132%). Sendo assim, existem pessoas que declararam mais de um motivo.

Em casa

TEXTO DE APOIO

Para compreender melhor os conceitos envolvendo probabilidade, veja os exemplos.

1) (Enem) Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida).

O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada.

Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é:

a) Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.
b) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
c) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
d) Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo.
e) Caio, pois a soma que escolheu é a maior.

Resolução:
Os resultados favoráveis a cada um dos jogadores são dados por:
- Arthur: (1, 11); (2, 10); (3, 9); (4, 8); (5, 7) = 5 possibilidades;
- Bernardo: (2, 15); (3, 14); (4, 13); (5, 12); (6, 11); (7, 10); (8, 9) = 7 possibilidades;
- Caio: (7, 15); (8, 14); (9, 13); (10, 12) = 4 possibilidades.

Resposta: alternativa **c**.

2) (Enem) Um time de futebol amador ganhou uma taça ao vencer um campeonato. Os jogadores decidiram que o prêmio seria guardado na casa de um deles. Todos quiseram guardar a taça em suas casas. Na discussão para se decidir com quem ficaria o troféu, travou-se o seguinte diálogo:
Pedro, camisa 6: – Tive uma ideia. Nós somos 11 jogadores e nossas camisas estão numeradas de 2 a 12. Tenho dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Se eu jogar os dois dados, a soma dos números das faces que ficarem para cima pode variar de 2 (1 + 1) até 12 (6 + 6). Vamos jogar os dados, e quem tiver a camisa com o número do resultado vai guardar a taça.
Tadeu, camisa 2: – Não sei, não... Pedro sempre foi muito esperto... Acho que ele está levando alguma vantagem nessa proposta...
Ricardo, camisa 12: – Pensando bem... Você pode estar certo, pois, conhecendo o Pedro, é capaz que ele tenha mais chances de ganhar que nós dois juntos...
Desse diálogo conclui-se que:

a) Tadeu e Ricardo estavam equivocados, pois a probabilidade de ganhar a guarda da taça era a mesma para todos.
b) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham mais chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.
c) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham a mesma chance que Pedro de ganhar a guarda da taça.
d) Tadeu e Ricardo tinham razão, pois os dois juntos tinham menos chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.
e) não é possível saber qual dos jogadores tinha razão, por se tratar de um resultado probabilístico, que depende exclusivamente da sorte.

Resolução:
No lançamento de dois dados, temos, pelo princípio fundamental de contagem, $6 \cdot 6 = 36$ possibilidades. Ainda:
- camisa 6 = soma 6 = {(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)};
- camisa 2 = soma 2 = {(1, 1)};
- camisa 12 = soma 12 = {(6, 6)}.

Assim, temos as probabilidades:

camisa 6 $\rightarrow P(\text{soma } 6) = \frac{5}{36}$

camisa 2 $\rightarrow P(\text{soma } 2) = \frac{1}{36}$

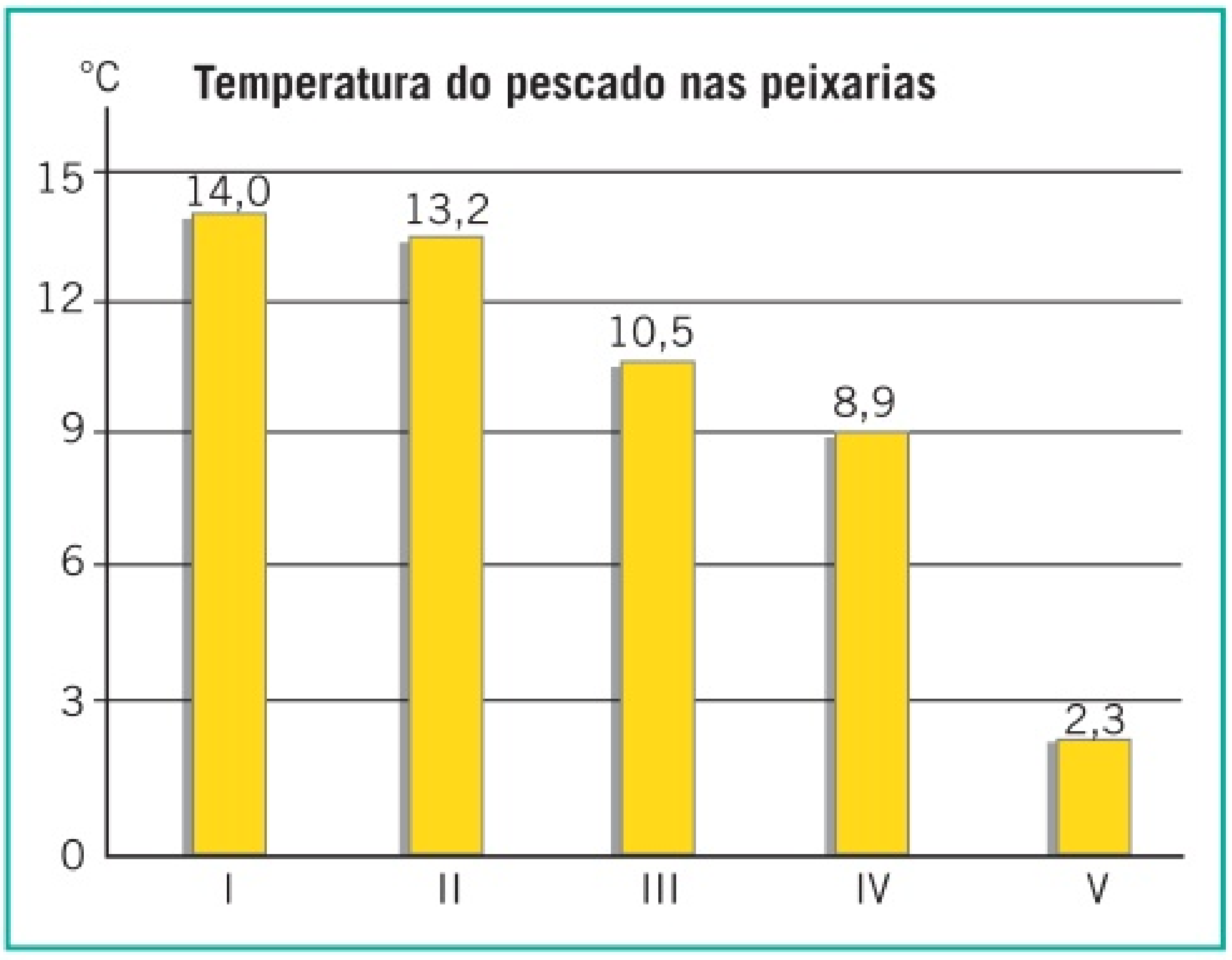
camisa 12 $\rightarrow P(\text{soma } 12) = \frac{1}{36}$

$\frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}$

Logo, $P(\text{soma } 6) > P(\text{soma } 2) + P(\text{soma } 12)$.

Resposta: alternativa **d**.

1 (Enem)



Uma das principais causas da degradação de peixes frescos é a contaminação por bactérias. O gráfico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre 2 °C e 4 °C.

Associação Brasileira de Defesa do Consumidor. Adaptado.

Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a:

a) $\frac{1}{2}$.
b) $\frac{1}{3}$.
c) $\frac{1}{4}$.
→ d) $\frac{1}{5}$.
e) $\frac{1}{6}$.

2 (Enem)

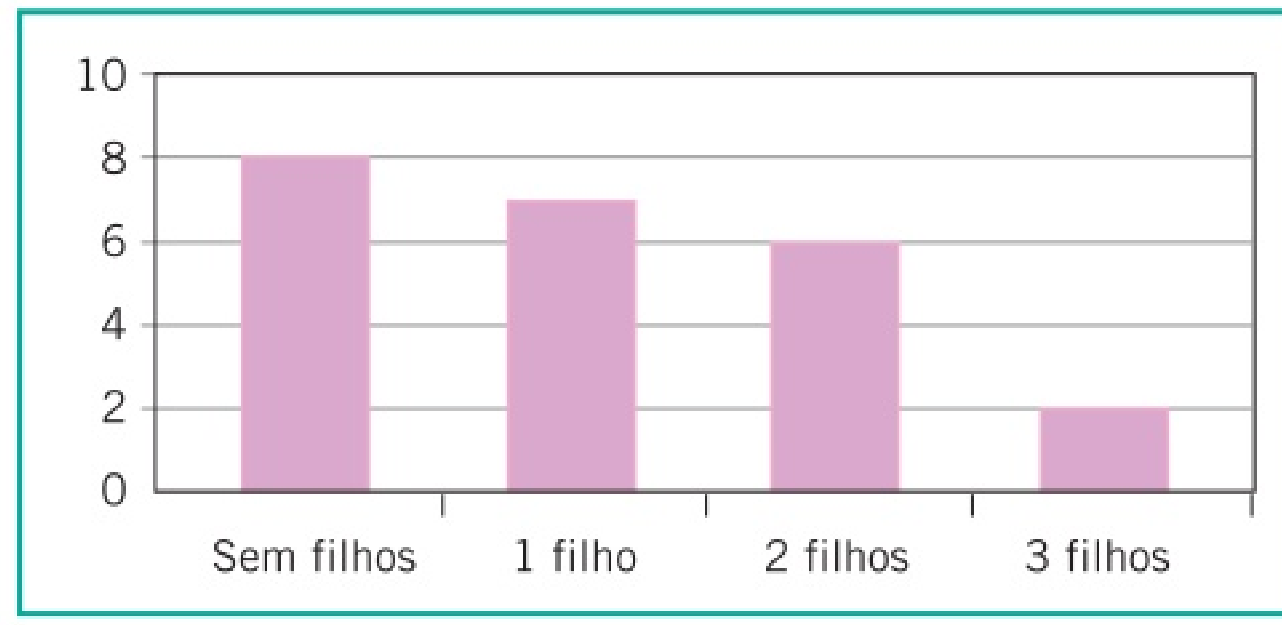
Dados do Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas (IPEA) revelaram que no biênio 2004/2005, nas rodovias federais, os atropelamentos com morte ocuparam o segundo lugar no *ranking* de mortalidade por acidentes. A cada 34 atropelamentos, ocorreram 10 mortes. Cerca de 4 mil atropelamentos/ano, um a cada duas horas, aproximadamente.

Disponível em: <www.ipea.gov.br>. Acesso em: 6 jan. 2009.

De acordo com os dados, se for escolhido aleatoriamente para investigação mais detalhada um dos atropelamentos ocorridos no biênio 2004/2005, a probabilidade de ter sido um atropelamento sem morte é:

a) $\frac{2}{17}$.
b) $\frac{5}{17}$.
c) $\frac{2}{5}$.
d) $\frac{3}{5}$.
→ e) $\frac{12}{17}$.

3 (Enem) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico abaixo.



Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é:

a) $\frac{1}{3}$.
b) $\frac{1}{4}$.
c) $\frac{7}{15}$.
d) $\frac{7}{23}$.
→ e) $\frac{7}{25}$.

4 (Enem) A tabela abaixo indica a posição relativa de quatro times de futebol na classificação geral de um torneio, em dois anos consecutivos. O símbolo • significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2004, à frente do indicado na coluna. O símbolo * significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2005, à frente do indicado na coluna.

	A	*B*	*C*	*D*
A				*
B	• *		•	• *
C	• *	*		*
D	•		•	

A probabilidade de que um desses quatro times, escolhido ao acaso, tenha obtido a mesma classificação no torneio, em 2004 e 2005, é igual a:

→ a) 0,00.
b) 0,25.
c) 0,50.
d) 0,75.
e) 1,00.

AULA 30

Competência 7 Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Habilidade 30 Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Em classe

PROBABILIDADE CONDICIONAL E MULTIPLICAÇÃO DE PROBABILIDADES

Probabilidade condicional

Muitas vezes, o fato de sabermos que certo evento ocorreu modifica a probabilidade que atribuímos a outro evento. Indicaremos por $P(B/A)$ a probabilidade de o evento B ocorrer, tendo ocorrido o evento A (probabilidade condicional de B em relação a A). Podemos escrever:

$$P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $n(E)$, podemos ter ainda:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilidade da intersecção de dois eventos

Sendo A e B dois eventos quaisquer de E, a probabilidade de ocorrer A e B é dada por:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

EVENTOS INDEPENDENTES

Dizemos que B é independente de A se, e somente se, $P(B/A) = P(B)$, ou seja, a probabilidade de B ocorrer é a mesma, tendo A ocorrido ou não. Nesse caso,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

1 (Enem) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

Tamanho dos calçados	Número de funcionárias
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela usa calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é:

a) $\frac{1}{3}$.
b) $\frac{1}{5}$.
c) $\frac{2}{5}$.
→ d) $\frac{5}{7}$.
e) $\frac{5}{14}$.

Sabendo-se que a funcionária usa calçado maior que 36,0, o espaço amostral se reduz de 31 funcionárias para apenas 3 + 10 + 1 = 14. Nesse novo espaço amostral, 10 calçam 38,0. Assim, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{10}{3+10+1} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

2 (Enem) Em um determinado semáforo, as luzes completam um ciclo de verde, amarelo e vermelho em 1 minuto e 40 segundos. Desse tempo, 25 segundos são para a luz verde, 5 segundos para a amarela e 70 segundos para a vermelha. Ao se aproximar do semáforo, um veículo tem uma determinada probabilidade de encontrá-lo na luz verde, amarela ou vermelha. Se essa aproximação for de forma aleatória, pode-se admitir que a probabilidade de encontrá-lo com uma dessas cores é diretamente proporcional ao tempo em que cada uma delas fica acesa.

Suponha que um motorista passa por um semáforo duas vezes ao dia, de maneira aleatória e independente uma da outra. Qual é a probabilidade de o motorista encontrar esse semáforo com a luz verde acesa nas duas vezes em que passar?

a) $\frac{1}{25}$
→ b) $\frac{1}{16}$
c) $\frac{1}{9}$
d) $\frac{1}{3}$
e) $\frac{1}{2}$

A probabilidade de o motorista encontrar o semáforo com a luz verde é dada por:

$$\frac{25}{25+5+70} = \frac{1}{4}$$

A probabilidade de encontrar o semáforo duas vezes com a luz verde é:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

3 (Enem) Um casal decidiu que vai ter 3 filhos. Contudo, quer exatamente 2 filhos homens e decide que, se a probabilidade fosse inferior a 50%, iria procurar uma clínica para fazer um tratamento específico para garantir que teria os dois filhos homens. Após os cálculos, o casal concluiu que a probabilidade de ter exatamente 2 filhos homens é:

a) 66,7%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
b) 50%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
c) 7,5%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
d) 25%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.
→ e) 37,5%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.

O casal deseja três filhos em qualquer uma das sequências (*h*, *h*, *m*), (*h*, *m*, *h*), ou (*m*, *h*, *h*), em que *h* representa um menino e *m* uma menina. Admitindo-se que, ao terem um filho, a probabilidade de ele ser homem seja 50%, a probabilidade de ocorrer qualquer uma dessas sequências é dada por: $3 \cdot (0,5)^3 = 3 \cdot 0,125 = 3 \cdot 12,5\% = 37,5\%$.

Em casa

TEXTO DE APOIO

Quando desejamos determinar a probabilidade de um evento acontecer, dado que outro já aconteceu, nem sempre é fácil distinguir o primeiro evento do segundo. Para compreender melhor esses conceitos, veja os exemplos a seguir.

1) Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 bolas pretas. Tiramos, simultaneamente, 3 bolas. Determine a probabilidade de:
a) sair uma única bola preta;
b) saírem exatamente duas bolas pretas;
c) não figurar nenhuma bola preta.

Resolução:
Seja P o evento sair bola preta e $\tilde{N}$ o seu evento complementar (no caso, apenas branca). Calculamos a probabilidade para uma das sequências e multiplicamos pelas permutações possíveis.

a) P e $\tilde{N}$ e $\tilde{N}$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot P_3^{(2)} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3!}{2!} = \frac{3}{5}$$

b) P e P e $\tilde{N}$

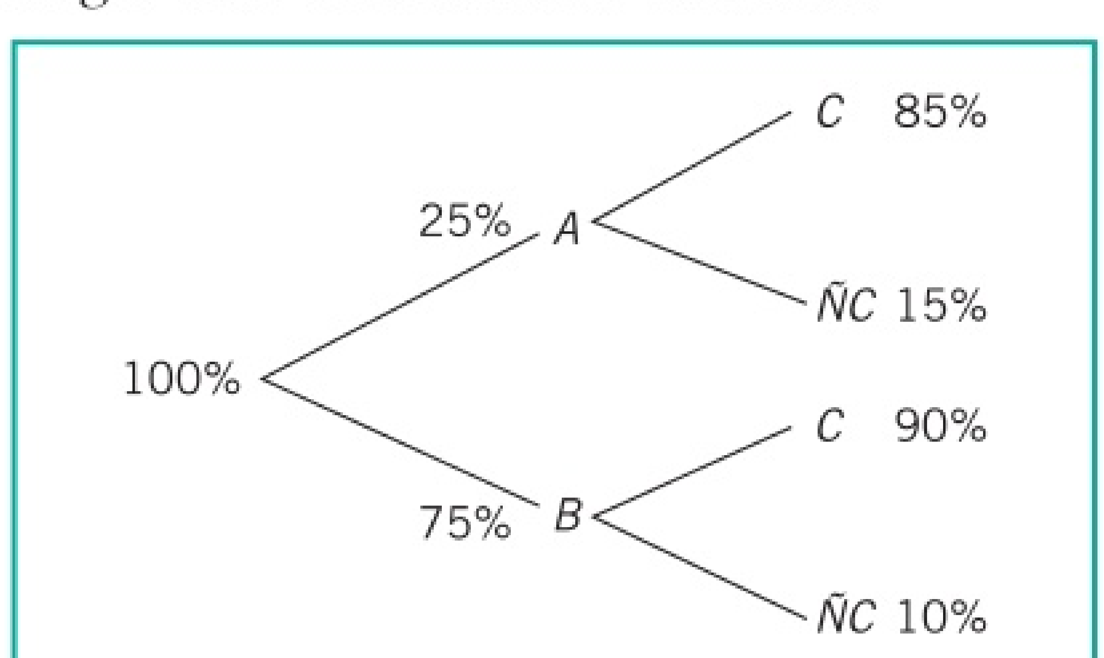
$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot P_3^{(2)} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3!}{2!} = \frac{3}{10}$$

c) $\tilde{N}$ e $\tilde{N}$ e $\tilde{N}$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$$

2) (Vunesp-SP) Sabe-se que os pênaltis a favor de certa equipe de futebol são batidos pelos dois melhores cobradores da equipe, A e B, cujos índices de aproveitamento são de 85% e 90%, respectivamente. Sabe-se ainda que B cobra 75% dos pênaltis a favor da equipe. Acaba de ser marcado um pênalti a favor da equipe e, nesse momento, os jogadores A e B estão em campo.
a) Qual a probabilidade de que o pênalti seja cobrado por B e não seja convertido em gol?
b) Qual a probabilidade de o pênalti ser convertido em gol?

Resolução:
Para problemas em que o experimento aleatório apresenta vários estágios, um bom caminho é construir o “diagrama de árvore”.
Seja C o evento converter em gol e $\tilde{N}C$ o evento não converter.



Assim:
a) Do enunciado, temos:

$$P = \frac{75}{100} \cdot \frac{10}{100} = 7{,}5\%$$

b) Do enunciado, temos:

$$P = \frac{25}{100} \cdot \frac{85}{100} + \frac{75}{100} \cdot \frac{90}{100} = 88{,}75\%$$

1 (Enem) Um apostador, para participar de certa modalidade de jogo, que consiste no sorteio aleatório de um número entre dez, pretende comprar dois números para um sorteio e um número para um segundo sorteio. A probabilidade de o apostador não ganhar em qualquer dos sorteios é igual a:

a) 90%.
b) 81%.
→ c) 72%.
d) 70%.
e) 65%.

2 (Enem) A probabilidade de ocorrência de chuvas nos próximos 3 dias, divulgada pelo Instituto de Meteorologia, é de 60% para cada dia. Com base nessa informação e supondo que as chuvas de cada dia constituam eventos independentes, a probabilidade de que chova somente no terceiro dia é de:

a) 60%.
b) 40%.
c) 30%.
d) 21,6%.
→ e) 9,6%.

3 (Enem) Um aluno de uma escola será escolhido por sorteio para representá-la em uma certa atividade. A escola tem dois turnos. No diurno, há 300 alunos distribuídos em 10 turmas de 30 alunos. No noturno, há 240 alunos distribuídos em 6 turmas de 40 alunos.

Em vez do sorteio direto envolvendo os 540 alunos, foram propostos dois outros métodos de sorteio.

