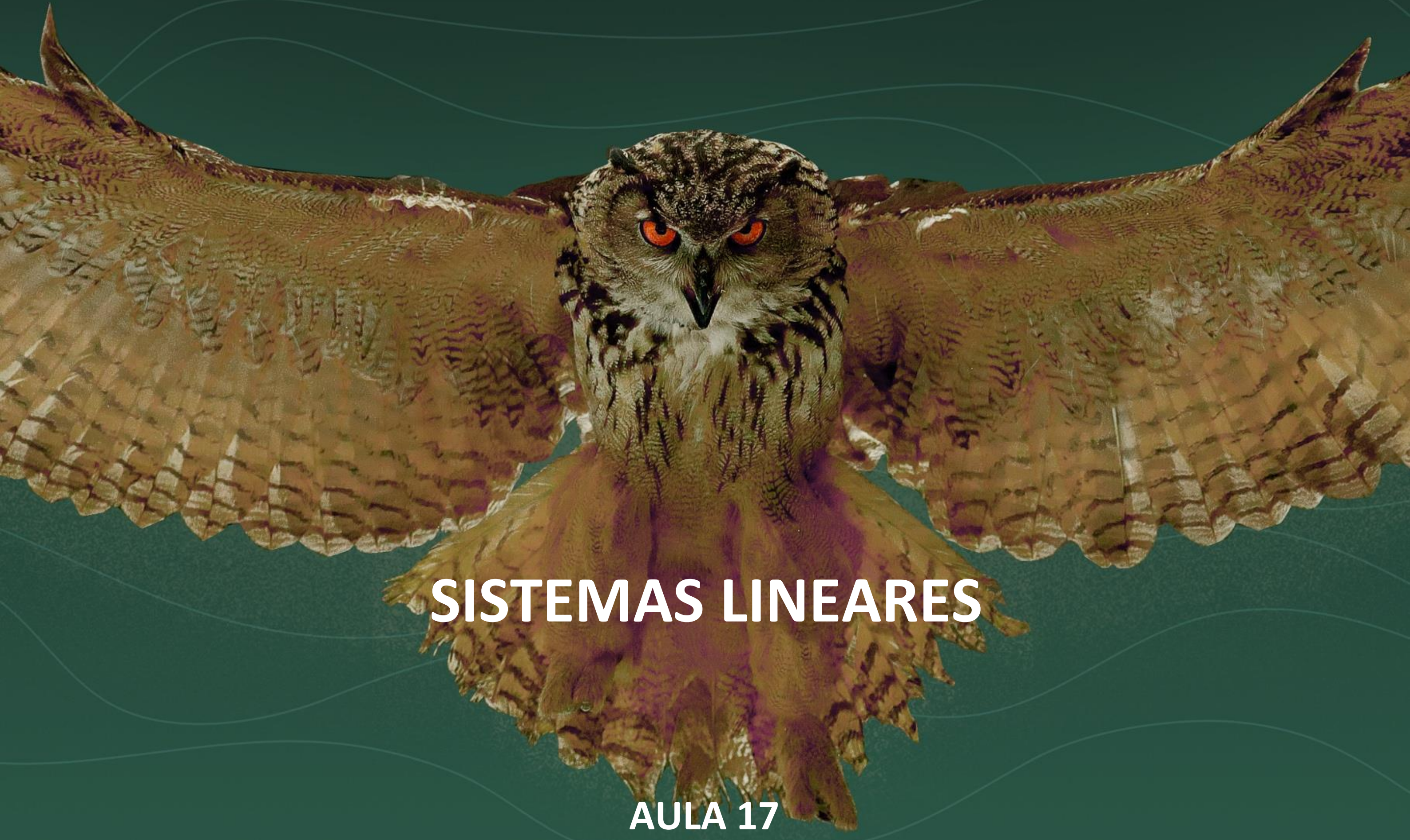
Estratégia Militares

CURSO EXTENSIVO

ITA 2023



SISTEMAS LINEARES

AULA 17

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

APRESENTAÇÃO

Olá.

Nesta aula, estudaremos os principais métodos de resolução de um sistema linear e veremos outros conceitos que envolvem um conhecimento prévio de matrizes. Por isso, antes de iniciar essa aula, é necessário que você saiba como trabalhar com determinantes de matrizes. Ela será essencial para estudar sistemas lineares.

Ao longo da aula, resolveremos diversos exercícios para consolidar o conhecimento adquirido e ganhar velocidade na hora da prova. Se você já estudou esse assunto e se sente confortável, pule a parte teórica e vá para a lista de exercícios. Tente resolver todos sem consultar a resolução. Sempre que tiver dúvidas, não hesite em nos procurar no fórum de dúvidas ou se preferir:

/profvictorso

1. EQUAÇÃO LINEAR

1.1. DEFINIÇÃO

Toda equação da forma

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b},$$

nas quais $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são incógnitas, é classificada como equação linear. Note que todos os **expoentes** das incógnitas devem ser **unitários**. Os termos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ que acompanham as incógnitas são denominados de coeficientes e b é o termo independente da equação.

Vejamos alguns exemplos de equação linear:

1) $x + 2y + 3z = 0$

2) $10x + 0{,}5y - 5z + 36w = 2$

3) $2^2x + 2^3y + 2^4z = 2^5$

Exemplos de equação não linear:

4) $2x^2 + 3xy + 4z = 10$

5) $2\cos x + 3\,sen\,y = 1$

6) $2e^x + 3y + 14zw + 6w^2 = -6$

1.2. SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR

A solução de uma equação linear é apresentada na forma de um conjunto ordenado de números. Seja uma equação com n incógnitas do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Se a ênupla ordenada $(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)$ torna a equação acima verdadeira, podemos afirmar que essa sequência de números é uma solução da equação.

Ênupla ordenada é uma sequência ordenada de n elementos e esta ordem se dá, preferencialmente, na ordem em que as variáveis são apresentadas. Se $n = 2$, temos uma dupla ordenada. Se $n = 3$, temos uma tripla ordenada ou terna. Se $n = 4$, temos uma quádrupla ordenada e, assim, sucessivamente.

Vejamos um exemplo:

Vamos analisar a equação $x + 2y + 3z = 4$.

Tomando $(x, y, z) = (2, 1, 0)$ e substituindo na equação, temos:

$$x + 2y + 3z = 4$$

$$2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 4$$

$$4 = 4 \rightarrow Verdade$$

Portanto, a tripla ordenada $(2, 1, 0)$ é uma solução da equação.

Mas, fazendo $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, obtemos:

$$0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 4$$

$$0 = 4 \rightarrow Falso$$

Assim, a terna $(0, 0, 0)$ não é solução da equação.

Perceba que podemos ter infinitas soluções para essa equação, veja:

$(14, -2, -2)$	$(3, -1, 1)$	$\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$
$\boldsymbol{x + 2y + 3z = 4}$	$\boldsymbol{x + 2y + 3z = 4}$	$\boldsymbol{x + 2y + 3z = 4}$
$\mathbf{14 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) = 4}$	$\mathbf{3 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 4}$	$\mathbf{0 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 = 4}$
$\mathbf{14 - 4 - 6 = 4}$	$\mathbf{3 - 2 + 3 = 4}$	$\mathbf{0 + 1 + 3 = 4}$
$\mathbf{4 = 4}$	$\mathbf{4 = 4}$	$\mathbf{4 = 4}$
Verdade	***Verdade***	***Verdade***

2. SISTEMA LINEAR

2.1. DEFINIÇÃO

Agora que sabemos o que é uma equação linear, podemos entender o que é um sistema de equações lineares, também chamado de sistema linear.

Sistema, no contexto da matemática, é formado por um conjunto de equações que devem ser satisfeitas simultaneamente. Usamos uma chave do lado esquerdo das equações para representar um sistema.

Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$$

Esse sistema possui duas equações e quatro incógnitas (x, y, z, w). A primeira equação é linear e a segunda, não. Por esse motivo, o sistema é não linear.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

Nesse sistema, temos um conjunto de equações lineares. Portanto, esse é um sistema linear.

Algumas questões podem nomear os sistemas, por exemplo:

$$\underbrace{S\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}}_{sistema\ S} \qquad \underbrace{T\begin{cases} ax + by = c \\ dx + by = e \end{cases}}_{sistema\ T}$$

2.2. SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

O sistema linear tem um conjunto solução da mesma forma que a equação linear.

A diferença é que o conjunto solução deve tornar verdadeira não só uma, mas todas as equações do sistema.

Vejamos um exemplo.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

Nosso sistema linear tem 3 equações e 3 incógnitas. Vejamos quais das ternas a seguir podem ser consideradas solução.

Terna (x, y, z)	$x + y = 1$	$y + z = 2$	$x + z = 3$
$(0, 1, 1)$	$0 + 1 = 1$ √	$1 + 1 = 2$ √	$0 + 1 = 3$ X
$(1, 1, 1)$	$1 + 1 = 1$ X	$1 + 1 = 2$ √	$1 + 1 = 3$ X
$(0, 0, 1)$	$0 + 0 = 1$ X	$0 + 1 = 2$ X	$0 + 1 = 3$ X
$(1, 0, 2)$	$1 + 0 = 1$ √	$0 + 2 = 2$ √	$1 + 2 = 3$ √

Pelo que podemos ver na tabela, algumas ternas não satisfazem a equação alguma, outras satisfazem apenas uma ou apenas duas equações. Dos exemplos da tabela, apenas a terna $(1,0,2)$ satisfez a todas as equações do sistema, portanto dizemos que ela é uma solução do sistema linear. Mais tarde aprenderemos não só a encontrar a terna solução desse sistema como teremos condições de dizer se esta é única ou se existem outras soluções.

Existem, também, sistemas que não apresentam solução alguma, são os ditos sistemas impossíveis.

Dedicaremos mais tempo ao estudo destes mais adiante, mas vejamos um exemplo a título de ilustração.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Mesmo que não tenhamos estudado como solucionar um sistema ainda, podemos perceber que não existem dois números x e y cuja soma dê 1 e 2 simultaneamente. Assim, este sistema é impossível.

Veremos as técnicas para se resolver um sistema nos próximos tópicos. Por ora, precisamos apenas entender o que é um sistema e reconhecer quando um conjunto é ou não solução deste.

2.3. REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

Você se lembra da multiplicação de matrizes?

Vamos utilizá-la agora.

Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Façamos o produto das matrizes $A \cdot X$.

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Algumas observações:

Estamos multiplicando uma matriz A_{3x3} por outra X_{3x1}.

O produto é possível e a matriz resultante é do tipo $A \cdot X_{3x1}$.

Continuemos.

Preparemos as matrizes para o produto.

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z \\ 4 \cdot x + 7 \cdot y + 2 \cdot z \\ 3 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z \end{bmatrix}$$

Perceba que esse conjunto de equações é muito similar às equações que vimos no sistema linear.

Como adendo, pensemos em uma igualdade entre o produto $A \cdot X$ e uma matriz B dada por

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Nas condições dadas, temos:

$$A \cdot X = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z \\ 4 \cdot x + 7 \cdot y + 2 \cdot z \\ 3 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Para que duas matrizes sejam iguais, seus elementos precisam ser idênticos, ou seja

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 2 \\ 4 \cdot x + 7 \cdot y + 2 \cdot z = 4 \\ 3 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 5 \end{cases}$$

Que é a representação de um sistema de equações lineares, um sistema linear.

Assim, podemos tanto representar um sistema linear por meio de suas equações quanto por meio de uma equação matricial do tipo

$$A \cdot X = B$$

2.3.1. MATRIZ INCOMPLETA

Chamaremos de matriz incompleta de um sistema linear a matriz A formada pelos coeficientes de todas as equações do sistema.

Assim, dado o sistema que acabamos de ver no item anterior

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 2 \\ 4 \cdot x + 7 \cdot y + 2 \cdot z = 4 \\ 3 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 5 \end{cases}$$

A matriz incompleta do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz A é chamada de incompleta por não conter os valores dos termos independentes do sistema, não carregando, portanto, informação suficiente para inferirmos, só a partir dela, o sistema todo.

2.3.2. MATRIZ COMPLETA

A matriz completa C de um sistema linear traz tanto os coeficientes das equações quanto os termos independentes.

$$\begin{cases} 1 \cdot x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 2 \\ 4 \cdot x + 7 \cdot y + 2 \cdot z = 4 \\ 3 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z = 5 \end{cases}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

2.3.3. EQUAÇÕES EQUIVALENTES

Duas equações são ditas equivalentes se têm exatamente o mesmo conjunto solução.

Veja, por exemplo, as duas equações do sistema a seguir.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$$

Para a primeira, há vários pares ordenados que são solução, por exemplo, podemos citar $(2,4)$ e $(0,6)$.

Vamos testar esses pares na primeira equação para nos certificar de que são, realmente, soluções.

Par ordenado (x, y)	$x + y = 6$
$(2, 4)$	$2 + 4 = 6$ √
$(0, 6)$	$0 + 6 = 6$ √

Vimos que, para ser solução de um sistema, a solução deve satisfazer a todas as equações do sistema.

Testemos, então, as mesmas soluções para a segunda equação.

Par ordenado (x, y)	$x + y = 6$	$2x + 2y = 12$
$(2, 4)$	$2 + 4 = 6$ √	$2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 4 + 8 = 12$ √
$(0, 6)$	$0 + 6 = 6$ √	$2 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 0 + 12 = 12$ √

Percebemos, então, que as soluções $(2,4)$ e $(0,6)$ são soluções de ambas as equações.

Como são equações, podemos isolar uma das variáveis para deixá-la explícita. Façamos isso com ambas.

$$x + y = 6$$

Subtraindo y de ambos os membros da equação.

$$x + y - y = 6 - y$$

$$x + \cancel{y} - \cancel{y} = 6 - y$$

$$x = 6 - y$$

Façamos o mesmo com a segunda equação.

$$2x + 2y = 12$$

Colocando 2 em evidência no primeiro membro.

$$2(x + y) = 12$$

Dividindo ambos os membros por 2.

$$\frac{2(x + y)}{2} = \frac{12}{2}$$

$$\frac{2(x + y)}{2} = \frac{12}{2}$$

$$\frac{\cancel{2}(x + y)}{\cancel{2}} = 6$$

$$x + y = 6$$

Subtraindo y de ambos os membros.

$$x + y - y = 6 - y$$

$$x + \cancel{y} - \cancel{y} = 6 - y$$

$$x = 6 - y$$

Percebeu como ambas as equações explicitaram a mesma expressão para a incógnita x?

Isso quer dizer que qualquer solução que encontremos para a primeira equação será, também, solução da segunda, pois ambas trazem a mesma informação acerca das variáveis, são equivalentes.

Olhando com atenção para as equações do sistema, podemos perceber que a segunda equação tem seus termos, um a um, correspondentes ao dobro dos termos da primeira equação.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 12 \end{cases}$$

Sempre que tivermos uma equação linear sendo resultado da multiplicação de outra equação linear por uma constante (diferente de zero), essas equações apresentarão exatamente a mesma informação, portanto, serão equivalentes.

Utilizaremos esse mesmo fato para simplificar equações equivalentes nos próximos tópicos.

2.3.4. COMBINAÇÃO LINEAR DE EQUAÇÕES

As equações equivalentes são proporcionais entre si e há uma correspondência entre elas por meio de uma constante.

No entanto, uma equação, mesmo que não equivalente a outra de um sistema, pode não trazer uma informação nova, pois tudo o que ela "informa" já está contido nas outras equações do sistema.

Vejamos um caso prático.

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + y + 2z = 17 \\ 3x + 2y + 3z = 27 \end{cases}$$

Embora a terceira equação do sistema não seja equivalente a nenhuma das outras, ela não traz informação nova ao sistema.

Pense que cada equação traz restrições às variáveis em questão.

Antes de colocar qualquer equação em um sistema, é como se fosse perguntado algo do tipo: pense em quaisquer 3 números.

Quando colocamos a equação $x + y + z = 10$, restringimos de "quaisquer 3 números" para "pense em 3 números com soma igual a 10". Houve uma restrição de possibilidades.

Ao colocar a segunda equação, $2x - y + 2z = 17$, aumentamos a restrição. Agora, não basta pensar em 3 números com soma 10, é preciso que, além de apresentar a soma 10, o dobro do primeiro menos o segundo mais o dobro do terceiro resulte em 17. Uma restrição ainda maior.

O problema é que, ao inserir a terceira equação, $3x + 2y + 2z = 27$, essa restrição não censura número algum que já não tenha sido restringido pelas anteriores.

Mas professor, como é que eu vou saber disso?

No próximo tópico veremos um método para retirar de um sistema as equações "inúteis". Por enquanto, podemos ver um indício disso ao perceber que a terceira equação é a soma das outras duas, veja.

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + y + 2z = 17 \\ 3x + 2y + 3z = 27 \end{cases}$$

Na aula sobre matrizes, estudamos quando uma fila era combinação linear de outras, lembra?

Pois é, aqui é exatamente a mesma coisa. Uma equação é "inútil" em um sistema se ela é uma combinação linear de outras.

Poderíamos então, sem perda de informação ou generalidade, reescrever o sistema sem essa equação "inútil".

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + y + 2z = 17 \end{cases}$$

E teríamos, exatamente, o mesmo conjunto solução que o sistema de onde partimos.

Vejamos, agora, um método para descobrir essas tais equações "inúteis" em um sistema para podermos eliminá-las e reescrevermos nossos sistemas de forma mais objetiva.

2.3.5. MATRIZES EQUIVALENTES DE UM SISTEMA LINEAR

Recapitulando.

Vimos que um sistema linear pode ser representado por um produto de matrizes e tivemos contato tanto com a matriz incompleta quanto com a matriz completa do sistema.

Vimos também que há equações equivalentes entre si e equações que são combinações lineares de outras.

De posse dessas duas informações, podemos elaborar o seguinte raciocínio.

Um sistema linear pode ser equivalente a outro, desde que suas equações sejam equivalentes entre si.

Vejamos o exemplo em que todas as equações do segundo sistema são o dobro das equações do primeiro.

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ 2x+y+2z=17 \\ 3x+2y+3z=27 \end{cases} \rightarrow equivalente\ a \rightarrow \begin{cases} 2x+2y+2z=20 \\ 4x+2y+4z=34 \\ 6x+4y+6z=54 \end{cases}$$

As matrizes completas (as que incluem os termos independentes) desses sistemas são:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 17 \\ 3 & 2 & 3 & 27 \end{bmatrix} \rightarrow equivalente\ a \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 20 \\ 4 & 2 & 4 & 34 \\ 6 & 4 & 6 & 54 \end{bmatrix}.$$

Vimos no item anterior que a terceira equação desse sistema, por ser a soma das duas equações anteriores, pode ser excluída do rol sem prejuízo para o sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 17 \\ \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{27} \end{bmatrix} \rightarrow equivalente\ a \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 20 \\ 4 & 2 & 4 & 34 \\ 6 & 4 & 6 & 54 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 17 \end{bmatrix} \rightarrow equivalente\ a \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 20 \\ 4 & 2 & 4 & 34 \\ 6 & 4 & 6 & 54 \end{bmatrix}$$

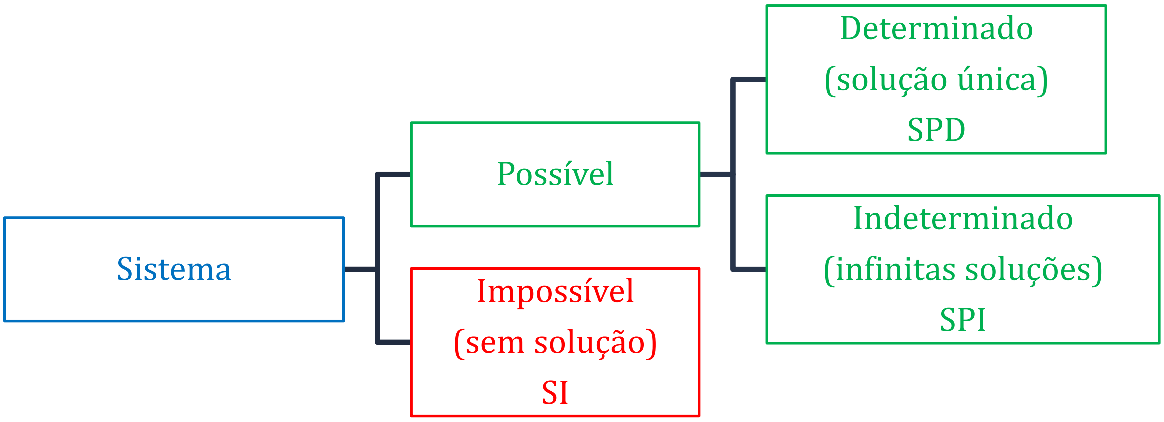
Voltando à representação clássica do sistema, essas matrizes representam

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ 2x+y+2z=17 \end{cases} \rightarrow equivalente\ a \rightarrow \begin{cases} 2x+2y+2z=20 \\ 4x+2y+4z=34 \\ 6x+4y+6z=54 \end{cases}$$

Portanto, podemos ter dois sistemas com escritas diferentes, com representações matriciais diferentes, e, ainda assim, serem equivalentes.

3. TIPOS DE SISTEMAS LINEARES

Um sistema pode ser classificado nos seguintes tipos:



Vejamos o que cada um significa.

3.1. SISTEMA POSSÍVEL E DETERMINADO (SPD)

Um **Sistema Possível e Determinado (SPD)** é um sistema que admite uma **única solução**.

Por exemplo:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=7 \\ x+2y+z=8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases} \rightarrow (3,2,1)$$

Esse sistema é SPD, pois admite apenas a solução $(x,y,z)=(3,2,1)$. Veremos adiante que um sistema com n incógnitas deve possuir, **obrigatoriamente**, n equações para poder ser classificada como SPD.

3.2. SISTEMA POSSÍVEL E INDETERMINADO (SPI)

Um **Sistema Possível e Indeterminado (SPI)** é um sistema que admite **infinitas soluções**.

Por exemplo:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+2y+2z=12 \\ x+2y+z=8 \end{cases}$$

Note que a segunda equação é proporcional à primeira, termo a termo. Assim, podemos reescrever o sistema do seguinte modo:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + 2y + 2z = 12 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

Agora, temos 2 equações e 3 incógnitas. Perceba que as ternas $(2, 2, 2)$ e $(3, 2, 1)$ são soluções do sistema:

$$(2, 2, 2) \Rightarrow \begin{cases} 2 + 2 + 2 = 6 \\ 2 + 2 \cdot 2 + 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 6 \\ 8 = 8 \end{cases}$$

$$(3, 2, 1) \Rightarrow \begin{cases} 3 + 2 + 1 = 6 \\ 3 + 2 \cdot 2 + 1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 6 \\ 8 = 8 \end{cases}$$

Além dessas soluções, podemos encontrar outras. Logo, não é possível determinar uma única solução.

3.3. SISTEMA IMPOSSÍVEL (SI)

Um **Sistema Impossível (SI)** é como o próprio nome diz, é impossível. Não conseguimos encontrar ênuplas que tornem verdadeiras todas as equações do sistema.

Por exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Podemos notar que não é possível encontrar uma dupla ordenada (x, y) tal que a soma deles resulte, simultaneamente, em 2 e 5. Assim, esse sistema é impossível.

4. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

Vamos estudar nesse e nos próximos capítulos o que realmente cai na prova. Então fique atento!

Podemos resolver um sistema linear de diferentes modos, vamos estudar os principais que podem ser cobrados na prova.

4.1. SUBSTITUIÇÃO

Essa é a técnica mais simples e consiste em isolar uma variável de uma equação e substituir em outra.

Veja um exemplo.

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Podemos isolar a variável y da segunda equação e substitui-la na primeira.

$$x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$$

$$\begin{cases} 3x + y = 10 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

Agora, basta substituir y na primeira equação e encontrar o valor de x.

$$3x + y = 10$$

$$3x + (2 - x) = 10 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

Com o valor de x, podemos substitui-lo na segunda equação e encontrar o valor de y:

$$y = 2 - x \Rightarrow y = 2 - 4 \Rightarrow y = -2$$

4.2. SOMA DE EQUAÇÕES NO PRÓPRIO SISTEMA

Outro método simples, ele consiste na soma de equações de um mesmo sistema.