Método I: escolher ao acaso um dos turnos (por exemplo, lançando uma moeda) e, a seguir, sortear um dos alunos do turno escolhido.

Método II: escolher ao acaso uma das 16 turmas (por exemplo, colocando um papel com o número de cada turma em uma urna e sorteando uma delas) e, a seguir, sortear um dos alunos dessa turma.

Sobre os métodos I e II de sorteio é correto afirmar:

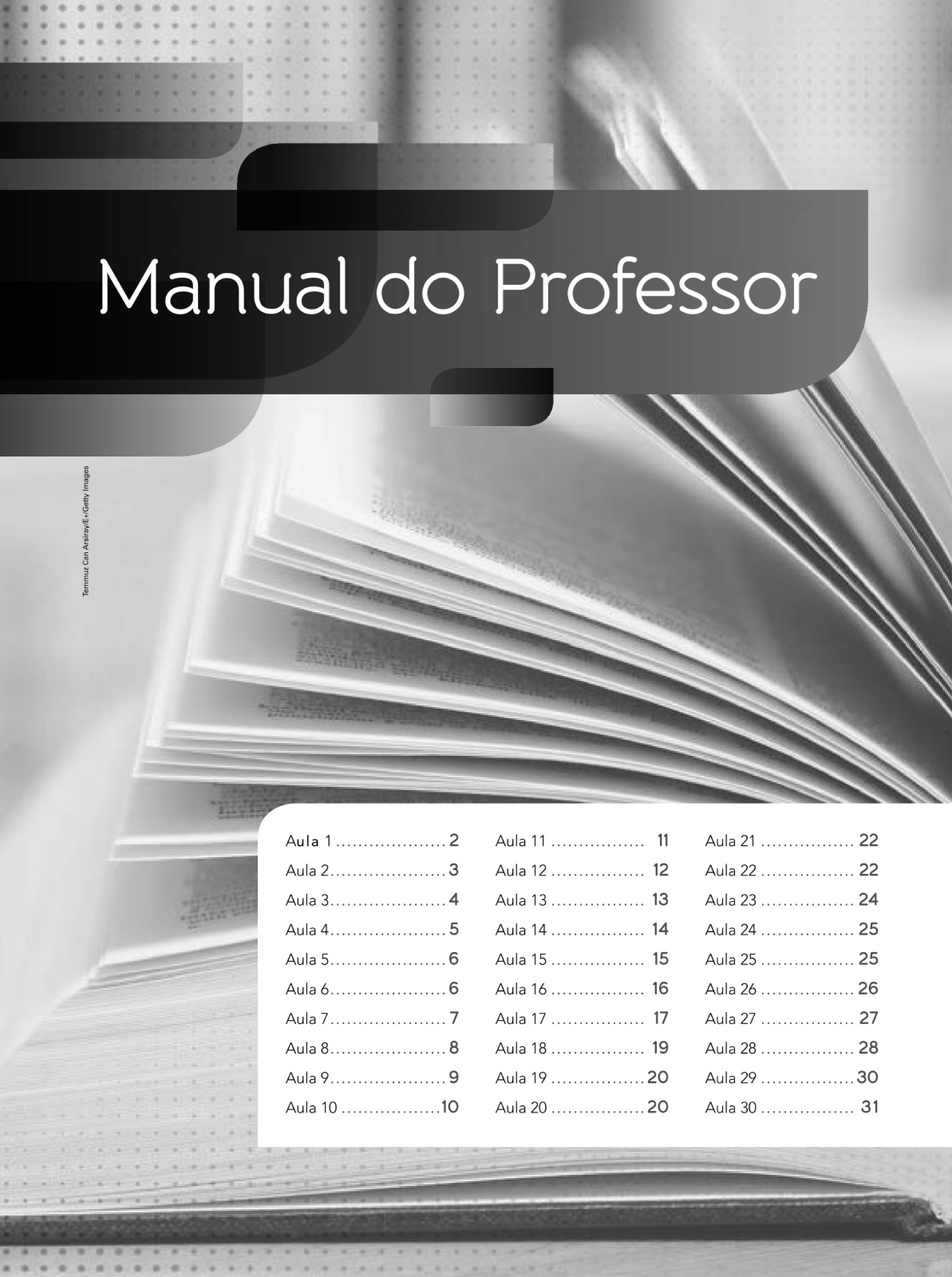
a) em ambos os métodos, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados.
b) no método I, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados, mas, no método II, a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior que a de um aluno do noturno.
c) no método II, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados, mas, no método I, a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior que a de um aluno do noturno.
→ d) no método I, a chance de um aluno do noturno ser sorteado é maior do que a de um aluno do diurno, enquanto no método II ocorre o contrário.
e) em ambos os métodos, a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior do que a de um aluno do noturno.

4 (Enem) O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

a) $2 \cdot (0{,}2\%)^4$
b) $4 \cdot (0{,}2\%)^2$
→ c) $6 \cdot (0{,}2\%)^2 \cdot (99{,}8\%)^2$
d) $4 \cdot (0{,}2\%)$
e) $6 \cdot (0{,}2\%) \cdot (99{,}8\%)$

Anotações

Manual do Professor



Temmuz Can Arsiray/E+/Getty Images

AULA 1 • ENCAMINHAMENTO

Professor, sugerimos, inicialmente, um bate-papo com a turma para descrever características da prova de Matemática do Enem: uma prova com 45 questões do tipo alternativas, que cobram habilidades para efetuar e avaliar cálculos e argumentos necessários na intervenção do cotidiano do aluno.

Defina potenciação como um produto de fatores iguais e mostre as propriedades da potenciação. Utilize exemplos numéricos. Comente que $a^0 = 1$ e $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$.

Comente que existem números (como os exemplos mostrados no texto inicial da aula) cujas operações aritméticas são muito trabalhosas; por isso, a necessidade de representar esse número utilizando o que chamamos de notação científica.

Insista que um número N está escrito em notação científica quando $N = \pm a \cdot 10^m$, com $1 \leqslant a < 10$. Utilize exemplos numéricos para ilustrar isso, como a velocidade da luz no vácuo, aproximadamente, 300 000 000 m/s, ou seja, $3 \cdot 10^8$ m/s.

Resolva os exercícios 1 e 2 de classe com os alunos.

Oriente a turma para a tarefa. Se achar relevante, converse sobre o Texto de Apoio da seção Em casa, que trata das unidades binárias na computação.

EXERCÍCIO EXTRA

(Fuvest-SP) Qual desses números é igual a 0,064?

a) $\left(\frac{1}{80}\right)^2$

b) $\left(\frac{1}{8}\right)^2$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

d) $\left(\frac{1}{800}\right)^2$

e) $\left(\frac{8}{10}\right)^3$

Resposta: C

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 E

Do enunciado, temos que a massa de GL 581c é $\frac{1}{3}$ da massa do Sol, ou seja:

$$\frac{1}{3} \cdot 1{,}98 \cdot 10^{30} = 0{,}66 \cdot 10^{30} = 6{,}6 \cdot 10^{29}$$

2 E

Do enunciado, temos:

$$\begin{array}{lcl} 8 & \text{———} & 10^{-2} \\ 32 \cdot 10^6 & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = 4 \cdot 10^4 = 40\,000 \text{ km}^2$$

3 E

$1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} = 10^4 \text{ dm}$

$(1 \text{ km})^3 = (10^4 \text{ dm})^3 = 10^{12}$ litros

$30\,000 \text{ km}^3 = 30 \cdot 10^3 \text{ km}^3 = 30 \cdot 10^{15}$ litros

$$\frac{30\,000 \text{ km}^3}{20 \cdot 10^6 \text{ litros}} = \frac{30 \cdot 10^{15} \text{ litros}}{20 \cdot 10^6 \text{ litros}} = 1{,}5 \cdot 10^9$$

AULA 2 • ENCAMINHAMENTO

Explique as definições e os termos gerais de P.A. e P.G. e passe então aos exercícios de aula.

Na seção Em casa está o restante da teoria de P.A. e P.G., assim como exemplos para essa teoria. Se sobrar tempo, é recomendável ajudar os alunos na compreensão do texto dessa seção.

EXERCÍCIOS EXTRAS

1 Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. A espessura de cada tábua é 0,5 cm. Forma-se uma pilha de tábuas colocando-se uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houveram sido colocadas anteriormente. Determine, ao final de 9 dessas operações:

a) Quantas tábuas terá a pilha?

b) Qual é a altura, em metros, da pilha?

____

pilha na 1ª vez

____

____

pilha na 2ª vez

____

____

____

pilha na 3ª vez

Resolução:

a) Do enunciado, temos uma P.G. em que $a_1 = 1$ e a razão $q = 2$. Assim:

$a_9 = a_1 \cdot q^8 = 1 \cdot 2^8 = 256$

Resposta: 256 tábuas.

b) $h = 0{,}5(256) = 128$ cm $= 1{,}28$ m

Resposta: 1,28 m

2 Um fazendeiro plantou 3960 árvores em sua propriedade no período de 24 meses. A plantação foi feita mês a mês, em progressão aritmética. No primeiro mês foram plantadas x árvores, no mês seguinte $(x + r)$ árvores, $r > 0$, e assim sucessivamente, sempre plantando no mês seguinte r árvores a mais do que no mês anterior. Sabendo que ao término do décimo quinto mês do início do plantio ainda restavam 2160 árvores para serem plantadas, o número de árvores plantadas no primeiro mês foi:

a) 50.
b) 75.
c) 100.
d) 150.
e) 165.

Resolução:

Do enunciado, temos uma P.A. de primeiro termo x, razão r e, chamando de S_n a soma dos n primeiros termos:

$$\begin{cases} S_{24} = 3960 \\ S_{15} = 3960 - 2160 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x + x + 23r)24}{2} = 3960 \\ \dfrac{(x + x + 14r)15}{2} = 1800 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 23r = 330 \\ 2x + 14r = 240 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos $r = 10$ e $x = 50$.

Assim, foram plantadas no primeiro mês 50 árvores.

Resposta: A

3 Em uma sequência $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Obtenha o termo a_4.

Resposta: 16

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 B

Do enunciado, temos a progressão aritmética (40, 46, ..., 136), de razão 6.

Assim, o número n de sábados que se passaram desde a inauguração até atingir a cota máxima pela primeira vez pode ser obtido por:

$136 = 40 + (n - 1) \cdot 6 \Rightarrow n = 17$

Excluindo-se o sábado da inauguração, o número de sábados que se passaram para que a cota máxima fosse atingida pela primeira vez foi 16.

2 B

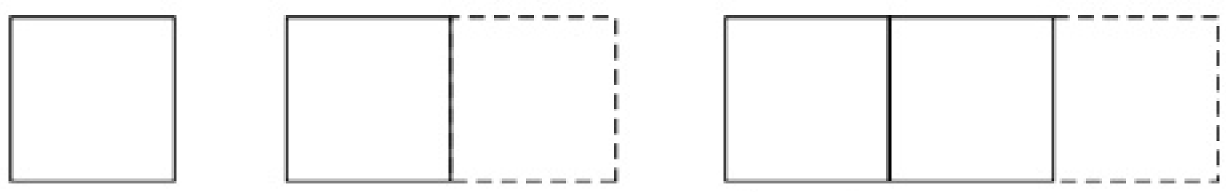
O enunciado nos dá três situações:

I. Em um quadrado, são usados quatro canudos.

II. Para formar um segundo quadrado, é aproveitado um lado já existente, e são adicionados três novos canudos, formando o segundo quadrado.

III. Mais uma vez é aproveitado um lado já existente, e assim três novos canudos formam mais um quadrado.

I. II. III.



_________ canudos já existentes

_ _ _ _ _ _ canudos novos

Portanto, serão usados 3 canudos por quadrado e mais um referente ao quadrado inicial.

$C = 3Q + 1$.

3 C

Figura 1 Figura 2 Figura 3

A P.G. (1, 3, 9, ...) de razão 3 pode indicar o número de triângulos "escuros" da sequência de figuras apresentada. Logo, a figura 4 deverá ter $9 \cdot 3$, ou seja, 27 triângulos "escuros", o que está indicado na alternativa **c**.

4 D

Pelas linhas apresentadas, a soma dos números da linha n é dada por n^2.

Assim, a soma da 9ª linha é $9^2 = 81$.

5 B

A sequência é uma progressão aritmética de razão $r = 100$ e $a_{21} = 6\,000$.

Assim:

$a_{21} = a_1 + 20r \Rightarrow 6\,000 = a_1 + 20 \cdot 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = 4\,000$

Logo, a distância total percorrida é

$$S_{21} = \frac{(a_1 + a_{21}) \cdot 21}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{21} = \frac{(4\,000 + 6\,000) \cdot 21}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{21} = 105\,000 \text{ m}$$

6 C

A sequência das arestas é $\left(2, 1, \frac{1}{2}, ...\right)$.

A sequência dos volumes é $\left(8, 1, \frac{1}{8}, ...\right)$.

A soma S dos volumes é:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow S = \frac{8}{1 - \frac{1}{8}} \Rightarrow S = \frac{8}{\frac{7}{8}} \Rightarrow S = \frac{64}{7}$$

AULA 3 • ENCAMINHAMENTO

Se sobrar tempo, é recomendável ajudar os alunos na compreensão do texto da seção Em casa.

EXERCÍCIOS EXTRAS

1 (Vunesp-SP) Determine quantos são os números de três algarismos, múltiplos de 5, cujos algarismos das centenas pertencem a {1, 2, 3, 4} e os demais algarismos a {0, 5, 6, 7, 8, 9}.

Resposta: 48 números

2 (ITA-SP) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar empregando os caracteres 1, 3, 5, 6, 8 e 9?

a) 60 b) 120 c) 240 d) 40 e) 80

Resposta: B

3 (FEI-SP) De todos os números menores que 100 000 e maiores que 50 000, quantos são os lidos da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda que fornecem o mesmo valor (Exemplo 56 365)?

a) 450 b) 1 500 c) 1 000 d) 900 e) 500

Resolução:

Temos 5 possibilidades para o 1º (5, 6, 7, 8, 9), 10 para o 2º, 10 para o 3º, uma única para o quarto (igual ao 2º) e uma única para o 5º (igual ao 1º).

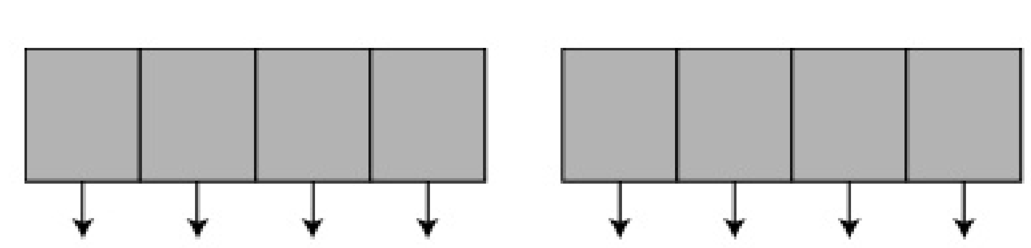
$5 \cdot 10 \cdot 10 = 500$

Resposta: E

4 Com os algarismos 2, 3, 4, 5, 6 e 7, quantos números de quatro algarismos podemos formar de modo que pelo menos um algarismo seja repetido?

Resolução:

Denominamos quantos são os números que têm 4 algarismos e encontramos a quantidade de números com algarismos distintos.



$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 - 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 936$

Resposta: 936

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 C

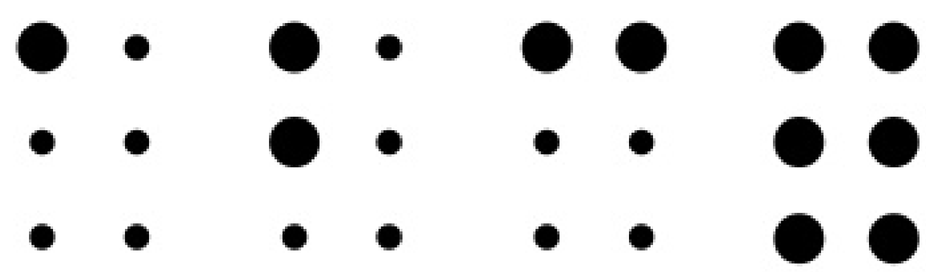
Ele tem 3 possibilidades para a escolha da cor (não quer marrom), 4 para a escolha do tipo de processador e 2 para a da capacidade de memória. Pelo Princípio Multiplicativo, temos:

$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ possibilidades

Esse número está entre 20 e 30.

2 D

No Braile temos, por exemplo:



a b c é

Para cada ponto temos duas possibilidades: o ponto ser destacado ou não. Como pelo menos um dos pontos deve ser destacado, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$2^6 - 1 = 63$ caracteres

3 B

Para acomodarmos a supersticiosa temos 4 possibilidades. Restam 6 possibilidades para a segunda pessoa e 5 para a terceira.

supersticiosa		

$$\underset{\downarrow}{4} \cdot \underset{\downarrow}{6} \cdot \underset{\downarrow}{5} = 120$$

4 B

Do enunciado, temos que:

- Se o fundo for azul, então:

casa (verde/amarela) · palmeira (cinza/verde)

$2 \cdot 2 = 4$

- Se o fundo for cinza, então:

casa (verde/amarela/azul) · palmeira (verde)

$3 \cdot 1 = 3$

Assim, o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é:

$4 + 3 = 7$

5 B

Cada questão admite 3 possibilidades de resposta; assim, o número total de respostas distintas para a prova é $3^5 = 243$.

Como 250 candidatos submeteram-se à prova, pelo menos 2 candidatos assinalaram as mesmas alternativas.

AULA 4 • ENCAMINHAMENTO

Se houver tempo, explique permutações com alguns elementos iguais, que podem ser encontrados no texto da seção Em casa.

EXERCÍCIOS EXTRAS

1 Considere a palavra UNIVERSO. Quantos anagramas começam por vogal ou terminam por consoante?

$40 \cdot 6! = 28\,800$

Resposta: 28 800 anagramas

2 Considere a palavra ESCOLA. Em quantos anagramas as vogais e as consoantes ficam alternadas?

Resposta: 72 anagramas

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 B

Os cinco sacos podem ser alinhados de 5! maneiras.

Assim:

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

2 A

Devemos permutar os três livros restantes com o bloco dos dois que permanecerão juntos e depois permutar os dois entre si dentro do bloco.

Assim:

$4! \cdot 2! = 48$

3 D

Devemos permutar os casais nos 4 bancos e depois os casais entre si em cada banco. Assim:

$4! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 384$

4 C

Dos $5! = 120$ anagramas, 60 deles têm a letra L antes da N (pois os outros 60 têm a letra N antes da L).

AULA 5 • ENCAMINHAMENTO

Se sobrar tempo, explique os exercícios que estão na seção Em casa.

EXERCÍCIOS EXTRAS

1 De quantos modos 10 pessoas podem ser separadas em dois grupos, tendo um deles 7 pessoas e no outro 3?

Resolução:
$C_{10,7} = 120$ (pois, escolhido um dos grupos, o outro já fica determinado).
Observação: se fossem dois grupos de 5 pessoas, $C_{5,10}$.

2 De quantos modos podemos guardar 10 objetos em 3 caixas, ficando 5 na 1ª, 3 na 2ª e 2 na 3ª?

Resolução:
$C_{10,5} \cdot C_{5,3} \cdot C_{2,2} = 2\,520$

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 D

Como Benedito não participa, existem para a escolha 7 pessoas. Colocando Antônio na comissão, sobram 6 candidatos para preencherem as 3 vagas restantes. Assim:

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$$

2 D

Sendo n o número de pessoas e observando que na escolha não importa a ordem, temos:

$$C_{n,2} = 78 \Rightarrow \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 78 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot (n-2)!} = 78 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 156 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 13 \text{ ou } n = -12 \text{ (não convém)}$$

3 E

Podemos escolher as 4 pessoas para o de 4 lugares de $C_{9,4}$ maneiras.
As 5 pessoas restantes irão, então, para o outro elevador. Assim:

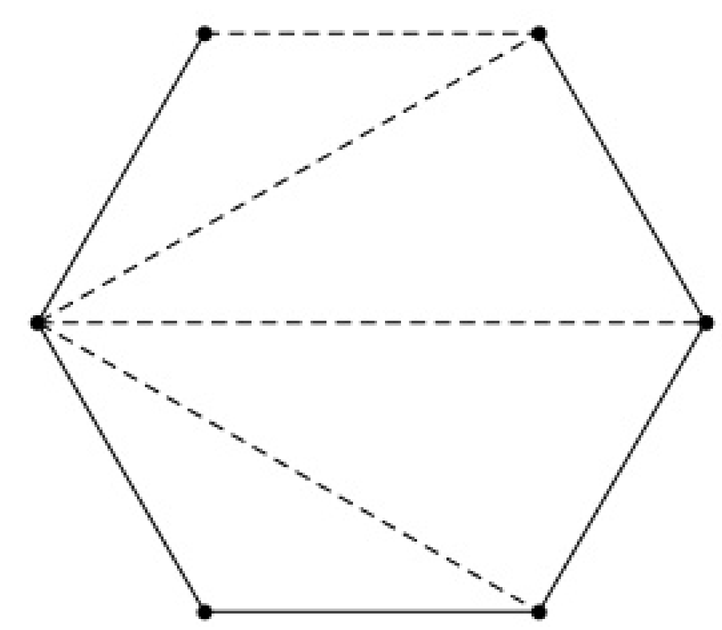
$$C_{9,4} \cdot C_{5,5} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} \cdot 1 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 126$$

4 A

Para a escolha dos componentes do grupo *A*, devem ser selecionados dois times sem importar a ordem e, para a escolha do jogo de abertura, devem ser selecionados dois times importando a ordem, pois o primeiro escolhido jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. Assim, temos uma combinação e um arranjo, respectivamente.