A condição mais propícia para utilizar o método da soma de equações em um sistema é ter pelo menos uma variável com coeficiente de mesmo módulo e de sinais opostos em duas equações distintas.

Veja um exemplo.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Perceba que, se somarmos ambas as equações, a incógnita y será anulada, facilitando o cálculo da incógnita x.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \quad + \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\overline{\quad 2x = 8 \quad}$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

Agora, basta substituir o valor de x em qualquer uma das equações e encontrar o valor de y.

4.3. TEOREMA DE CRAMER

Considerando um sistema linear de n incógnitas e igual número de equações representado na forma matricial

$$A \cdot X = B$$

No qual A é a matriz incompleta do sistema, X é a matriz coluna das variáveis e B é a matriz coluna dos termos independentes. Se a ênupla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução do sistema, o teorema de Cramer afirma que

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}, i \in \{1,2,\dots,n\}$$

Em que D é o determinante da matriz A e deve ser necessariamente diferente de zero e D_i é o determinante da matriz obtida de A substituindo-se a i-ésima coluna de A pela matriz coluna B.

O teorema de Cramer é aplicável apenas para sistemas que possuem o número de incógnitas igual ao número de equações, pois a matriz A deve ser quadrada para possibilitar o cálculo do determinante e este deve ser diferente de zero $(D \neq 0)$.

Essa é a definição do teorema, vamos usar um exemplo para você ver na prática como funciona.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

Representando-o na forma matricial $A \cdot X = B$, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Inicialmente, devemos calcular o determinante da matriz A:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 4 - 1 - (-2) - 2 = 3$$

Como $D \neq 0$, podemos aplicar o teorema de Cramer para encontrar as variáveis.

Perceba que a primeira coluna da matriz A apresenta apenas coeficientes da incógnita x, a segunda, apenas de y enquanto a terceira, apenas de z.

$$\begin{cases} 1x + 1y + 1z = 6 \\ 2x + 1y - 1z = 7 \\ 1x + 2y + 1z = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos começar pela variável x. Para isso, devemos substituir a coluna da incógnita x pela matriz coluna B e chamar o determinante dessa matriz de D_x (já que estamos calculando x):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Então, calculando D_x:

$$D_x = (6 - 8 + 14) - (8 - 12 + 7) = 12 - 3 = 9$$

Assim, x é dado por

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{9}{3} \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

Vamos repetir o processo para as variáveis y e z. Para calcular D_y, devemos substituir a segunda coluna de A pela matriz B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow D_y = 7 - 6 + 16 - 7 + 8 - 12 = 6$$

Desse modo, y é dado por:

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{6}{3} \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

Por fim, para calcular D_z, devemos substituir a terceira coluna de A pela matriz B:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow D_z = (8 + 7 + 24) - (6 + 14 + 16) = 39 - 36 = 3$$

Então:

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{3}{3} \Rightarrow \boxed{z = 1}$$

Portanto, a terna $(3, 2, 1)$ é a solução do sistema.

Recapitulando.

Calculamos o determinante da matriz incompleta do sistema e o nomeamos D.

Substituímos a primeira coluna da matriz incompleta pelos valores da matriz B, calculamos o determinante dessa matriz e o nomeamos D_x.

Substituímos a segunda coluna da matriz incompleta pelos valores da matriz B, calculamos o determinante dessa matriz e o nomeamos D_y.

Substituímos a terceira coluna da matriz incompleta pelos valores da matriz B, calculamos o determinante dessa matriz e o nomeamos D_z.

Por fim, calculamos o valor de cada incógnita pelo teorema de Cramer

$$x = \frac{D_x}{D}$$

$$y = \frac{D_y}{D}$$

$$z = \frac{D_z}{D}$$

Veremos na prática que o teorema de Cramer não é muito utilizado na resolução de sistemas lineares, ele é mais teórico. O importante desse teorema é que ele nos permite identificar quando um sistema é SPD, SPI ou SI. No tópico de discussão de um sistema linear, veremos como analisar um sistema. Agora, vamos estudar um método bastante útil na resolução de sistemas.

ESCLARECENDO!

Podemos calcular as soluções de um sistema linear através da inversa da matriz A (matriz incompleta do sistema). Se $\det A \neq 0$, temos que a matriz A é invertível e, assim, podemos escrever:

$$A \cdot X = B$$

Como A é invertível, podemos multiplicar à esquerda nos dois lados da equação por A^{-1}:

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\therefore X = A^{-1} \cdot B$$

Portanto, as soluções da matriz coluna X são dadas pelo produto matricial $A^{-1} \cdot B$.

Exemplo de aplicação:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Vamos verificar se a matriz incompleta é invertível:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Logo, A é invertível. Podemos calcular sua inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, as soluções são dadas por:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ -3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x = 1 \; e \; y = 1$$

Esse é um outro método para encontrar a solução de um sistema linear. Na prática, para sistemas grandes, esse método parece não ser muito útil devido à necessidade de se calcular a matriz inversa.

4.4. ELIMINAÇÃO GAUSSIANA

A **Eliminação Gaussiana**, também conhecido como **escalonamento**, é um método para resolver sistemas lineares. Este método consiste em transformar o sistema linear original em um sistema equivalente cuja matriz incompleta é do tipo triangular superior. Ele consiste nas seguintes operações elementares:

- Multiplicar uma equação do sistema por uma constante $k \neq 0$;
- Substituir uma equação pela soma dela própria com o múltiplo de outra qualquer;
- Trocar duas equações de posição.

Veja um exemplo de escalonamento de sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=7 \\ x+2y+z=8 \end{cases}$$

Vamos fazer as seguintes referências: L_1 para a primeira equação, L_2 para a segunda equação e L_3 para a terceira equação. Assim, iniciemos o processo de escalonamento.

Inicialmente, devemos zerar o coeficiente da primeira incógnita da segunda e da terceira equações. Substituímos L_2 por $2L_1 - L_2$ e L_3 por $L_3 - L_1$:

$$L_2 \to 2L_1 - L_2$$

$$2L_1 - L_2 \Rightarrow 2(x+y+z) - (2x+y-z) = 2 \cdot 6 - 7$$

$$2L_1 - L_2 \Rightarrow y + 3z = 5$$

$$L_3 \to L_3 - L_1$$

$$L_3 - L_1 \Rightarrow (x+2y+z) - (x+y+z) = 8 - 6$$

$$L_3 - L_1 \Rightarrow y = 2$$

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+y-z=7 \\ x+2y+z=8 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z=6 \\ 0x+y+3z=5 \\ 0x+y+0z=2 \end{cases}$$

Agora, substituímos L_3 por $L_2 - L_3$ e simplificamos:

$$L_3 \to L_2 - L_3$$

$$L_2 - L_3 \Rightarrow (y + 3z) - y = 5 - 2$$

$$L_2 - L_3 \Rightarrow 3z = 3 \Rightarrow z = 1$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 0x + y + 3z = 5 \\ 0x + y + 0z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 0x + y + 3z = 5 \\ 0x + 0y + z = 1 \end{cases}$$

O sistema resultante é o sistema escalonado.

A título de comparação, vejamos o sistema anterior, original e escalonado, e suas respectivas matrizes.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 7 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases} \to \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + 3z = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$Sistema\ original \qquad Sistema\ escalonado$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Matriz\ original \qquad Matriz\ escalonada$$

Perceba que a matriz incompleta escalonada é triangular superior:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Matriz\ triangular\ superior$$

1. (EEAR/2013)

O valor de x que é solução do sistema $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ é um número

a) par primo

b) ímpar primo

c) par não primo

d) ímpar não primo

Comentários

Seja o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \quad (eq.1) \\ 2x - 3y = 3 \quad (eq.2) \end{cases}$$

Fazendo $2 \cdot eq.2 - 3 \cdot eq.1$ obtemos:

$$2 \cdot (2x - 3y) - 3 \cdot (x - 2y) = 2 \cdot (3) - 3 \cdot (1)$$
$$4x - 6y - 3x + 6y = 6 - 3$$
$$x = 3$$

$x = 3$ é um ímpar primo.

Gabarito: "b".

---

2. (EEAR/2008)

Se $\begin{cases} ax + 2y = -1 \\ 3x + by = 3 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = -4 \end{cases}$ são sistemas equivalentes, então o valor de $a + b$ é

a) 11

b) 9

c) -5

d) -7

Comentários

Primeiramente, resolveremos o segundo sistema linear a fim de substituir as incógnitas no primeiro sistema e determinar o valor de a e b.

Considere:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \quad (eq.1) \\ x - y = -4 \quad (eq.2) \end{cases}$$

Fazendo $eq.1 + eq.2$ obtemos:

$$2x + y + x - y = 1 - 4$$
$$3x = -3 \Rightarrow x = -1$$

Substituindo o valor de x na $eq.1$ obtemos:

$$2 \cdot -1 + y = 1 \Rightarrow y = 3$$

Substituindo os valores de x e y no primeiro sistema, obteremos os valores de a e b

$$\begin{cases} a(-1) + 2(3) = -1 \\ 3(-1) + b(3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + 6 = -1 \\ -3 + 3b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 2 \end{cases}$$

Sendo assim, $a + b = 7 + 2 = 9$

Gabarito: "b".

---

3. (EEAR/2005)

Se a solução do sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$ é $\{(a, b, c)\}$ então o valor de $a \cdot b \cdot c$ é

a) -12

b) -18

c) -24

d) -30

Comentários

Usaremos a regra de Cramer

$$D = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$D_x = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -15$$

$$D_y = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 6$$

$$D_z = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = -9$$

Sendo assim, obtemos:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{-15}{-3} = 5 \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{6}{-3} = -2 \\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{-9}{-3} = 3 \end{cases}$$

Então, $(a, b, c) = (5, -2, 3)$, Logo:

$$a \cdot b \cdot c = 5 \cdot -2 \cdot 3 = -30$$

Gabarito: "d".

---

5. DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR

Vamos aprender neste capítulo como analisar um sistema linear. Vimos que este sistema pode ser SPD, SPI ou SI.

Normalmente, usamos o teorema de Cramer para identificar se o sistema é possível e determinado e se este não for o caso, analisamos as equações do sistema para saber se ele é SPI ou SI.

Iniciemos pelo teorema de Cramer.

5.1. CLASSIFICAÇÃO PELO TEOREMA DE CRAMER

Vimos que para calcular os valores das incógnitas pelo teorema de Cramer, necessariamente, devemos ter $D \neq 0$, pois D é o denominador de todas as frações determinantes das incógnitas.

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D}, w = \frac{D_w}{D}, t = \frac{D_t}{D}, \ldots$$

Assim, se $D \neq 0$, o sistema é **possível e determinado (SPD)**.

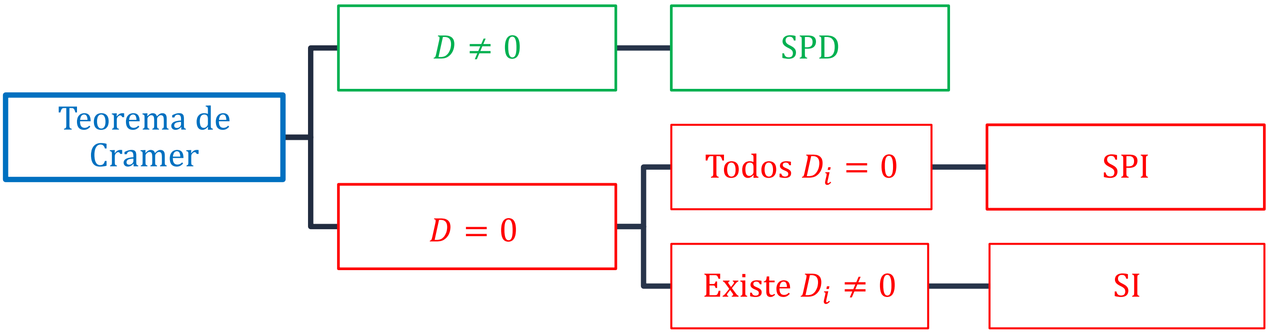
Caso o sistema apresente $D = 0$, ele poderá ser ou SPI ou SI. Para fazer a distinção entre esses tipos, devemos fazer a análise das equações do sistema ou podemos analisar os determinantes D_i da seguinte forma:

I) Se todos $D_i = 0$, temos que o sistema será SPI.

II) Se existe algum $D_i \neq 0$, temos que o sistema será SI.

Se o sistema apresentar o **número de equações menor que o número de incógnitas**, ele automaticamente será SPI ou SI e **nunca SPD**.

Resumindo:



5.2. SISTEMA POSSÍVEL E INDETERMINADO OU SISTEMA IMPOSSÍVEL

Agora que sabemos que $D \neq 0$ implica que o sistema é SPD. Devemos analisar o caso em que $D = 0$. Considere o sistema abaixo para análise.

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + by = 2 \end{cases}$$

Vamos calcular o determinante da matriz dos coeficientes:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = ab - 1$$

Se $D \neq 0$, temos um sistema possível e determinado, isso acontece se $ab \neq 1$.

Se $D = 0$, podemos ter um sistema possível e indeterminado ou impossível, isso ocorre quando $ab = 1$.

Então, se $D = 0$, temos:

$$D = 0 \Rightarrow ab - 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{a}$$

Substituindo b no sistema:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + \frac{1}{a}y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + y = 1 \\ ax + y = 2a \end{cases}$$

Para termos um SI, devemos fazer com que uma equação seja a contradição da outra.

Perceba que para qualquer valor de $a \neq 1/2$, encontramos um sistema impossível. Pois, os coeficientes das incógnitas de cada equação são iguais e $a \neq 1/2$ implica em termos independentes diferentes.

E se $a = 1/2$, temos um sistema possível e indeterminado, pois a segunda equação torna-se equivalente à primeira e o sistema fica reduzido à apenas uma equação:

$$\frac{x}{2} + y = 1$$

Também podemos analisar de outro modo. Se queremos um SPI, podemos fazer com que a segunda equação seja proporcional à primeira equação. Desse modo, conseguimos reduzir o número de equações do sistema e, assim, indeterminamos o sistema.

Se as equações são proporcionais, os termos devem ser proporcionais entre si, um a um.

$$\begin{cases} ax + 1y = 1 \\ 1x + by = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$$

Assim, temos:

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2$$

Note que

$$ab = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

E isso satisfaz a condição $D = 0$. Portanto, se $a = 1/2$ e $b = 2$, temos um SPI.

5.3. SISTEMA LINEAR HOMOGÊNEO

Um sistema linear é homogêneo quando todos os seus termos independentes são nulos. Veja um exemplo:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y + 2z - w = 0 \\ 3x - 2y - 8z + 1w = 0 \\ x - y - z - w = 0 \end{cases}$$

Nesse sistema, podemos perceber que a quadrupla $(0, 0, 0, 0)$ é solução do sistema. Essa solução é chamada de solução trivial. Além dessa, podemos ter a solução não trivial. Para analisar essa possibilidade, devemos calcular o determinante da matriz dos coeficientes do sistema.

Se $D \neq 0$, temos um SPD e, consequentemente, a solução trivial é única. Se $D = 0$, temos um SPI e, assim, encontramos a solução trivial e diversas soluções não triviais.

Um sistema linear homogêneo sempre admite solução! Ele pode ser **possível e determinado** ou **possível e indeterminado**, mas **nunca** **impossível**!

4. (EEAR/2010)

Para que o sistema $\begin{cases} kx - y + z = 0 \\ 2x - 4y - z = 1 \\ -3x + 4y - z = -1 \end{cases}$ **seja possível e determinado, deve-se ter**

a) $k \neq \frac{9}{8}$

b) $k \neq \frac{2}{5}$

c) $k = \frac{7}{6}$

d) $k = \frac{1}{3}$

Comentários

Usaremos a Regra De Cramer. Na Regra De Cramer, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser diferente de zero, para que o sistema seja possível e determinado.

$$D = \det\begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= 8k - 9$$

Queremos $D \neq 0$

$$\Rightarrow \quad 8k - 9 \neq 0$$
$$\Rightarrow k \neq \frac{9}{8}$$

Gabarito: "a".

---

5. (EEAR/2002)

O sistema de equações $\begin{cases} 3x + 4y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

a) não tem solução

b) tem infinitas soluções

c) tem apenas a solução trivial

d) tem uma única solução não trivial

Comentários

Da Regra de Cramer

$$D = \det\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Sendo assim, conforme os nossos conhecimentos acerca de sistema linear homogêneo, concluímos que o sistema é possível e indeterminado. Logo, tem infinitas soluções.

Gabarito: “b”.

---

6. (EEAR/2002)

O sistema $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ x + 4y - 6 \\ 2x - 3y = \mathrm{m} \end{cases}$,nas incógnitas x e y, admite uma única solução se, e somente se,

a) $m \neq -1$

b) $m = 0$

c) $m = -1$

d) $m = 2$

Comentários

Para estudar este sistema, queremos que a terceira equação seja uma combinação linear das duas primeiras, ou seja, ela não pode contradizer os valores obtidos para x e y encontrados utilizando apenas as duas primeiras equações. Posto isto, temos:

$$\begin{cases} 3x - 2y = -4 \quad (eq.1) \\ x + 4y = -6 \quad (eq.2) \\ 2x - 3y = \mathrm{m} \quad (eq.3) \end{cases}$$

Fazendo $eq.2 + 2 \cdot eq.1$, obtemos:

$$(x + 4y) + 2 \cdot (3x - 2y) = (-6) + 2 \cdot (-4)$$
$$7x = -14$$
$$\Rightarrow \quad x = -2$$

Substituindo o valor de x na $eq.1$ obtemos:

$$3 \cdot (-2) - 2y = -4 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

Substituindo x e y na $eq.3$ obtemos:

$$2x - 3y = \mathrm{m} = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = -1$$
$$\Rightarrow \ m = -1$$

Gabarito: “c”.

---

7. (EEAR/2002)

Os valores de k tais que o sistema homogêneo $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - ky + z = 0 \\ kx - y - z = 0 \end{cases}$ admita apenas a solução trivial, são:

a) $k \neq 0$ e $k \neq -1$

b) $k \neq 1$ e $k \neq -1$

c) $k = 0$ e $k = -1$

d) $k \neq 1$ e $k \neq -2$

Comentários

Usaremos a Regra De Cramer. Na Regra De Cramer, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser diferente de zero, para que o sistema linear homogêneo tenha apenas a solução trivial.

$$D = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -k & 1 \\ k & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= 2k^2 + 2k = 2k(k+1)$$

Queremos $D \neq 0$

$$\Rightarrow \quad 2k(k+1) \neq 0$$
$$\Rightarrow k \neq 0 \quad e \quad k \neq -1$$

Gabarito: "a".

---

8. (EEAR/2001)

O sistema linear $\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ y + mz = 0 \end{cases}$ **é indeterminado para**

a) nenhum m real

b) todo m real

c) $m = 0$

d) $m = 1$

Comentários

Usaremos a Regra De Cramer. Na Regra De Cramer, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser igual a zero, para que o sistema linear homogêneo seja indeterminado.

$$D = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix} =$$
$$= m - 1$$

Queremos $D = 0$

$$\Rightarrow \quad m - 1 = 0$$
$$\Rightarrow m = 1$$

Gabarito: "d".

---

9. (EEAR/2002)

Para que valor de k o sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ y + 3z = 1 \\ 2x + kz = 2 \end{cases}$ **não possui solução?**

a) -3

b) -6

c) 6

d) 3

Comentários

Utilizando a Regra de Cramer, queremos $D = 0$, $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$ e $D_z \neq 0$.

$$D = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix} = k - 6$$
$$D_x = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix} = 2k - 6$$

$$D_y = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & k \end{pmatrix} = k$$

$$D_z = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

Logo:

$$\begin{cases} k-6=0 \\ 2k-6 \neq 0 \\ k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=6 \\ k \neq 3 \\ k \neq 0 \end{cases}$$

$k = 6$ satisfaz todas as condições. Logo, o sistema não possui solução para $k = 6$.

Gabarito: "c".

---

10. (EEAR/2004)

Sendo $abcd \neq 0$, para que o sistema $\begin{cases} ax+by=c \\ px+qy=d \end{cases}$ seja indeterminado, é necessário que p e q sejam respectivamente iguais a

a) $\frac{da}{c}$ **e** $\frac{bd}{c}$

b) $\frac{bd}{c}$ **e** $\frac{da}{c}$

c) $\frac{ab}{c}$ **e** $\frac{d}{c}$

d) $\frac{d}{c}$ **e** $\frac{ab}{c}$

Comentários

Utilizando a Regra de Cramer, queremos $D = 0$, $D_x = 0$ e $D_y = 0$

$$D = \det\begin{pmatrix} a & b \\ p & q \end{pmatrix} = aq - bp$$

$$D_x = \det\begin{pmatrix} c & b \\ d & q \end{pmatrix} = cq - bd$$

$$D_y = \det\begin{pmatrix} a & c \\ p & d \end{pmatrix} = ad - cp$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D = aq - bp = 0 \\ D_x = cq - bd = 0 \\ D_y = ad - cp = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} aq = bp \\ cq = bd \\ ad = cp \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{bd}{c} \\ p = \dfrac{ad}{c} \end{cases}$$

Gabarito: "a".

---

6. POSTO OU CARACTERÍSTICA DE UMA MATRIZ

Para calcular o posto (ou característica) de uma matriz, devemos encontrar a sua forma escalonada. Assim, a característica dessa matriz é o número de linhas não nulas da matriz escalonada.

Representamos o posto da matriz A por $\rho(A)$.

Dessa forma, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \rho(A) = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \rho(A) = 2$$

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \rho(A) = 4$$

Sempre que uma linha for combinação linear de outras ou ainda, produto de outra linha por uma constante, teremos uma redução do posto da matriz, pois se trata, como dissemos antes, de uma linha "inútil".

6.1. TEOREMA DE KRONECKER

O teorema de Kronecker nos permite encontrar a característica de uma matriz de outro modo. De acordo com esse teorema:

O posto de uma matriz A de ordem n é p se:

- Existir em A alguma submatriz A' de ordem p com determinante não nulo;
- Todos os determinantes das submatrizes de A de ordem $p + 1$ devem ser nulos.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Note que a primeira e a segunda linha da matriz A são proporcionais entre si, desse modo, $\det A = 0$. Como o determinante de A de ordem 3 é nulo, seu posto não pode ser 3. Vamos analisar as submatrizes de A de ordem 2 e verificar se encontramos alguma com determinante não nulo.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 5 & 1 \end{matrix} & 4 \end{bmatrix}$$

Tomando a submatriz A' formada pelos dois primeiros termos da primeira linha e pelos dois primeiros termos da segunda linha conforme ilustrado acima, temos:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A' = 0$$

É notório que qualquer submatriz de ordem 2 que tomarmos usando a primeira e a segunda linha, teremos determinante nulo. Logo, temos que analisar as submatrizes usando a primeira e a terceira linha de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{''} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A' = 1 - 10 = -9 \neq 0$$

O determinante da submatriz A'' é não nulo, como o determinante de A é nulo, aplicando o teorema, temos que o posto de A é 2.

ESCLARECENDO!

Submatriz é uma matriz obtida excluindo-se algumas linhas ou colunas da matriz original. No exemplo acima, podemos ter as seguintes submatrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A'' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Esses são apenas alguns exemplos de submatrizes que podemos extrair de A.

6.2. TEOREMA DE ROUCHÉ-CAPELLI

Outro método de discussão de sistemas lineares é pelo teorema de Rouché-Capelli. Considere o sistema linear abaixo.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Esse sistema possui m equações e n incógnitas. Seja p a característica da matriz incompleta do sistema e q a característica da matriz completa. O teorema de Rouché-Capelli permite inferir que:

- Se $\boldsymbol{p \neq q}$, temos um sistema **impossível**.
- Se $\boldsymbol{p = q < n}$, temos um sistema **possível e indeterminado**.
- Se $\boldsymbol{p = q = n}$, temos um sistema **possível e determinado**.

Vejamos sua aplicação com os exemplos abaixo:

1) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ -x + 3y + z = 2 \end{cases}$

Seja A a matriz incompleta e C a matriz completa. Desse modo, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \; e \; C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Como a matriz A é quadrada, podemos calcular seu determinante:

$$\det A = -2 - 2 + 3 - 1 - 12 - 1 = -15 \neq 0$$

Assim, sendo p a característica da matriz A, temos $p = 3$.

A matriz completa C possui 3 linhas e 4 colunas, então, para calcular q (característica da matriz C), devemos calcular o determinante de uma submatriz de C. Quando fazemos isso, devemos sempre calcular os determinantes das submatrizes de maior ordem e ir testando até encontrar um que gere determinante não nulo. Nesse caso, como $\det A \neq 0$, podemos tomar a submatriz de C igual à matriz A. Logo, $q = p = 3$.

Nesse sistema, temos três incógnitas, desse modo $n = 3$.

Encontramos $p = q = n$ e de acordo com o teorema de Rouché-Capelli, temos um SPD.

2) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$

Vamos proceder de modo análogo ao exemplo 1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \; e \; C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Note que $\det A = 0$, pois a terceira linha é proporcional à segunda. Assim, devemos analisar os determinantes das submatrizes de A. Como a ordem de A é 3, vamos analisar as submatrizes de ordem 2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A' = 1 \neq 0$$

Como o determinante dessa submatriz é não nula, temos $p = 2$.

Agora, vamos analisar a característica de C. Como C é uma matriz $3x4$, devemos analisar suas submatrizes. Perceba que a terceira linha da matriz C é proporcional à segunda, assim, os determinantes das submatrizes de ordem 3 são nulos. Desse modo, devemos analisar as submatrizes de ordem 2. Como A' também é uma submatriz de C e seu determinante é não nulo, podemos tomar essa submatriz e encontrar $q = 2$.

O sistema possui $n = 3$. Então, como $p = q < n$, temos um SPI.

3) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + 2y + 2z = -1 \\ -x + 3y + z = 2 \end{cases}$

Aqui, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \; e \; C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Note que $\det A = 0$, pois a segunda linha é proporcional à primeira. Então, vamos analisar suas submatrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A' = 2 - 6 = -4 \neq 0$$

Assim, $p = 2$.

Agora que encontramos p, vamos calcular q.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow C' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det C' = 4 - 3 + 2 - 6 + 1 - 4 = -6 \neq 0$$

Como $\det C' \neq 0$ e C' é de ordem 3, temos $q = 3$.

Já podemos concluir pelo teorema de Rouché-Capelli que esse sistema é impossível, pois $p \neq q$.

11. (Fuvest/2005)

Diz-se que a matriz quadrada A tem posto 1 se uma de suas linhas é não-nula e as outras são múltiplas dessa linha.

Determine os valores de a, b e c para os quais a matriz $3x3$

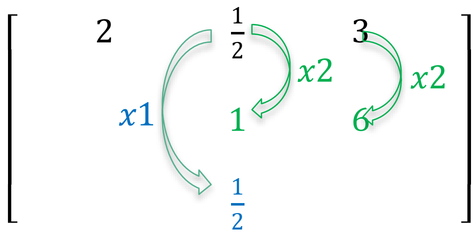
$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 3a - b + 2c & 1 & 6 \\ b + c - 3a & \frac{1}{2} & c - 2a + b \end{bmatrix}$$

tem posto 1.

Comentários

A matriz A é de ordem 3, então ela pode ter posto 3. Se queremos que a matriz A tenha posto 1, devemos fazer com que as outras linhas da matriz A sejam proporcionais à primeira. Dessa forma, conseguimos reduzir o posto da matriz.

Perceba que os números que não têm incógnitas nos dão indicações sobre a proporcionalidade entre as linhas da matriz.



Assim, percebemos que existe uma proporcionalidade entre essas linhas de tal forma que a segunda linha contém elementos que são o dobro de cada elemento da primeira linha e a terceira linha contém elementos que são iguais aos elementos da primeira linha.

Devemos encontrar a, b, c que satisfaçam as seguintes equações:

$$3a - b + 2c = {\color{red}2} \cdot 2$$
$$b + c - 3a = 2$$
$$c - 2a + b = 3$$

Desse modo, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3a - b + 2c = 4 \\ -3a + b + c = 2 \\ -2a + b + c = 3 \end{cases}$$

Fazendo $L_2 \to L_2 + L_1$ e $L_3 \to L_3 + L_1$, temos:

$$\begin{cases} 3a - b + 2c = 4 \\ 3c = 6 \\ a + 3c = 7 \end{cases}$$

Podemos ver que em L_2, temos $c = 2$. Substituindo esse valor em L_3, encontramos:

$$a + 3 \cdot 2 = 7 \Rightarrow a = 1$$

Por fim, substituindo a e c em L_1:

$$3 \cdot 1 - b + 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow 3 - b + 4 = 4 \Rightarrow b = 3$$

Dessa forma, para os valores $(a, b, c) = (1, 3, 2)$, o posto da matriz A é 1.

Gabarito: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{2})$

7. APÊNDICE

Nesse tópico, vamos aprofundar nosso conhecimento sobre sistemas lineares. Vejamos o que significa autovalor e autovetor.

7.1. AUTOVALOR E AUTOVETOR

Considere a equação matricial

$$A \cdot X = \lambda \cdot X$$

Nos quais A é uma matriz quadrada de ordem n, X é a matriz coluna $n\ x\ 1$ e λ é um número real ou complexo (complexo é um conjunto que abrange os números que não podem ser representados pelo conjunto dos reais). X também pode ser entendido como um vetor coluna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}\ ou\ \lambda \in \mathbb{C}$$

Note que o produto matricial $A \cdot X$ gera uma matriz $n\ x\ 1$.

Podemos manipular essa equação para encontrar o seguinte sistema:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X \Rightarrow A \cdot X - \lambda \cdot X = 0$$

Como λ é um número real ou complexo, podemos reescrever o produto $\lambda \cdot X$ como $\lambda I \cdot X$. Veja:

$$\lambda \cdot X = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda I \cdot X = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Assim, podemos escrever:

$$A \cdot X - \lambda \cdot X = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)X = 0$$

O produto matricial encontrado representa um sistema linear homogêneo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}}_{A-\lambda I} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sabemos que todo sistema linear homogêneo admite a solução trivial. Vamos analisar o determinante da matriz incompleta desse sistema

$$\det(A-\lambda I)$$

Pelo teorema de Cramer, temos os seguintes resultados:

- $\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow SPI$
- $\det(A-\lambda I)\neq 0 \Rightarrow SPD$

$\det(A-\lambda I)$ é chamado de polinômio característico cuja variável é λ:

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)$$

Se igualarmos o polinômio característico a zero, encontramos a equação característica:

$$\det(A-\lambda I)=0$$

As raízes dessa equação $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ são chamadas de autovalores da matriz A. Para cada um desses valores, geramos um conjunto solução. As soluções são chamadas de autovetores associados a cada autovalor.

Vejamos na prática como aplicamos esse conhecimento.

Considere o sistema abaixo, no qual $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$A\cdot X=\lambda\cdot X$$

Podemos encontrar o seu polinômio característico. Para isso, devemos calcular $\det(A-\lambda I)$:

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=(2-\lambda)(3-\lambda)=\lambda^2-5\lambda+6$$

$$\Rightarrow p(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+6$$

Se quisermos encontrar os autovalores associados à matriz A, basta calcular as raízes da equação característica:

$$\lambda^2-5\lambda+6=0$$

As raízes dessa equação são $\lambda_1=2$ e $\lambda_2=3$. Esses são os autovalores de A.

Para encontrar os autovetores, usamos os autovalores encontrados e substituímos no sistema linear.

Para $\lambda_1=2$, temos:

$$A\cdot X=\lambda\cdot X\Rightarrow (A-\lambda I)\cdot X=0$$

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 0 \\ 2 & 3-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x + y = 0$$

Assim, o sistema se resume à apenas uma equação. Seja $x = \alpha \neq 0$, então, temos:

$$2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x = -2\alpha$$

Portanto, para $\lambda_1 = 2$, temos a seguinte solução:

$$\overrightarrow{X_1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{X_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix}; \alpha \neq 0}$$

Definindo-se os valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ e diferentes de zero, encontramos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

Vamos repetir o processo para $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 0 \\ 2 & 3-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Note que o sistema que encontramos não depende da variável y. Portanto, qualquer valor de y é solução do sistema. Desse modo:

$$\boxed{\overrightarrow{X_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}; \alpha \neq 0}$$

Os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$ possuem a forma acima e são soluções do sistema.

Você verá que a banca pode eventualmente cobrar esse conhecimento na prova, mas esse assunto será cobrado de uma forma bem superficial, pois é um tópico da álgebra linear que é aprendido nos primeiros anos de engenharia.

Para finalizar, vamos ver um teorema bem interessante que possibilita o cálculo da matriz inversa de um outro modo.

Para calcular $\det(A - \lambda I)$, basta subtrair λ da diagonal principal da matriz A. Veja os exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 7 \\ 2 & 5-\lambda & 8 \\ 3 & 6 & 9-\lambda \end{vmatrix}$$

7.2. TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

Esse teorema dificilmente pode ser cobrado na prova e, por isso, vou apresentar apenas o que interessa.

Considere uma matriz quadrada A de ordem n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sendo $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ o polinômio característico de A, então pelo teorema de Cayley-Hamilton, $p(A) = 0$, isto é, A é um zero do seu polinômio característico.

Podemos usar esse teorema para encontrar a inversa da matriz A.

Vejamos um exemplo.

Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Podemos ver que A é inversível, pois $\det A = 2 \neq 0$. Vamos encontrar seu polinômio característico.

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5\lambda + 2$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 2$$

Aplicando o teorema de Cayley-Hamilton, temos:

$$p(A) = 0 \Rightarrow A^2 - 5A + 2I = 0$$

Multiplicando-se a equação acima à direita por A^{-1}, encontramos:

$$A^2 \cdot A^{-1} - 5A \cdot A^{-1} + 2A^{-1} = 0$$

$$A \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} - 5\underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} + 2A^{-1} = 0$$

$$A - 5I + 2A^{-1} = 0$$

Isolando A^{-1} e dividindo a equação por 2:

$$A^{-1} = \frac{5}{2}I - \frac{1}{2}A$$

Substituindo a matriz A na equação:

$$A^{-1} = \frac{5}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Esse é outro método para calcular a matriz inversa. Agora que vimos toda a teoria que precisamos para resolver as questões de sistemas lineares, vamos praticar!

8. QUESTÕES NÍVEL 1

1. (EEAR/2007)

A tabela mostra os pedidos de 4 clientes em uma lanchonete.

Cliente	Pedidos
1	1 suco de laranja, 2 hambúrgueres e 3 porções de batata frita.
2	3 sucos de laranja, 1 hambúrguer e 2 porções de batata frita.
3	2 sucos de laranja, 3 hambúrgueres e 1 porção de batata frita.
4	1 suco de laranja, 1 hambúrguer e 1 porção de batata frita.

Se os clientes $1, 2$ e 3 pagaram, respectivamente, $R\$11,10$, $R\$10,00$ e $R\$11,90$ por seus pedidos, então o cliente 4 pagou $R\$$

a) $5,00$

b) $5,10$

c) $5,40$

d) $5,50$

2. (ESA/2011)

Três amigos, Abel, Bruno e Carlos, juntos possuem um total de 555 figurinhas. Sabe-se que Abel possui o triplo de Bruno menos 25 figurinhas, e que Bruno possui o dobro de Carlos mais 10 figurinhas. Desses amigos, o que possui mais tem

a) 250 figurinhas

b) 365 figurinhas

c) 275 figurinhas

d) 325 figurinhas

e) 300 figurinhas

3. (ESA/2012)

Em um programa de TV, o participante começa com $R\$\ 500,00$. Para cada pergunta respondida corretamente, recebe $R\$\ 200,00$; e para cada resposta errada perde $R\$\ 150,00$. Se um participante respondeu todas as 25 questões formuladas no programa e terminou com $R\$\ 600,00$, quantas questões ele acertou?

a) 14

b) 9

c) 10

d) 11

e) 12

4. (ESA/2010)

Uma pessoa deseja totalizar a quantia de $R\$ \ 600,00$ utilizando cédulas de um, dez e vinte reais, num total de 49 cédulas, de modo que a diferença entre as quantidades de cédulas de dez e de um real seja igual a nove unidades. Nesse caso, a quantidade de cédulas de vinte reais de que a pessoa precisará será igual a:

a) 10

b) 19

c) 20

d) 21

e) 29

5. (EsPCEx/2008)

A soma das idades dos amigos Pedro, José e Ivo é igual a 60. Sabe-se que a soma da idade de José com a diferença entre as idades de Pedro e Ivo (nesta ordem) é igual a 30 e que o dobro da idade de Pedro mais a idade de José, menos a idade de Ivo é igual a 55. Assim, a idade de José é

a) 10

b) 15

c) 20

d) 25

e) 30

6. (EsPCEx/2001)

Numa partida de basquetebol, uma equipe, entre cestas de 2 (dois) pontos e 3 (três) pontos, fez 40 cestas, totalizando 98 pontos. Pode-se dizer que o número de cestas de 3 (três) pontos dessa equipe foi de:

a) 20

b) 18

c) 26

d) 24

e) 22

7. (EsPCEx/2006)

Em um grupo de três crianças de idades diferentes foi notado que a soma das duas idades menores menos a maior é igual a 2 anos e que a menor idade mais o dobro da maior é igual a 28 anos. As idades são números inteiros positivos. Dentre todas as possibilidades, existe uma em que a soma

das idades das crianças é a maior possível, observando-se sempre o fato de as crianças terem idades diferentes. Essa soma, em anos, é

a) 20

b) 22

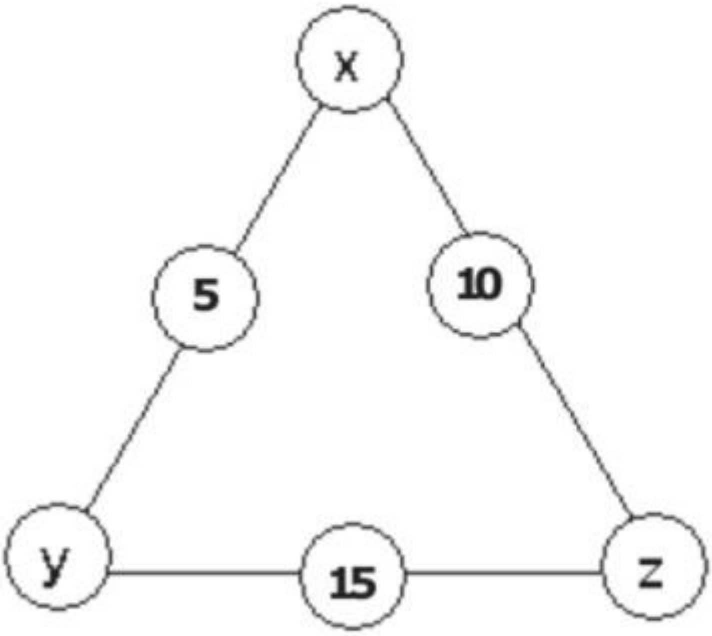
c) 24

d) 26

e) 28

8. (EsPCEx/2011)

A figura abaixo é formada por um dispositivo de forma triangular em que, nos vértices e nos pontos médios dos lados, estão representados alguns valores, nem todos conhecidos. Sabe-se que a soma dos valores correspondentes a cada lado do triângulo é sempre 24.



Assim, o valor numérico da expressão $x - y \cdot z$ é

a) -2

b) -1

c) 2

d) 5

e) 10

9. (EsPCEx/2007)

Em uma bolsa existem peças em formatos de triângulos, quadrados e pentágonos, nas quantidades de x triângulos, y quadrados e z pentágonos. Sabendo-se que a soma das quantidades de peças é igual a 10; que, se somarmos as quantidades de vértices de todas as peças, obtemos 37; e que a quantidade de triângulos é igual à soma das quantidades de quadrados e pentágonos, o valor de $2x + 3y + z$ é igual a:

a) 21

b) 19

c) 15

d) 10

e) 8

10. (EsPCEx/2000)

José e Maria, acompanhados de seu filho Pedro, queriam se pesar. Para tanto, utilizaram uma balança defeituosa que só indicava corretamente pesos superiores a $60\ kg$. Desta forma, eles se pesaram, dois a dois, e obtiveram os seguintes resultados:

- **José e Pedro: $87\ kg$**
- **José e Maria: $123\ kg$**
- **Maria e Pedro: $66\ kg$**

Diante desses resultados, pode-se concluir que

a) cada um deles pesa menos que $60\ kg$.

b) dois deles pesam mais que $60\ kg$.

c) José é mais pesado que Maria e Pedro juntos.

d) Maria é a mais pesada dos três.

e) o peso de Maria é a média aritmética dos pesos de José e Pedro.

11. (AMAN/2017)

Considere o sistema linear homogêneo $\begin{cases} x - 3y + kz = 0 \\ 3x + ky + z = 0 \\ kx + y = 0 \end{cases}$, onde k é um número real.

O único valor que torna o sistema, acima, possível e indeterminado, pertence ao intervalo

a) $(-4, -2]$

b) $(-2, 1]$

c) $(2, 4]$

d) $(2, 4]$

e) $(4, 6]$

12. (AMAN/2016)

Para que o sistema linear $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = b \end{cases}$, em que a e b são reais, seja possível e indeterminado, o valor de $a + b$ é igual a

a) 10

b) 11

c) 12

d) 13

e) 14

13. (AMAN/2011)

Para que o sistema linear $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ ax + 2y = b \end{cases}$ seja possível e indeterminado, o valor de $a + b$ é:

a) -1

b) 4

c) 9

d) 14

e) 19

GABARITO

1. d
2. b
3. d
4. c
5. c
6. b
7. d
8. a
9. a
10. c
11. b
12. b
13. d

RESOLUÇÃO

1. (EEAR/2007)

A tabela mostra os pedidos de 4 clientes em uma lanchonete.

Cliente	Pedidos
1	1 suco de laranja, 2 hambúrgueres e 3 porções de batata frita.
2	3 sucos de laranja, 1 hambúrguer e 2 porções de batata frita.
3	2 sucos de laranja, 3 hambúrgueres e 1 porção de batata frita.
4	1 suco de laranja, 1 hambúrguer e 1 porção de batata frita.

Se os clientes $1, 2$ e 3 pagaram, respectivamente, $R\$11,10$, $R\$10,00$ e $R\$11,90$ por seus pedidos, então o cliente 4 pagou $R\$$

a) $5,00$

b) $5,10$

c) $5,40$

d) $5,50$

Comentários

Equacionando o problema dado:

$$\begin{cases} 1L + 2H + 3B = 11{,}10 \\ 3L + 1H + 2B = 10{,}00 \\ 2L + 3H + 1B = 11{,}90 \\ 1L + 1H + 1B = k \end{cases}$$

Usaremos o sistema formado pelas 3 primeiras equações para encontrar o valor individual de cada item, e depois substituiremos na última equação para obter o valor de k

$$\begin{cases} 1L + 2H + 3B = 11{,}10 \\ 3L + 1H + 2B = 10{,}00 \\ 2L + 3H + 1B = 11{,}90 \end{cases}$$

Usaremos a regra de Cramer

$$D = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 18$$

$$D_L = \det\begin{pmatrix} 11{,}1 & 2 & 3 \\ 10 & 1 & 2 \\ 11{,}9 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{132}{5}$$

$$D_H = \det\begin{pmatrix} 1 & 11{,}1 & 3 \\ 3 & 10 & 2 \\ 2 & 11{,}9 & 1 \end{pmatrix} = \frac{222}{5}$$

$$D_B = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 11{,}1 \\ 3 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 11{,}9 \end{pmatrix} = \frac{141}{5}$$

Sendo assim, obtemos:

$$\begin{cases} L = \frac{D_L}{D} = \frac{\left(132/5\right)}{18} = \frac{22}{15} \\ H = \frac{D_H}{D} = \frac{\left(222/5\right)}{18} = \frac{37}{15} \\ B = \frac{D_B}{D} = \frac{\left(141/5\right)}{18} = \frac{47}{30} \end{cases}$$

Fazendo $L + H + B = k$ obtemos

$$k = \left(\frac{22}{15}\right) + \left(\frac{37}{15}\right) + \left(\frac{47}{30}\right) = \frac{165}{30} = 5{,}5$$

$$k = 5{,}50$$

Logo, o cliente 4 gastou $R\$\ 5{,}50$

Gabarito: “d”.

---

2. (ESA/2011)

Três amigos, Abel, Bruno e Carlos, juntos possuem um total de 555 figurinhas. Sabe-se que Abel possui o triplo de Bruno menos 25 figurinhas, e que Bruno possui o dobro de Carlos mais 10 figurinhas. Desses amigos, o que possui mais tem

a) 250 figurinhas

b) 365 figurinhas

c) 275 figurinhas

d) 325 figurinhas

e) 300 figurinhas

Comentários

Equacionando o problema:

$$\begin{cases} A + B + C = 555 \quad (eq.1) \\ A = 3B - 25 \quad (eq.2) \\ B = 2C + 10 \quad (eq.3) \end{cases}$$

Fazendo $eq.3$ em $eq.2$

$$A = 3 \cdot (2C + 10) - 25$$
$$A = 6C + 5 \ \ (eq.4)$$

Fazendo $eq.4$ e $eq.3$ em $eq.1$

$$(6C + 5) + (2C + 10) + C = 555$$
$$9C = 540 \quad \Rightarrow \quad C = 60 \ \ (eq.5)$$

Fazendo $eq.5$ em $eq.3$

$$B = 2 \cdot 60 + 10 = 130$$

Fazendo $eq.5$ em $eq.4$

$$A = 6 \cdot 60 + 5 = 365$$

O maior dentre eles é $A = 365$

Gabarito: "b".

---

3. (ESA/2012)

Em um programa de TV, o participante começa com $R\$\ 500,00$. Para cada pergunta respondida corretamente, recebe $R\$\ 200,00$; e para cada resposta errada perde $R\$\ 150,00$. Se um participante respondeu todas as 25 questões formuladas no programa e terminou com $R\$\ 600,00$, quantas questões ele acertou?

a) 14

b) 9

c) 10

d) 11

e) 12

Comentários

Seja $e - erro$ e $a - acertos$, como são 25 perguntas no total, então

$$e + a = 25$$

O saldo final de um participante é dado por:

$$S = 500 - 150e + 200a$$

Do enunciado, extraímos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} e + a = 25 \\ 200a - 150e + 500 = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = 25 - a \quad (eq.1) \\ 200a - 150e = 100 \ (eq.2) \end{cases}$$

Fazendo $eq.2$ em $eq.1$

$$200a - 150(25 - a) = 100$$
$$\Rightarrow 350a - 3750 = 100$$
$$\Rightarrow a = \frac{3850}{350} = 11$$

O participante acertou 11 perguntas

Gabarito: "d".

---

4. (ESA/2010)

Uma pessoa deseja totalizar a quantia de $R\$\ 600,00$ utilizando cédulas de um, dez e vinte reais, num total de 49 cédulas, de modo que a diferença entre as quantidades de cédulas de dez e de um

real seja igual a nove unidades. Nesse caso, a quantidade de cédulas de vinte reais de que a pessoa precisará será igual a:

a) 10

b) 19

c) 20

d) 21

e) 29

Comentários

Seja $u - cédulas\ de\ um$, $d - cédulas\ de\ dez$ e $v - cédulas\ de\ vinte$. São 49 cédulas no total, então:

$$u + d + v = 49$$

Do enunciado:

$$d - u = 9$$

E a soma total deve corresponder a $R\$\ 600{,}00$, então

$$u + 10d + 20v = 600$$

Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u + d + v = 49 & (eq.1) \\ d = 9 + u & (eq.2) \\ u + 10d + 20v = 600 & (eq.3) \end{cases}$$

Fazendo $eq.2$ em $eq.1$

$$u + (9 + u) + v = 49$$
$$v = 40 - 2u \quad (eq.4)$$

Fazendo $eq.2$ e $eq.4$ em $eq.3$

$$u + 10(9 + u) + 20(40 - 2u) = 600$$
$$29u = 290$$
$$\Rightarrow \quad u = 10$$

Substituindo o valor de u em $eq.4$

$$v = 40 - 2(10) = 20$$

Gabarito: "c".