5 E

Quando ligamos dois vértices ou temos um lado ou temos uma diagonal.
Contamos todas as ligações, sem importar a ordem, dos n vértices 2 a 2 e descontamos os lados:



$$C_{n,2} - n = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n =$$

$$= \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

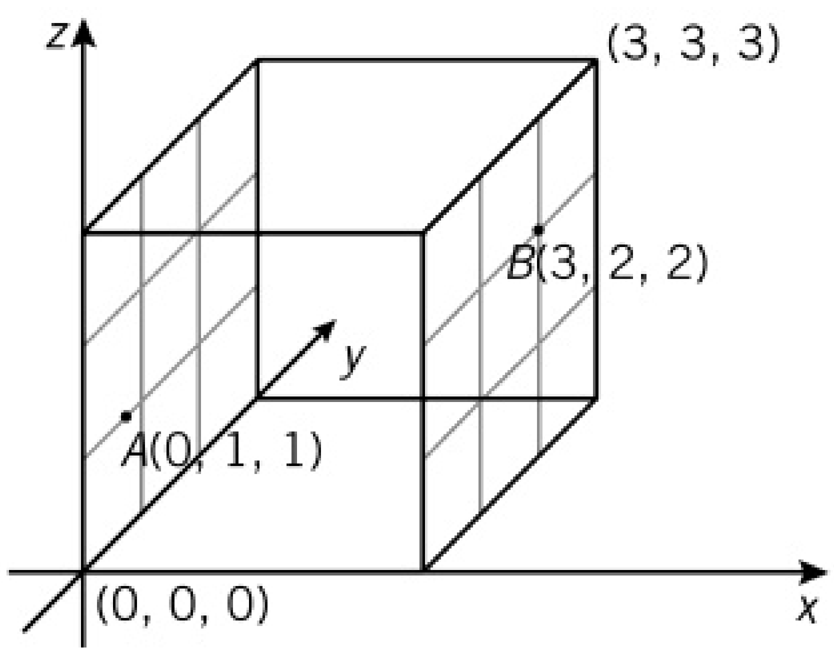
AULA 6 • ENCAMINHAMENTO

Explique os conceitos desta aula usando as paredes e os cantos da sala de aula como exemplos. Assim, o chão e o teto (provavelmente) estão em planos paralelos e qualquer parede e o chão estão em planos perpendiculares. O canto superior da lousa e uma diagonal do teto estão em retas reversas, etc.

Mostre, com exemplos numéricos, como é o sistema cartesiano tridimensional. Por exemplo, o perímetro do triângulo de vértices $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ e $C(0, 0, 4)$ é $10 + 4\sqrt{2}$.

EXERCÍCIO EXTRA

Na figura a seguir, temos a representação de uma sala que tem 3 m de comprimento, 3 m de largura e 3 m de altura.



Duas paredes paralelas (opostas) foram divididas, cada uma, em 9 quadrados de lado unitário. Em uma parede encontram-se uma formiga e uma mosca no ponto $A(0, 1, 1)$. Ambas querem chegar ao ponto $B(3, 2, 2)$ da parede oposta. A mosca pode voar e a formiga só pode andar pelas paredes, pelo chão e pelo teto. Calcule, para cada uma delas, o caminho mais curto.

Resposta:

O caminho mais curto da formiga é $\sqrt{37}$ e o da mosca, $\sqrt{11}$.

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 C

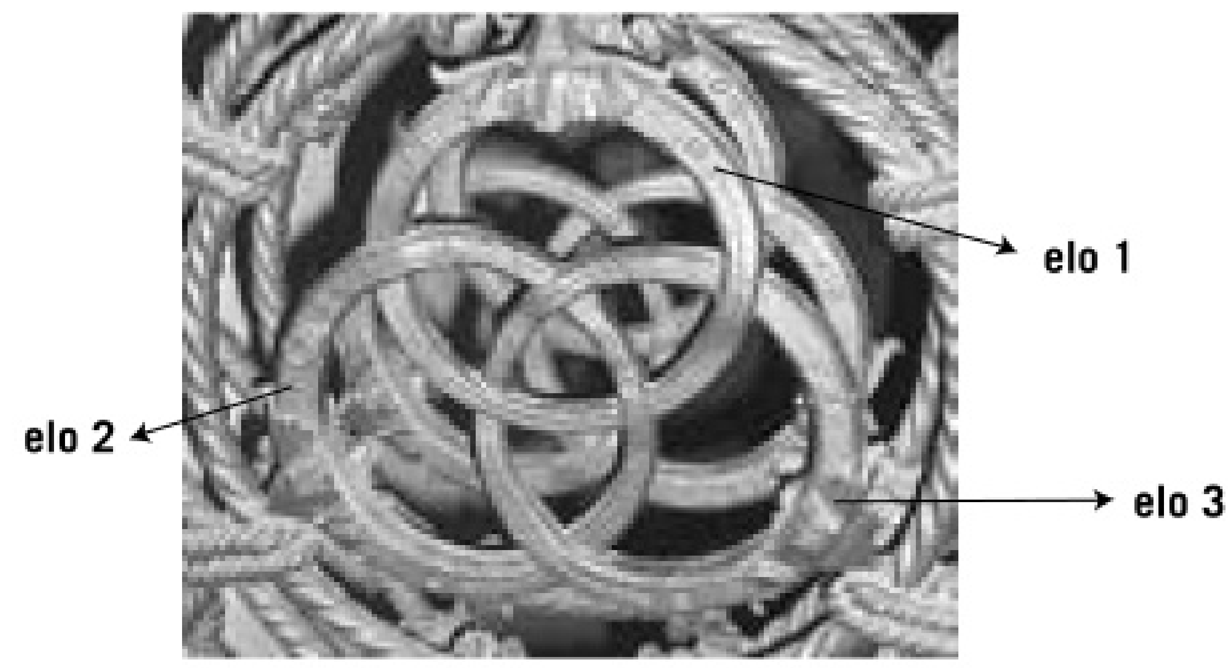
O número mínimo de movimentos necessários é 4. Um exemplo de caminho é dado por: H8-H3, H3-D3, D3-D1, D1-C1.

2 E

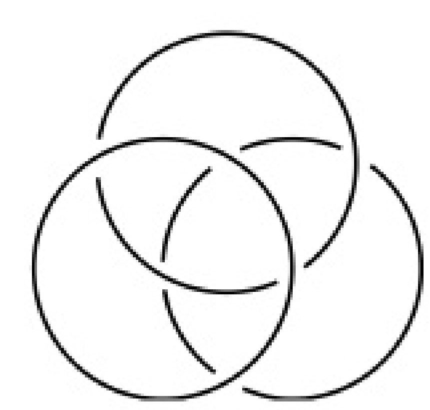
O único desenho que pode ser reproduzido em um modelo tridimensional real é o da alternativa E: um octaedro regular, poliedro convexo cujas faces são triângulos equiláteros congruentes entre si.

3 E

Da figura, temos:



O elo 1 passa "por cima" do elo 3 e "por baixo" do elo 2.
O elo 2 passa "por cima" do elo 1 e "por baixo" do elo 3.
O elo 3 passa "por cima" do elo 2 e "por baixo" do elo 1.
Nessas condições, o esboço que melhor representa os anéis é dado por:



4 C

AULA 7 • ENCAMINHAMENTO

Comente que figuras (planas) semelhantes têm a mesma forma, ou seja, os ângulos correspondentes ("mesma posição nas figuras") têm medidas iguais; as medidas dos lados correspondentes são proporcionais.

Após o estudo dos triângulos semelhantes, podemos estender esse conceito para os polígonos em geral.

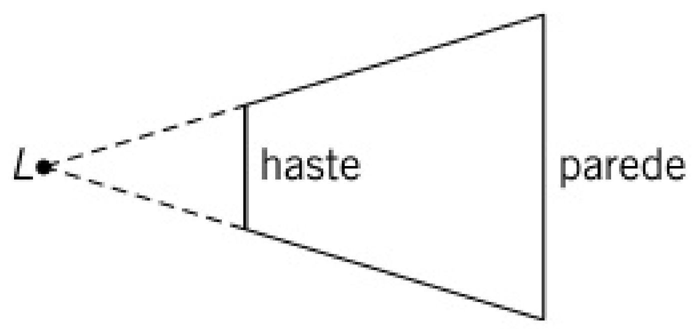
Enfatize que dois polígonos regulares com o mesmo número de lados são semelhantes.

Comente o termo "homólogos" que está no texto teórico.

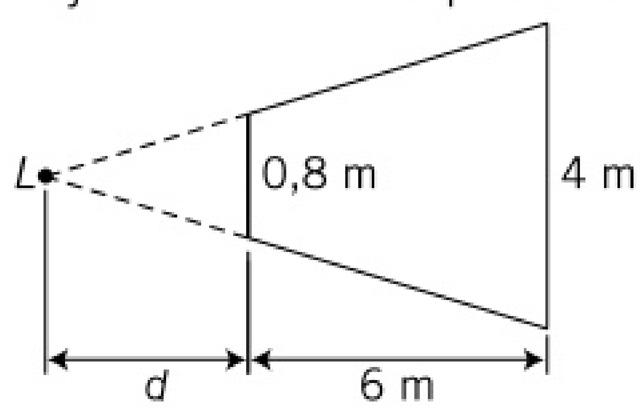
Observe que a razão de semelhança k é a mesma para quaisquer segmentos lineares, como alturas, medianas, bissetrizes, perímetros, etc.; ela só não vale para a razão entre as áreas que, no caso, é k^2.

EXERCÍCIO EXTRA

Uma lâmpada L é colocada na frente de uma haste vertical de 80 cm, projetando uma sombra de 4 m numa parede vertical, como indicado na figura. A distância da haste até a parede é 6 m. Calcule a distância da lâmpada até a haste.



Resolução:
Seja d a distância pedida.

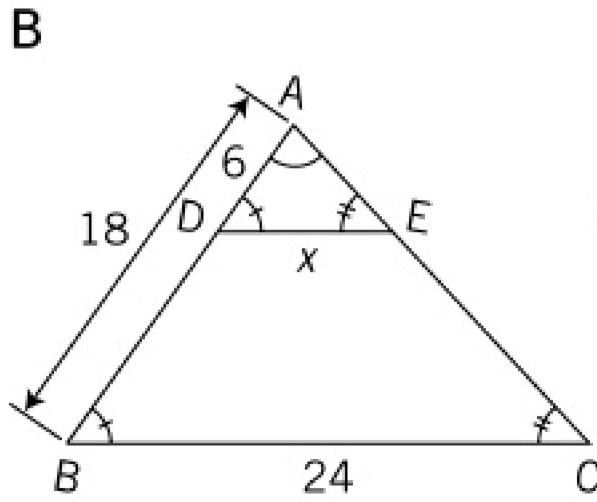


Semelhança de triângulos:
$\frac{d}{d + c} = \frac{0,8}{4} \Rightarrow d = 1,5$

Resposta: 1,5 m

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

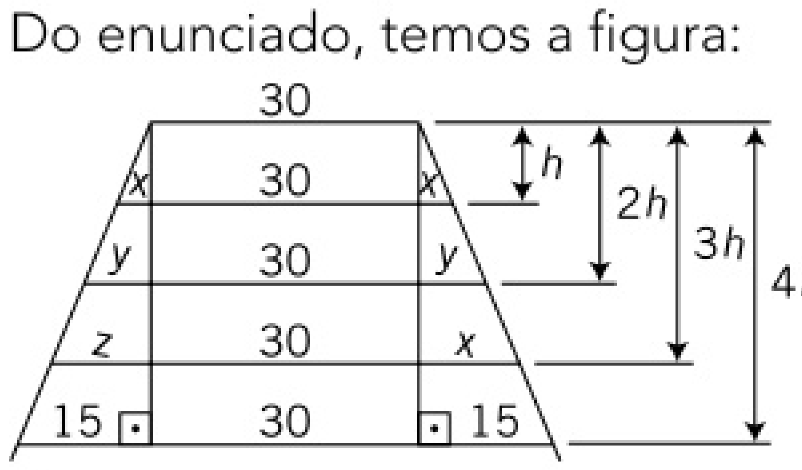
1 B



$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\frac{x}{24} = \frac{6}{18} \Rightarrow x = 8$ cm

2 D
Do enunciado, temos a figura:



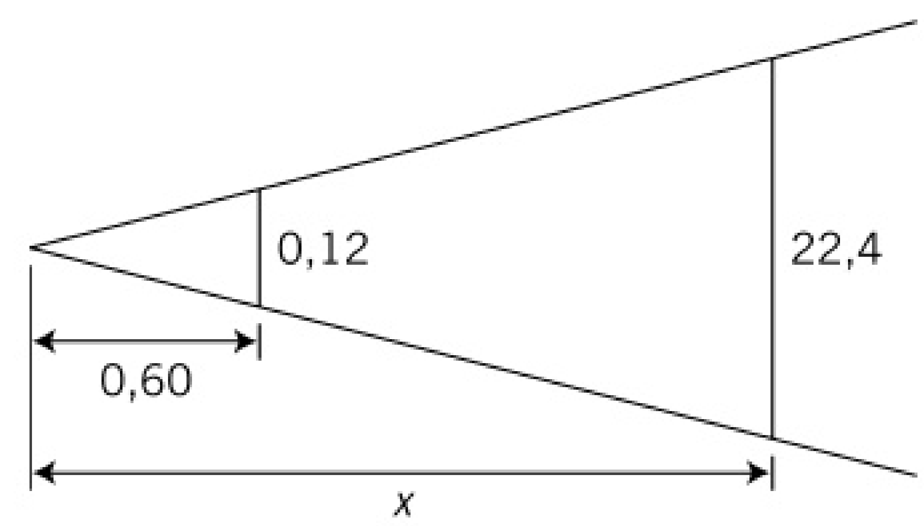
Devemos ter:
$\frac{x}{15} = \frac{h}{4h} \Rightarrow x = \frac{15}{4}$

$\frac{y}{15} = \frac{2h}{4h} \Rightarrow y = \frac{30}{4}$

$\frac{z}{15} = \frac{3h}{4h} \Rightarrow z = \frac{45}{4}$

O comprimento mínimo é:
$2x + 2y + 2z + 2 \cdot 15 + 5 \cdot 30 =$
$= 2 \cdot \frac{15}{4} + 2 \cdot \frac{30}{4} + 2 \cdot \frac{45}{4} + 30 + 150 =$
$= 225$ cm

3 C
Temos:
60 cm = 0,60 m e 12 cm = 0,12 m
8 andares = $8 \cdot 2,80 = 22,4$ m



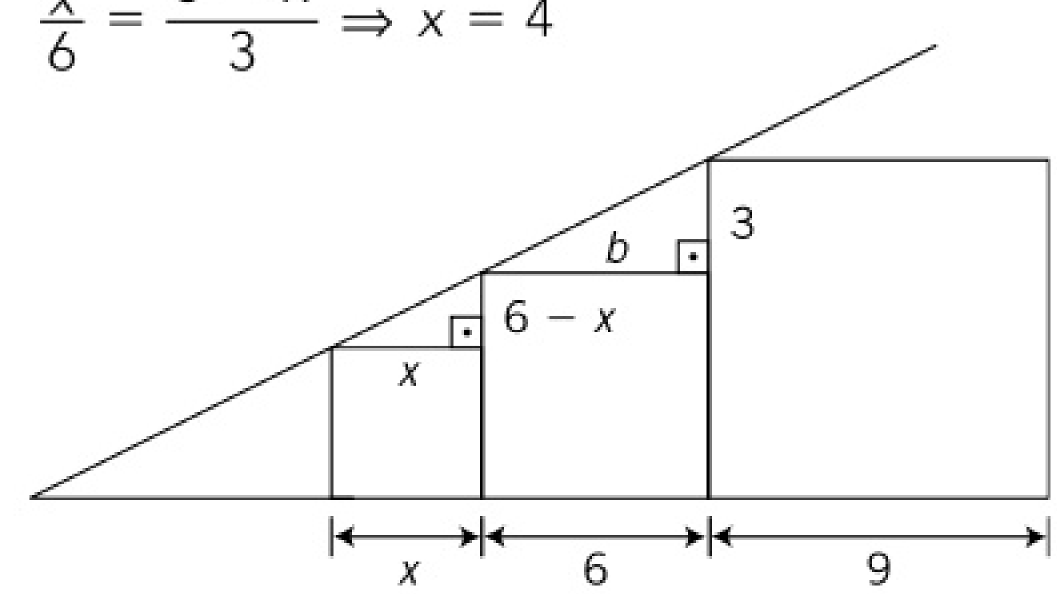
Semelhança: $\frac{x}{0,60} = \frac{22,4}{0 \cdot 12} \Rightarrow x = 112$ m

4 D
Da semelhança de triângulos, temos $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

Como $d = \frac{2}{3}d'$, temos $\frac{b}{a} = \frac{2d'}{3c}$.

5 E

$\frac{x}{6} = \frac{6 - x}{3} \Rightarrow x = 4$



AULA 8 • ENCAMINHAMENTO

Comente que volume de um sólido é um número que mede seu “tamanho” quando comparado com um “tamanho unitário”.

Apresente as fórmulas para o cálculo do volume do cubo, do paralelepípedo retângulo (caixa, bloco retangular) e do cilindro circular reto (ou cilindro de revolução).

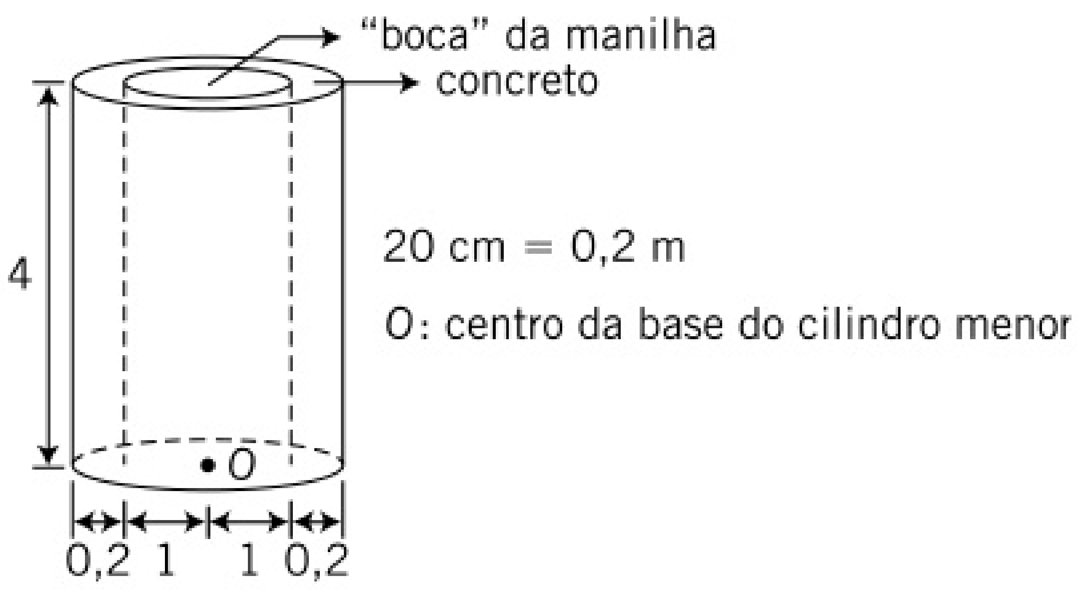
Na seção Em casa são relembrados os volumes do prisma, da pirâmide, do cone circular reto (ou cone de revolução) e da esfera.

Comente com os alunos, se julgar conveniente, que densidade de um corpo é o quociente de sua massa pelo seu volume, já que esse conceito envolve o cálculo de volume.

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 D

Na figura, cotada em metros, está representada a manilha de esgoto, com a forma de um cilindro circular reto.



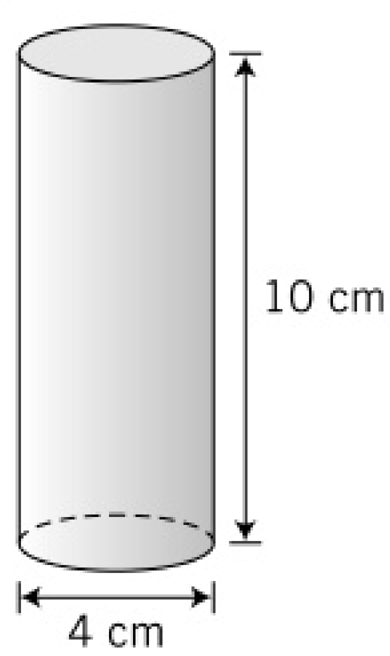
Sendo V o volume de concreto, em metros cúbicos, e fazendo $\pi = 3{,}1$, temos:

$V = 3{,}1 \cdot (1{,}2)^2 \cdot 4 - 3{,}1 \cdot 1^2 \cdot 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 3{,}1 \cdot 4 \cdot [(1{,}2)^2 - 1^2] \Rightarrow V = 5{,}456$

Logo, o preço dessa manilha em reais é igual a $10 \cdot 5{,}456$, ou seja, 54,56.

2 C



O volume V do copo em mL é:

$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 10 \Rightarrow V = 3 \cdot 2^2 \cdot 10 \Rightarrow V = 120$ mL

Vamos admitir que os volumes de açúcar e de água se somem; assim, para obtermos uma parte de açúcar para cinco de água, devemos ter:

volume de açúcar: $\frac{1}{6}V$

volume de água: $\frac{5}{6}V \Rightarrow \frac{5}{6} \cdot 120 = 100$

Ou seja, 100 mL de água.

3 B

Seja R o raio da base do cilindro.

Como o comprimento do barbante é $2\pi R$, então o comprimento da 2ª dobra é $\frac{2\pi R}{4}$, ou seja, $\frac{\pi R}{2}$.

Do enunciado, o volume (V_e) estimado é:

$V_e = \frac{\pi R}{2} \cdot \frac{\pi R}{2} \cdot h \Rightarrow V_e = \frac{\pi}{4} = \pi \cdot R^2 \cdot h$

Pelo cálculo formal, o volume (V_f) do cilindro é:

$V_f = \pi \cdot R^2 \cdot h$

Como $V_f > V_e$, a perda (P) de madeira é dada pela diferença $V_f - V_e$, ou seja,

$P = \pi \cdot R^2 \cdot h \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

Fazendo $\pi = 3{,}14$, temos:

$P = V_f \cdot 0{,}215$

Assim, essa perda é da ordem de 22%.

4 A

Tomando-se o centro do círculo como referência, as distâncias entre as graduações aumentam, conforme o enunciado. Essas graduações são simétricas em relação ao diâmetro horizontal desse círculo. Nessas condições, a alternativa correta é a **a**.

AULA 9 • ENCAMINHAMENTO

Relembre as fórmulas necessárias para os exercícios abordados na aula. Em geral, o Enem fornece em suas provas as fórmulas que poderão ser úteis na resolução dos exercícios.

Comente com os alunos a pequena introdução da aula a respeito de comparação de volumes, mostrando sua grande importância em várias áreas do conhecimento.

Enfatize que dois sólidos podem ter áreas superficiais iguais e, no entanto, seus volumes são diferentes. É o mesmo que dois polígonos terem perímetros iguais e, no entanto, suas áreas serem diferentes.

Na seção Em casa há problemas que envolvem superfícies de sólidos.

EXERCÍCIO EXTRA

Uma esfera constituída de um determinado material, ao ser aquecida, teve sua superfície aumentada em 69%. De quanto foi o aumento do raio?

(Área da esfera: $4\pi R^2$.)

a) 69% b) $\sqrt{69\%}$ c) 13% d) 30% e) 3%

Resolução:
$A = 4\pi r^2$
$A' = 4\pi R^2$
$A' = A + 0,69A \Rightarrow A' = 1,69A \Rightarrow \cancel{4\pi}R^2 = 1,69 \cdot \cancel{4\pi}r^2 \Rightarrow R^2 = 1,69r^2 \Rightarrow R = 1,3r$
Logo, o aumento foi de 30%.
Resposta: D

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 A
Sejam, em cm^3:
V_c: volume de um copinho;
V_a: volume de água a ser utilizado;
V_L: volume da leiteira.
Supondo que a leiteira e os copinhos sejam cilindros circulares retos, do enunciado, temos:
$V_c = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 \Rightarrow V_c = 16\pi$ (I)
$V_a = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 4 \Rightarrow V_a = 160\pi$ (II) $\Rightarrow$
$V_L = \pi \cdot 4^2 \cdot 20 \Rightarrow V_L = 320\pi$ (III)
De (II) e (III), podemos concluir que Dona Maria deverá encher a leiteira até a metade (IV).
De (I) e (III), podemos concluir que o volume da leiteira é igual a 20 vezes o volume do copo (V).
De (IV) e (V), resulta a alternativa **a**.

2 E
O sólido que representa o bebedouro 3 é um semicilindro circular reto, cuja base é um semicírculo de diâmetro 60 cm e a superfície lateral é limitada por um retângulo de altura 100 cm; das figuras apresentadas, a que melhor representa a planificação é aquela que aparece na alternativa **e**.

3 E
A figura mostra a superfície lateral de um cone de revolução.

AULA 10 • ENCAMINHAMENTO

Sugerimos que inicie esta aula relembrando alguns múltiplos e submúltiplos do metro: os submúltiplos decímetro (10^{-1} m), centímetro (10^{-2} m), milímetro (10^{-3} m) e o múltiplo quilômetro (10^3 m).

Lembre-os ainda de que, se 1 m equivale a 10^2 cm, então 1 m^2 equivale a $(10^2)^2$ cm^2, ou seja, 10^4 cm^2 e 1 m^3 equivale a $(10^2)^3$ cm^3, ou seja, 10^6 cm^3.

Além disso, comente que 1 m^3 equivale a 1000 L (um exemplo interessante para se associar isso é a capacidade da caixa de água da casa de alguns deles: a caixa é praticamente um cubo de aresta 1 m e que cabem 1000 L de água).

Leia com os alunos o exemplo resolvido no início da aula.

Resolva os exercícios de aula e oriente a turma para a tarefa.

EXERCÍCIO EXTRA

Um cubo de aresta 1 m está completamente cheio de água. Se dessa água são retirados 100 L, qual é a altura da água remanescente no cubo?
Resposta: 90 cm

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 C

Do enunciado, devem ser utilizados no máximo 180 m de tela para cercar o terreno.

Calculando o perímetro de cada terreno, temos:

Terreno 1 $\rightarrow 2(55) + 2(45) = 110 + 90 = 200$ m

Terreno 2 $\rightarrow 2(55) + 2(55) = 110 + 110 = 220$ m

Terreno 3 $\rightarrow 2(60) + 2(30) = 120 + 60 = 180$ m

Terreno 4 $\rightarrow 2(70) + 2(20) = 140 + 40 = 180$ m

Terreno 5 $\rightarrow 2(95) + 2(85) = 190 + 170 = 360$ m

Pelo perímetro, temos que os terrenos possíveis são o 3 ou o 4.

Calculando a área de cada um:

Terreno 3 $\rightarrow$ Área $= 60 \cdot 30 = 1\,800$ m^2

Terreno 4 $\rightarrow$ Área $= 70 \cdot 20 = 1\,400$ m^2

Logo, o melhor terreno é o de número 3.

2 A

Da fórmula do IMC, sendo h a altura, em metros, temos:

$$20 = \frac{60}{h^2} \Rightarrow h^2 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3} \Rightarrow h = 1{,}7 \text{ m}$$

Da fórmula IAC, sendo $p\%$ a porcentagem de gordura corporal, temos:

$$p = \frac{100}{1{,}7 \cdot \sqrt{1{,}7}} - 18 = \frac{100}{1{,}7 \cdot 1{,}3} - 18 \simeq 27{,}25$$

Como, para atingir a normalidade, ela deve ter IAC de 26%, a redução deve ser:

$27{,}25 - 26 = 1{,}25$ (ponto percentual)

Assim, seu IAC deve ser reduzido em cerca de 1 ponto percentual.

Vamos admitir que reduzir o excesso de gordura em 1% significa reduzir o IAC em 1 ponto percentual.

3 C

O número máximo de paralelepípedos que o caminhão pode carregar em cada viagem é dado por $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$. Logo, o número mínimo de viagens é $\left(\frac{240}{20}\right) = 12$.

4 E

AULA 11 • ENCAMINHAMENTO

Apresente o conceito de escala e deixe claro que ele nada mais é do que uma razão de semelhança. É importante ressaltar que essa razão é sempre do protótipo para o real.

Sempre alerte que, por exemplo, na escala 1:50, as unidades são as mesmas, ou seja, 1 cm corresponde a 50 cm, 1 m corresponde a 50 m, e assim ocorre com todas as outras unidades de medida.

O índice pluviométrico retrata uma média de precipitação em uma determinada região em certo período. Neste contexto, recorde as unidades e suas conversões, como no texto de apoio da aula.

Como a quantidade de exercícios para casa é relativamente extensa, se julgar conveniente, escolha alguns deles para discutir em sala.

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 E

A escala compara medidas na mesma unidade. Nesse caso, é mais fácil compararmos em centímetros.

Sendo x a altura da garrafinha, devemos ter:

$$\frac{x}{32} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 8\,\text{cm}$$

2 E

Seja x o comprimento no mapa.

Devemos ter:

$$\frac{x}{500} = \frac{1}{10\,000} \Rightarrow x = 0{,}05 \text{ m} \Rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

3 D

Sejam:

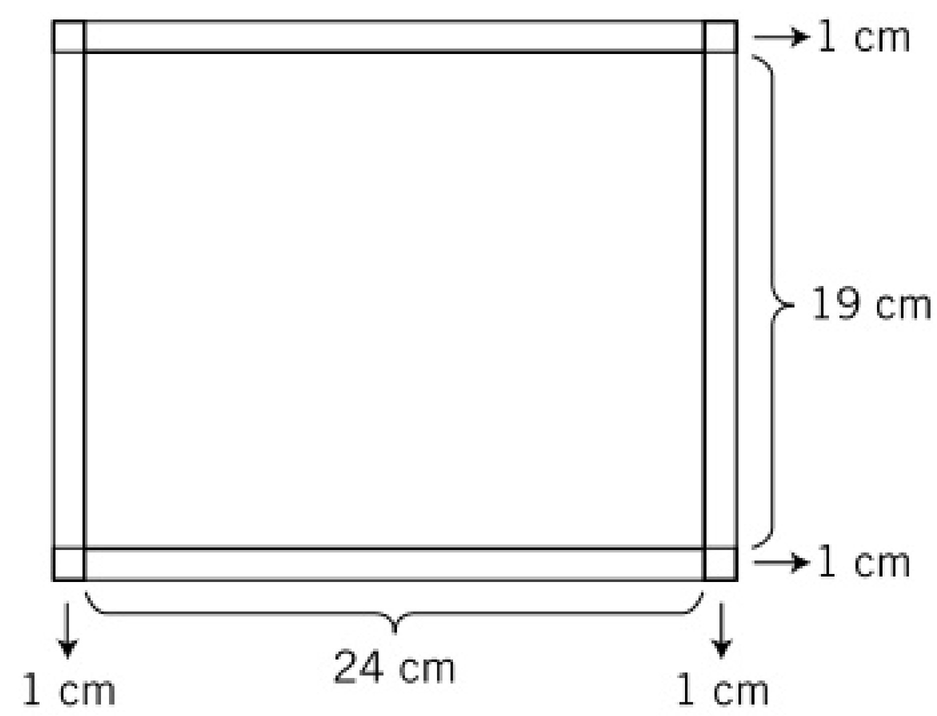
c: medida do comprimento do desenho do avião, em cm;

ℓ: medida da largura do desenho do avião, em cm.

Assim, sabendo que 1 m = 100 cm, do enunciado, temos:

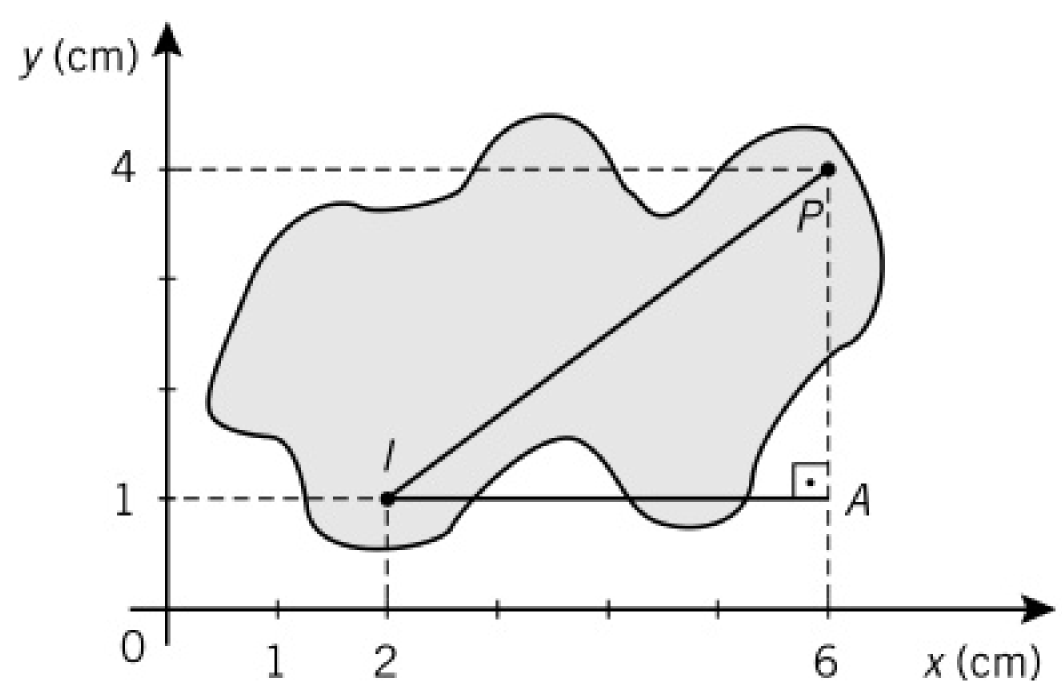
$$\frac{c}{3\,600} = \frac{\ell}{2\,850} = \frac{1}{150} \Rightarrow c = 24 \text{ cm e } \ell = 19 \text{ cm}$$

Portanto, nessas condições, e avaliando a necessidade da margem, temos a figura, que representa a folha retangular onde será desenhado o avião:



Logo, as dimensões mínimas pedidas são 21 cm × 26 cm.

4 C



$(IP)^2 = (IA)^2 + (AP)^2 \Rightarrow (IP)^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow IP = 5$ cm

Sendo x a distância pedida, devemos ter:

$$\frac{5}{x} = \frac{1}{20\,000} \Rightarrow x = 100\,000 \text{ cm} \Rightarrow x = 1 \text{ km}$$

5 E

Sendo E a razão pedida, do enunciado, temos:

$$E = \frac{2{,}1 \text{ cm}}{42 \text{ m}} = \frac{2{,}1 \text{ cm}}{4\,200 \text{ cm}}$$

Logo:

$$E = \frac{21}{42\,000} \Rightarrow E = \frac{1}{2\,000} \Rightarrow E = 1 : 2\,000$$

6 C

Seja x a medida pedida. Devemos ter:

$$\frac{x}{24} = \frac{50}{1} \Rightarrow x = 1\,200 \text{ cm} \Rightarrow x = 12 \text{ m}$$

7 A

$1 \text{ km}^2 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$

Com 1 mm de precipitação, temos 1 000 000 litros. Logo, com 80 mm, temos: 80 000 000 litros, ou seja, 80 000 m^3.

8 B

$4\,500 \text{ m}^3 = 4\,500\,000$ litros

Se 50 mm correspondem a 4 500 000 litros, 1 mm corresponde a $\frac{4\,500\,000}{50} = 90\,000$ litros.

Portanto, a área da região é 90 000 m^2.

AULA 12 • ENCAMINHAMENTO

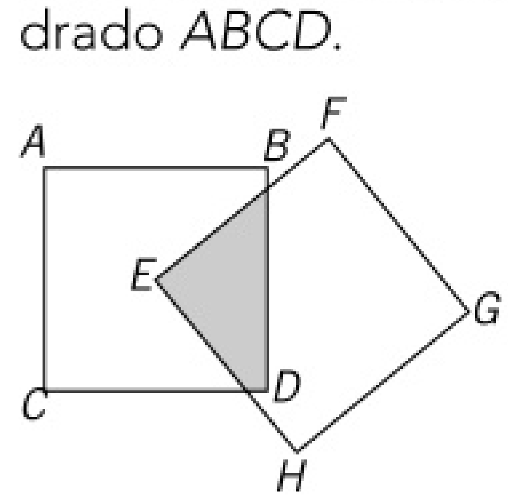
Conceitue área de uma figura plana, estabelecendo a noção de superfície e tamanho.

Enfatize, utilizando exemplos, que duas figuras podem ter perímetros iguais e áreas diferentes. Se julgar pertinente, proponha uma atividade que estimule os alunos a chegarem a essa conclusão.

Relembre os cálculos das áreas das figuras que aparecem nessa aula e retome o cálculo da área de um polígono por meio da decomposição em triângulos (decomponha o polígono em triângulos e, posteriormente, some as respectivas áreas).

EXERCÍCIOS EXTRAS

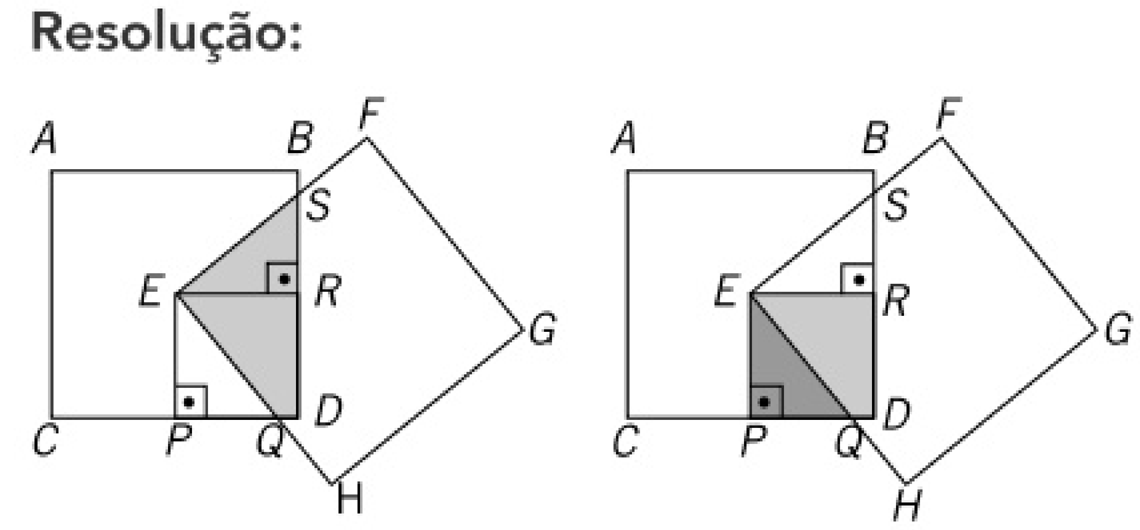
1 Na figura, os quadrados têm lado 10 cm e o vértice E do quadrado $EFGH$ está no centro do quadrado $ABCD$.



A área da região sombreada, em cm^2, é:

a) 5.
b) 10.
c) 15.
d) 20.
e) 25.

Resolução:

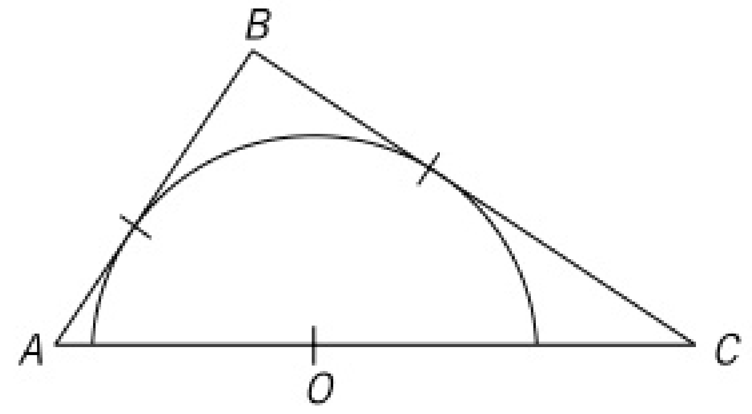


Note que os triângulos EPQ e ERS são congruentes e, portanto, têm a mesma área.