---

5. (EsPCEx/2008)

A soma das idades dos amigos Pedro, José e Ivo é igual a 60. Sabe-se que a soma da idade de José com a diferença entre as idades de Pedro e Ivo (nesta ordem) é igual a 30 e que o dobro da idade de Pedro mais a idade de José, menos a idade de Ivo é igual a 55. Assim, a idade de José é

a) 10

b) 15

c) 20

d) 25

e) 30

Comentários

Equacionando o problema obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} P + J + I = 60 \\ J + (P - I) = 30 \\ 2P + J - I = 55 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P+J+I=60 \\ P+J-I=30 \\ 2P+J-I=55 \end{cases}$$

Usaremos a regra de Cramer

$$D=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}=-2$$

$$D_J=\det\begin{pmatrix}1 & 60 & 1\\ 1 & 30 & -1\\ 2 & 55 & -1\end{pmatrix}=-40$$

$$\Rightarrow \quad J=\frac{D_J}{D}=\frac{-40}{-2}=20$$

Portanto, José tem 20 anos

Gabarito: "c".

---

6. (EsPCEx/2001)

Numa partida de basquetebol, uma equipe, entre cestas de 2 (dois) pontos e 3 (três) pontos, fez 40 cestas, totalizando 98 pontos. Pode-se dizer que o número de cestas de 3 (três) pontos dessa equipe foi de:

a) 20

b) 18

c) 26

d) 24

e) 22

Comentários

Seja $t - cestas\ de\ 3\ pontos$ e $d - cestas\ de\ 2\ pontos$.

Equacionando as informações do enunciado, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} t+d=40 \quad (eq.1) \\ 3t+2d=98 \quad (eq.2) \end{cases}$$

Isolando d na $eq.1$ e substituindo em $eq.2$ obtemos:

$$3t+2(40-t)=98$$
$$3t-2t+80=98$$
$$t=18$$

Gabarito: "b".

---

7. (EsPCEx/2006)

Em um grupo de três crianças de idades diferentes foi notado que a soma das duas idades menores menos a maior é igual a 2 anos e que a menor idade mais o dobro da maior é igual a 28 anos. As idades são números inteiros positivos. Dentre todas as possibilidades, existe uma em que a soma das idades das crianças é a maior possível, observando-se sempre o fato de as crianças terem idades diferentes. Essa soma, em anos, é

a) 20

b) 22

c) 24

d) 26

e) 28

Comentários

Sejam x, y e z, as idades das crianças, tal que $x > y > z$.

Equacionando as informações dadas no enunciado, obtemos:

$$\begin{cases} y + z - x = 2 \ (eq.1) \\ z + 2x = 28 \quad (eq.2) \end{cases}$$

Isolando z em $eq.2$ e substituindo em $eq.1$ obtemos:

$$y + (28 - 2x) - x = 2$$
$$y = 3x - 26 \ \ (eq.3)$$

De $eq.2$ e $eq.3$ obtemos:

$$S = x + y + z = x + (3x - 26) + (28 - 2x) =$$
$$S = 2x + 2$$

Quando maior o valor de x maior o valor de S. Devemos encontrar o maior x inteiro possível

Mas, devemos lembrar que $x > y > z$

$$x > (3x - 26) > (28 - 2x)$$

$$\begin{cases} x > 3x - 26 \\ 3x - 26 > 28 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 13 \\ x > \dfrac{54}{5} \end{cases}$$

Logo, $x \in \left]\frac{54}{5}, 13\right[$ mas como x é inteiro, então $x \in \{11, 12\}$. Sendo assim, o maior x possível é $x = 12$, então o valor da soma é dado por:

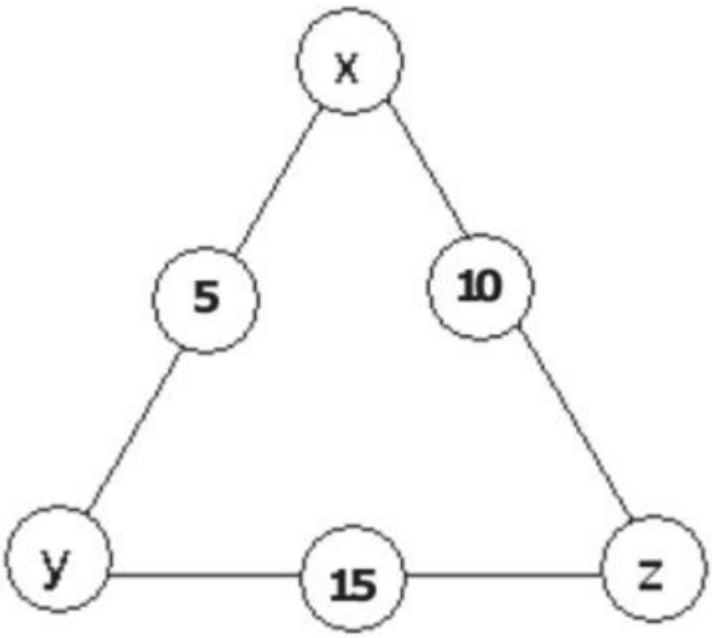
$$S = 2x - 6 = 2 \cdot 12 + 2 = 26$$

Gabarito: "d".

---

8. (EsPCEx/2011)

A figura abaixo é formada por um dispositivo de forma triangular em que, nos vértices e nos pontos médios dos lados, estão representados alguns valores, nem todos conhecidos. Sabe-se que a soma dos valores correspondentes a cada lado do triângulo é sempre 24.



Assim, o valor numérico da expressão $x - y \cdot z$ é

a) -2

b) -1

c) 2

d) 5

e) 10

Comentários

Equacionando para a três arestas, obtemos:

$$\begin{cases} y + 15 + z = 24 \ \ (eq.1) \\ y + 5 + x = 24 \ \ (eq.2) \\ x + 10 + z = 24 \ \ (eq.3) \end{cases}$$

Igualando $eq.1$ e $eq.3$, obtemos:

$$x + 10 + z = y + 15 + z$$
$$x = y + 5 \ (eq.4)$$

Substituindo $eq.4$ em $eq.2$

$$y + 5 + (y + 5) = 24$$
$$2y = 14$$
$$\Rightarrow y = 7$$

Substituindo o valor de y em $eq.1$ e $eq.4$, obtemos:

$$\begin{cases} (7) + 15 + z = 24 \\ x = (7) + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ x = 12 \end{cases}$$

Portanto,

$$x - y \cdot z = (12) - (7) \cdot (2) = -2$$

Gabarito: "a".

---

9. (EsPCEx/2007)

Em uma bolsa existem peças em formatos de triângulos, quadrados e pentágonos, nas quantidades de x triângulos, y quadrados e z pentágonos. Sabendo-se que a soma das quantidades de peças é igual a 10; que, se somarmos as quantidades de vértices de todas as peças, obtemos 37; e que a quantidade de triângulos é igual à soma das quantidades de quadrados e pentágonos, o valor de $2x + 3y + z$ é igual a:

a) 21

b) 19

c) 15

d) 10

e) 8

Comentários

Considerando a geometria das peças, o enunciado nos fornece o seguinte sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 3x + 4y + 5z = 37 \\ x = y + z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 3x + 4y + 5z = 37 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Usaremos a regra de Cramer

$$D = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$D_x = \det\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 37 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 10$$

$$D_y = \det\begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 3 & 37 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 6$$

$$D_z = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 37 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

Sendo assim, obtemos:

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ z = \dfrac{D_z}{D} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Portanto,

$$2x + 3y + z = 2(5) + 3(3) + (2) = 21$$

Gabarito: "a".

---

10. (EsPCEx/2000)

José e Maria, acompanhados de seu filho Pedro, queriam se pesar. Para tanto, utilizaram uma balança defeituosa que só indicava corretamente pesos superiores a $60\ kg$. Desta forma, eles se pesaram, dois a dois, e obtiveram os seguintes resultados:

- **José e Pedro: $87\ kg$**
- **José e Maria: $123\ kg$**
- **Maria e Pedro: $66\ kg$**

Diante desses resultados, pode-se concluir que

a) cada um deles pesa menos que $60\ kg$.

b) dois deles pesam mais que $60\ kg$.

c) José é mais pesado que Maria e Pedro juntos.

d) Maria é a mais pesada dos três.

e) o peso de Maria é a média aritmética dos pesos de José e Pedro.

Comentários

Equacionando o problema, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} J + P = 87 & (eq.1) \\ J + M = 123 & (eq.2) \\ M + P = 66 & (eq.3) \end{cases}$$

Isolando P em $eq.1$ e substituindo em $eq.3$, obtemos

$$M + (87 - J) = 66$$
$$J = 21 + M \quad (eq.4)$$

Substituindo $eq.4$ em $eq.2$, obtemos:

$$(21 + M) + M = 123$$
$$2M = 102$$
$$\Rightarrow M = 51 \quad (eq.5)$$

Substituindo $eq.5$ em $eq.4$ e $eq.3$, obtemos:

$$\begin{cases} J = 21 + (51) \\ (51) + P = 66 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} J = 72 \\ P = 15 \end{cases}$$

Sendo assim obtemos os pesos de toda a família. Vamos agora analisar as alternativas

a) **Falso.**

José pesa 72 kg

b) **Falso.**

Somente José pesa mais que 60 kg

c) **Verdadeiro.**

$$J > P + M$$
$$72 > 51 + 15$$
$$72 > 66$$

d) **Falso.**

Maria pesa 51 kg e José pesa 72 kg, logo, José é mais pesado que Maria

e) **Falso.**

$$\mathrm{M} \neq \frac{\mathrm{J}+\mathrm{P}}{2}$$
$$51 \neq \frac{72+15}{2} = \frac{87}{2} = 43{,}5$$
$$51 \neq 43{,}5$$

Gabarito: "c".

---

11. (AMAN/2017)

Considere o sistema linear homogêneo $\begin{cases} x - 3y + kz = 0 \\ 3x + ky + z = 0 \\ kx + y = 0 \end{cases}$**, onde k é um número real.**

O único valor que torna o sistema, acima, possível e indeterminado, pertence ao intervalo

a) $(-4, -2]$

b) $(-2, 1]$

c) $(2, 4]$

d) $(2, 4]$

e) $(4, 6]$

Comentários

Para que o sistema seja possível e indeterminado, o determinante dos coeficientes deve ser nulo.

$$det\begin{bmatrix} 1 & -3 & k \\ 3 & k & 1 \\ k & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -3k + 3k - k^3 - 1 = 0$$

Assim, temos $k^3 = -1$. Podemos manipular essa equação da seguinte forma:

$$k^3 = -1 \Rightarrow k = -1$$

Portanto, o único valor que torna o sistema possível e indeterminado é $k = -1$, o qual pertence ao intervalo $(-2, 1]$ do item "b".

Gabarito: "b"

---

12. (AMAN/2016)

Para que o sistema linear $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = b \end{cases}$**, em que a e b são reais, seja possível e indeterminado, o valor de $a + b$ é igual a**

a) 10

b) 11

c) 12

d) 13

e) 14

Comentários

Para que o sistema seja possível e indeterminado, o valor do determinante dos coeficientes deve ser nulo:

$$det\begin{bmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & -3\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -6+2+5a-4a-5+3=0 \Rightarrow \boxed{a=6}$$

Assim, substituindo o valor de a no sistema:

$$\begin{cases} x+y+6z=1\\ x+2y+z=2\\ 2x+5y-3z=b\end{cases}$$

Fazendo a terceira equação menos duas vezes a primeira, temos:

$$(2x+5y-3z)-2\cdot(x+y+6z)=b-2$$

$$3y-15z=b-2$$

$$y-5z=\frac{b-2}{3}\ (1)$$

Fazendo a terceira equação menos duas vezes a primeira, temos:

$$(2x+5y-3z)-2\cdot(x+2y+z)=b-4$$

$$y-5z=b-4\ (2)$$

Igualando (1) e (2):

$$\frac{b-2}{3}=b-4$$

$$\boxed{b=5}$$

Por fim, $a+b=6+5=11.$

Gabarito: "b"

---

13. (AMAN/2011)

Para que o sistema linear $\begin{cases} 2x+y=5\\ ax+2y=b\end{cases}$ seja possível e indeterminado, o valor de $a+b$ é:

a) -1

b) 4

c) 9

d) 14

e) 19

Comentários

Para que o sistema seja possível e indeterminado, o valor do determinante dos coeficientes deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4 - a = 0$$

$$\boxed{a = 4}$$

Substituindo o valor de a no sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = b \end{cases}$$

Podemos reescrever da seguinte forma:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = b/2 \end{cases}$$

Portanto, para que o sistema seja possível, as duas equações do sistema acima devem ser iguais. Para isso:

$$5 = \frac{b}{2} \Rightarrow \boxed{b = 10}$$

Assim, $a + b = 10 + 4 = 14$.

Gabarito: "d"

9. QUESTÕES NÍVEL 2

14. (AFA/2020)

Três amigas: Tereza, Ana e Kely entram juntas numa loja de chocolates.

A tabela abaixo indica a quantidade de caixas e o tipo de trufas que cada uma comprou na loja.

	Trufas de morango	Trufas de nozes	Trufas de côco
Tereza	3	7	1
Ana	4	10	1
Kely	1	1	1

Com as compras, Tereza gastou 315 reais e Kely gastou 105 reais.

Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

( ) O valor da caixa de trufas de côco é o dobro do valor da caixa de trufas de nozes.

( ) Ana gastou o quádruplo do que Kely gastou.

( ) As três juntas gastaram menos de 800 reais.

Sobre as proposições, tem-se que:

a) todas são verdadeiras.

b) apenas uma é falsa.

c) apenas duas são falsas.

d) todas são falsas.

15. (AFA/2019)

Considere o sistema abaixo

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}+\frac{1}{c^2}=9 \\ \frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}=3 \\ \frac{3}{a^2}-\frac{1}{b^2}-\frac{2}{c^2}=-4 \end{cases}$$

Sabendo-se que a, b e c são números reais não nulos, é INCORRETO afirmar que:

a) $|a|+|b|+|c| \in (\mathbb{R}-\mathbb{Q})$

b) $a^2+b^2+c^2>2$

c) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} a^2 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & b^2 & 4 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$ é igual a $\frac{1}{6}$.

d) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ é par.

16. (AFA/2014)

O sistema linear nas incógnitas x, y e z abaixo possui uma infinidade de soluções.

$$\begin{cases} (sen\ a)x+y-z=0 \\ x-(sen\ a)y+z=1 \\ x+y=\cos a \end{cases}$$

Sobre o parâmetro a, $a \in \mathbb{R}$, pode-se afirmar que

a) $a=k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $a=2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $a=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $a=\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$

17. (AFA/2012)

Sejam as matrizes

$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} k \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

Em relação à equação matricial $AX=B$, é correto afirmar que

a) é impossível para $k=\frac{7}{2}$.

b) admite solução única para $k=\frac{7}{2}$.

c) toda solução satisfaz à condição $x_1+x_2=4$.

d) admite a terna ordenada $\left(2, 1, -\frac{1}{2}\right)$ como solução.

18. (AFA/2011)

Três amigos Samuel, Vitória e Júlia, foram a uma lanchonete.

• Samuel tomou 1 guaraná, comeu 2 esfirras e pagou 5 reais.

• Vitória tomou 2 guaranás, comeu 1 esfirra e pagou 4 reais.

• Júlia tomou 2 guaranás, comeu 2 esfirras e pagou K reais.

Considerando-se que cada um dos três pagou o valor exato do que consumiu, é correto afirmar que

a) o guaraná custou o dobro da esfirra.

b) os três amigos, juntos, consumiram 16 reais.

c) cada esfirra custou 2 reais.

d) Júlia pagou 8 reais pelo que consumiu.

19. (AFA/2010)

Seja o sistema S de equações nas incógnitas x, y e z e parâmetro real m

$$S = \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - my - 3z = 0 \\ x + 3y + mz = m \end{cases}$$

Analise as proposições a seguir e assinale a INCORRETA.

a) Se $m = -3$, então S é impossível.

b) S é determinado se, e somente se, $m \neq 0$

c) Se S é homogêneo, então $x + y + z$ é sempre um número múltiplo de 3

d) S admite solução para todo $m \neq -3$

20. (AFA/2010)

Pedro e Maria com seus filhos Gabriel e João foram a uma clínica médica para uma revisão de saúde. Fazia parte da avaliação aferir o peso de cada um. A balança da clínica era muito antiga e tinha um defeito, só indicava pesos maiores de 60 kg.

Para resolver a pesagem, procedeu-se da seguinte maneira:

Pesou-se

- Pedro, Maria e Gabriel, totalizando $150\ kg$
- Pedro, Gabriel e João, totalizando $117\ kg$
- Maria, Gabriel e João, totalizando $97\ kg$
- Pedro, Maria, Gabriel e João, totalizando $172\ kg$

Com base nessas informações, é correto afirmar que:

a) com essa balança é possível pesar Gabriel e João juntos

b) a diferença entre os pesos de Pedro e Maria é o peso de João.

c) Pedro é mais pesado que Maria e João juntos.

d) não é possível pesar Maria sozinha nessa balança.

21. (EFOMM/2017)

Dado o sistema linear abaixo, analise as seguintes afirmativas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & b \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$$

I. Se $b \neq -12$, o sistema linear terá uma única solução.

II. Se $a = b = -12$, o sistema linear terá infinitas soluções.

III. Se $b = -12$, o sistema será impossível.

a) Todas as afirmativas são corretas.

b) Todas as formativas são incorretas.

c) Somente as afirmativas I e III são corretas.

d) Somente as afirmativas I e II são corretas.

e) Somente as afirmativas II e III são corretas.

22. (EFOMM/2009)

Dado o sistema de equações lineares

$S: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$. Sabendo-se que os determinantes:

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ são todos iguais a zero, apenas pode-se concluir que S

a) é determinado.

b) não é determinado.

c) admite a solução (0.0.0).

d) não é impossível.

e) não é indeterminado.

23. (Escola Naval/2015)

Analise o sistema a seguir.

$$\begin{cases} x + y + z = 0. \\ 4x - 2my + 3z = 0 \\ 2x + 6y - 4mz = 0 \end{cases}$$

Para o maior valor inteiro de m que torna o sistema acima possível e indeterminado, pode-se afirmar que a expressão

$\left|tg\left(\frac{\pi m}{4}\right) + \sec^2\left(\frac{2\pi m}{3}\right) - 1\right|$ vale

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{9}{4}$

c) $-\frac{11}{4}$

d) $\frac{7}{4}$

e) $-\frac{1}{4}$

GABARITO

14. b
15. b

16. b
17. c
18. c
19. b
20. d
21. d
22. b
23. Sem gabarito

RESOLUÇÃO

14. (AFA/2020)

Três amigas: Tereza, Ana e Kely entram juntas numa loja de chocolates.

A tabela abaixo indica a quantidade de caixas e o tipo de trufas que cada uma comprou na loja.

	Trufas de morango	Trufas de nozes	Trufas de côco
Tereza	3	7	1
Ana	4	10	1
Kely	1	1	1

Com as compras, Tereza gastou 315 reais e Kely gastou 105 reais.

Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

( ) O valor da caixa de trufas de côco é o dobro do valor da caixa de trufas de nozes.

( ) Ana gastou o quádruplo do que Kely gastou.

( ) As três juntas gastaram menos de 800 reais.

Sobre as proposições, tem-se que:

a) todas são verdadeiras.

b) apenas uma é falsa.

c) apenas duas são falsas.

d) todas são falsas.

Comentários

Primeiramente iremos equacionar o problema, consideremos:

$m - preço\ da\ caixa\ de\ morango, n - preço\ da\ caixa\ de\ nozes$ e $c - preço\ da\ caixa\ de\ côco$

$$\begin{cases} Tereza: 3m + 7n + c = 315 & (eq.1) \\ Ana: 4m + 10n + c & (eq.2) \\ Kely: m + n + c = 105 & (eq.3) \end{cases}$$

Isolando c em $eq.3$ e substituindo em $eq.1$

$$3m + 7n + (105 - n - m) = 2m + 6n + 105 = 315$$
$$\Rightarrow \quad m = 105 - 3n \quad (eq.4)$$

Substituindo $eq.4$ em $eq.3$, obtemos:

$$(105 - 3n) + n + c = 105$$
$$\Rightarrow \quad c = 2n \quad (eq.5)$$

Substituindo $eq.4$ e $eq.5$ em $eq.2$, obtemos:

$$4m + 10n + c = 4(105 - 3n) + 10n + (2n) = 420 - 12n + 10n + 2n = 420$$

Logo, Ana gastou $R\$\ 420{,}00$.

Analisando agora as assertivas obtemos:

(V) O valor da caixa de trufas de côco é o dobro do valor da caixa de trufas de nozes.

$$eq.5$$

(V) Ana gastou o quádruplo do que Kely gastou.

$420 = 4 \cdot 105$, Verdadeiro.

(F) As três juntas gastaram menos de 800 reais.

$315 + 420 + 105 = 840$, Falso.

Portanto, apenas 1 assertiva é falsa.

Gabarito: "b"

---

15. (AFA/2019)

Considere o sistema abaixo

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{2}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = 9 \\ \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{c^2} = 3 \\ \dfrac{3}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} - \dfrac{2}{c^2} = -4 \end{cases}$$

Sabendo-se que a, b e c são números reais não nulos, é INCORRETO afirmar que:

a) $|a| + |b| + |c| \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

b) $a^2 + b^2 + c^2 > 2$

c) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} a^2 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & b^2 & 4 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$ **é igual a** $\frac{1}{6}$.

d) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ **é par.**

Comentários

Faremos a seguinte substituição:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} = x \\ \frac{1}{b^2} = y \\ \frac{1}{c^2} = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 9 & (eq.1) \\ 2x + y - z = 3 & (eq.2) \\ 3x - y - 2z = -4 & (eq.3) \end{cases}$$

Fazendo $eq.1 + eq.2$, obtemos:

$$3(x + y) = 12 \quad (eq.4)$$

Fazendo $eq.3 + 2 \cdot eq.1$, obtemos:

$$5x + 3y = 14$$

$$2x + 3(x + y) = 12$$

$$\xrightarrow{eq.4} \quad 2x + 12 = 14$$

$$x = 1$$

$$\xrightarrow{eq.4} 3(1 + y) = 12 \Rightarrow y = 3$$

$$\xrightarrow{eq.2} 2 \cdot 1 + 3 - z = 3 \Rightarrow z = 2$$

Logo, temos:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} = 1 \\ \frac{1}{b^2} = 3 \\ \frac{1}{c^2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = 1 \\ |b| = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ |c| = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = \frac{1}{3} \\ c^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Analisaremos agora as alternativas:

a) Verdadeiro.

$$|a| + |b| + |c| = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6 + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6} \quad \text{é } um\ número\ irracional$$

b) Falso.

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{6} < \frac{12}{6} = 2$$

c) Verdadeiro.

Trata-se de uma matriz triangular, logo o determinante é o produto da diagonal principal, conforme:

$$\det \begin{bmatrix} a^2 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & b^2 & 4 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix} = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

d) Verdadeiro.

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1 + 3 + 2 = 6 \ , \qquad \text{é } um\ numero\ par$$

Gabarito: "b"

16. (AFA/2014)

O sistema linear nas incógnitas x, y e z abaixo possui uma infinidade de soluções.

$$\begin{cases}(sen\ a)x + y - z = 0 \\ x - (sen\ a)y + z = 1 \\ x + y = \cos a\end{cases}$$

Sobre o parâmetro a, $a \in \mathbb{R}$, pode-se afirmar que

a) $a = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $a = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $a = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Comentários

Para que o sistema seja indeterminado, o determinante da matriz dos coeficientes deve ser zero, logo:

$$D = \det\begin{bmatrix} sen\ a & 1 & -1 \\ 1 & -sen\ a & 1 \\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} = -2 \cdot sen\ a = 0$$

$$\Rightarrow \quad a = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para esse valor de a, temos:

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ x + z = 1 \\ x + y = \cos a\end{cases} \overset{eq.1+eq.2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = \cos a\end{cases}$$

Assim, teremos um S.P.I. quando $\cos a = 1$, ou seja:

$$\cos a = 1$$

$$\Rightarrow \quad a = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Gabarito: "b"

---

17. (AFA/2012)

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} k \\ 3 \\ 5\end{bmatrix}$$

Em relação à equação matricial $AX = B$, é correto afirmar que

a) é impossível para $k = \frac{7}{2}$.

b) admite solução única para $k = \frac{7}{2}$.

c) toda solução satisfaz à condição $x_1 + x_2 = 4$.

d) admite a terna ordenada $\left(2, 1, -\frac{1}{2}\right)$ como solução.

Comentários

Montando o sistema linear que representa as matrizes dadas temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = k \quad (eq.1) \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \quad (eq.2) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \quad (eq.3)\end{cases}$$

O valor de D do sistema é dado por:

$$D = \det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix} = 0$$

Sendo assim, calculamos agora D_{x_1}, D_{x_2} e D_{x_3}

$$D_{x_1} = \det\begin{bmatrix}k & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 5 & 1 & -2\end{bmatrix} = 14 - 4k$$

$$D_{x_2} = \det\begin{bmatrix}1 & k & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 5 & -2\end{bmatrix} = 4k - 14$$

$$D_{x_3} = \det\begin{bmatrix}1 & 1 & k\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 5\end{bmatrix} = 0$$

a) Falso.

Se $D_{x_1} = D_{x_2} = D_{x_3} = 0$ o sistema é indeterminado:

$$D_{x_1} = 14 - 4k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{7}{2}$$

Então, para $k = \frac{7}{2}$ o sistema é indeterminado.

b) Falso.

Como exposto no item anterior. O sistema será possível indeterminado, logo, a solução não é única.

c) Verdadeiro.

Fazendo $eq.2 + eq.3$, obtemos:

$$(x_1 + x_2 + 2x_3) + (x_1 + x_2 - 2x_3) = 3 + 5$$

$$2(x_1 + x_2) = 8$$

$$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 4$$

d) Falso.

Substituindo a terna ordenada na $eq.2$, obtemos:

$$1 \cdot (2) + 1 \cdot (1) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \neq 3$$

Gabarito: "c"

---

18. (AFA/2011)

Três amigos Samuel, Vitória e Júlia, foram a uma lanchonete.

- **Samuel tomou 1 guaraná, comeu 2 esfirras e pagou 5 reais.**
- **Vitória tomou 2 guaranás, comeu 1 esfirra e pagou 4 reais.**
- **Júlia tomou 2 guaranás, comeu 2 esfirras e pagou K reais.**

Considerando-se que cada um dos três pagou o valor exato do que consumiu, é correto afirmar que

a) o guaraná custou o dobro da esfirra.

b) os três amigos, juntos, consumiram 16 reais.

c) cada esfirra custou 2 reais.

d) Júlia pagou 8 reais pelo que consumiu.

Comentários

Equacionando o problema dado temos:

$$\begin{cases} samuel: & 1g + 2e = 5 \quad (eq.1) \\ vitoria: & 2g + 1e = 4 \quad (eq.2) \\ Julia: & 2g + 2e = k \quad (eq.3) \end{cases}$$

Fazendo $eq.1 - 2 \cdot eq.2$ obtemos:

$$-3 \cdot g = -3 \quad \Rightarrow \quad g = 1 \ (eq.4)$$

Substituindo $eq.4$ em $eq.2$, obtemos:

$$2 \cdot 1 + 1e = 4 \quad \Rightarrow \quad e = 2 \ (eq.5)$$

Substituindo $eq.4$ e $eq.5$ em $eq.3$, obtemos:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6$$

Portanto, o preço do guaraná é $R\$$ 1,00, o preço da esfirra é $R\$$ 2,00 e Julia gastou $R\$$ 6,00.

a) Falso.

$$g = 1 \neq 4 = 2e$$

b) Falso

$$5 + 4 + 6 = 15$$

Os ter gastaram $R\$$ 15,00

c) Verdadeiro.

$$e = 2$$

d) Falso.

Julia gastou $R\$$ 6,00

Gabarito: "c"

---

19. (AFA/2010)

Seja o sistema S de equações nas incógnitas x, y e z e parâmetro real m

$$S = \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - my - 3z = 0 \\ x + 3y + mz = m \end{cases}$$

Analise as proposições a seguir e assinale a INCORRETA.

a) Se $m = -3$, então S é impossível.

b) S é determinado se, e somente se, $m \neq 0$

c) Se S é homogêneo, então $x + y + z$ é sempre um número múltiplo de 3

d) S admite solução para todo $m \neq -3$

Comentários

Primeiramente, calcularemos os determinantes a fim de aplicar a regra de Cramer:

$$D = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -m & -3 \\ 1 & 3 & m \end{bmatrix} = -m(m+3)$$

$$D_x = \det\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -m & -3 \\ m & 3 & m \end{bmatrix} = -m(m+6)$$

$$D_y = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & m & m \end{bmatrix} = 2m$$

$$D_z = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -m & 0 \\ 1 & 3 & m \end{bmatrix} = -m(m+2)$$

A partir daí concluímos que:

1- $D = D_x = D_y = D_z = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0 \quad \Rightarrow \quad S.P.I$

2- Se $m = -3 \quad \Rightarrow \quad D = 0$ e $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$ e $D_z \neq 0 \quad \Rightarrow \quad S.I$

3- Se $D \neq 0$ e $D \neq -3 \quad \Rightarrow \quad S.P.D$

a) Verdadeiro.

Conclusão 2

b) Falso.

Conclusão 3. Se $m = -3$ não é determinado.

c) Verdadeiro.

Substituindo $m = 0$ no sistema:

$$S = \begin{cases} x + 2y - z = 0 & (\text{eq}.4) \\ x - 3z = 0 & (\text{eq}.5) \\ x + 3y = 0 & (eq.6\,) \end{cases}$$

De $eq.5$ obtemos:

$$x = 3z$$

De $eq.6$ obtemos:

$$x = -3y$$

Logo,

$$-3y = 3z \quad \Rightarrow \quad y = -z$$

Fazendo a operação dada:

$$x + y + z = 3z - z + z = 3z$$

Logo, se as entradas de x, y e z forem inteiras, então, a soma $x + y + z$ é múltiplo de 3

d) Verdadeiro.

Da conclusão 2. S é impossível para $m = -3$, caso contrário, S é possível. Logo, admite solução.

Gabarito: "b"

---

20. (AFA/2010)

Pedro e Maria com seus filhos Gabriel e João foram a uma clínica médica para uma revisão de saúde. Fazia parte da avaliação aferir o peso de cada um. A balança da clínica era muito antiga e tinha um defeito, só indicava pesos maiores de $60\ kg$.

Para resolver a pesagem, procedeu-se da seguinte maneira:

Pesou-se

- Pedro, Maria e Gabriel, totalizando $150\ kg$

- Pedro, Gabriel e João, totalizando $117\ kg$

- Maria, Gabriel e João, totalizando $97\ kg$

- Pedro, Maria, Gabriel e João, totalizando $172\ kg$

Com base nessas informações, é correto afirmar que:

a) com essa balança é possível pesar Gabriel e João juntos

b) a diferença entre os pesos de Pedro e Maria é o peso de João.

c) Pedro é mais pesado que Maria e João juntos.

d) não é possível pesar Maria sozinha nessa balança.

Comentários

Temos que:

$$\begin{cases} P+M+G=150 & (eq.1) \\ P+G+J=117 & (eq.2) \\ M+G+J=97 & (eq.3) \\ P+M+G+J=172 & (eq.4) \end{cases}$$

Fazendo $eq.4 - eq.1$, obtemos:

$$J = 172 - 150 \quad \Rightarrow \quad J = 22\ (eq.5)$$

Fazendo $eq.2 - eq.3$, obtemos:

$$P - M = 117 - 97 \quad \Rightarrow \quad P = 20 + M\ (eq.6)$$

Substituindo $eq.6$ em $eq.1$, obtemos:

$$20 + M + M + G = 150 \quad \Rightarrow \quad 2M + G = 130\ (eq.7)$$

Substituindo $eq.5$ em $eq.3$, obtemos:

$$M + G + 22 = 97 \quad \Rightarrow \quad M + G = 75 \quad (eq.8)$$

Fazendo $eq.7 - eq.8$, obtemos:

$$(2M+G) - (M+G) = 130 - 75 \quad \Rightarrow \quad M = 55 \quad (eq.9)$$

Substituindo $eq.9$ em $eq.6$, obtemos:

$$P = 20 + 55 \quad \Rightarrow \quad P = 75 \quad (eq.10)$$

Substituindo $eq.9$ em $eq.8$, obtemos:

$$55 + G = 75 \quad \Rightarrow \quad G = 20\ (eq.11)$$

Das equações 5, 9, 10 e 11 obtemos que os pesos de João, Maria, Pedro e Gabriel são, respectivamente, $22\ kg, 55\ kg, 75\ kg$ e $20\ kg$.

Sabendo que o peso deve exceder $60\,kg$ para a balança funcionar, analisemos as alternativas:

a) Falso.

$$J + G = 22 + 20 = 42 < 60$$

b) Falso.

$$P - M = 75 - 55 = 20 \neq 22 = J$$

c) Falso.

$$M + J = 55 + 22 = 77 > 75 = P$$

d) Verdadeiro.

$$M = 55 < 60$$

Gabarito: "d"

---

21. (EFOMM/2017)

Dado o sistema linear abaixo, analise as seguintes afirmativas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & b \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$$

I. Se $b \neq -12$, o sistema linear terá uma única solução.

II. Se $a = b = -12$, o sistema linear terá infinitas soluções.

III. Se $b = -12$, o sistema será impossível.

a) Todas as afirmativas são corretas.

b) Todas as formativas são incorretas.

c) Somente as afirmativas I e III são corretas.

d) Somente as afirmativas I e II são corretas.

e) Somente as afirmativas II e III são corretas.

Comentários

Montando o sistema e analisando os determinantes a fim de se aplicar a Regra de Cramer.

$$D = \det \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & b \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} = 192 + 16b$$

I- Verdadeiro.

Se $b \neq -12$ então $D \neq 0$, logo, o sistema é possível e determinado. Portanto, possui solução e ela é única.

II- Verdadeiro.

Se $b = -12 \Rightarrow D = 0$.

Sendo $a = -12$, temos:

$$D_x = \det \begin{bmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -12 & 16 & -12 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_y = \det \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 0 & -12 & -12 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$D_z = \det \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 0 & 16 & -12 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} = 0$$

Portanto o sistema é indeterminado e, assim, admite infinitas soluções.

III- Falso.

Se $b = -12$ só podemos concluir que o sistema é não determinado.

Gabarito: "d"

---

22. (EFOMM/2009)

Dado o sistema de equações lineares

$S: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$**. Sabendo-se que os determinantes:**

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ **e** $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ **são todos iguais a zero, apenas pode-se concluir que S**

a) é determinado.

b) não é determinado.

c) admite a solução (0.0.0).

d) não é impossível.

e) não é indeterminado.

Comentários

A rigor, só podemos concluir que o sistema é não determinado.

Gabarito: "b"

---

23. (Escola Naval/2015)

Analise o sistema a seguir.

$$\begin{cases} x + y + z = 0. \\ 4x - 2my + 3z = 0 \\ 2x + 6y - 4mz = 0 \end{cases}$$

Para o maior valor inteiro de m que torna o sistema acima possível e indeterminado, pode-se afirmar que a expressão

$\left|tg\left(\frac{\pi m}{4}\right) + \sec^2\left(\frac{2\pi m}{3}\right) - 1\right|$ **vale**

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{9}{4}$

c) $-\frac{11}{4}$

d) $\frac{7}{4}$

e) $-\frac{1}{4}$

Comentários

Representando o sistema na forma matricial, podemos calcular D do sistema:

$$D = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2m & 3 \\ 2 & 6 & -4m \end{bmatrix} = 8m^2 + 20m + 12 = 8 \cdot (m+1) \cdot \left(m + \frac{3}{2}\right)$$

Para o sistema linear homogêneo ser possível e indeterminado devemos ter $D = 0$, logo:

$$m = -1 \quad ou\, m = -\frac{3}{2}$$

O maior inteiro possível para m que satisfaz a condição dada é $m = -1$;

Então queremos:

$$\left|tg\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sec^2\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - 1\right| = \left|tg\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^2 - 1\right| =$$

$$= \left|tg\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right)^2 - 1\right| = \left|(-1) + \left(\frac{1}{-0{,}5}\right)^2 - 1\right| =$$

$$= |-1 + 4 - 1| = |2| = 2$$

Gabarito: “Sem gabarito”

---

10. QUESTÕES NÍVEL 3

24. (ITA/2018)

Se o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2a^2y + (2a^4 - a)z = 0 \\ x + ay + (a^3 - 1)z = 0 \end{cases}$$

admite infinitas soluções, então os possíveis valores do parâmetro a são

a) $0, -1, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

b) $0, -1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

c) $0, -1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

d) $0, -1, -1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}$.

e) $0, -1, 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}$.

25. (ITA/2018)

Sejam $x_1, \dots, x_5$ e $y_1, \dots, y_5$ números reais arbitrários e $A = (a_{ij})$ uma matriz $5x5$ definida por $a_{ij} = x_i + y_j, 1 \leq i, j \leq 5$. Se r é a característica da matriz A, então o maior valor possível de r é

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

26. (ITA/2017)

Considere o sistema de equações

$$S\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{27}{y^2}+\dfrac{8}{z^3}=3\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{81}{y^2}+\dfrac{40}{z^3}=10\\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{54}{y^2}+\dfrac{24}{z^3}=7\end{cases}$$

Se (x, y, z) é uma solução real de S, então $|x|+|y|+|z|$ é igual a

a) 0.

b) 3.

c) 6.

d) 9.

e) 12.

27. (ITA/2017)

Determine todos os valores reais de a para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

$$\begin{cases}x+ay+z=2\\ -x-2y+3z=-1\\ 3x+az=5\end{cases}$$

28. (ITA/2016)

Se o sistema de equações

$$\begin{cases}x+y+4z=2\\ x+2y+7z=3\\ 3x+y+az=b\end{cases}$$

É impossível, então os valores de a e b são tais que

a) $a=6$ e $b\neq 4$.

b) $a\neq 6$ e $b\neq 4$.

c) $a\neq 6$ e $b=4$.

d) $a=6$ e $b=4$.

e) a é arbitrário e $b \neq 4$.

29. (ITA/2015)

Sejam α e β números reais não nulos. Determine os valores de b, c, d, bem como a relação entre α e β para que ambos os sistemas lineares S e T a seguir sejam compatíveis indeterminados.

$$S\begin{cases}2x + by = \alpha \\ cs + y = \beta\end{cases} \qquad T\begin{cases}cx + 3y = \alpha \\ 4x + dy = \beta\end{cases}$$

30. (ITA/2014)

Sejam $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1\end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix}x+1 & x \\ y-2 & y \\ z-3 & z\end{bmatrix}$ matrizes reais tais que o produto AB é uma matriz antissimétrica. Das afirmações abaixo:

I. BA é antissimétrica;

II. BA não é inversível;

III. O sistema $(BA)X = 0$, com $X^t = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$, admite infinitas soluções, é (são) verdadeira(s).

a) Apenas I e II.

b) Apenas II e III.

c) Apenas I.

d) Apenas II.

e) Apenas III.

31. (ITA/2014)

Considere o sistema linear nas incógnitas x, y e z

$$\begin{cases}x + y + 2z = 0 \\ -x + (sen\theta)y + 4z = 0 \\ 2x + (1 - \cos 2\theta)y + 16z = 0\end{cases}, \theta \in [0, 2\pi].$$

a) Determine θ tal que o sistema tenha infinitas soluções.

b) Para θ encontrado em (a), determine o conjunto-solução do sistema.

32. (ITA/2013)

Considere o sistema de equações $\begin{cases}ax + by = c \\ px + qy = d\end{cases}$, com a, b, c, d, p e q reais, $abcd \neq 0$, $a + b = m$ e $d = nc$. Sabe-se que o sistema é indeterminado. O valor de $p + q$ é

a) m

b) $\frac{m}{n}$

c) $m^2 - n^2$

d) mn

e) $m + n$

33. (ITA/2013)

Considere o sistema nas variáveis reais x e y:

$$\begin{cases} x\ sen\alpha + 3y\ cos\alpha = a \\ x\ cos\alpha + y\ sen\alpha = b \end{cases},$$

com $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Analise para que valores de α, a e b o sistema é (i) possível determinado, (ii) possível indeterminado ou (iii) impossível, respectivamente. Nos casos (i) e (ii), encontre o respectivo conjunto-solução.

34. (ITA/2012)

Seja n um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine n e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa A^{-1}.

35. (ITA/2011)

O sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + 2z = b \\ 3x - y - 5cz = 0 \end{cases}$

a) é impossível, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) é possível quando $a = \frac{7b}{3}$ ou $c \neq 1$.

c) é impossível quando $c = 1, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

d) é impossível quando $a \neq \frac{7b}{3}, \forall c \in \mathbb{R}$.

e) é possível quando $c = 1$ e $a \neq 7b/3$.

36. (ITA/2011)

Considere as afirmações abaixo:

I) Se M é uma matriz quadrada de ordem $n > 1$, não nula e não inversível, então existe matriz não nula N, de mesma ordem, tal que MN é matriz nula.

II) Se M é uma matriz quadrada inversível de ordem n tal que $\det(M^2 - M) = 0$, então existe matriz não nula X, de ordem $nx1$, tal que $MX = X$.

III) A matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ \frac{tg\theta}{sec\theta} & 1 - 2sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$ é inversível, $\forall\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Destas, é(são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) todas.

37. (ITA/2010)

Considere as matrizes$A \in M_{4x4}(\mathbb{R})$ e $X, B \in M_{4x1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}; \text{e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix};$$

a) Encontre todos os valores reais de a e b tais que a equação matricial $AX = B$ tenha solução única.

b) Se $a^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$ e $B = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 4]^t$, encontre X tal que $AX = B$.

38. (ITA/2008)

Considere o sistema $Ax = b$, em que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $k \in \mathbb{R}$.

Sendo T a soma de todos os valores de k que tomam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de k que tomam o sistema possível e indeterminado, então o valor de $T - S$ é

a) -4

b) -3

c) 0

d) 1

e) 4

39. (ITA/2007)

Sendo x, y, z e w números reais, encontre o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} \log[(x+2y)(w-3z)^{-1}] = 0 \\ 2^{x+3z} - 8 \cdot 2^{y-3z+w} = 0 \\ \sqrt[3]{2x+y+6z-2w} - 2 = 0 \end{cases}$$

40. (ITA/2006)

A condição para que as constantes reais a e b tornem incompatível o sistema linear

$$\begin{cases} x+y+3z=2 \\ x+2y+5z=1 \\ 2x+2y+az=b \end{cases}$$

é

a) $a-b \neq 2$

b) $a+b=10$

c) $4a-6b=0$

d) $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$

e) $a \cdot b = 24$

41. (ITA/2006)

Seja o sistema linear nas incógnitas x e y, com a e b reais, dado por

$$\begin{cases} (a-b)x-(a+b)y=1 \\ (a+b)x+(a-b)y=1 \end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:

I. O sistema é possível e indeterminado se $a = b = 0$.

II. O sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos.

III. $x^2+y^2=(a^2+b^2)^{-1}$, se $a^2+b^2 \neq 0$.

Então, pode-se afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

a) I

b) II

c) III

d) I e II

e) II e III

42. (ITA/2005)

Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de

a) R$ 17,50.

b) R$ 16,50.

c) R$12,50.

d) R$ 10,50.

e) R$ 9,50.

43. (ITA/2005)

O sistema linear

$$\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$$

não admite solução se e somente se o número real b for igual a

a) -1.

b) 0.

c) 1.

d) 2.

e) -2.

44. (ITA/2003)

O número de todos os valores de $a \in [0, 2\pi]$, distintos, para os quais o sistema nas incógnitas x, y e z, dado por

$$\begin{cases} -4x + y - 6z = \cos 3a \\ x + 2y - 5z = \operatorname{sen} 2a \\ 6x + 3y - 4z = -2\cos a \end{cases}$$

é possível e não-homogêneo, é igual a:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

45. (ITA/2002)

1. Mostre que se uma matriz quadrada não-nula A satisfaz a equação

$A^3 + 3A^2 + 2A = 0$ (1)

então $(A + I)^3 = A + I$, em que I é a matriz identidade.

2. Sendo dado que

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

satisfaz à equação (1) acima, encontre duas matrizes não-nulas B e C tais que $B^3 + C^3 = B + C = A$. Para essas matrizes você garante que o sistema de equações:

$$(B - C)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem solução $(x, y) \neq (0, 0)$? Justifique.

46. (ITA/1999)

A soma de todos os valores de $a \in [0, 2\pi[$ que tornam o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x \operatorname{sen} a + y \cos a + z(2 \operatorname{sen} a + \cos a) = 0 \\ x\, sen^2 a + y \cos^2 a + z\left(1 + 3\, sen^2 a + 2\, sen(2a)\right) = 0 \end{cases}$$

possível e indeterminado é:

a) 5π

b) 4π

c) 3π

d) 2π

e) π

47. (ITA/1998)

Seja $a, b \in \mathbb{R}$. Considere os sistemas lineares em x, y e z:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \\ -2y + z = a \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - by + 3z = 0 \end{cases}$$

Se ambos admitem infinitas soluções reais, então:

a) $\frac{a}{b} = 11$

b) $\frac{b}{a} = 22$

c) $ab = \frac{1}{4}$

d) $ab = 22$

e) $ab = 0$

48. (ITA/1997)

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ **com** $a^2 = b^2 + c^2$**. Se** x, y **e** z **satisfazem o sistema**

$$\begin{cases} c\cos y + b\cos z = a \\ c\cos x + a\cos z = b \\ b\cos x + a\cos y = c \end{cases}$$

Então $\cos x + \cos y + \cos z$ **é igual a**

a) $\frac{a-b}{c}$

b) $\frac{a+b}{c}$

c) $\frac{b+c}{a}$

d) $\frac{a+b}{b}$

e) $\frac{b^2+c^2}{a}$

49. (ITA/1997)

A sequência (a_1, a_2, a_3, a_4) **é uma progressão geométrica de razão** $q \in \mathbb{R}^*$ **com** $q \neq 1$ **e** $a_1 \neq 0$**. Com relação ao sistema**

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = c \\ a_3x + a_4y = d \end{cases}$$

podemos afirmar que

a) é impossível para $c, d \in [-1, 1]$**.**

b) é possível e determinado somente se $c = d$**.**

c) é indeterminado quaisquer que sejam $c, d \in \mathbb{R}$**.**

d) é impossível quaisquer que sejam $c, d \in \mathbb{R}^*$**.**

e) é indeterminado somente se $d = cq^2$.

50. (ITA/1996)

Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 quatro números reais (com $a_1 \neq 0$), formando nessa ordem uma progressão geométrica. Então, o sistema em x e y

$$\begin{cases} a_1x + a_3y = 1 \\ a_1a_2x + a_1a_4y = a_2 \end{cases}$$

é um sistema

a) impossível.

b) possível determinado.

c) possível indeterminado.

d) possível determinado apenas para $a_1 > 1$.

e) possível determinado apenas para $a_1 < -1$.