Logo, a área do quadrilátero $EQDS$ é igual à área do quadrado $EPDR$, que é igual a $(5 \text{ cm})^2 = 25 \text{ cm}^2$.

Resposta: E

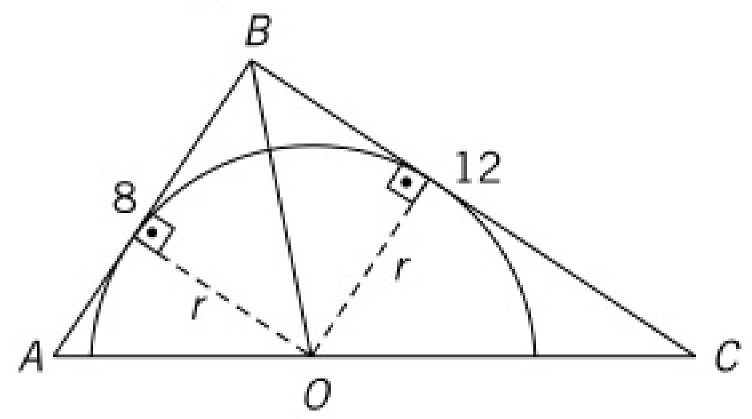
2 Na figura, a semicircunferência tem centro O e a área do triângulo é 50.



Se $AB = 8$ e $BC = 12$, calcule o raio da semicircunferência.

a) 3 b) 4,5 c) 5 d) 6,5 e) 7

Resolução:



$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot r = 50 \Rightarrow 4r + 6r = 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10r = 50 \Rightarrow r = 5$

Resposta: C

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 E

A área de um campo de futebol, em m², é dada por $90 \cdot 120 = 10\,800$.

Do enunciado, a área aproximada do Pantanal é $150\,355$ km² $= 150\,355 \cdot 10^6$ m². Assim, o número de campos de futebol pedido é igual a $\frac{150\,355 \cdot 10^6}{10\,800}$, ou seja, $13{,}9 \cdot 10^6 \simeq 14 \cdot 10^6$.

2 B

• 8 quadros (25 cm × 50 cm):

Área $= 25 \times 50 \times 8 = 10\,000$ cm² $= 1$ m²

Moldura $= (50 \times 2 + 25 \times 2) \times 8 = 1\,200$ cm $= 12$ m

Custo $= 20 \times 1 + 15 \times 12 + 10 = 210{,}00$ reais

• 8 quadros (50 cm × 100 cm):

Área $= 50 \times 100 \times 8 = 40\,000$ cm² $= 4$ m²

Moldura $= (50 \times 2 + 100 \times 2) \times 8 = 2\,400$ cm $= 24$ m

Custo $= 20 \times 4 + 15 \times 24 + 10 = 450{,}00$ reais

Portanto, o valor da segunda encomenda é maior que o da primeira, mas não o dobro.

3 B

Do enunciado temos as figuras a seguir:

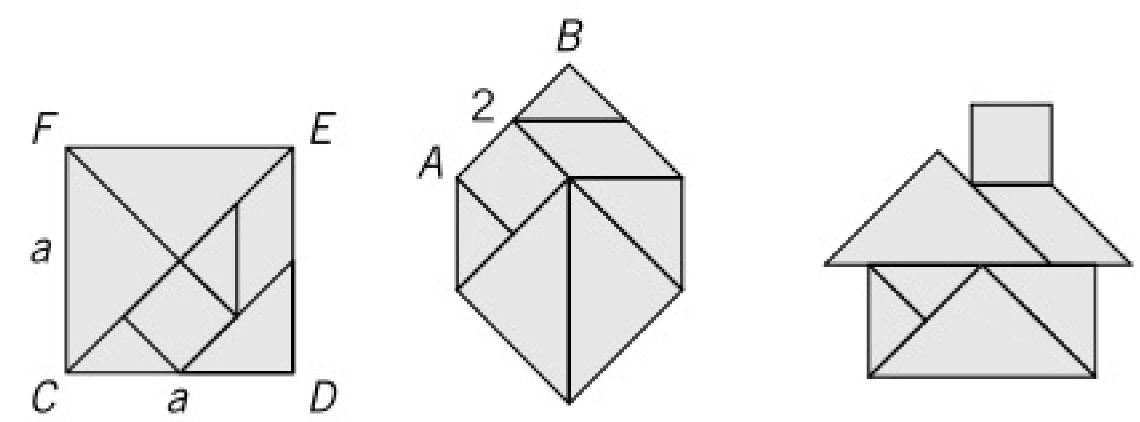


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Então:

$CE = 2 \cdot (AB) \Rightarrow CE = 4 = DF$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CDF, temos:

$a^2 + a^2 = 4^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

Como as figuras 1, 2 e 3 têm áreas iguais, a área pedida, em cm², é igual a $\left(2\sqrt{2}\right)^2$, ou seja, 8.

4 B

Do enunciado, temos que a densidade demográfica é de:

$$\frac{20\,0\cancel{00}\,\cancel{000}}{8\cancel{00}\,\cancel{000}} = 25 \text{ hab./km}^2$$

AULA 13 • ENCAMINHAMENTO

O objetivo desta aula é que o aluno possa avaliar se um resultado dado é consistente com os demais dados do problema. Algumas vezes, para realizar essa avaliação é necessário que o aluno efetue alguns cálculos para comparar com o resultado proposto pelo problema.

Sugerimos que comece a aula com o seguinte exemplo:

Das alternativas abaixo, a única que pode representar a altura de um elefante adulto é:

a) 12 cm. b) 102 cm. c) 3,5 m. d) 17,9 m. e) 52,4 m.

Provavelmente, os alunos responderão a alternativa **c**, alegando que as outras são “absurdas”. Comente que isso só foi possível porque eles têm como comparar o resultado solicitado com alguma referência que já possuem da situação. Se essa referência não existe, a comparação pode ser bem difícil:

Das alternativas abaixo, a única que pode representar o raio do planeta Mercúrio é:

a) 1 000 m. b) 10 000 m. c) 3 000 000 m. d) 1 000 km. e) 3 000 km.

Talvez, nem todos os alunos saibam responder com prontidão (a resposta certa é a alternativa **e**; o raio equatorial de Mercúrio é 2 439 km, aproximadamente).

Mostre que, pelos exemplos da aula, será possível analisar uma medição para obter um argumento consistente. Comente sobre o exercício resolvido no início da aula e, com eles, faça os exercícios de aula.

EXERCÍCIO EXTRA

Considere um barbante tão grande que contorne perfeitamente (sem folga) a linha do equador do planeta Terra. Corta-se esse barbante e, esticando-o até deixá-lo numa reta, acrescenta-se 1 m a ele. Enrolando-o para que forme novamente uma circunferência, nota-se que existe uma "folga" entre essa circunferência e a linha do equador. Por essa folga poderia passar:

a) um cubo de aresta 10 cm.
b) um cubo de aresta 3 m.
c) um cubo de aresta 200 m.
d) um cubo de aresta 1 km.
e) qualquer cubo.

Resposta: A $\left(\text{repare que a diferença entre os raios é constante, igual a } \frac{1}{2\pi} = 15 \text{ cm}\right)$.

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 E

Sem furo, a área da fatia é, no máximo, igual a 9π cm^2.

Com um furo de π cm^2, a área da fatia é, no máximo, igual a 8π cm^2, que é oito vezes a área da secção transversal do cilindro.

2 C

O volume do cilindro interno é dado por $\pi R^2 h_1$.

O volume da parte externa da fonte é dado por:

$V_{ext.} = \pi R^2 h_2 - \pi r^2 h_2$

Como $R^2 = 2r^2$ e $h_2 = \frac{h_1}{3}$, temos:

$$V_{ext.} = 2\pi r^2 \frac{h_1}{3} - \pi r^2 \frac{h_1}{3} \Rightarrow V_{ext.} = \pi r^2 \frac{h_1}{3}$$

Para determinarmos o tempo necessário para encher a fonte e o cilindro, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \pi r^2 h_1 \text{ ———— } 30 \text{ minutos} \\ \pi r^2 \frac{h_1}{3} \text{ ———— } x \text{ minutos} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{30 \cdot \pi r^2 \frac{h_1}{3}}{\pi r^2 h_1} = \frac{10 \cdot \pi r^2 h_1}{\pi r^2 h_1} = 10$$

Como o exercício pede o tempo para encher a fonte somado ao tempo para encher o cilindro, temos:

$30 + 10 = 40$ minutos

AULA 14 • ENCAMINHAMENTO

Conceitue circunferência e apresente a fórmula para o comprimento de circunferência.

Enfatize que uma reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência (ponto de contato). Nos exercícios envolvendo polias e correias é fundamental que isso tenha sido compreendido.

Conceitue corda observando que o diâmetro é uma corda que passa pelo centro da circunferência.

Se julgar oportuno, comente que, se duas circunferências são tangentes entre si, os centros e o ponto de tangência estão alinhados (colineares).

EXERCÍCIO EXTRA

Num trator há rodas pequenas e rodas grandes. As pequenas têm raio de 30 cm e as grandes, raio de 75 cm. Se num percurso cada roda pequena deu 3 750 voltas, quantas voltas deu cada roda grande?

a) 1 250 b) 1 400 c) 1 450 d) 1 500 e) 1 750

Resolução:

Como o comprimento total percorrido pelas rodas é o mesmo, sendo n o número de voltas pedido, devemos ter:

$n \cdot 2 \cdot \pi \cdot 75 = 3750 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 30 \Rightarrow n = 1500$

Resposta: D

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 C

$C = 2 \cdot \pi \cdot 10 \Rightarrow C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 62{,}8$ cm

2 C

$2\pi R = 24\pi \Rightarrow 2R = 24$ cm

3 D

$50 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 30 = 50 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 30 = 9\,420 \text{ m} = 9{,}42 \text{ km}$

4 E

Sendo n o número de voltas, temos:

$n \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}3 = 1\,884 \Rightarrow n = 1\,000$

5 B

Raio $r \rightarrow C = 2\pi r$

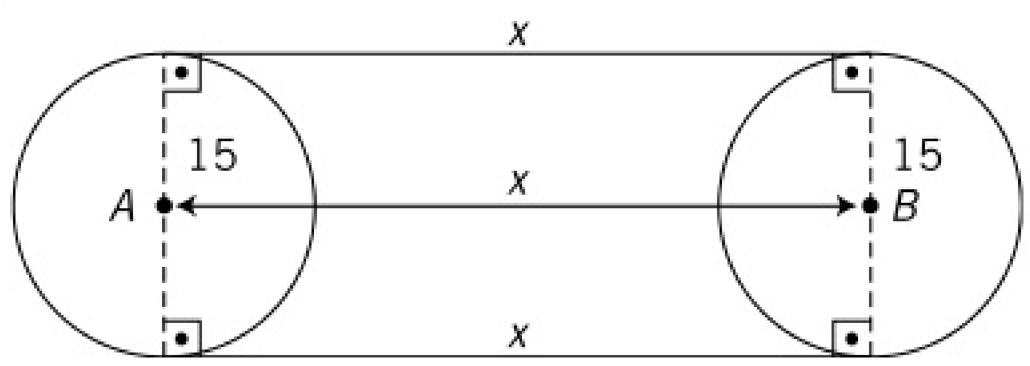
Raio $r' \rightarrow C' = 2\pi r'$

$C' = C + 1 \rightarrow 2\pi r' = 2\pi r + 1$

Dividindo por 2π: $r' = r + \dfrac{1}{2\pi}$

Logo, aumentará $\dfrac{1}{2\pi}$ m.

6 B



A distância solicitada é x.

Então:

$$\frac{2\pi \cdot 15}{2} + \frac{2\pi \cdot 15}{2} + x + x = 164{,}2$$

$$3{,}14 \cdot 15 + 3{,}14 \cdot 15 + 2x = 164{,}2 \Rightarrow x = 35 \text{ cm}$$

7 B

$$\begin{array}{lcl} 2 \cdot \pi \cdot 12 & \text{———} & 360° \\ x & \text{———} & 45° \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 360 \cdot x = 45 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 12 \Rightarrow x = 3\pi$ cm

8 C

Temos que: 2 km = 2 000 m

Então:

$$\begin{array}{lcl} 2\pi r & \text{———} & 360° \\ 2000 & \text{———} & 300° \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2\pi r \cdot 300 = 2000 \cdot 360 \Rightarrow r = \dfrac{2000 \cdot 360}{2 \cdot \pi \cdot 300}$

Com $\pi = 3$, temos $r = 382$ m.

AULA 15 • ENCAMINHAMENTO

A estratégia nessa aula é propiciar ao aluno a identificação de relação de dependência entre grandezas (GDP e GIP), preparando-o para a aula seguinte, na qual irá resolver situação-problema envolvendo variação de grandezas.

EXERCÍCIOS EXTRAS

1 (PUC-RJ) De acordo com a Lei de Boyle, para um determinado gás $pV = 1000$, em que p é a pressão (kg/cm²), e V é o volume (cm³). Se V pode variar entre 100 e 200, p pode variar entre:

a) 2 e 5.
b) 3 e 4.
c) 10 e 20.
d) 5 e 10.
e) 2 e 10.

Resposta: D

2 (UEL-PR) Três grandezas X, Y e Z são tais que X é diretamente proporcional a Y e inversamente proporcional a Z. Quando X vale $\frac{2}{3}$ tem-se Y valendo $\frac{3}{5}$ e Z valendo $\frac{9}{5}$. Assim, se Y vale $\frac{7}{8}$ e Z vale $\frac{1}{4}$, X vale:

a) $\frac{1}{7}$.
b) $\frac{2}{7}$.
c) $\frac{5}{7}$.
d) $\frac{7}{2}$.
e) 7.

Resposta: E

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 C

No gráfico apresentado, podemos observar que, na transformação que ocorre de 3 para 4, a pressão permanece constante, caracterizando uma transformação isobárica.

2 A

Como a temperatura permanece constante, temos uma transformação isotérmica, sendo o produto $P \cdot V$ = constante, como caracterizado pela hipérbole do gráfico da alternativa **a**.

3 B

Sendo $V_1 = V$; $V_2 = V + \frac{3}{4}V = \frac{7}{4}V$ e $T_1 = T$, pela Lei de Charles, temos:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \frac{V}{T} = \frac{\frac{7}{4}V}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{7}{4}T$$

Ou seja, a temperatura aumentará na proporção de $\frac{7}{4}$.

4 C

Das figuras, temos:

(1) Mantendo-se a secção transversal constante e dobrando-se o comprimento (ℓ) do fio, a resistência (R) dobra. Assim, a proporcionalidade entre ℓ e R é direta.

(2) Mantendo-se o comprimento constante e dobrando-se a área da secção transversal (A), a resistência (R) fica dividida por dois. Assim, a proporcionalidade entre A e R é inversa.

(3) Mantendo-se a resistência constante e dobrando-se o comprimento (ℓ) do fio, a área da secção transversal (A) dobra. Assim, a proporcionalidade entre ℓ e A é direta.

De (1), (2) e (3), concluímos que a alternativa correta é **c**.

5 B

Como F é diretamente proporcional ao produto de L pelo quadrado de H, temos: $F = k \cdot L \cdot H^2$.

Considerando os dados da tabela e fazendo as devidas substituições:

$2000 = k \cdot 3 \cdot 16 \Rightarrow k = \frac{125}{3}$

$3000 = \frac{125}{3} \cdot 2 \cdot x^2 \Rightarrow x = 6$

6 D

Como y é inversamente proporcional ao quadrado de x, temos: $y = \frac{k}{x^2}$.

Dos dados, $15 = \frac{k}{3^2}$, logo $k = 135$.

Assim, para $x = 4$, devemos ter $y = \frac{135}{4^2} = \frac{135}{16}$.

AULA 16 • ENCAMINHAMENTO

A estratégia nessa aula é o uso das GDP e GIP na resolução de exercícios que envolvem regra de três, tanto direta como inversa.

Muitas vezes, os alunos confundem o tipo de regra de três a ser usado (tratam grandezas diretas como inversa e vice-versa) e, assim, acabam errando os exercícios.

É necessário dar uma atenção mais ampla para este assunto, utilizando exemplos da seção Em classe para esclarecer a diferença entre os dois casos.

EXERCÍCIOS EXTRAS

1 Santos Dumont projetou o 14-Bis com um único lugar, no qual o piloto ficava em pé. Atualmente, existem aviões que transportam, além da tripulação, centenas de passageiros acomodados em assentos.

Uma companhia aérea encomendou um avião para viagens de longa distância e solicitou que o projeto da cabina de passageiros apresentasse três classes de assentos: primeira, executiva e econômica. As áreas ocupadas por esses tipos de assentos devem atender o seguinte critério: dois assentos da classe econômica equivalem a um assento da executiva e cinco assentos da classe executiva correspondem a quatro assentos da primeira classe. Nessas condições, quinze assentos da classe econômica equivalem a N assentos da primeira classe. O valor de N é:

a) 5.
b) 6.
c) 9.
d) 10.
e) 12.

Resposta: B

2 Um avião bimotor com velocidade de 450 km/h efetua a viagem entre São Paulo e Brasília em 2 horas. Em quanto tempo, em minutos, um avião a jato com velocidade igual a 1 200 km/h faria a mesma viagem?

Resposta: 45 minutos

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 C

Sendo x a quantidade procurada, temos:

$$\begin{array}{lcl} CO & & O_2 \\ 56\text{ g} & \text{———} & 32\text{ g} \\ x & \text{———} & 640\text{ g} \end{array} \Rightarrow x = 1120\text{ g} = 1{,}12\text{ kg}$$

2 E

Sendo x a quantidade procurada, temos:

$$\begin{array}{lcl} CO & & O_2 \\ 2\text{ mols} & \text{———} & 6 \cdot 10^{23}\text{ g} \\ 12\text{ mols} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 3{,}6 \cdot 10^{24}$ moléculas de oxigênio

3 D

Sendo x a quantidade procurada, temos:

$$\begin{array}{lcl} O_2 & & CO_2 \\ 32\text{ g} & \text{———} & 44{,}8\text{ L} \\ 1\,280\text{ g} & \text{———} & x \end{array} \Rightarrow x = 1\,792\text{ L}$$

4 E

Para 30 convidados, devemos ter:

- Carne: $0,25 \cdot 30 = 7,5$ kg.
- Arroz:
  $\left.\begin{array}{l} 1 \text{ copo} \text{ ——— } 4 \text{ pessoas} \\ x \text{ copos} \text{ ——— } 30 \text{ pessoas} \end{array}\right. \Rightarrow x = 7,5$
  ou seja, 7 copos americanos e meio de arroz.
- Farofa: $4 \times 30 = 120$ colheres de sopa.
- Garrafas de vinho:
  $\left.\begin{array}{l} 1 \text{ garrafa} \text{ ——— } 6 \text{ pessoas} \\ y \text{ garrafas} \text{ ——— } 30 \text{ pessoas} \end{array}\right. \Rightarrow y = 5$
  ou seja, 5 garrafas de vinho.
- Garrafas de cerveja:
  $\left.\begin{array}{l} 1 \text{ garrafa} \text{ ——— } 2 \text{ pessoas} \\ z \text{ garrafas} \text{ ——— } 30 \text{ pessoas} \end{array}\right. \Rightarrow z = 15$
  ou seja, 15 garrafas de cerveja.
- Garrafas de espumante:
  $\left.\begin{array}{l} 1 \text{ garrafa} \text{ ——— } 3 \text{ pessoas} \\ w \text{ garrafas} \text{ ——— } 30 \text{ pessoas} \end{array}\right. \Rightarrow w = 10$
  ou seja, 10 garrafas de espumante.

Assim, o anfitrião deverá dispor de 7,5 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 garrafas de cerveja e 10 garrafas de espumante.

5 D

O tempo total, em horas, para dois banhos diários durante sete dias será dado por:

$$2 \cdot 7 \cdot \frac{10}{60} = \frac{7}{3} \text{ h}$$

Logo, o consumo C, em kW, é:

$$\begin{array}{lcl} \text{Consumo} & & \text{Tempo} \\ 4,8 & \text{———} & 1 \\ C & \text{———} & \frac{7}{3} \end{array} \Rightarrow C = 11,2$$

6 C

O número x de internautas que responderam não será dado por:

$$\begin{array}{lcl} \text{Internautas} & & \% \\ 279 & \text{———} & 100 \\ x & \text{———} & 25 \end{array} \Rightarrow x = 69,75$$

Logo, mais de 50 e menos de 75 internautas.

AULA 17 • ENCAMINHAMENTO

O assunto porcentagem é abordado da maneira vasta por, praticamente, todos os vestibulares. Na maioria das vezes é possível solucionar os exercícios por meio da regra de três. Entretanto, algumas resoluções são facilitadas quando o conceito de fator de correção é empregado.

Se julgar necessário, elabore uma tabela que contenha as porcentagens e deixe os alunos preencherem os respectivos fatores, tanto para aumento como para desconto.

Aumento:

Porcentagem	8% (0,08)	19% (0,19)	50% (0,50)	100% (1,00)	119% (1,19)
Fator (F)	1,08	1,19	1,50	2,00	2,19

Desconto:

Porcentagem	8% (0,08)	19% (0,19)	50% (0,50)	90% (0,90)	100% (1,00)
Fator (F)	0,92	0,81	0,50	0,10	0,00

Reforce o fato de que o fator F pode ser também um produto de fatores de correção; esse produto irá caracterizar aumento quando $F > 1$ e desconto quando $0 \leqslant F < 1$.

Exemplos:

1. Dois aumentos sucessivos de 10% e 20% corresponderão a um único aumento de 32%, pois 1,10 multiplicado por 1,20 resultará em 1,32, caracterizando um aumento acumulado de 32%.
2. Dois descontos sucessivos de 10% e 20% corresponderão a um único desconto de 28%, pois 0,90 multiplicado por 0,80 resultará em 0,72, caracterizando um desconto acumulado de 28%.

EXERCÍCIOS EXTRAS

1 (Fuvest-SP) Aumentando-se os lados a e b de um retângulo de 15% e 20% respectivamente, a área do retângulo é aumentada de:
a) 35%.
b) 30%.
c) 3,5%.
d) 3,8%.
e) 38%.
Resposta: E

2 (PUC-SP) Descontos sucessivos de 20% e 30% são equivalentes a um único desconto de:
a) 25%.
b) 26%.
c) 44%.
d) 45%.
e) 50%.
Resposta: C

3 (Enem)

No mundial de 2007, o americano Bernard Lagat, usando pela primeira vez uma sapatilha 34% mais leve do que a média, conquistou o ouro na corrida de 1 500 metros com o tempo de 3,58 minutos. No ano anterior, 2006, ele havia ganhado medalha de ouro com um tempo de 3,65 minutos nos mesmos 1 500 metros.

Veja. São Paulo: Abril, ago. 2008. Adaptado.

Sendo assim, a velocidade média do atleta aumentou em aproximadamente:
a) 1,05%. b) 2,00%. c) 4,11%. d) 4,19%. e) 7,00%.

Resolução:
A velocidade média, em m/min, do atleta em 2007 é dada por $v_{2007} = \dfrac{1500}{3{,}58}$.
A velocidade média, em m/min, do atleta em 2006 é dada por $v_{2006} = \dfrac{1500}{3{,}65}$.

$$\frac{v_{2007}}{v_{2006}} = \frac{3{,}65}{3{,}58} \simeq 1{,}01955$$

Portanto, v_{2007} é aproximadamente 1,96% maior que v_{2006}.
A resposta mais próxima é dada pela alternativa **b**.

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 C
Logo no início da matéria da *Veja* é afirmado que 33% dos brasileiros não têm qualquer tipo de investimento, assim temos:

$$\frac{33}{100} \cdot 192\,000\,000 = 63\,360\,000$$

2 A
Na matéria da *Veja* é afirmado que 29% têm imóveis. No que diz respeito ao otimismo, 22% dos aplicadores brasileiros declararam-se extremamente otimistas, 23% muito otimistas, totalizando 45%. Assim, temos:

$$\frac{45}{100} \cdot 192\,000\,000 = 86\,400\,000$$

$$\frac{29}{100} \cdot 192\,000\,000 = 55\,680\,000$$

Fazendo $\dfrac{86\,400\,000}{55\,680\,000} = 1{,}5517$, ou seja, o número de potenciais investidores em previdência privada é aproximadamente 55% maior que o número dos que investem em imóveis.

3 E

$$C \cdot \left[\frac{(1+0{,}008)^{120} - 1}{0{,}008}\right] =$$

$$= 2\,600 \cdot \left[\frac{(1+0{,}008)^{120} - 1}{(1+0{,}008)^{120} \cdot 0{,}008}\right] \Rightarrow C \cdot \frac{2\,600}{1+0{,}008^{120}}$$

Como $1{,}008^{240} = [(1{,}008)^{120}]^2 = 6{,}76$, portanto $1{,}008^{120} = 2{,}6$.

Assim:

$$C = \frac{2\,600}{2{,}6} = 1000$$

4 C
Calculando as rentabilidades anuais de cada investimento, temos:

Investimento	Fator de correção	Rentabilidade
A	$1{,}03^{12} = 1{,}426$	42,6%
B	$1{,}36^{1} = 1{,}36$	36%
C	$1{,}18^{2} = 1{,}3924$	39,24%

Logo, o investimento de maior rentabilidade anual é o *C*.

5 D
Sendo T o total de consumo da mistura, em milhões de litros, temos:

$$925 = 0{,}04T \Rightarrow T = \frac{925}{0{,}04}$$

Caso a mistura tivesse 3% do combustível, o consumo de biodiesel, em milhões de litros, seria:

$0{,}03 \cdot T = 0{,}03 \cdot \dfrac{924}{0{,}04} = 693{,}75$, ou seja, 693,75 milhões de litros.

AULA 18 • ENCAMINHAMENTO

O assunto razão e proporção é bastante requisitado em provas do Enem, sobretudo no uso de escalas para representar situações de planificações e intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Uma das estratégias para dar início ao assunto é apresentar o conceito de razão com a ideia de comparação (situação do primeiro exercício) e, em seguida, comentar a razão inversa.

No exercício 2 mostre que a sequência (x, 3, y, 2) forma uma proporção e, assim, faça as duas razões e iguale-as.

EXERCÍCIO EXTRA

Sabe-se que o raio do planeta é de aproximadamente 6400 km e que a linha do equador forma uma circunferência. Sabendo que o comprimento de uma circunferência é dado por $2\pi r$, em que r corresponde ao raio. Qual das escalas a seguir é a mais apropriada para planificar um mapa-múndi e representá-lo numa folha de formato A4 (210 mm × 297 mm), sendo que o comprimento da linha do equador deve corresponder à maior medida do papel?

a) 1 : 1500
b) 1 : 15000
c) 1 : 150000
d) 1 : 15000000
e) 1 : 150000000

Resolução:

Independentemente do tipo de projeção a ser usada, a volta completa corresponde à linha do Equador:

$2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6400 = 40192 \text{ km} =$
$= 40192000 \text{ mm}$

Como a maior medida do papel corresponderá à medida do comprimento da linha do equador, temos:

$$\frac{297}{40192000000} = \frac{1}{135326599}$$

Das escalas apresentadas, a única possível é a representada na alternativa **e**, 1 : 150000000.

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 E

Temos, do enunciado, que sendo a e b as partes, com $b < a$, o segmento de reta AB mede $a + b$ e, portanto, $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.

2 D

Sendo a a medida da base e b a medida da altura, do enunciado temos que $\frac{a}{b} = 1{,}62$, e sendo x a medida da diagonal, pelo Teorema de Pitágoras, temos que $x^2 = a^2 + b^2$. Assim:

$$192 = (1{,}62b)^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{19^2}{3{,}62}} = \frac{19}{1{,}9} = 10$$

$10a = 16{,}2$

Sendo a a área dada por $a \cdot b$, o monitor terá área de aproximadamente 162 polegadas quadradas.

3 B

Supondo que o maior lado do retângulo tem medida a e que o menor lado tem medida b, o semiperímetro será dado por $a + b$, assim temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

A razão entre a medida do maior lado e do semiperímetro será:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{\frac{a+b}{a}} = \frac{1}{1+\frac{b}{a}} = \frac{1}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} =$$

$$= \frac{2{,}24-1}{2} = 0{,}62$$

4 E

Como 2000 km correspondem a 200000000 cm, temos:

$$\frac{8 \text{ cm}}{200000000 \text{ cm}} = \frac{1}{25000000}$$

Assim, a escala apresentada foi de 1 : 25000000.

5 C

A partir da escala 1 : 250, temos que 1 cm na maquete corresponde a 250 cm = 2,5 m na quadra. Assim, sendo x e y o comprimento e a largura da quadra na maquete, temos:

$$\frac{x}{28} = \frac{1}{2{,}5} \Rightarrow x = 11{,}2 \text{ cm}$$

$$\frac{y}{12} = \frac{1}{2{,}5} \Rightarrow y = 4{,}8 \text{ cm}$$

AULA 19 • ENCAMINHAMENTO

Inicie esta aula falando sobre relações de dependências. Mostre que a idade do aluno depende do aluno escolhido, assim como o preço a ser pago numa corrida de táxi depende, entre outras coisas, da distância percorrida.

Para estudar essas relações, foi necessário o estudo de relações em que para cada valor dado (que podemos chamar de x) só existe um único valor dependente dele (que podemos chamar de y ou $f(x)$). Assim, uma função é uma relação de dependência.

Mostre que essa dependência pode ser modelada por meio de várias expressões algébricas. Nesta aula, veremos duas delas: a função do 1º grau e a função do 2º grau.

Conceitue função do 1º grau como o conjunto de pontos (x, y) tais que $y = ax + b$, para qualquer a e b, números reais. O gráfico dessa função é uma reta cujo coeficiente angular vale a.

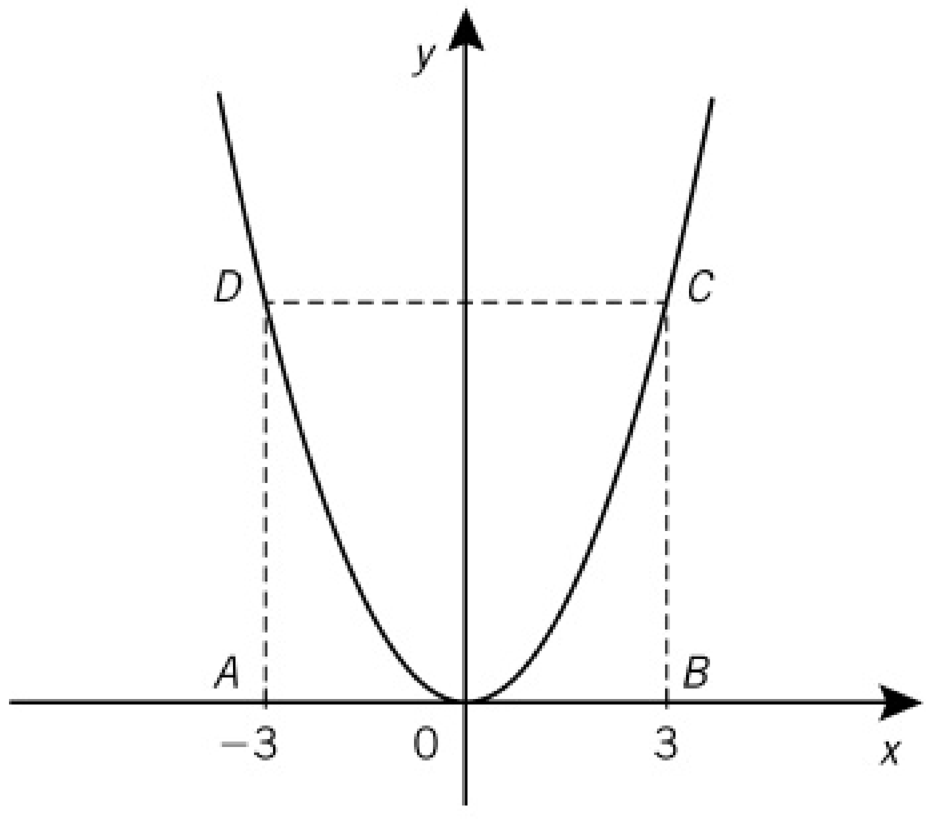
Conceitue função do 2º grau como o conjunto de pontos (x, y) tais que $y = ax^2 + bx + c$, com a um número não nulo e b e c constantes reais. O gráfico dessa função é uma parábola.

Resolva, com os alunos, o exercício 1 da aula, mostrando que, para cada bola a mais, o nível da água sobe uma constante. Então, para intervalos de x iguais, se o intervalo de y for constante, a função que relaciona x e y é uma função do 1º grau.

Deixe um tempo para eles pensarem nas questões 2 e 3 e, por fim, oriente a turma para a tarefa.

EXERCÍCIO EXTRA

Na figura, a parábola tem equação $y = kx^2$, em que k é uma constante real. Se o retângulo $ABCD$ tem área 108, obtenha k.



Resolução:

$(AB) \cdot (BC) = 108 \Rightarrow 6 \cdot (k \cdot 3^2) = 108 \Rightarrow$

$\Rightarrow 54 \cdot k = 108 \Rightarrow k = 2$

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 A

$250t^3 - 100t + 3000 = 150t^3 + 69t + 3000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 100t^3 - 169t = 0 \Rightarrow t(100t^2 - 169) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t(10t - 13)(10t + 13) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 1{,}3$ ou $t = -1{,}3$

Como $t > 0$, então $t = 1{,}3$.

2 D

Em dólar, o valor pago por x horas extras é $3x$. Além disso, independentemente do número de horas extras, deve ser pago o valor de 24 dólares (anuidade). Logo, $f(x) = 3x + 24$.

3 D

Sendo r o raio da base da embalagem antiga, h sua altura e V seu volume, tem-se: $V = \pi r^2 h$.

Sendo $\frac{r}{2}$ o raio da base da embalagem nova, a sua altura e V_n seu volume, tem-se: $V_n = \pi \frac{r^2}{4} a$.

Sendo $V_n = \frac{1}{3} V$, tem-se $\pi \frac{r^2}{4} a = \frac{1}{3} \pi r^2 h$, ou seja, $a = \frac{4h}{3}$.

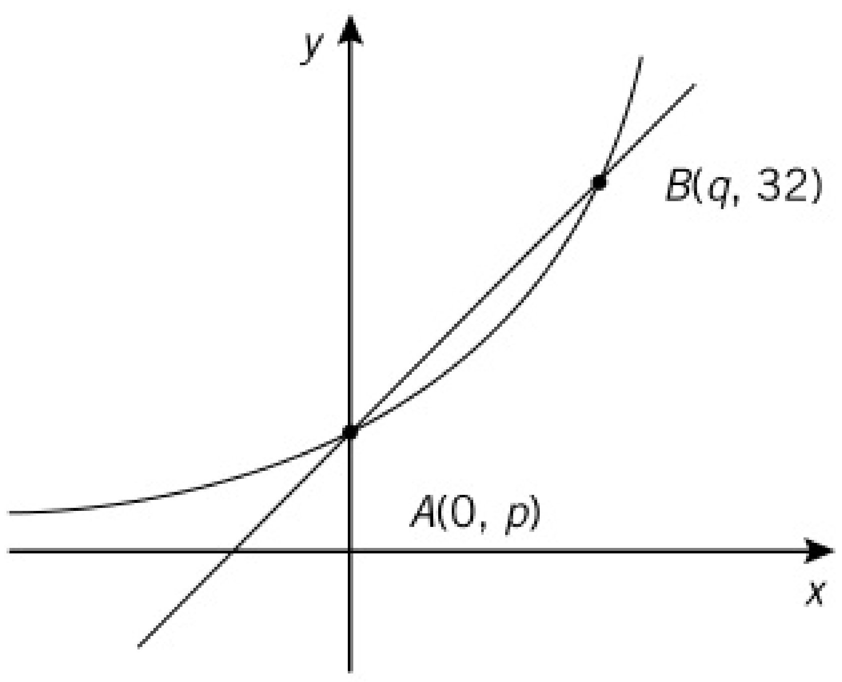
AULA 20 • ENCAMINHAMENTO

Utilize os três exemplos de função dados pela tabela da seção Em classe para mostrar os vários modos de crescimento de uma função e os sentidos correspondentes da concavidade do gráfico. Explique, com exemplos, o conceito de taxa média de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{f(x_f) - f(x_0)}{x_f - x_0}\right)$ e mostre que, se essa taxa for constante, o gráfico é uma reta (ou pontos dela) e $f(x) = mx + n$, em que m e n são constantes. Explique o que é coeficiente angular e sua interpretação gráfica.

Se achar conveniente, apresente a função "maior inteiro" f, dada por: $f(x)$ é o maior número inteiro que é menor que, ou igual a, x. Assim, temos $f(3) = 3$, $f(\pi) = 3$, $f(3{,}99) = 3$ e $f(4) = 4$. O exercício 4 da tarefa é um exemplo de aplicação dessa função.

EXERCÍCIO EXTRA

Na figura, temos esboços dos gráficos das funções dadas por $f(x) = mx + n$ e $g(x) = 2^x$, sendo m e n constantes reais. Os gráficos intersectam-se em $A(0, p)$ e $B(q, 32)$.



Calcule o valor de:

a) $p + q$;

b) $f(10)$.

Resolução:

a) $A(0, p) \in g \rightarrow g(0) = p$

$2^0 = p \Rightarrow p = 1$

$B(q, 32) \in g \rightarrow g(q) = 32$

$2^q = 32 \Rightarrow q = 5$

Logo:

$p + q = 1 + 5 = 6$

Resposta: 6

b) $f(x) = mx + n$

$A(0, 1) \in f \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow n = 1$

$f(x) = mx + 1$

$B(5, 32) \in f \rightarrow f(5) = 32$

$5m + 1 = 32 \Rightarrow m = \dfrac{31}{5}$

$f(x) = \dfrac{31}{5}x + 1$

$f(10) = \dfrac{31}{5} \cdot 10 + 1 \Rightarrow f(10) = 63$

Resposta: 63

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 E

Do enunciado, temos que $m = 1{,}75n$; m e n são diretamente proporcionais; o gráfico é a reta que passa pelos pontos (0, 0) e (1; 1,75).

2 D

Do enunciado, temos:

- Plano K

  Para x impulsos, temos:

  se $0 \leqslant x \leqslant 200$, então $K(x) = 29{,}90$

  se $x > 200$, então:

  $K(x) = (x - 200) \cdot 0{,}20 \Rightarrow K(x) = 0{,}20x - 10{,}10$

- Plano Z

  Para x impulsos, temos:

  se $0 \leqslant x \leqslant 300$, então $Z(x) = 49{,}90$

  se $x > 200$, então:

  $Z(x) = (x - 300) \cdot 0{,}10 + 49{,}90 \Rightarrow$

  $\Rightarrow Z(x) = 0{,}10x + 19{,}90$

  O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos, em função dos minutos utilizados, é o da alternativa **d**.

3 A

- Fora da promoção, o casal pagaria por 7 dias:

  $7 \cdot 150 = 1\,050$ reais

- Com a promoção, o casal pagaria por 8 dias:

  $3 \cdot 150 + 130 + 110 + 3 \cdot 90 = 960$ reais

Assim, um casal que aderir ao pacote promocional fará uma economia de $1\,050 - 960 = 90$ reais.

4 C

Sendo d a distância andada em metros e n o número de voltas inteiras completadas, tem-se:

$0 \leqslant d < 1\,500 \rightarrow n = 0$

$1\,500 \leqslant d < 3\,000 \rightarrow n = 1$

$3\,000 \leqslant d < 4\,500 \rightarrow n = 2$

$4\,500 \leqslant d \leqslant 5\,000 \rightarrow n = 3$

AULA 21 • ENCAMINHAMENTO

Essa aula é extremamente importante, não só para o Enem, mas para diversas outras provas e atividades que envolvam a resolução de problemas. O objetivo é mostrar aos alunos o quanto é fundamental organizar o raciocínio para a resolução de problemas e para a modelagem matemática.

Inicie a aula comentando que é impossível querer resolver todos os problemas em Matemática da mesma maneira, e que a beleza dos problemas está justamente no desenvolvimento da resolução.

Leia, com os alunos, a estratégia proposta pelo matemático G. Pólya, para a resolução desses problemas, no resumo da aula. Discuta os itens que julgar mais relevantes.

Reserve um tempo para os alunos pensarem nas questões de aula.

Oriente a turma para as tarefas. Se julgar conveniente, resolva a última questão da tarefa dessa aula.