51. (ITA/1996)

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$ e considere a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} \log_a(3a) & \log_{10}(3a)^2 \\ \log_a\left(\frac{1}{a}\right) & -\log_a(a) \\ \log_a(1) & \log_{10}(1) \end{bmatrix}$$

Para que a característica de A seja máxima, o valor de a deve ser tal que:

a) $a \neq 10$ e $a \neq \frac{1}{3}$

b) $a \neq \sqrt{10}$ e $a \neq \frac{1}{3}$

c) $a \neq 5$ e $a \neq 10$

d) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{3}$

e) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{10}$

52. (ITA/1995)

Se S é o conjunto dos valores de a para os quais o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + (\log_3 a)^2 y + z = 0 \\ 2x + 2y + \left(\log_3 \frac{27}{a}\right) z = 0 \end{cases}$$

é indeterminado, então:

a) $S \subset [-3,3]$

b) S é vazio

c) $S \subset [2,4]$

d) $S \subset [1,3]$

e) $S \subset [0,1]$

53. (IME/2019)

Dadas as funções definidas nos reais $\mathbb{R}$:

$f_1(x) = e^x, f_2(x) = sen(x), f_3(x) = \cos(x), f_4(x) = sen(2x)$ e $f_{5(x)} = e^{-x}$.

Mostre que existe uma única solução a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, tal que:

$a_1f_1(x) + a_2f_2(x) + a_3f_3(x) + a_4f_4(x) + a_5f_5(x)$ seja a função constante nula, onde $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$.

54. (IME/2018)

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} k & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, com k real.

Determine a faixa de valores de k para que exista uma matriz de números reais P tal que as condições abaixo sejam atendidas simultaneamente:

a) $A^TP + PA = I$ em que A^T é a transposta da matriz A e I é a matriz identidade;

b) P seja simétrica;

c) $p_{11} > 0$, em que p_{11} é o elemento da linha 1 e coluna 1 de P; e

d) $|P| > 0$, em que $|P|$ é o determinante da matriz P.

55. (IME/2018)

Seja o seguinte sistema de equações, em que s é um número real:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - sx_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ sx_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Escolha uma faixa de valores de s em que as soluções do sistema são todas negativas.

a) $s < -2$

b) $-2 < s < 0$

c) $0 < s < 1$

d) $1 < s < 2$

e) $s > 2$

56. (IME/2017)

Classifique o sistema abaixo como determinado, possível indeterminado e impossível de acordo com os valores reais de m.

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = m + 1 \\ 2x + my + 2z = m^2 + 2 \\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z = m^3 + 3 \end{cases}$$

57. (IME/2010)

Seja o sistema $\begin{cases} tg(x)tg(y-z) = a \\ tg(y)tg(z-x) = b \\ tg(z)tg(x-y) = c \end{cases}$, onde $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$.

Determine as condições que a, b e c devem satisfazer para que o sistema admita pelo menos uma solução.

58. (IME/2009)

Seja o sistema de equações lineares dadas por

$$\begin{cases} 6y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10 \\ y_1 + 6y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 20 \\ y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + y_5 = 40 \\ y_1 + y_2 + y_3 + 6y_4 + y_5 = 80 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 6y_5 = 160 \end{cases}$$

O valor de $7y_1 + 3y_5$ é

a) 12

b) 24

c) 36

d) 48

e) 60

59. (IME/2008)

Os elementos da matriz dos coeficientes de um sistema de quatro equações lineares e quatro incógnitas $(x, y, z$ e $w)$ são função de quatro constantes a, b, c e d. Determine as relações entre a, b, c e d para que o referido sistema admita uma solução não trivial, sabendo que $CD = -DC$, onde

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

60. (IME/2007)

Considere o sistema de equações dado por:

$$\begin{cases} x + y + 2z = b_1 \\ 2x - y + 3z = b_2 \\ 5x - y + az = b_3 \end{cases}$$

Sendo b_1, b_2 e b_3 valores reais quaisquer, a condição para que o sistema possua solução única é:

a) $a = 0$

b) $a \neq 2$

c) $a \neq 8$

d) $a \neq b_1 + b_2 - b_3$

e) $a = 2b_1 - b_2 + 3b_3$

61. (IME/1999)

Determine α para que seja impossível o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (\alpha^2 - 14)z = \alpha + 2 \end{cases}$$

62. (IME/1998)

Resolva e interprete, geometricamente, o sistema matricial abaixo, em função de α e β.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 7 \\ 6 & 8 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ \beta \end{bmatrix}$$

63. (IME/1988)

Determine o valor de a para que o sistema abaixo tenha mais de uma solução e resolva-o neste caso:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

GABARITO

24. b
25. b
26. c
27. $a = -6$
28. a
29. $(\alpha, \beta, b, c, d) = \left(\frac{k}{\sqrt{2}}, k, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$ e $(\alpha, \beta, b, c, d) = (-\frac{k}{\sqrt{2}}, k, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$, $\forall\ k \in \mathbb{R}^*$.
30. b
31. a) $\theta = \frac{3\pi}{2}$ b) $(x, y, z) = (k, -k, 0)\ \forall\ k$
32. d
33. (i)$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[- \{\frac{\pi}{3}\}, \forall a, b \in \mathbb{R}$ (ii)$\alpha = \frac{\pi}{3}; a = b\sqrt{3}, \forall b \in \mathbb{R}$ (iii)$\alpha = \frac{\pi}{3}; a \neq b\sqrt{3}, \forall b \in \mathbb{R}$
34. $n = 3$ e a soma dos elementos da primeira coluna de A^{-1} é -1
35. b
36. e
37. a) $a \neq 0$ b) $X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}^T$
38. a
39. $(x, y, z, w) = \left(\frac{31}{3} + w, -\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}, w\right); \forall w \neq -5$
40. a
41. e
42. d
43. a
44. a
45. Prova e justificativa.
46. a
47. b
48. c
49. e
50. c
51. b
52. a
53. Demonstração
54. $\{k \in \mathbb{R}\ | k > -2\}$
55. d
56. i) Possível e Determinado se $m \in \mathbb{R} - \{0,1,2\}$ ii) Possível e Indeterminado se $m = 0$ iii) Impossível se $m = 1$ ou $m = 2$
57. $a + b + c + abc = 0$
58. d
59. $d = -a$ ou $bc = ad$
60. c
61. $\alpha = -4$
62. $x = \frac{2\cdot\alpha+\beta+8}{\alpha+22}; y = \frac{3\cdot\alpha+2\cdot\beta-6}{22+\alpha}; z = \frac{\beta-36}{22+\alpha}$

63. $a = 2$ e $(x, y, z) = (5k, 1 - 4k, k)$

RESOLUÇÃO

24. (ITA/2018)

Se o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2a^2 y + (2a^4 - a)z = 0 \\ x + ay + (a^3 - 1)z = 0 \end{cases}$$

admite infinitas soluções, então os possíveis valores do parâmetro a são

a) $0, -1, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

b) $0, -1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

c) $0, -1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

d) $0, -1, -1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}$.

e) $0, -1, 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}$.

Comentários

Para que o sistema admita infinitas soluções o determinante dos coeficientes deve ser nulo.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2a^2 & 2a^4 - a \\ 1 & a & a^3 - 1 \end{vmatrix} = 2a^2(a^3 - 1) + (2a^4 - a) - 2a^2 - a(2a^4 - a)$$

$$\Delta = 2a^5 - 2a^2 + 2a^4 - a - 2a^2 - 2a^5 + a^2$$

$$\Delta = 2a^4 - 3a^2 - a = a(2a^3 - 3a - 1)$$

$$\Delta = a(2a^3 - 3a - 1) = 0$$

Fatorando:

$$a(2a^3 + 2 - 3a - 3) = 0$$

$$a\big(2(a^3 + 1) - 3(a + 1)\big) = 0$$

Sabendo que $(a^3 + 1) = (a + 1)(a^2 - a + 1)$, temos:

$$a\big(2(a + 1)(a^2 - a + 1) - 3(a + 1)\big) = 0$$

$$a(a + 1)(2a^2 - 2a - 1) = 0$$

Assim, as soluções são, $a = 0$, $a = -1$ e $a = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Gabarito: “b”

25. (ITA/2018)

Sejam $x_1, \dots, x_5$ e $y_1, \dots, y_5$ números reais arbitrários e $A = (a_{ij})$ uma matriz $5x5$ definida por $a_{ij} = x_i + y_j, 1 \leq i, j \leq 5$. Se r é a característica da matriz A, então o maior valor possível de r é

a) 1.

b) 2.

c) 3.

d) 4.

e) 5.

Comentários

Lembrando que a maior característica de uma matriz A é igual à ordem da maior submatriz de A cujo determinante é diferente de zero. Vamos analisar o determinante da matriz da questão. De acordo com o enunciado:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & x_1 + y_3 & x_1 + y_4 & x_1 + y_5 \\ x_2 + y_1 & x_2 + y_2 & x_2 + y_3 & x_2 + y_4 & x_2 + y_5 \\ x_3 + y_1 & x_3 + y_2 & x_3 + y_3 & x_3 + y_4 & x_3 + y_5 \\ x_4 + y_1 & x_4 + y_2 & x_4 + y_3 & x_4 + y_4 & x_4 + y_5 \\ x_5 + y_1 & x_5 + y_2 & x_5 + y_3 & x_5 + y_4 & x_5 + y_5 \end{bmatrix}$$

Se aplicarmos o teorema de Jacobi na matriz acima, o valor do seu determinante não se altera. Dessa forma, vamos multiplicar a primeira linha por (-1) e somar às outras linhas para obter uma matriz equivalente:

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & x_1 + y_3 & x_1 + y_4 & x_1 + y_5 \\ x_2 + y_1 & x_2 + y_2 & x_2 + y_3 & x_2 + y_4 & x_2 + y_5 \\ x_3 + y_1 & x_3 + y_2 & x_3 + y_3 & x_3 + y_4 & x_3 + y_5 \\ x_4 + y_1 & x_4 + y_2 & x_4 + y_3 & x_4 + y_4 & x_4 + y_5 \\ x_5 + y_1 & x_5 + y_2 & x_5 + y_3 & x_5 + y_4 & x_5 + y_5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} x(-1) \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & x_1 + y_3 & x_1 + y_4 & x_1 + y_5 \\ x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 & x_3 - x_1 & x_3 - x_1 & x_3 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 & x_4 - x_1 & x_4 - x_1 & x_4 - x_1 & x_4 - x_1 \\ x_5 - x_1 & x_5 - x_1 & x_5 - x_1 & x_5 - x_1 & x_5 - x_1 \end{bmatrix}$$

$x(-1)$

Multiplicando a primeira coluna por (-1) e somando às outras:

$$C = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 & y_5 - y_1 \\ x_2 - x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 - x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 - x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 - x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A característica da matriz inicial A é igual à característica da matriz C.

Vamos procurar a maior matriz cujo determinante é diferente de zero. Podemos ver que é possível tomar matrizes de ordem 1 cujo determinante é diferente de zero, assim, a característica de A pode ser 1. Vamos verificar de ordem 2:

$$D = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & y_2 - y_1 \\ x_2 - x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det D = -(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

Esse determinante não é necessariamente igual a zero, logo, a característica da matriz A pode ser 2.

Agora, vamos verificar de ordem 3. Nesse momento, repare que qualquer combinação que tomarmos, teremos determinante igual a zero. Veja um exemplo:

$$E = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ x_2 - x_1 & 0 & 0 \\ x_3 - x_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det E = 0$$

Analogamente, para as ordens superiores, temos que o determinante é nulo.

Portanto, a maior característica de A é 2.

Gabarito: "b"

26. (ITA/2017)

Considere o sistema de equações

$$S\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{27}{y^2} + \dfrac{8}{z^3} = 3 \\ \dfrac{4}{x} + \dfrac{81}{y^2} + \dfrac{40}{z^3} = 10 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{54}{y^2} + \dfrac{24}{z^3} = 7 \end{cases}$$

Se (x, y, z) é uma solução real de S, então $|x| + |y| + |z|$ é igual a

a) 0.

b) 3.

c) 6.

d) 9.

e) 12.

Comentários

Fazendo $p = \frac{1}{x}$, $q = \frac{27}{y^2}$, $r = \frac{8}{z^3}$, podemos reescrever o sistema:

$$\begin{cases} p + q + r = 3 \\ 4p + 3q + 5r = 10 \\ 2p + 2q + 3r = 7 \end{cases}$$

Da primeira equação temos $p + q = 3 - r$, substituindo na última equação:

$$2(3 - r) + 3r = 7$$

$$r = 1$$

Substituindo $r = 1$ no sistema, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} p + q = 2 \\ 4p + 3q = 5 \end{cases}$$

Tome a segunda equação menos três vezes a primeira, $(4p + 3q) - 3(p + q) = 5 - 6$, assim, $p = -1$. Por fim, $p + q = 2$, então, $q = 3$. Assim, substituindo x, y e z, encontramos:

$$x = \frac{1}{p} = -1, y = \sqrt{\frac{27}{q}} = 3 \text{ e } z = \sqrt[3]{\frac{8}{r}} = 2$$

Portanto, $|x| + |y| + |z| = 1 + 3 + 2 = 6$.

Gabarito: "c"

---

27. (ITA/2017)

Determine todos os valores reais de a para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + az = 5 \end{cases}$$

Comentários

Para ser impossível, o determinante dos coeficientes é nulo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & a \end{vmatrix} = -2a + 9a + 6 + a^2$$

$$\Rightarrow \Delta = a^2 + 7a + 6 = 0$$

Cujas raízes são, $a = -1$ e $a = -6$.

Para esses valores de a, o sistema pode ser possível e indeterminado ou impossível. Vamos analisá-lo.

Podemos simplificar o sistema. Da segunda equação, temos $x = 1 - 2y + 3z$. Substituindo nas outras:

$$\begin{cases} 1 - 2y + 3z + ay + z = 2 \\ 3(1 - 2y + 3z) + az = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a - 2)y + 4z = 1 \\ -6y + (9 + a)z = 2 \end{cases}$$

Para $a = -1$, temos:

$$\begin{cases}(-1-2)y+4z=1\\-6y+(9-1)z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3y+4z=1\\-6y+8z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3y+4z=1\\-3y+4z=1\end{cases}\Rightarrow y=\frac{4z-1}{3}$$

Para esse valor de y:

$$x=1-2\left(\frac{4z-1}{3}\right)+3z\Rightarrow x=\frac{z+5}{3}$$

Nesse caso, a terna $\left(\frac{z+5}{3},\frac{4z-1}{3},z\right)$ é solução do sistema. Logo, é possível e indeterminado.

Para $a=-6$:

$$\begin{cases}(-6-2)y+4z=1\\-6y+(9-6)z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-8y+4z=1\\-6y+3z=2\end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 3 e a segunda por 4, obtemos:

$$\begin{cases}-24y+12z=3\\-24y+12z=8\end{cases}$$

Encontramos duas equações contraditórias. Portanto, para $a=-6$, temos um sistema impossível.

Gabarito: $a=-6$

---

28. (ITA/2016)

Se o sistema de equações

$$\begin{cases}x+y+4z=2\\x+2y+7z=3\\3x+y+az=b\end{cases}$$

É impossível, então os valores de a e b são tais que

a) $a=6$ e $b\neq 4$.

b) $a\neq 6$ e $b\neq 4$.

c) $a\neq 6$ e $b=4$.

d) $a=6$ e $b=4$.

e) a é arbitrário e $b\neq 4$.

Comentários

Para que o sistema seja impossível, o determinante dos coeficientes deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix}1&1&4\\1&2&7\\3&1&a\end{vmatrix}=2a+21+4-24-7-a=a-6=0$$

Logo, $a=6$.

Além disso, devemos substituir no sistema para verificar se o sistema é possível e indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} x+y+4z=2 \\ x+2y+7z=3 \\ 3x+y+6z=b \end{cases}$$

Da primeira equação, temos que $y=2-x-4z$, substituindo na segunda e na terceira equação:

$$\begin{cases} x+(2-x-4z)+4z=2 \\ 3x+2-x-4z+6z=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=1 \\ 2x+2z=b-2 \end{cases}$$

Substituindo $x+z=1$ da primeira equação na segunda:

$$2(x+z)=b-2 \Rightarrow 2=b-2 \Rightarrow b=4$$

Desse modo, para que o sistema seja impossível, devemos ter $b\neq 4$. Pois, para $b=4$, temos um sistema possível e indeterminado.

Portanto, para que o sistema seja impossível $a=6$ e $b\neq 4$.

Gabarito: "a"

---

29. (ITA/2015)

Sejam α e β números reais não nulos. Determine os valores de b, c, d, bem como a relação entre α e β para que ambos os sistemas lineares S e T a seguir sejam compatíveis indeterminados.

$$S\begin{cases} 2x+by=\alpha \\ cx+y=\beta \end{cases} \qquad T\begin{cases} cx+3y=\alpha \\ 4x+dy=\beta \end{cases}$$

Comentários

Para que os sistemas sejam indeterminados, o determinante dos coeficientes deve ser nulo. Em S, temos:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & b \\ c & 1 \end{vmatrix}=2-bc=0 \Rightarrow bc=2 \ \ (I)$$

Em T, temos:

$$\Delta=\begin{vmatrix} c & 3 \\ 4 & d \end{vmatrix}=cd-12=0 \Rightarrow cd=12 \ \ (II)$$

Dividindo (II) por (I):

$$\frac{cd}{bc}=\frac{12}{2} \Rightarrow d=6b$$

Substituindo o valor de d da segunda equação de T:

$$S\begin{cases} 2x+by=\alpha \\ cx+y=\beta \end{cases}$$

$$T\begin{cases} cx+3y=\alpha \\ 4x+6by=\beta \end{cases}$$

Igualando as primeiras e segundas equações de cada sistema:

$$\begin{cases} 2x+by=cx+3y \\ cx+y=4x+6by \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-c)x+(b-3)y=0 \\ (c-4)x+(1-6b)y=0 \end{cases}$$

Contudo, para que os sistemas dados sejam indeterminados, o sistema acima também deverá ser. Então, o determinante dos seus coeficientes deverá ser nulo. Sabendo que $bc = 2$, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2-c & b-3 \\ c-4 & 1-6b \end{vmatrix} = (2-c)(1-6b) - (b-3)(c-4)$$

$$\Delta = 2 - 12b - c + 6bc - bc + 4b + 3c - 12 = 5\underbrace{bc}_{10} - 8b + 2c - 10$$

$$\Delta = -8b + 2c = 0$$

$$\Rightarrow -4b + c = 0 \Rightarrow c = 4b \overset{b=\frac{2}{c}}{\Longrightarrow} c = \frac{8}{c} \Rightarrow c^2 = 8 \Rightarrow \boxed{c = \pm 2\sqrt{2}}$$

$$b = \frac{2}{c} \Rightarrow \boxed{b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Lembrando que $d = 6b$, temos:

$$\boxed{d = \pm 3\sqrt{2}}$$

Além disso, para que o sistema seja indeterminado, deve existir uma relação de proporcionalidade entre os fatores do sistema. Nesse caso, uma linha deve ser múltipla da outra. No sistema S, temos:

$$\begin{cases} 2x + by = \alpha \\ cx + y = \beta \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{c} = \frac{b}{1} = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{c} \Rightarrow \alpha = \frac{2\beta}{c}$$

Para $c = \pm 2\sqrt{2}$:

$$\alpha = \pm\frac{\beta}{\sqrt{2}}$$

Portanto, as soluções são para $\beta = k \in \mathbb{R}^*$:

$$(\alpha, \beta, b, c, d) = \left(\frac{k}{\sqrt{2}}, k, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right) \text{ e } (\alpha, \beta, b, c, d) = \left(-\frac{k}{\sqrt{2}}, k, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{(\alpha, \beta, b, c, d) = \left(\frac{k}{\sqrt{2}}, k, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)}$ **e** $\boldsymbol{(\alpha, \beta, b, c, d) = \left(-\frac{k}{\sqrt{2}}, k, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\right)}$**,** $\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^*$.

---

30. (ITA/2014)

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}$ **e** $B = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix}$ **matrizes reais tais que o produto** AB **é uma matriz antissimétrica. Das afirmações abaixo:**

I. BA **é antissimétrica;**

II. BA **não é inversível;**

III. O sistema $(BA)X = 0$**, com** $X^t = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$**, admite infinitas soluções, é (são) verdadeira(s).**

a) Apenas I e II.

b) Apenas II e III.

c) Apenas I.

d) Apenas II.

e) Apenas III.

Comentários

I) Uma matriz antissimétrica é a matriz que satisfaz: $A^T = -A$. Então, fazendo produto AB, temos:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y+z+6 & x-y+z \\ 2x+y+z+3 & z \end{bmatrix}$$

Como AB é antissimétrica, devemos ter a diagonal principal nula, logo:

$$z = 0$$

$$x - y + z + 6 = 0 \overset{z=0}{\Longrightarrow} x - y = -6 \ \ (I)$$

Então, aplicando a definição de matriz antissimétrica:

$$(AB)^T = -AB$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2x+y+z+3 \\ x-y+z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x+y-z \\ -2x-y-z-3 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos:

$$x - y + z = -2x - y - z - 3 \Rightarrow x - y = -2x - y - 3 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

Substituindo $x = -1$ em (I):

$$x - y = -6 \Rightarrow y = x + 6 \Rightarrow \boxed{y = 5}$$

Dessa forma, temos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 28 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(BA)^T = \begin{bmatrix} -5 & 28 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Logo, $(BA)^T \neq -BA$. O item é **FALSO**.

II. Se $\det(BA) = 0$, ela não será inversível.

$$\det(BA) = \begin{vmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 28 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -30 - 24 + 84 + 6 - 120 + 84 = 0$$

Desse modo, a matriz não é inversível. O Item é **VERDADEIRO**.

III. Como $\det(BA) = 0$, o determinante dos coeficientes do sistema sugerido é nulo. Desse modo, o sistema é possível e indeterminado ou impossível. No entanto, como o sistema é homogêneo, ele obrigatoriamente admite uma solução, portanto, não é impossível. O Item é **VERDADEIRO**.

Gabarito: "b"

---

31. (ITA/2014)

Considere o sistema linear nas incógnitas x, y e z

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + (sen\theta)y + 4z = 0 \\ 2x + (1 - \cos 2\theta)y + 16z = 0 \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi].$$

a) Determine θ tal que o sistema tenha infinitas soluções.

b) Para θ encontrado em (a), determine o conjunto-solução do sistema.

Comentários

a) Para que o sistema homogêneo tenha infinitas soluções, seu determinante dos coeficientes deve ser nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & sen\,\theta & 4 \\ 2 & 1 - \cos 2\theta & 16 \end{vmatrix} = 16sen\,\theta + 8 - 2(1 - \cos(2\theta)) - 4sen\,\theta - 4(1 - \cos(2\theta)) + 16$$

$$\Rightarrow 12sen\,\theta + 6\cos 2\theta + 18 = 0$$

Sabendo que $\cos 2\theta = 1 - 2sen^2\theta$, temos

$$12sen\,\theta + 6(1 - 2sen^2\theta) + 18 = 0$$

$$-12sen^2\theta + 12sen\theta + 24 = 0$$

$$sen^2\,\theta - sen\,\theta - 2 = 0$$

$$sen\,\theta = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Então, $sen\,\theta_1 = 2$ e $sen\,\theta_2 = -1$. Contudo, $sen\,\theta_1 = 2$ é um absurdo, logo, não pode ser uma raiz.

Portanto:

$$sen\theta = -1 \text{ e } \theta \in [0,2\pi]$$

$$\boxed{\theta = \frac{3\pi}{2}}$$

b) Substituindo no sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x - y + 4z = 0 \\ 2x + 2y + 16 = 0 \end{cases}$$

Somando a primeira e a segunda equação, temos que $z = 0$, assim:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Logo, $x = -y$. Portanto, as soluções do sistema são:

$$(x, y, z) = (k, -k, 0)\ \forall\ k$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{\theta = \frac{3\pi}{2}}$ **b)** $\boldsymbol{(x, y, z) = (k, -k, 0)\ \forall\ k}$

---

32. (ITA/2013)

Considere o sistema de equações $\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = d \end{cases}$**, com** a, b, c, d, p **e** q **reais,** $abcd \neq 0$**,** $a + b = m$ **e** $d = nc$**. Sabe-se que o sistema é indeterminado. O valor de** $p + q$ **é**

a) m

b) $\frac{m}{n}$

c) $m^2 - n^2$

d) mn

e) $m + n$

Comentários

Se o sistema é indeterminado, uma equação deve ser múltipla da outra, então, temos:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{d}$$

Mas, $d = nc$, logo:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{nc} \Rightarrow \frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{1}{n}$$

Assim, $p = an$ e $q = bn$.

Logo:

$$p + q = an + bn = n(a + b)$$

Como $a + b = m$:

$$p + q = mn$$

Gabarito: "d"

---

33. (ITA/2013)

Considere o sistema nas variáveis reais x **e** y**:**

$$\begin{cases} x\,sen\alpha + 3y\,cos\alpha = a \\ x\,cos\alpha + y\,sen\alpha = b \end{cases},$$

com $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Analise para que valores de α, a e b o sistema é (i) possível determinado, (ii) possível indeterminado ou (iii) impossível, respectivamente. Nos casos (i) e (ii), encontre o respectivo conjunto-solução.

Comentários

$$\Delta = \begin{vmatrix} sen\,\alpha & 3\cos\alpha \\ \cos\alpha & sen\,\alpha \end{vmatrix} = sen^2\alpha - 3\cos^2\alpha = 1 - 4\cos^2\alpha$$

i) O sistema é possível e determinado se o determinante dos coeficientes não for nulo:

$$1 - 4\cos^2\alpha \neq 0$$

$$\cos\alpha \neq \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}[$, temos $\alpha \neq \pi/3$.

Portanto, temos que o sistema é possível e determinado se

$$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[- \left\{\frac{\pi}{3}\right\}, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

ii) O sistema é possível e indeterminado se o determinante dos coeficientes for nulo, então:

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

Também devemos ter uma linha múltipla da outra:

$$\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = tg\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{3}$$

Desse modo, para que o sistema seja possível e indeterminado, devemos ter:

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ e } a = b\sqrt{3}$$

Para o sistema ser impossível, o determinante deve ser nulo. No entanto, as linhas não devem ser múltiplas da outra, então:

$$\frac{a}{b} \neq \sqrt{3}$$

Portanto, para que o sistema seja impossível:

$$\alpha = \frac{\pi}{3}\ e\ a \neq b\sqrt{3}$$

Gabarito:(i)$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[- \{\frac{\pi}{3}\}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (ii)$\alpha = \frac{\pi}{3}$; $a = b\sqrt{3}$, $\forall b \in \mathbb{R}$ (iii)$\alpha = \frac{\pi}{3}$; $a \neq b\sqrt{3}$, $\forall b \in \mathbb{R}$

---

34. (ITA/2012)

Seja n um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine n e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa A^{-1}.

Comentários

Podemos reescrever o determinante calculando os logaritmos:

$$detA = \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ n+5 & n & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2n^2 - 25 - 3(n+5) + 5n + 15n + 2(n+5)$$

$$detA = -2n^2 + 19n - 30 = 9$$

Assim:

$$2n^2 - 19n + 39 = 0$$

$$n = \frac{19 \pm 7}{4}$$

Desse modo, $n_1 = 3$ ou $n_2 = \frac{13}{2}$. Como n é um número natural, n_2 não serve.

Assim, $n = 3$. Sendo $AA^{-1} = I$, substituindo n em A, temos que:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \; e \; A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Multiplicando essas matrizes e igualando à identidade, podemos obter um sistema de 3 equações e 3 incógnitas com as variáveis da primeira coluna de A^{-1}:

$$\begin{cases} 3a + d + g = 1 \\ 8a + 3d + 5g = 0 \\ -5a - 3d - 2g = 0 \end{cases}$$

Somando a segunda com a terceira equação do sistema:

$$(8a + 3d + 5g) + (-5a - 3d - 2g) = 0$$

$$3a + 3g = 0$$

$$\Rightarrow a = -g$$

Substituindo $a = -g$ no sistema, obtemos:

$$\begin{cases} d - 2g = 1 \\ 3d - 3g = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação, temos $d = g$. Substituindo na primeira equação:

$$g - 2g = 1 \Rightarrow g = -1 = d$$

Então, $a = -g = 1$.

Portanto:

$$a + d + g = 1 - 1 - 1 = -1$$

Gabarito: $n = 3$ e a soma dos elementos da primeira coluna de A^{-1} é -1

---

35. (ITA/2011)

O sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + 2z = b \\ 3x - y - 5cz = 0 \end{cases}$

a) é impossível, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

b) é possível quando $a = \frac{7b}{3}$ ou $c \neq 1$.

c) é impossível quando $c = 1, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

d) é impossível quando $a \neq \frac{7b}{3}, \forall c \in \mathbb{R}$.

e) é possível quando $c = 1$ e $a \neq 7b/3$.

Comentários

Para analisar se o sistema é possível ou não, analisemos o determinante dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -5c \end{vmatrix} = -5c + 12 - 9 + 2 = -5c + 5$$

Se o determinante for nulo, temos:

$$-5c + 5 = 0 \Rightarrow c = 1$$

Assim, o sistema é possível e determinado se $c \neq 1$ e impossível ou indeterminado se $c = 1$.

Se $c = 1$, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + 2z = b \\ 3x - y - 5z = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação, $y = b - 2z$. Substituindo na terceira e na primeira:

$$\begin{cases} x + 2(b - 2z) + 3z = a \\ 3x - (b - 2z) - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - z = a - 2b \\ x - z = \dfrac{b}{3} \end{cases}$$

Analisemos os termos independentes. Se $a - 2b = b/3$, temos um sistema possível e indeterminado:

$$a - 2b = \frac{b}{3} \Rightarrow a = \frac{7b}{3}$$

Se $a \neq 7b/3$, temos um sistema impossível.

Resumindo, sistema possível e determinado: $c \neq 1$; sistema impossível $c = 1$ e $a \neq \frac{7b}{3}$; sistema possível e indeterminado $c = 1$ e $a = \frac{7b}{3}$.

Assim, a alternativa que se adequa é o item "b", pois o sistema é possível quando $a = \frac{7b}{3}$ e $c = 1$.

Gabarito: "b"

---

36. (ITA/2011)

Considere as afirmações abaixo:

I) Se M é uma matriz quadrada de ordem $n > 1$, não nula e não inversível, então existe matriz não nula N, de mesma ordem, tal que MN é matriz nula.

II) Se M é uma matriz quadrada inversível de ordem n tal que $\det(M^2 - M) = 0$, então existe matriz não nula X, de ordem $nx1$, tal que $MX = X$.

III) A matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ \frac{tg\theta}{sec\theta} & 1 - 2sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$ é inversível, $\forall \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Destas, é(são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) todas.

Comentários

I) Seja a matriz $MN = 0$, uma coluna j dessa matriz pode ser escrita como:

$$M\underbrace{\begin{bmatrix} k_{1j} \\ k_2 j \\ \vdots \\ k_{nj} \end{bmatrix}}_{coluna\ j\ de\ MN} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

A equação acima descreve um sistema homogêneo, onde M é a matriz dos coeficientes. No entanto, M não é inversível, ou seja, $\det M = 0$. Logo, o sistema é possível e indeterminado, admitindo infinitas soluções, inclusive uma não-nula. Então, aplicando a mesma ideia para todas as colunas da matriz N, existe uma matriz não nula N. Item **Verdadeiro.**

II) se $\det(M^2 - M) = 0$, então:

$$\det[M(M - I)] = \det M \,.\, \det(M - I) = 0$$

Como a matriz é inversível, $\det M \neq 0$, implicando em $\det(M - I) = 0$.

Assim, se $MX = X$:

$$MX - X = 0$$

$$(M - I)X = 0$$

Que é um sistema homogêneo, no entanto, $\det(M - I) = 0$, ou seja, o sistema acima é um sistema homogêneo indeterminado que admite infinitas soluções. Então, existe uma matriz não-nula X. Item **Verdadeiro**.

III) A matriz dada será inversível se seu determinante não for nulo:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ \dfrac{tg\,\theta}{\sec\theta} & 1 - 2sen^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + sen^2\theta = 1$$

Então, a matriz é inversível $\forall\theta \in \mathbb{R}$. Portanto, o item é **verdadeiro**.

Gabarito: "e"

---

37. (ITA/2010)

Considere as matrizes $A \in M_{4x4}(\mathbb{R})$ e $X, B \in M_{4x1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}; \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix};$$

a) Encontre todos os valores reais de a e b tais que a equação matricial $AX = B$ tenha solução única.

b) Se $a^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$ e $B = [1 \quad 1 \quad 2 \quad 4]^t$, encontre X tal que $AX = B$.

Comentários

a) Para que a solução seja única, devemos ter um sistema possível e determinado, logo, $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{vmatrix}$$

Usando o teorema de Laplace na primeira linha:

$$\det A = a.(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & b & 1 \end{vmatrix} + b.(-1)^4 \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^5 \begin{vmatrix} b & 1 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 2 & b \end{vmatrix}$$

$$A = a(-2a) + b(2b) - (2b^2 + 2a^2) = -4a^2$$

$$-4a^2 \neq 0$$

$$a \neq 0$$

Portanto, a equação matricial tem solução se $a \neq 0$.

b) Multiplicando as matrizes temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + y + bz + w = 1 \\ bx + y + az = 1 \\ 2y = 2 \\ -ax + 2y + bz + w = 4 \end{cases}$$

Da terceira equação, $y = 1$, substituindo nas outras:

$$\begin{cases} ax + bz + w = 0 \\ bx + az = 0 \\ -ax + bz + w = 2 \end{cases}$$

Fazendo a primeira equação menos a terceira, encontramos $2ax = -2$. Como $a \neq 0$, $x = -\frac{1}{a}$. Substituindo x, temos:

$$\begin{cases} a\left(-\frac{1}{a}\right) + bz + w = 0 \\ b\left(-\frac{1}{a}\right) + az = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bz + w = 1 \\ -\frac{b}{a} + az = 0 \end{cases}$$

Isolando z na segunda equação:

$$z = \frac{b}{a^2}$$

Substituindo essa relação na primeira:

$$w = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Mas, do enunciado:

$$a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2$$

Desse modo:

$$w = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow w = 1 - \frac{b^2}{b^2} = 0$$

$$z = \frac{b}{a^2} \Rightarrow z = \frac{b}{b^2} = \frac{1}{b}$$

Portanto:

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}^T$$

Gabarito: a) $a \neq 0$ b) $X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}^T$

---

38. (ITA/2008)

Considere o sistema $Ax = b$, em que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $k \in \mathbb{R}$.

Sendo T a soma de todos os valores de k que tomam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de k que tomam o sistema possível e indeterminado, então o valor de $T - S$ é

a) -4

b) -3

c) 0

d) 1

e) 4

Comentários

Para que o sistema seja impossível ou possível indeterminado, temos que $\det A = 0$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{vmatrix} = k(k-3) + 12 + 18 + 3k - 18 + 4(k-3) = k^2 + 4k = 0$$

Assim, $k = 0$ ou $k = -4$.

I) Para $k = 0$:

$$Ax = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1\ (I) \\ 2x + 6z = 6 \qquad (II) \\ -x + 3y - 3z = 0\ (III) \end{cases}$$

Fazendo $3 \cdot (I) + 2 \cdot (III)$:

$$x + 3z = 3$$

Assim, chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} 2x + 6z = 6 \\ x + 3z = 3 \end{cases}$$

Que é um sistema possível e indeterminado, uma vez que uma equação é múltipla da outra, admitindo infinitas soluções. Portanto, $S = 0$.

II) Para $k = -4$:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1\ (I) \\ 2x - 4y + 6z = 6\ (II) \\ -x + 3y - 7z = 0\ (III) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1\ (I) \\ x - 2y + 3z = 3\ (II) \\ -x + 3y - 7z = 0\ (III) \end{cases}$$

Note que as equações (I) e (II) se contradizem, logo, o sistema é impossível.

Portanto, $T = -4$.

Assim, $T - S = -4 - 0 = -4$.

Gabarito: "a"

---

39. (ITA/2007)

Sendo x, y, z e w números reais, encontre o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} \log[(x+2y)(w-3z)^{-1}] = 0 \\ 2^{x+3z} - 8 \cdot 2^{y-3z+w} = 0 \\ \sqrt[3]{2x + y + 6z - 2w} - 2 = 0 \end{cases}$$

Comentários

Da primeira equação, podemos escrever:

$$\log(x+2y)-\log(w-3z)=0 \Rightarrow \log(x+2y)=\log(w-3z)$$

$$x+2y=w-3z$$

$$x+2y+3z-w=0$$

Além disso, da condição de existência:

$$w-3z\neq 0$$

Reescrevendo a segunda equação:

$$2^{x+3z}-8\cdot 2^{y-3z+w}=0 \Rightarrow 2^{x+3z}=2^{y-3z+w+3}$$

Igualando os expoentes:

$$x+3z=y-3z+w+3$$

$$x-y+6z-w=3$$

Reescrevendo a terceira equação:

$$\sqrt[3]{2x+y+6z-2w}=2 \Rightarrow 2x+y+6z-2w=8$$

Assim, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x+2y+3z-w=0\ (I) \\ x-y+6z-w=3\ (II) \\ 2x+y+6z-2w=8\ (III) \end{cases}$$

Fazendo $(III)-(II)-(I)$, obtemos:

$$-3z=5 \Rightarrow z=-\frac{5}{3}$$

Substituindo z, temos:

$$\begin{cases} x+2y-w=5\ (I) \\ x-y-w=13\ (II) \\ 2x+y-2w=18\ (III) \end{cases}$$

Fazendo $(III)+(II)$:

$$3x=31+3w \Rightarrow x=\frac{31}{3}+w \Rightarrow x-w=\frac{31}{3}$$

Substituindo $x-w$, temos, em todas as equações:

$$y=-\frac{8}{3}$$

Portanto, como todas as equações foram usadas, encontramos o conjunto solução do sistema. Considerando que $w\neq 3z$, devemos ter:

$$w\neq 3\left(-\frac{5}{3}\right) \Rightarrow w\neq -5$$

$$(x,y,z,w)=\left(\frac{31}{3}+w,-\frac{8}{3},-\frac{5}{3},w\right);\ \forall w\neq -5$$

Gabarito: $\boldsymbol{(x,y,z,w)=\left(\frac{31}{3}+w,-\frac{8}{3},-\frac{5}{3},w\right);\forall w\neq -5}$

---

40. (ITA/2006)

A condição para que as constantes reais a e b tornem incompatível o sistema linear

$$\begin{cases} x+y+3z=2\\ x+2y+5z=1\\ 2x+2y+az=b\end{cases}$$

é

a) $a-b\neq 2$

b) $a+b=10$

c) $4a-6b=0$

d) $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$

e) $a\cdot b=24$

Comentários

Para que o sistema seja incompatível, ele deve ser impossível, então o determinante da matriz dos coeficientes deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&5\\2&2&a\end{vmatrix}=2a+10+6-12-10-a=a-6=0$$

Então, $a=6$. Substituindo no sistema:

$$\begin{cases} x+y+3z=2\\ x+2y+5z=1\\ 2x+2y+6z=b\end{cases}$$

Da primeira equação, $x=2-y-3z$, substituindo nas outras duas:

$$\begin{cases} y+2z=-1\\ 4=b\end{cases}$$

Logo, para que o sistema seja incompatível, $b\neq 4$. Portanto, $a-b\neq 2$.

Gabarito: “a”

---

41. (ITA/2006)

Seja o sistema linear nas incógnitas x e y, com a e b reais, dado por

$$\begin{cases}(a-b)x-(a+b)y=1\\ (a+b)x+(a-b)y=1\end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:

I. O sistema é possível e indeterminado se $a=b=0$.

II. O sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos.

III. $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^{-1}$, se $a^2 + b^2 \neq 0$.

Então, pode-se afirmar que é (são) verdadeira(s) apenas

a) I

b) II

c) III

d) I e II

e) II e III

Comentários

I) Se $a = b = 0$, substituindo na primeira equação, encontramos $\underbrace{0x - 0y}_{0} = 1$, que é um absurdo, portanto, o item é **FALSO**.

II) O sistema é possível e determinado se $\Delta = (a - b)^2 + (a + b)^2 = a^2 + b^2 \neq 0$.

Sabemos que no conjunto dos reais, temos $a^2 + b^2 \geq 0$. A única possibilidade da soma dos quadrados resultar em zero ocorre quando $a = b = 0$. Portanto, o sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos. Item **VERDADEIRO.**

III) Elevando o sistema dado ao quadrado, temos:

$$\begin{cases} (a^2 - 2ab + b^2)x^2 - 2xy(a^2 - b^2) + (a^2 + 2ab + b^2)y^2 = 1 \\ (a^2 + 2ab + b^2)x^2 + 2xy(a^2 - b^2) + (a^2 - 2ab + b^2)y^2 = 1 \end{cases}$$

Somando as duas equações, temos:

$$2(a^2 + b^2)x^2 + 2(a^2 + b^2)y^2 = 2$$

Como $a^2 + b^2 \neq 0$:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{a^2 + b^2}$$

Logo, o item é VERDADEIRO.

Gabarito: "e"

---

42. (ITA/2005)

Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de

a) R$ 17,50.

b) R$ 16,50.

c) R$12,50.

d) R$ 10,50.

e) R$ 9,50.

Comentários

Sejam os preços: s do sanduíche, x da xícara de café e t do pedaço de torta. Podemos montar o sistema:

$$\begin{cases} 3s + 7x + t = 31{,}5 \\ 4s + 10x + t = 42 \end{cases}$$

Faça, $s + x + t = X$ (consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta):

$$\begin{cases} 2s + 6x + X = 31{,}5\ (I) \\ 3s + 9x + X = 42\ (II) \end{cases}$$

Fazendo: $3 \cdot (I) - 2 \cdot (II)$: $X = 10{,}5$.

Gabarito: “d”

---

43. (ITA/2005)

O sistema linear

$$\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$$

não admite solução se e somente se o número real b for igual a

a) -1.

b) 0.

c) 1.

d) 2.

e) -2.

Comentários

Para o sistema não admitir soluções o seu determinante dos coeficientes deve ser nulo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = b^3 + 1 = 0$$

$$b = -1$$

Contudo, nesse caso, o mesmo ainda pode ser indeterminado, substituindo b no sistema, temos:

$$\begin{cases} -x + y = 1\ (I) \\ -y + z = 1\ (II) \\ x - z = 1\ (III) \end{cases}$$

Fazendo $(II) + (III)$, encontramos:

$$x - y = 2 \Rightarrow -x + y = -2$$

Contudo, de (I), temos $-x+y=1$, que é um absurdo. Logo, o sistema é impossível.

Gabarito: "a"

44. (ITA/2003)

O número de todos os valores de $a \in [0, 2\pi]$, distintos, para os quais o sistema nas incógnitas x, y e z, dado por

$$\begin{cases} -4x + y - 6z = \cos 3a \\ x + 2y - 5z = \text{sen}\, 2a \\ 6x + 3y - 4z = -2\cos a \end{cases}$$

é possível e não-homogêneo, é igual a:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 6

Comentários

Calculando o determinante dos coeficientes para verificar se o sistema é possível, impossível ou indeterminado:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 32 - 18 - 30 + 72 - 60 + 4 = 0$$

Desse modo, o sistema é impossível ou possível indeterminado. Da primeira equação do sistema, temos $y = \cos 3a + 4x + 6z$. Substituindo nas outras duas equações, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 9x + 7z = sen\, 2a - 2\cos 3a \\ 18x + 14z = -2\cos a - 3\cos 3a \end{cases}$$

Para que o sistema seja possível, uma equação deve ser múltipla da outra, assim:

$$\frac{9}{18} = \frac{sen\, 2a - 2\cos 3a}{-2\cos a - 3\cos 3a}$$

$$-2\cos a + \cos 3a = 2sen\, 2a$$

Sabendo que $sen\, 2a = 2sen\, a \cos a$ e $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$, substituindo na equação acima:

$$-2\cos a + 4\cos^3 a - 3\cos a = 4sen\, a\cos a$$

$$\cos a\,(4\cos^2 a - 4sen\, a - 5) = 0$$

$$\cos a\,(4 - 4sen^2 a - 4sen\, a - 5) = 0$$

$$-\cos a\ (4sen^2 a + 4sen\, a + 1) = 0$$

Portanto, as soluções dessa equação são:

$$\cos a = 0 \Rightarrow a = \frac{\pi}{2} \text{ ou } a = \frac{3\pi}{2}$$

ou

$$sen\ a = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{7\pi}{6} \text{ ou } a = \frac{11\pi}{6}$$

É necessário verificar se alguma dessas soluções gera um sistema homogêneo:

Com $a = \pi/2$:

$$\cos\frac{3\pi}{2} = 0\,;\ sen\ \pi = 0;\ \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Nesse caso, o sistema é homogêneo, logo, essa solução **não serve**.

Com $a = 3\pi/2$:

$$\cos\frac{9\pi}{2} = 0;\ sen\ 3\pi = 0;\ \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

Situação semelhante ao caso anterior, logo, essa solução **não serve**.

Com $a = 7\pi/6$:

$$\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$$

Aqui, o sistema é homogêneo. Então, essa solução **serve**.

Com $a = 11\pi/6$:

$$\cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$$

Novamente, encontramos um sistema homogêneo. Então, essa solução **serve**.

Portanto, existem 2 soluções.

Gabarito: "a"

---

45. (ITA/2002)

1. **Mostre que se uma matriz quadrada não-nula A satisfaz a equação**

$A^3 + 3A^2 + 2A = 0\ (1)$

então $(A + I)^3 = A + I$, em que I é a matriz identidade.

2. **Sendo dado que**

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

satisfaz à equação (1) acima, encontre duas matrizes não-nulas B e C tais que $B^3 + C^3 = B + C = A$. Para essas matrizes você garante que o sistema de equações:

$$(B - C)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem solução $(x, y) \neq (0, 0)$? Justifique.

Comentários

1) Temos que $(A+I)^3=(A^3+3A^2+3A+I)$, então:

$$(A+I)^3=(A^3+3A^2+2A+A+I)$$

A parte em negrito acima foi fornecida em (1) pelo enunciado e é igual à matriz nula, então:

$$(A+I)^3=(A+I)$$

2) Temos que:

$$B+C=(A+I)+(-I)=(A+I)^3+(-I)^3$$

Então:

$$B^3+C^3=B+C=(A+I)^3+(-I)^3$$

Fazendo as comparações, pode-se escolher $B=A+I$ e $C=-I$, que satisfazem a sentença dada. Escrevendo B e C:

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$B-C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Daí, $\det(B-C)=0$.

Dado que o sistema $(B-C)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ é homogêneo e possui determinante da matriz dos coeficientes nulo, temos que esse sistema possui infinitas soluções. Consequentemente, admite soluções $(x,y)\neq(0,0)$.

Gabarito: Prova e justificativa.

---

46. (ITA/1999)

A soma de todos os valores de $a\in[0,2\pi[$ que tornam o sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x\,\mathrm{sen}\,a+y\cos a+z(2\,\mathrm{sen}\,a+\cos a)=0 \\ x\,sen^2 a+y\cos^2 a+z\left(1+3\,sen^2 a+2\,sen(2a)\right)=0\end{cases}$$

possível e indeterminado é:

a) 5π

b) 4π

c) 3π

d) 2π

e) π

Comentários

Calculando o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ sen\ a & \cos a & 2sen\ a + \cos a \\ sen^2 a & \cos^2 a & 1 + 3sen^2 a + 2sen(2a) \end{vmatrix}$$

Note que a primeira e a segunda coluna lembram a matriz de Vandermonde (linhas em PG). Vamos analisar a terceira coluna, reescrevendo o elemento a_{33}:

$$a_{33} = 1 + 3sen^2 a + 2sen(2a) = 4sen^2 a + \cos^2 a + 4sen\ a \cos a = (2sen\ a + \cos a)^2$$

Assim, o determinante a se calcular é de uma matriz de Vandermonde. Portanto, das propriedades dessa matriz, o determinante é dado por:

$$\Delta = (\cos a - sen\ a)(2sen\ a + \cos a - \cos a)(2sen\ a + \cos a - sen\ a) = 0$$

$$(\cos a - sen\ a)(2sen\ a)(sen\ a + \cos a) = 0$$

Dividindo em casos e sabendo que $a \in [0, 2\pi[$:

i) $\cos a - sen\ a = 0$:

$$\cos a = sen\ a$$

$$a = \frac{\pi}{4}\ ou\ a = \frac{5\pi}{4}$$

ii) $sen\ a = 0$:

$$a = 0\ ou\ a = \pi$$

iii) $sena + cosa = 0$:

$$\cos a = -sen\ a$$

$$a = \frac{3\pi}{4}\ ou\ a = \frac{7\pi}{4}$$

Portanto, as soluções são:

$$a \in \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

Então, soma desses valores é 5π.