EXERCÍCIO EXTRA

Duas máquinas *A* e *B* realizam uma terraplanagem. Sozinha, a máquina *B* leva 4 horas a mais que a máquina *A* para realizar o mesmo serviço. Qual das expressões representa a fração de terraplanagem que, juntas, as duas máquinas realizam em uma hora?

a) $\dfrac{2}{(t+4)}$ c) $\dfrac{1}{t(t+4)}$ e) $\dfrac{2t+4}{t^2+4t}$

b) $2t + 4$ d) $t^2 + t$

Resolução:

- Máquina *A*: *t* horas

  Fração correspondente da terraplanagem: $\dfrac{1}{t}$.
- Máquina *B*: $(t + 4)$ horas

  Fração correspondente da terraplanagem:

  $\dfrac{1}{t+4}$
- Juntas:

  $\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+4} = \dfrac{t+4+t}{t(t+4)} = \dfrac{2t+4}{t^2+4t}$

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 D

Se hoje tenho 15 anos, então, daqui a 12 anos, eu terei 27 anos.

Como a minha idade é o triplo da sua, então, há 12 anos, você tinha 9 anos.

Assim, hoje você tem 9 + 12 anos. Logo, daqui a 12 anos, você terá 21 + 12 = 33 anos.

2 D

Sendo *x* o valor, em reais, da cota de cada uma das 55 pessoas, temos:

$5x + 7 \cdot 50 = 510 \Rightarrow 5x + 350 = 510 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x = 160 \Rightarrow x = 32$

3 C

Segundo o enunciado, temos:

$$\text{ICadÚnico} = \frac{TC + TA}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ICadÚnico} = \frac{\frac{NV}{NF} + \frac{NA}{NV}}{2} \Rightarrow \text{ICadÚnico} = 0{,}6$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{NV}{NF} + \frac{NA}{NV}\right) = 0{,}6 \Rightarrow \frac{NV}{NF} + \frac{NA}{NV} = 1{,}2 \quad \text{(I)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{NV}{2NF} + \frac{NA}{NV}\right) = 0{,}5 \Rightarrow \frac{NV}{2NF} + \frac{NA}{NV} = 1{,}0 \quad \text{(II)}$$

Das igualdades em (I) e (II), temos, subtraindo membro a membro, $\dfrac{NV}{2NF} = 0{,}2$ (III)

Substituindo (III) em (II), temos:

$$0{,}2 + \frac{NA}{NV} = 1{,}0 \Rightarrow \frac{NA}{NV} = 0{,}8, \Rightarrow NA = 0{,}8 \cdot NV$$

$$0{,}8NV + NV = 3600 \Rightarrow NV = 2000$$

Da igualdade (III), temos $\dfrac{2000}{2 \cdot 0{,}2} = 5000$.

AULA 22 • ENCAMINHAMENTO

Retome os conceitos de potenciação e suas propriedades, usando diferentes exemplos. É extremamente importante mostrar que as propriedades $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$, $b^m \div b^n = b^{m-n}$ e $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$ constituem recursos matemáticos, nessa ordem, para reduzir contas de multiplicação em contas de adição, contas de divisão em contas de subtração e contas de potenciação em contas de multiplicação.

Insista a todo o momento que, se *x* é um logaritmo, implica *x* ser um expoente de uma potência de base positiva e diferente de 1.

EXERCÍCIO EXTRA

O som mais alto a que o homem pode ser sujeito, sem ter danos no seu tímpano, tem uma intensidade maior que 1 000 000 000 000 de vezes a intensidade do som mais baixo que ele pode detectar. Por isso, em vez de lidar diretamente com intensidades de som, é preferível trabalhar com o correspondente nível de decibéis, que é dado pela fórmula $D = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$, em que I é a intensidade do som estudado em W/m^2.

Tomou-se, como padrão, $I_0 = 10^{-12}$ (W/m^2) a intensidade do som mais baixo que, em média, uma pessoa jovem e saudável consegue escutar. Calcule o correspondente nível de decibéis de uma conversa normal entre dois alunos, com intensidade sonora de $3{,}2 \cdot 10^{-6}$ W/m^2. (Dado: $\log 2 \simeq 0{,}30$.)

Resolução:

$D = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow D = 10 \cdot \log \frac{3{,}2 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} \Rightarrow$

$\Rightarrow D = 10 \cdot \log (3{,}2 \cdot 10^6) = 10 \cdot \log (2^5 \cdot 10^5) \Rightarrow$

$\Rightarrow D = 10 \cdot 5 \cdot (\log 2 + \log 10) \Rightarrow$

$\Rightarrow D = 10 \cdot 5 \cdot 1{,}3 \Rightarrow D = 65$ Db

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 E

População estimada para 2030 $\rightarrow x = 30$

Assim:

$y = 363 \cdot e^{0{,}003x} \Rightarrow y = 363 \cdot e^{0{,}03 \cdot 30} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 363 \cdot e^{0{,}9} \Rightarrow y = 363 \cdot e^{(0{,}3) \cdot 3}$

Do enunciado, temos que $e^{0{,}3} = 1{,}35$, logo:

$y = 363 \cdot 1{,}35^3 \Rightarrow y \simeq 893\,116$ milhões de pessoas

2 D

Temos que $N(0) = \alpha \cdot 10^{\lambda \cdot 0} \Rightarrow N(0) = \alpha$

Do enunciado, temos que após 2 horas a população de bactérias irá duplicar, então:

$N(2) = \alpha \cdot 10^{\lambda \cdot 2} \Rightarrow 2\alpha = \alpha \cdot 10^{2\lambda} \Rightarrow 2 = 10^{2\lambda}$

Assim:

$\log 2 = \log 10^{2\lambda} \Rightarrow \log 2 = 2\lambda \Rightarrow 0{,}30 = 2\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda \simeq 0{,}15$

Para 6 horas, temos:

$N(6) = \alpha \cdot 10^{\lambda \cdot 6} \Rightarrow N(6) = \alpha \cdot 10^{0{,}15 \cdot 6} \Rightarrow$

$\Rightarrow N(6) = \alpha \cdot 10^{0{,}9} \Rightarrow N(6) \simeq 8\alpha$

3 D

$M = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow 5\,000 = 2\,000 \cdot (1 + 0{,}2)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow 2{,}5 = 1{,}2^n$

Utilizando o conceito e as propriedades dos logaritmos, temos:

$\log 2{,}5 = \log 1{,}2^n \Rightarrow \log 2{,}5 = n \cdot \log 1{,}2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 2{,}5}{\log 1{,}5} \Rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{25}{10}\right)}{\log\left(\frac{12}{10}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 25 - \log 10}{\log 12 - \log 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log\left(\frac{100}{4}\right) - \log 10}{\log (3 \cdot 2 \cdot 2) - \log 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 100 - \log (2 \cdot 2) - \log 10}{\log (3 \cdot 2 \cdot 2) - \log 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 100 - \log 2 - \log 2 - \log 10}{\log 3 + \log 2 + \log 2 - \log 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{2 - 0{,}30 - 0{,}30 - 1}{0{,}48 + 0{,}30 + 0{,}30 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{0{,}4}{0{,}08} \Rightarrow n = 5$$

4 D

Podemos pensar neste problema do mesmo modo que no exercício anterior, porém, neste caso, o montante corresponderia ao total da área da represa, o capital inicial seria a área já ocupada pela vegetação, e a taxa de juros seria equivalente ao percentual de aumento da vegetação na área (50%). Assim:

$M = C \cdot (1 + i)^n \Rightarrow 128 = 8 \cdot (1 + 0{,}5)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow 16 = 1{,}5^n$

Utilizando o conceito e as propriedades dos logaritmos, temos:

$\log 16 = \log 1{,}5^n \Rightarrow \log 16 = n \cdot \log 1{,}5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 16}{\log 1{,}5} \Rightarrow n = \frac{\log 2^4}{\log\left(\frac{3 \cdot 5}{10}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{4 \cdot \log 2}{\log 3 + \log\left(\frac{10}{2}\right) - \log 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{4 \cdot \log 2}{\log 3 + \log 10 - \log 2 - \log 10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{4 \cdot 0{,}3}{0{,}48 + 1 - 0{,}3 - 1} \Rightarrow n = \frac{1{,}2}{0{,}18} \Rightarrow$$

$\Rightarrow n \simeq 6{,}6$ anos $\simeq$ 6 anos e 8 meses

AULA 23 • ENCAMINHAMENTO

Apresente a simetria da parábola. Se possível, elabore as demonstrações que explicam as fórmulas relacionadas às coordenadas do vértice da parábola.

Mostre que, em todos os casos, o ponto (0, c) pertence à parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$. Segue dessa equação, com $y = 0$, que $x = 0$ ou $x = \frac{-b}{a}$. Portanto, a parábola passa pelos pontos (0, c) e $\left(\frac{-b}{a}, c\right)$. Da simetria da parábola, pode-se concluir que a abscissa do seu vértice é dada por $x_v = \frac{-b}{2a}$.

Se julgar conveniente, apresente os conceitos de média aritmética e média geométrica. Comente que a média aritmética de números não negativos é maior ou igual à sua média geométrica e mostre como essa desigualdade pode ser explorada, por exemplo, para obter o valor máximo ou o valor mínimo de uma variável.

EXERCÍCIO EXTRA

Considere o conjunto de todos os retângulos de semiperímetro 12, base x e área $S(x)$.

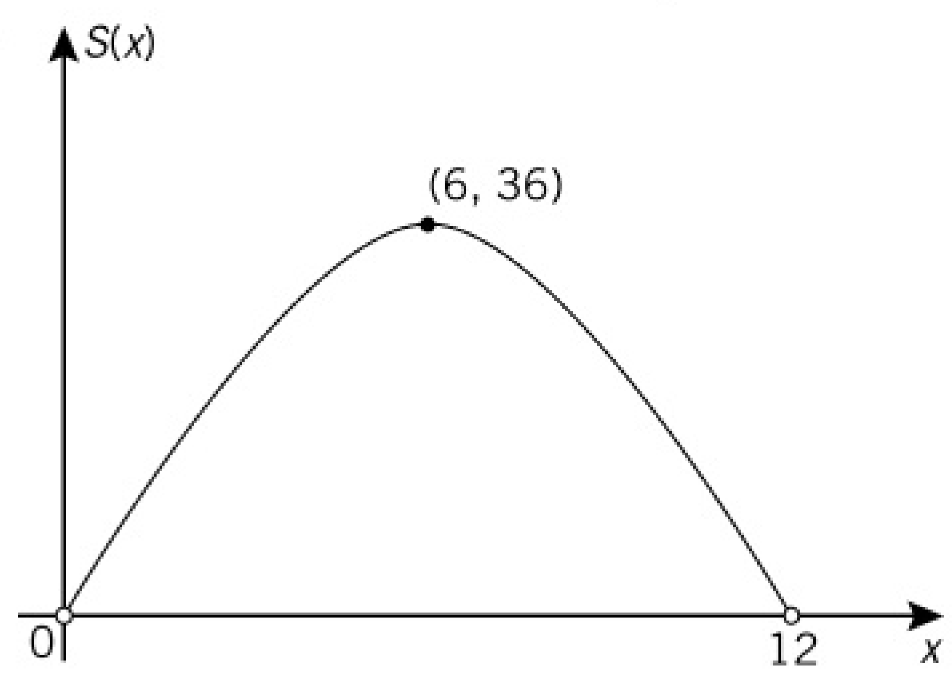
a) Obtenha o domínio de S.

b) Esboce o gráfico de S.

Resolução:

a) Para todos os retângulos desse conjunto, temos:
- o semiperímetro é 12;
- a altura é $12 - x$, com $12 - x > 0$, isto é, $x < 12$;
- a área é $S(x) = x(12 - x)$;
- o domínio de S é $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 12\}$.

b)



RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 A

Temos uma função do tipo $y = ax + b$, em que y é o número de quartos ocupados e x o preço da diária. Sabemos do enunciado que:

$$\begin{cases} 30 = 120a + b \\ (30 - 1) = (120 + 5)a + b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 30 = 120a + b \\ 29 = 125a + b \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{5} \text{ e } b = 54$$

Portanto, $y = \frac{-x}{5} + 54$.

2 B

A receita do hotel corresponde ao número de quartos multiplicados pelo valor da diária, ou seja, $x \cdot y$. Logo:

$$x \cdot \left(\frac{-x}{5} + 54\right) = \frac{-x^2}{5} + 54x$$

Agora obtemos uma equação do tipo $ax^2 + bx + c$, em que $a = \frac{-1}{5}$, $b = 54$ e $c = 0$ e que tem como máximo o ponto $x_v = \frac{-b}{2a}$ (vértice da parábola). Então:

$$x_v = \frac{-54}{\frac{-2}{5}} \Rightarrow x_v = 135$$

3 B

Para determinar o lucro, devemos subtrair do preço de venda o custo do produto. Assim: $180x - 116 - (3x^2 + 232) = -3x^2 + 180x + 116$

Para que o lucro seja máximo, devemos obter o vértice da parábola, dado por:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-180}{2(-3)} \Rightarrow x_v = 30$$

4 D

Do enunciado, temos:

$$V = \left(1{,}50 - \frac{x}{100}\right)(10\,000 + 100x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = (150 - x)(100 + x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = 15\,000 + 50x - x^2$$

5 C

Devemos ter $x_v = \frac{-b}{2a}$, portanto:

$$x_v = \frac{-50}{-2} \Rightarrow x_v = 25$$

AULA 24 · ENCAMINHAMENTO

Na aula sobre análise de gráficos, os alunos praticamente não fazem cálculos, apenas analisam as informações contidas no gráfico e tiram conclusões com base nisso.

Inicie a aula abordando alguns itens importantes para a análise de um gráfico:

- Título (sobre o que se trata o gráfico);
- Eixos do gráfico (o que indica cada eixo do gráfico);
- Valores numéricos absolutos fornecidos;
- Intervalos de crescimento/decrescimento;
- Pontos de máximo e de mínimo.

Em seguida, leia com os alunos os exemplos resolvidos.

Resolva os exercícios 1 e 2 da seção Em classe com os alunos, deixando-os pensar no exercício 3.

Oriente-os para a tarefa, dando destaque ao exercício 3.

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 D

Note que, no gráfico, a inclinação da reta que passa pelos pontos referentes a 1994 e 1995 é maior que a inclinação da reta que passa pelos pontos referentes a 1997 e 1998.

2 C

A partir do gráfico, percebe-se que, entre 2003 e 2006, os valores correspondentes diminuíram, indicando, assim, uma queda no período.

3 A

Dos gráficos, conclui-se que a variação da altura diminui até se tornar praticamente nula. Assim, o gráfico que representa essa situação é o da alternativa **a**.

4 E

O maior valor acumulado ocorre para os maiores valores, ou seja, 107 e 133. Assim, o biênio correspondente é 2008-2009.

AULA 25 · ENCAMINHAMENTO

A ideia desta aula é discutir como organizar e extrair informações de uma tabela. Comente que uma tabela é uma maneira de tratar a informação usando, para isso, linhas e colunas.

Peça aos alunos que identifiquem o título e o significado das linhas e das colunas de uma tabela qualquer.

Comente os exemplos resolvidos no início da aula e deixe-os pensar nas questões de aula para, em seguida, corrigi-las.

Oriente a turma para a tarefa.

EXERCÍCIO EXTRA

(Vunesp-SP) O consumo médio de oxigênio em mL/min por quilograma de massa (mL/min · kg) de um atleta na prática de algumas modalidades de esporte é dado na tabela seguinte.

Esporte	Consumo médio de O_2 em mL/min · kg
Natação	75
Tênis	65
Marcha atlética	80

Dois atletas, Paulo e João, de mesma massa, praticam todos os dias exatamente duas modalidades de esporte cada um. Paulo pratica diariamente 35 minutos de natação e depois t minutos de tênis. João pratica 30 minutos de tênis e depois t minutos de marcha atlética. O valor máximo de t para que João não consuma, em mL/kg, mais oxigênio que Paulo, ao final da prática diária desses esportes, é:

a) 45.
b) 35.
c) 30.
d) 25.
e) 20.

Resolução:
Como as massas de Paulo e João são iguais, temos:

- o consumo de oxigênio de Paulo, em mL/kg, em função de t:
  $35 \cdot 75 + t \cdot 65 = 2625 + 65t \quad \text{(I)}$
- o consumo de oxigênio de João, em mL/kg, em função de t:
  $35 \cdot 65 + t \cdot 85 = 1950 + 80t \quad \text{(II)}$

Como queremos que João não consuma mais oxigênio que Paulo, de (I) e (II), devemos ter:

$1950 + 80t \leqslant 2625 + 65t \Rightarrow 15t \leqslant 675 \Rightarrow t \leqslant 45$

Assim, o valor máximo de t é 45.

Resposta: A

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 B
Para garantir a vitória, o jogador pode posicionar o próximo círculo em qualquer uma das posições referentes à primeira coluna; assim, existem duas possibilidades.

2 A
Entendendo "5 vezes maior" como 5 vezes a temperatura do Sol, do enunciado, temos a temperatura do Sol igual a 6000 K. Logo, procuramos uma estrela com temperatura próxima a $5 \cdot 6000 = 30000$ K, e, pela tabela, notamos que a estrela da classe especial B0, cuja luminosidade é $2 \cdot 10^4 = 20000$ vezes a luminosidade do Sol, é a que apresenta a temperatura mais próxima de 30000 K (28000 K).

3 B
O consumidor de baixa renda gastou, por kWh, depois da redução, um total de $\frac{16,73}{100} = \text{R\$ } 0,1673$ e o residencial, $\frac{85,56}{185} = \text{R\$ } 0,4625$. Assim, a diferença foi de, aproximadamente:

$0,4625 - 0,1673 = \text{R\$ } 0,29$

AULA 26 • ENCAMINHAMENTO

Essa aula é uma continuação da aula anterior. Neste momento, o aluno deverá usar as informações das tabelas e gráficos para intervir, avaliar (o que muitas vezes significa calcular e comparar com o resultado proposto) ou elaborar uma conclusão.

Inicie comentando sobre o texto inicial da aula, relacionado ao petróleo.

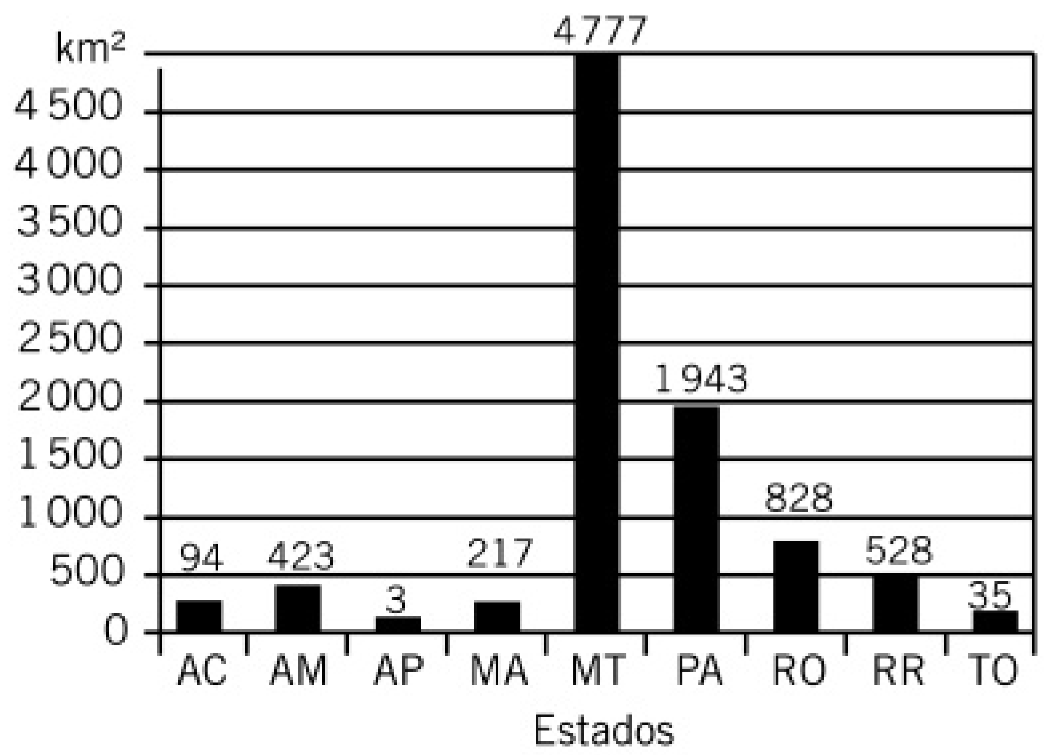
Resolva com os alunos o exercício 1 e deixe-os pensar no exercício 2.

É interessante comentar sobre o texto a ser lido na tarefa: ele trata de "múltiplos", que é um conteúdo extremamente importante para a prova do Enem.

Oriente a turma para a tarefa de casa.

EXERCÍCIO EXTRA

(Enem) A Amazônia Legal, com área de aproximadamente 5215000 km², compreende os estados do Acre, Amapá, Amazonas, Mato Grosso, Pará, Rondônia, Roraima e Tocantins, e parte do estado do Maranhão. Um sistema de monitoramento e controle mensal do desmatamento da Amazônia utilizado pelo Inpe (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais) é o Deter (Detecção de Desmatamento em Tempo Real). O gráfico apresenta dados apontados pelo Deter referentes ao desmatamento na Amazônia Legal, por estado, no período de 1º de julho de 2007 a 30 de junho de 2008, totalizando 8 848 km² de área desmatada.



Disponível em: <www.obt.inpe.br/deter/>. Adaptado.

Com base nos dados apresentados, podemos afirmar:

a) o estado onde ocorreu a maior quantidade de km² desmatados foi o do Pará.
b) a área total de desmatamento corresponde a menos de 0,1% da área da Amazônia Legal.
c) somando-se a quantidade de áreas desmatadas nos estados de Roraima e Tocantins, obtemos um terço da quantidade de área desmatada em Rondônia.
d) o estado do Mato Grosso foi responsável por mais de 50% do desmatamento total detectado nesse período.
e) as quantidades de áreas desmatadas no Acre, no Maranhão e no Amazonas formam, nessa ordem, uma progressão geométrica.

Resolução:
Segundo o gráfico, a área desmatada no estado do Mato Grosso foi de 4 777 km², representando, assim, mais de 50% do desmatamento total detectado, que no período foi de 8 848 km².
Resposta: D

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 C

Comentários a respeito das alternativas incorretas.

a) De acordo com o esquema, se houver uma elevação da temperatura global entre 4 °C e 5 °C, de 15% a 40% da biosfera poderá se tornar fonte (e não sequestradora) líquida de carbono.
b) O aumento na taxa de extinção de anfíbios ocorrerá a partir da elevação em 1 °C na temperatura global.
d) A savanização da Amazônia poderá ocorrer com aumentos na temperatura global em valores situados aproximadamente entre 2,3 °C e 3 °C.
e) Grandes extinções no mundo todo ocorrerão com a elevação da temperatura global a partir de 4 °C.

2 D

Nos últimos 4 anos, a importação anual aumentou de menos de 50 bilhões para mais de 90 bilhões de dólares. Portanto, em média, aumentou mais de 10 bilhões de dólares por ano.

3 B

O gráfico revela que, em 1988 e 1995, o número de casos coincidiu com o de óbitos.

4 E

Do gráfico, temos:

- área preservada da Mata Atlântica: 33,3 mil km² no período de 1990-1992;
- área preservada da Mata Atlântica: 34,6 mil km² nos anos 2000 e 2001.

Portanto, a área preservada da Mata Atlântica nos anos 2000 e 2001 é maior do que a registrada no período de 1990-1992.

AULA 27 • ENCAMINHAMENTO

Inicie a aula apresentando a Estatística como a área que torna possível obter conclusões sobre uma população, sem que se conheça todos os elementos que a constituem. Comente que, em uma pesquisa, o universo estatístico ou a população estatística é o conjunto de todos os elementos que podem oferecer dados pertinentes ao estudo em questão. Às vezes, essa população é tão grande que é impraticável avaliar todos os seus elementos; nesse caso, é retirado um subconjunto, chamado **amostra**, e a pesquisa é realizada a partir dessa amostra. A escolha dessa amostra obedece a critérios técnicos para que ela represente com fidelidade o universo estatístico do qual se quer obter conclusões.

Explique rol e as medidas de tendência central (média, mediana e moda). Comente que a média e a mediana, por serem calculadas, podem não pertencer ao rol, e que a moda sempre é um elemento do rol.

Resolva com os alunos os exercícios de aula e, posteriormente, oriente a turma para a tarefa de casa usando o texto de apoio.

EXERCÍCIOS EXTRAS

1 (UFU-MG) As 10 medidas colhidas por um cientista num determinado experimento, todas na mesma unidade, foram as seguintes:

1,2	1,2	1,4	1,5	1,5	2,0	2,0	2,0	2,0	2,2

Ao trabalhar na análise estatística dos dados, o cientista esqueceu-se, por descuido, de considerar uma dessas medidas. Dessa forma, comparando os resultados obtidos pelo cientista em sua análise estatística com os resultados corretos para esta amostra, podemos afirmar que:

a) a moda e a média foram afetadas.
b) a moda não foi afetada, mas a média foi.
c) a moda foi afetada, mas a média não foi.
d) a moda e a média não foram afetadas.

Resolução:
Como a média é 1,7 e nenhuma das medidas vale isso, a média vai ser alterada, mas a moda continua sendo 2,0.

Resposta: B

2 (FGV-SP) A média aritmética de 20 números reais é 30, e a média aritmética de 30 outros números reais é 20. A média aritmética desses 50 números é:

a) 27.
b) 26.
c) 25.
d) 24.
e) 23.

Resolução:
Do enunciado, a média aritmética dos 50 números é:

$$\bar{x} = \frac{30 \cdot 20 + 20 \cdot 30}{50} = 24$$

Resposta: D

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 B

Do gráfico, temos o rol:
(4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, **6**, **7**, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 13)

Observando esse rol, a mediana é:

$$\frac{6 + 7}{2} = 6{,}5 \text{ gols}$$

2 D

Do enunciado, temos:

- Média de investimentos do Brasil na França:

$$\bar{x}_1 = \frac{367 + 357 + 354 + 359 + 280}{5} =$$

$= 379{,}4$ milhões de dólares

- Média de investimentos da França no Brasil:

$$\bar{x}_2 = \frac{825 + 485 + 1458 + 744 + 1214}{5} =$$

$= 945{,}2$ milhões de dólares

Os valores médios dos investimentos da França no Brasil foram maiores em: $945{,}2 - 379{,}4 = 565{,}80$ milhões de dólares.

3 A

Sendo x a nota da prova final, temos, na condição de ser aprovado, que:

$$\frac{5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + x \cdot 3}{1 + 1 + 2 + 3} \geqslant 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{22 + 3x}{7} \geqslant 7 \Rightarrow 22 + 3x \geqslant 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x \geqslant 27 \Rightarrow x \geqslant 9$$

Portanto, a nota mínima que esse estudante necessita obter na prova final é 9.

AULA 28 • ENCAMINHAMENTO

Comente que as medidas de tendência central, quando associadas, complementam informações a respeito de um rol, e as medidas de dispersão comparam rols.

Explique os conceitos de variância e desvio-padrão. Comente que, analisando dois rols com o mesmo número de elementos e com mesma média, aquele que apresenta variância ou desvio-padrão menor possui os dados mais concentrados em torno dessa média.

Resolva com os alunos os exercícios de aula e, em seguida, oriente a turma para a tarefa de casa usando o texto de apoio.

EXERCÍCIOS EXTRAS

1 (FGV-SP) Um time de futebol tem 11 jogadores cuja média das idades é 24 anos. Álvaro tem 35 anos. Se Álvaro for excluído do time, a média das idades dos 10 jogadores restantes será:

a) 22,9 anos.
b) 22,8 anos.
c) 22,7 anos.
d) 22,6 anos.
e) 22,5 anos.

Resolução:

Seja S a soma das idades dos 11 jogadores, temos: $\frac{S}{11} = 24 \Rightarrow S = 24 \cdot 11$

Se Álvaro, de 35 anos, for excluído, a média dos 10 restantes será:

$$\frac{S - 35}{11} = \frac{24 \cdot 11 - 35}{10} = 22{,}9 \text{ anos}$$

Resposta: A

2 (UFU-MG) Para estimar a intensidade luminosa de uma fonte, os estudantes de uma turma obtiveram 50 valores experimentais, cuja média aritmética resultou em 9 lux. O professor observou que, entre esses 50 resultados, apenas dois eram discrepantes, a saber, um deles igual a 13 lux e o outro igual a 17 lux. Sendo assim, a média aritmética dos 48 valores não discrepantes é igual a:

a) 8,4 lux. b) 9,375 lux. c) 8,25 lux. d) 8,75 lux.

Resolução:

Sendo S a soma dos 50 valores, temos que $\frac{S}{50} = 9$. Portanto:

$S = 50 \cdot 9 = 450$

Retirando os dois valores discrepantes, a média dos 48 valores restantes é igual a:

$$\frac{S - 13 - 17}{48} = \frac{450 - 13 - 17}{48} = \frac{420}{48} = 8{,}75$$

Resposta: D

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 Da tabela, temos:

a) $\overline{x}_X = \frac{50 \cdot 4 + 30 \cdot 6 + 20 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + 0 \cdot 1}{20} = \frac{520}{20} = 26$

$\overline{x}_Y = \frac{50 \cdot 6 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 5 + 10 \cdot 3 + 0 \cdot 3}{20} = \frac{520}{20} = 26$

Os dois tiveram média igual a 26 pontos.

b) $\sigma_X = \sqrt{\frac{(50 - 26)^2 \cdot 4 + (30 - 26)^2 \cdot 6 + (20 - 26)^2 \cdot 5 + (10 - 26)^2 \cdot 4 + (0 - 26)^2 \cdot 1}{20}} =$

$= \sqrt{\frac{2\,304 + 96 + 180 + 1024 + 676}{20}} = \sqrt{\frac{4\,280}{20}} = \sqrt{214} \simeq 14{,}63$

$\sigma_Y = \sqrt{\frac{(50 - 26)^2 \cdot 6 + (30 - 26)^2 \cdot 3 + (20 - 26)^2 \cdot 5 + (10 - 26)^2 \cdot 3 + (0 - 26)^2 \cdot 3}{20}} =$

$= \sqrt{\frac{3\,456 + 48 + 180 + 768 + 2\,028}{20}} = \sqrt{\frac{6\,480}{20}} = \sqrt{324} = 18$

Por ter um desvio-padrão menor, x teve um desempenho mais regular.

2 a) $\overline{x} = \frac{500 \cdot 10 + 1000 \cdot 5 + 1500 \cdot 1 + 2\,000 \cdot 10 + 5\,000 \cdot 4 + 10\,500 \cdot 1}{31} = \frac{62\,000}{31} = 2\,000$

A média é R$ 2000,00.

b) Ao acrescentarmos dois valores iguais à média, a variância ficará necessariamente menor, pois os desvios dessas novas medidas acrescentadas são iguais a zero.

3 B

Sendo x a nota obtida na prova IV, temos:

$$\frac{6{,}5 \cdot 1 + 7{,}3 \cdot 2 + 7{,}5 \cdot 3 + x \cdot 2 + 6{,}2 \cdot 2}{10} = 7{,}3 \Rightarrow 2x + 56 = 73 \Rightarrow x = 8{,}5$$

4 C

Do gráfico, a equipe venceu 5 partidas (dias 28/01, 25/02, 04/03, 18/03 e 01/04) e empatou 3 (dias 11/02, 11/03 e 25/03). Assim, o número de pontos acumulados foi: $5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 18$ pontos.

AULA 29 • ENCAMINHAMENTO

Inicie a aula discutindo as situações:

- Você passa manteiga em um lado de uma fatia de pão e, sem querer, você a derruba. **Será que** ela chega ao chão com a manteiga para cima ou para baixo?
- Jogando aleatoriamente 12 números, **será que** você acerta os 6 números necessários para ganhar na Mega-Sena?
- **Será que** você consegue acertar, no mínimo, 5 dos 10 testes de uma prova de Matemática, sem estudar os assuntos que serão cobrados?

Comente que, nesta aula, será estudado o assunto **probabilidade**, tópico da Matemática que possibilita quantificar a resposta à pergunta "será que?".

Explique o conceito de espaço amostral, evento, evento elementar e eventos mutuamente exclusivos.

Assim, por exemplo, no lançamento de um dado de jogo, o espaço amostral é $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e, como exemplos de eventos, podemos citar os conjuntos $\{2, 4, 6\}$, correspondente ao resultado de sair um número par, e $\{4, 5, 6\}$, correspondente ao resultado de não sair um número menor que 4. Os conjuntos $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ e $\{6\}$ são os **eventos elementares**. O espaço amostral E corresponde ao **evento certo**, e o conjunto $\varnothing$ corresponde ao **evento impossível**.

Dois eventos A e B são ditos **mutuamente exclusivos** se, e somente se, $A \cap B = \varnothing$.

No lançamento de um dado, com $A = \{2, 4, 6\}$, "resulta número par", e $B = \{1, 3, 5\}$, "resulta número ímpar", temos um exemplo de eventos mutuamente exclusivos; isto é, a ocorrência de um deles elimina a possibilidade da ocorrência do outro.

Um espaço amostral finito $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ é dito **equiprovável** se, e somente se, seus n eventos elementares têm a mesma probabilidade de ocorrer:

$$P(\{x_1\}) = P(\{x_2\}) = P(\{x_3\}) = ... = P(\{x_n\}) = \frac{1}{n}$$

Consideremos $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o espaço amostral do lançamento de um dado de 6 faces. No caso de um espaço amostral equiprovável, temos:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Assim:

- a probabilidade de obter um número par é dada por $P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;
- a probabilidade de obter um número menor que 6 é dada por $P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \frac{5}{6}$;
- a probabilidade de obter um número menor que 7 é dada por $P(E) = 1$.

Apresente o conceito de probabilidade em um espaço amostral equiprovável, em um evento complementar, e resultante da união de dois eventos.

Resolva com os alunos os exercícios de aula e oriente-os para a tarefa de casa usando o texto de apoio.

EXERCÍCIO EXTRA

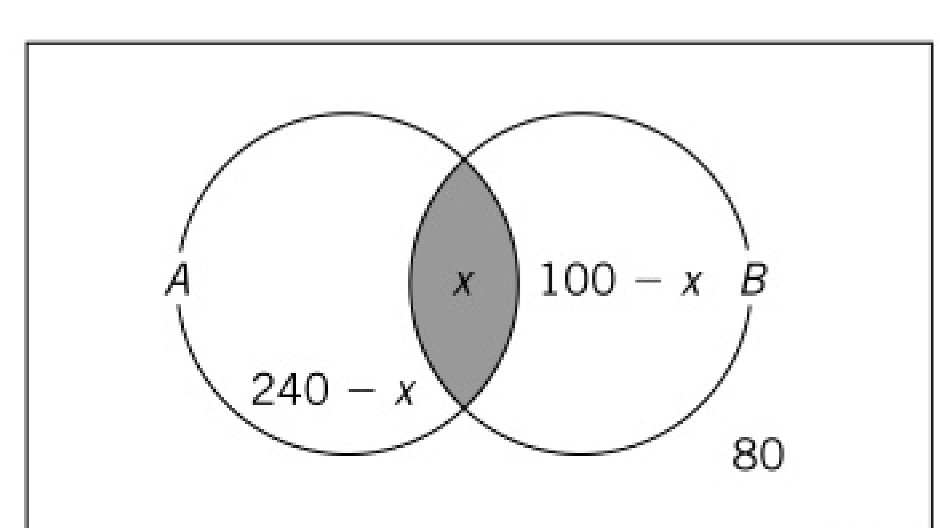
Os 400 alunos de uma escola foram consultados sobre os esportes praticados por eles. Do total, 240 praticam futebol, 100 praticam vôlei e 80 não praticam nenhum desses esportes. Tomando-se ao acaso um aluno dessa escola, a probabilidade de ele praticar os dois esportes é:

a) 2%.
b) 5%.
c) 10%.
d) 15%.
e) 20%.

Resolução:

Seja A o evento dos alunos que praticam futebol e B o evento dos alunos que não praticam vôlei.

Usando o Diagrama de Venn:



$240 - x + x - 100 - x + 80 = 400 \Rightarrow x = 20$

$P(A \cap B) = \frac{20}{400} = 5x$

Resposta: B

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 D

O gráfico mostra que, das 5 peixarias, apenas 1 vende peixes com temperaturas entre 2 °C e 4 °C. Assim, a probabilidade pedida é: $P = \frac{1}{5}$.

2 E

No período dado, em 24 de cada 34 atropelamentos não ocorreram mortes. Assim, a probabilidade de o atropelamento escolhido para investigação ter sido sem mortes é de: $\frac{24}{34}$, ou seja, $\frac{12}{17}$.

3 E

Do gráfico, temos:

Total de filhos $= 7 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 25$

Total de filhos únicos $= 7$

Assim, $P = \frac{7}{25}$.

4 A

Supondo que apenas os 4 times estejam participando do campeonato, do enunciado e da tabela apresentada, temos as classificações:

Classificação/ano	2004	2005
1º colocado	*B*	*C*
2º colocado	*D*	*B*
3º colocado	*C*	*A*
4º colocado	*A*	*D*

Assim, nenhum time manteve a mesma classificação e, portanto, a probabilidade pedida é igual a 0,00.

AULA 30 • ENCAMINHAMENTO

Inicie a aula comentando a probabilidade condicional. Com a ocorrência do primeiro evento, o espaço amostral fica reduzido, e é nesse novo espaço amostral que procuramos a probabilidade de o segundo evento ocorrer.

Apresente a probabilidade da intersecção de dois eventos e a probabilidade de eventos independentes.

Resolva com os alunos os exercícios de aula e, em seguida, oriente-os para a tarefa de casa usando o texto de apoio.

EXERCÍCIOS EXTRAS

1 (UPM-SP) Num conjunto de 8 pessoas, 5 usam óculos. Escolhidas ao acaso duas pessoas do conjunto, a probabilidade de somente uma delas usar óculos é:

a) $\frac{15}{28}$.

b) $\frac{15}{56}$.

c) $\frac{8}{28}$.

d) $\frac{5}{56}$.

e) $\frac{3}{28}$.

Resolução:

S e *N*

$\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot 2! = \frac{15}{28}$

Resposta: A

2 (FGV-SP) Há apenas dois modos de Cláudia ir para o trabalho: de ônibus ou de moto. A probabilidade de ela ir de ônibus é 30% e, de moto, 70%. Se Cláudia for de ônibus, a probabilidade de chegar atrasada ao trabalho é 10% e, se for de moto, a probabilidade de se atrasar é 20%. A probabilidade de Cláudia não se atrasar para chegar ao trabalho é igual a:

a) 30%.
b) 80%.
c) 70 %.
d) 67%.
e) 83%.

Resolução:
A probabilidade de Cláudia não se atrasar é:

Ônibus	e	Não atrasar	Ou	Moto	e	Não atrasar	
$\frac{30}{100}$	$\cdot$	$\frac{90}{100}$	$+$	$\frac{70}{100}$	$\cdot$	$\frac{80}{100}$	$= 83\%$

Resposta: E

RESPOSTAS COMENTADAS DA SEÇÃO EM CASA

1 C

Não ser sorteado no primeiro sorteio: $\frac{8}{10}$

Não ser sorteado no segundo sorteio: $\frac{9}{10}$

Assim:

$\frac{8}{10} \cdot \frac{9}{10} = \frac{72}{100} = 72\%$

2 E

Seja N a probabilidade de não chover durante cada um dos três dias e S a de chover.

Assim, $S = \frac{60}{100}$ e $N = \frac{40}{100}$.

De acordo com o enunciado, temos a sequência:

1º dia	e	2º dia	e	3º dia	
N		N		S	
$\frac{40}{100}$	$\cdot$	$\frac{40}{100}$	$\cdot$	$\frac{60}{100}$	$= \frac{96}{1000} = \frac{9,6}{100} = 9,6\%$

3 D

A probabilidade de um aluno ser sorteado é:

- Pelo método I:

Diurno: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{300} = \frac{1}{600}$

Noturno: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{240} = \frac{1}{480}$

- Pelo método II:

Diurno: $\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{480}$

Noturno: $\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{640}$

No método I, a chance de um aluno do período noturno ser nomeado é maior do que a de um aluno do período diurno, e no método II ocorre o contrário.

4 C

Seja D a probabilidade de o aparelho ser defeituoso e $\overline{D}$ a probabilidade de ele não ser. Assim, $\overline{D} = 0,2\%$ e $D = 99,8\%$.

Do enunciado, temos:

$\overline{D}$	e	$\overline{D}$	e	D	e	D	
(0,2%)	$\cdot$	(0,2%)	$\cdot$	(0,98%)	$\cdot$	(0,98%)	$\cdot \frac{4!}{2!2!} = 6 \cdot (0,2\%)^2 \cdot (99,8\%)^2$

PROJETO
MÚLTIPLO

Os Cadernos do Enem constituem uma eficiente ferramenta de apoio aos estudantes que pretendem prestar o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), já utilizado como critério de seleção por dezenas de universidades e institutos federais.

editora ática

ISBN 978-8508167524
9 788508 167524