Gabarito: “a”

---

47. (ITA/1998)

Seja $a, b \in \mathbb{R}$. Considere os sistemas lineares em x, y e z:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \\ -2y + z = a \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x - by + 3z = 0 \end{cases}$$

Se ambos admitem infinitas soluções reais, então:

a) $\frac{a}{b} = 11$

b) $\frac{b}{a} = 22$

c) $ab = \frac{1}{4}$

d) $ab = 22$

e) $ab = 0$

Comentários

No primeiro sistema, da primeira equação, podemos escrever:

$$x = z - y$$

Substituindo nas outras duas:

$$\begin{cases} -4y + 2z = 1 \\ -2y + z = a \end{cases}$$

Contudo, como o sistema admite infinitas soluções, ele é possível e indeterminado, ou seja, uma equação acima deve ser múltipla da outra. Então:

$$\frac{-4}{-2} = \frac{1}{a}$$

$$a = \frac{1}{2}$$

No segundo sistema, para que ele admita infinitas soluções o determinante da matriz dos coeficientes deve ser nulo, logo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -b & 3 \end{vmatrix} = 6 + 2 - b + 3 = -b + 11 = 0$$

Logo, $b = 11$. Então:

$$\frac{b}{a} = \frac{11}{\frac{1}{2}} = 22$$

Gabarito: "b"

---

48. (ITA/1997)

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ com $a^2 = b^2 + c^2$. Se x, y e z satisfazem o sistema

$$\begin{cases} c\cos y + b\cos z = a \\ c\cos x + a\cos z = b \\ b\cos x + a\cos y = c \end{cases}$$

Então $\cos x + \cos y + \cos z$ é igual a

a) $\frac{a-b}{c}$

b) $\frac{a+b}{c}$

c) $\frac{b+c}{a}$

d) $\frac{a+b}{b}$

e) $\frac{b^2+c^2}{a}$

Comentários

Podemos resolver esse problema de 2 modos, veja:

Método 1) Substituição

Da primeira equação:

$$\cos y = \frac{(a - b\cos z)}{c}\ (I)$$

Substituindo (I) na terceira:

$$b\cos x + \frac{a}{c}(a - b\cos z) = c$$

$$\cos x = \frac{c - \frac{a}{c}(a - b\cos z)}{b}\ (II)$$

Substituindo (II) na segunda:

$$\frac{c}{b}\left(c - \frac{a}{c}(a - b\cos z)\right) + a\cos z = b$$

$$\frac{ab}{c}\cos z + \frac{c^2}{c} - \frac{a^2}{c} + \frac{ab}{c}\cos z = \frac{b^2}{c}$$

$$2ab\cos z = b^2 + a^2 - c^2 = 2b^2$$

$$\cos z = \frac{b}{a}$$

Substituindo o valor de $\cos z$ em (I):

$$\cos y = \frac{a - \frac{b^2}{a}}{c} = \frac{\overbrace{a^2 - b^2}^{c^2}}{ac} = \frac{c}{a}$$

Substituindo $\cos z$ em (II):

$$\cos x = \frac{c - \frac{a}{c}\overbrace{\left(a - \frac{b^2}{a}\right)}^{c^2/a}}{b} = 0$$

Portanto:

$$\cos x + \cos y + \cos z = \frac{b + c}{a}$$

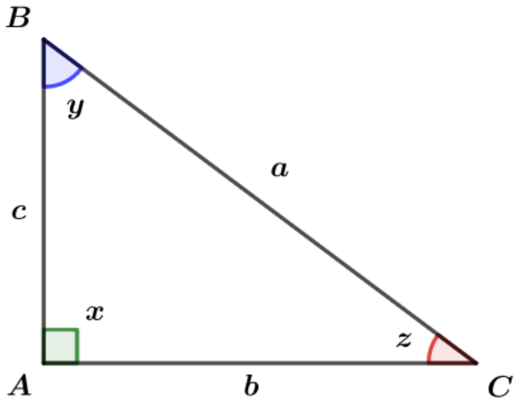
Método 2) Visão geométrica

O enunciado afirma que $a^2 = b^2 + c^2$, essa equação lembra o teorema de Pitágoras. Como a, b, c são números reais positivos, podemos imaginar um triângulo retângulo de lados a, b, c. Vamos analisar o sistema dado.

Dividindo as equações do sistema por a:

$$\begin{cases} c\cos y + b\cos z = a \\ c\cos x + a\cos z = b \\ b\cos x + a\cos y = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a}\cos y + \frac{b}{a}\cos z = 1 \\ \frac{c}{a}\cos x + \frac{a}{a}\cos z = \frac{b}{a} \\ \frac{b}{a}\cos x + \frac{a}{a}\cos y = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{a}\cos y + \frac{b}{a}\cos z = 1 \\ \frac{c}{a}\cos x + \cos z = \frac{b}{a} \\ \frac{b}{a}\cos x + \cos y = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Agora, note o seguinte triângulo retângulo:



Nesse triângulo, temos:

$$\cos x = \cos 90° = 0$$

$$\cos y = \frac{c}{a}$$

$$\cos z = \frac{b}{a}$$

Substituindo os valores dos cossenos do triângulo no sistema, obtemos:

$$\begin{cases} \frac{c}{a}\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}\right) = 1 \\ \frac{c}{a}(0) + \left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b}{a} \\ \frac{b}{a}(0) + \left(\frac{c}{a}\right) = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{c^2 + b^2}{a^2} = 1 (Teorema\ de\ Pitágoras) \\ \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \\ \frac{c}{a} = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Todas as equações são verdadeiras, logo, x, y, z do sistema são os ângulos internos do triângulo retângulo acima. Portanto:

$$\cos x + \cos y + \cos z = \frac{b + c}{a}$$

Solução mais elegante, não? Sempre que puder, use sua criatividade para enxergar outros métodos de resolução. Eles vão ajudar você a ganhar tempo na prova!

Gabarito: “c”

49. (ITA/1997)

A sequência (a_1, a_2, a_3, a_4) é uma progressão geométrica de razão $q \in \mathbb{R}^*$ com $q \neq 1$ e $a_1 \neq 0$. Com relação ao sistema

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = c \\ a_3x + a_4y = d \end{cases}$$

podemos afirmar que

a) é impossível para $c, d \in [-1, 1]$.

b) é possível e determinado somente se $c = d$.

c) é indeterminado quaisquer que sejam $c, d \in \mathbb{R}$.

d) é impossível quaisquer que sejam $c, d \in \mathbb{R}^*$.

e) é indeterminado somente se $d = cq^2$.

Comentários

Como a sequência é uma PG, podemos escrever:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a, aq, aq^2, aq^3)$$

A matriz dos coeficientes do sistema é:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & aq \\ aq^2 & aq^3 \end{vmatrix} = a^2q^3 - a^2q^3 = 0$$

Então, o sistema é impossível ou indeterminado. Reescrevendo o sistema:

$$\begin{cases} ax + aqy = c \\ aq^2x + aq^3y = d \end{cases}$$

Se o sistema for indeterminado, uma equação deve ser múltipla da outra, então:

$$\frac{a}{aq^2} = \frac{c}{d}$$

$$\Rightarrow d = cq^2$$

Então, se $d = cq^2$, temos um sistema possível e indeterminado. Além disso, caso $d \neq cq^2$, o sistema é impossível. Portanto, a alternativa correta é o item "e".

Gabarito: "e"

---

50. (ITA/1996)

Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 quatro números reais (com $a_1 \neq 0$), formando nessa ordem uma progressão geométrica. Então, o sistema em x e y

$$\begin{cases} a_1x + a_3y = 1 \\ a_1a_2x + a_1a_4y = a_2 \end{cases}$$

é um sistema

a) impossível.

b) possível determinado.

c) possível indeterminado.

d) possível determinado apenas para $a_1 > 1$.

e) possível determinado apenas para $a_1 < -1$.

Comentários

Podemos escrever $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a, aq, aq^2, aq^3)$. Reescrevendo o sistema:

$$\begin{cases} ax + aq^2y = 1 \\ a^2qx + a^2q^3 = aq \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + aq^2y = 1 \\ ax + aq^2y = 1 \end{cases}$$

Então, como as duas equações do sistema são iguais, o sistema é possível e indeterminado.

Gabarito: "c"

---

51. (ITA/1996)

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$ e considere a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} \log_a(3a) & \log_{10}(3a)^2 \\ \log_a\left(\frac{1}{a}\right) & -\log_a(a) \\ \log_a(1) & \log_{10}(1) \end{bmatrix}$$

Para que a característica de A seja máxima, o valor de a deve ser tal que:

a) $a \neq 10$ e $a \neq \frac{1}{3}$

b) $a \neq \sqrt{10}$ e $a \neq \frac{1}{3}$

c) $a \neq 5$ e $a \neq 10$

d) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{3}$

e) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{10}$

Comentários

Reescrevendo a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \log_a(3a) & \log_{10}(3a)^2 \\ \log_a\left(\frac{1}{a}\right) & -\log_a(a) \\ \log_a(1) & \log_{10}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \log_a(3a) & 2\log_{10} 3a \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a terceira linha é nula, a maior característica possível é 2. Vamos analisar o determinante da matriz formada pela primeira e segunda linha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \log_a 3a & 2\log_{10} 3a \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -\log_a 3a + 2\log 3a$$

Visando a característica máxima, o determinante acima não pode ser nulo, então:

$$2\log 3a - \log_a 3a \neq 0$$

$$2\log 3a - \frac{\log 3a}{\log a} \neq 0$$

$$\log 3a\left(2-\frac{1}{\log a}\right)\neq 0$$

No entanto, a igualdade ocorre se $\log 3a = 0$:

$$\log 3a = 0 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

ou

$$2-\frac{1}{\log a} = 0 \Rightarrow 2\log a = 1 \Rightarrow a = \sqrt{10}$$

Portanto, para que tenhamos a característica máxima, devemos ter:

$$a \neq \frac{1}{3} \text{ e } a \neq \sqrt{10}$$

Gabarito: "b"

---

52. (ITA/1995)

Se S é o conjunto dos valores de a para os quais o sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+(\log_3 a)^2 y + z = 0 \\ 2x+2y+\left(\log_3 \frac{27}{a}\right)z = 0 \end{cases}$$

é indeterminado, então:

a) $S \subset [-3, 3]$

b) S **é vazio**

c) $S \subset [2, 4]$

d) $S \subset [1, 3]$

e) $S \subset [0, 1]$

Comentários

O sistema é indeterminado se o determinante dos coeficientes é nulo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & (\log_3 a)^2 & 1 \\ 2 & 2 & 3-\log_3 a \end{vmatrix} = 0$$

Seja $\log_3 a = x$, então, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^2 & 1 \\ 2 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + x - 1 = 0$$

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

$$x^3 + 1 = x(x+1)$$

$$(x+1)(x^2-x+1) = x(x+1)$$

$$(x+1)(x^2-x+1-x)=0$$
$$(x+1)(x^2-2x+1)=0$$
$$\Rightarrow (x+1)(x-1)^2=0$$

Assim, as soluções dessa equação são:

$$x=-1\Rightarrow \log_3 a=-1\Rightarrow a=3^{-1}\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$
$$x=1\Rightarrow \log_3 a=1\Rightarrow a=3$$

Portanto, as soluções são dadas por:

$$S=\left\{\frac{1}{3},3\right\}\subset[-3,3]$$

Gabarito: "a"

---

53. (IME/2019)

Dadas as funções definidas nos reais $\mathbb{R}$:

$\boldsymbol{f_1(x)=e^x, f_2(x)=sen(x), f_3(x)=\cos(x), f_4(x)=sen(2x)}$ **e** $\boldsymbol{f_5(x)=e^{-x}}$**.**

Mostre que existe uma única solução $\boldsymbol{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5}$, tal que:

$\boldsymbol{a_1f_1(x)+a_2f_2(x)+a_3f_3(x)+a_4f_4(x)+a_5f_5(x)}$ **seja a função constante nula, onde $\boldsymbol{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\in\mathbb{R}}$.**

Comentários

Seja $g(x)=a_1e^x+a_2sen(x)+a_3\cos(x)+a_4sen(2x)+a_5e^{-x}$, tal que $g(x)=0,\forall x\in\mathbb{R}$. Para mostrar que a função g possui uma única solução a_1,a_2,a_3,a_4,a_5, podemos criar um sistema linear com essas variáveis e provar que o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero. Como temos 5 incógnitas (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5), devemos encontrar 5 equações. Vamos obter as equações para $x\in\left\{0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\pi,2\pi\right\}$:

$$\begin{cases} g(0)=0\\ g\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\\ g(\pi)=0\\ g(2\pi)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a_1+a_3+a_5=0\\ a_1e^{\frac{\pi}{4}}+\frac{\sqrt{2}}{2}a_2+\frac{\sqrt{2}}{2}a_3+a_4+a_5e^{-\frac{\pi}{4}}=0\\ a_1e^{\frac{\pi}{2}}+a_2+a_5e^{-\frac{\pi}{2}}=0\\ a_1e^{\pi}-a_3+a_5e^{-\pi}=0\\ a_1e^{2\pi}+a_3+a_5e^{-2\pi}=0\end{cases}$$

Esse é um sistema linear homogêneo, vamos calcular o valor do determinante da matriz dos coeficientes:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ e^{\frac{\pi}{4}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & e^{-\frac{\pi}{4}}\\ e^{\frac{\pi}{2}} & 1 & 0 & 0 & e^{-\frac{\pi}{2}}\\ e^{\pi} & 0 & -1 & 0 & e^{-\pi}\\ e^{2\pi} & 0 & 1 & 0 & e^{-2\pi}\end{vmatrix}$$

*Observação: Poderíamos ter calculado a equação para $x = 3\pi/2$ no lugar de $x = \pi/4$, mas isso resultaria em uma matriz com a coluna do coeficiente a_4 nula e, consequentemente, um determinante nulo.

Aplicando o teorema de Laplace na quarta coluna, obtemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e^{\frac{\pi}{4}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & e^{-\frac{\pi}{4}} \\ e^{\frac{\pi}{2}} & 1 & 0 & 0 & e^{-\frac{\pi}{2}} \\ e^{\pi} & 0 & -1 & 0 & e^{-\pi} \\ e^{2\pi} & 0 & 1 & 0 & e^{-2\pi} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ e^{\frac{\pi}{2}} & 1 & 0 & e^{-\frac{\pi}{2}} \\ e^{\pi} & 0 & -1 & e^{-\pi} \\ e^{2\pi} & 0 & 1 & e^{-2\pi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ e^{\frac{\pi}{2}} & 1 & 0 & e^{-\frac{\pi}{2}} \\ e^{\pi} & 0 & -1 & e^{-\pi} \\ e^{2\pi} & 0 & 1 & e^{-2\pi} \end{vmatrix}$$

Laplace na segunda coluna:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{\pi} & -1 & e^{-\pi} \\ e^{2\pi} & 1 & e^{-2\pi} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = -e^{-2\pi} + e^{\pi} + e^{\pi} + e^{2\pi} - e^{-\pi} - e^{-\pi}$$

$$\Rightarrow \Delta = \underbrace{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}_{(e^{\pi}+e^{-\pi})(e^{\pi}-e^{-\pi})} + 2(e^{\pi} - e^{-\pi})$$

$$\Rightarrow \Delta = \Big(\underbrace{e^{\pi} - e^{-\pi}}_{>0}\Big)\Big(\underbrace{e^{\pi} + e^{-\pi} + 2}_{>0}\Big) > 0$$

O determinante é diferente de zero e, portanto, o sistema é possível e determinado. Como o sistema é linear homogêneo, a única solução é a trivial, isto é, $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

Gabarito: Demonstração

---

54. (IME/2018)

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} k & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, com k real.

Determine a faixa de valores de k para que exista uma matriz de números reais P tal que as condições abaixo sejam atendidas simultaneamente:

a) $A^T P + PA = I$ em que A^T é a transposta da matriz A e I é a matriz identidade;

b) P seja simétrica;

c) $p_{11} > 0$, em que p_{11} é o elemento da linha 1 e coluna 1 de P; e

d) $|P| > 0$, em que $|P|$ é o determinante da matriz P.

Comentários

Pela condição b), como P é simétrica, podemos escrever:

$$P = P^T \Rightarrow P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Pela condição a), temos:

$$A^T P + PA = I$$

$$\begin{bmatrix} k & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2ka + 8b & kb + 4c - 3a + 2b \\ -3a + 2b + kb + 4c & -6b + 4c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualando os termos, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2ka + 8b = 1 \\ -3a + (k+2)b + 4c = 0 \\ -6b + 4c = 1 \end{cases}$$

Da terceira equação, temos $4c = 6b + 1$. Substituindo essa relação na segunda equação, obtemos:

$$\begin{cases} 2ka + 8b = 1 \\ -3a + (k+8)b + 1 = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação:

$$a = \frac{(k+8)b + 1}{3}$$

Substituindo na primeira:

$$\frac{2k(k+8)b + 2k}{3} + 8b = 1$$

$$2k^2b + 16kb + 2k + 24b = 3$$

$$b(2k^2 + 16k + 24) = 3 - 2k$$

$$\boxed{b = \frac{3 - 2k}{2k^2 + 16k + 24}}$$

$$c = \frac{6b + 1}{4} = \frac{6\left(\frac{3 - 2k}{2k^2 + 16k + 24}\right) + 1}{4} = \frac{2k^2 + 4k + 42}{4(2k^2 + 16 + 24)}$$

$$\boxed{c = \frac{k^2 + 2k + 21}{2(2k^2 + 16k + 24)}}$$

Então:

$$a = \frac{\frac{(k+8)(3-2k)}{2k^2 + 16k + 24} + 1}{3} = \frac{-2k^2 - 13k + 24 + 2k^2 + 16k + 24}{3(2k^2 + 16k + 24)}$$

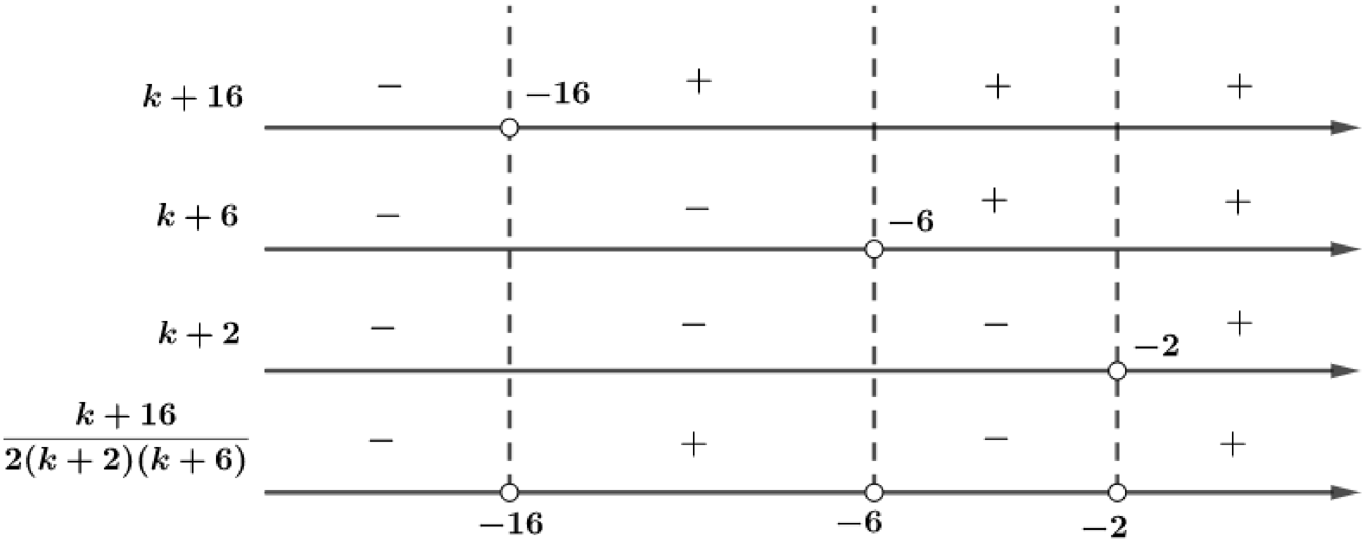
$$\boxed{a = \frac{k + 16}{2k^2 + 16k + 24}}$$

Pela condição c), devemos ter $a > 0$:

$$a = \frac{k+16}{2k^2+16k+24} > 0$$

Fatorando o denominador e fazendo o estudo do sinal:

$$\Rightarrow \frac{k+16}{2(k+2)(k+6)} > 0$$



Portanto, para $a > 0$, devemos ter:

$$\boxed{-16 < k < -6 \; ou \; k > -2}$$

Por último, da condição d), temos:

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2 > 0$$

Substituindo os valores de a, b e c:

$$\frac{k+16}{2k^2+16k+24} \cdot \frac{k^2+2k+21}{2(2k^2+16k+24)} - \frac{(3-2k)^2}{(2k^2+16k+24)^2} > 0$$

$$\frac{k^3+2k^2+21k+16k^2+32k+336}{8(k+2)^2(k+6)^2} - \frac{9-12k+4k^2}{4(k+2)^2(k+6)^2} > 0$$

$$\frac{k^3+18k^2+53k+336-(18-24k+8k^2)}{8(k+2)^2(k+6)^2} > 0$$

$$\frac{k^3+10k^2+77k+318}{(k+2)^2(k+6)^2} > 0$$

Como o denominador é sempre positivo e diferente de zero para o intervalo que encontramos, podemos analisar apenas o numerador:

$$k^3+10k^2+77k+318 > 0$$

Fazendo o teste das raízes racionais, podemos ver que $k = -6$ é uma raiz da equação polinomial $p(k) = k^3 + 10k^2 + 77k + 318$. Usando o algoritmo de Briot-Ruffini, podemos simplificá-lo:

-6	1	10	77	318
	1	4	53	0

*Não se preocupe se você não entendeu esses passos, na aula de polinômios veremos detalhadamente cada um desses artifícios.

Desse modo, a inequação pode ser escrita como:

$$(k+6)(k^2+4k+53) > 0$$

Vamos verificar o discriminante da expressão quadrática:

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 53 \cdot 1 = -196 < 0$$

Portanto, $k^2 + 4k + 53 > 0$ para qualquer valor de k real.

Assim, devemos ter:

$$k + 6 > 0 \Rightarrow k > -6$$

Fazendo a intersecção das condições encontradas, concluímos para $k \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{k \in (-2, +\infty)}$$

Gabarito: $\{\boldsymbol{k} \in \mathbb{R} \mid \boldsymbol{k} > -\mathbf{2}\}$

---

55. (IME/2018)

Seja o seguinte sistema de equações, em que s é um número real:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - sx_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ sx_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Escolha uma faixa de valores de s em que as soluções do sistema são todas negativas.

a) $s < -2$

b) $-2 < s < 0$

c) $0 < s < 1$

d) $1 < s < 2$

e) $s > 2$

Comentários

Da segunda equação, temos $x_2 = 1 + 2x_1 - x_3$. Substituindo nas outras duas:

$$\begin{cases} 3x_1 + 1 - (1+s)x_3 = 0 \\ (s-4)x_1 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Da primeira equação:

$$x_1 = \frac{(1+s)x_3 - 1}{3}$$

Substituindo na outra:

$$\frac{(s-4)(1+s)x_3 - (s-4)}{3} + 2x_3 = 2$$

$$(s-4)(s+1)x_3 + 6x_3 = s+2$$

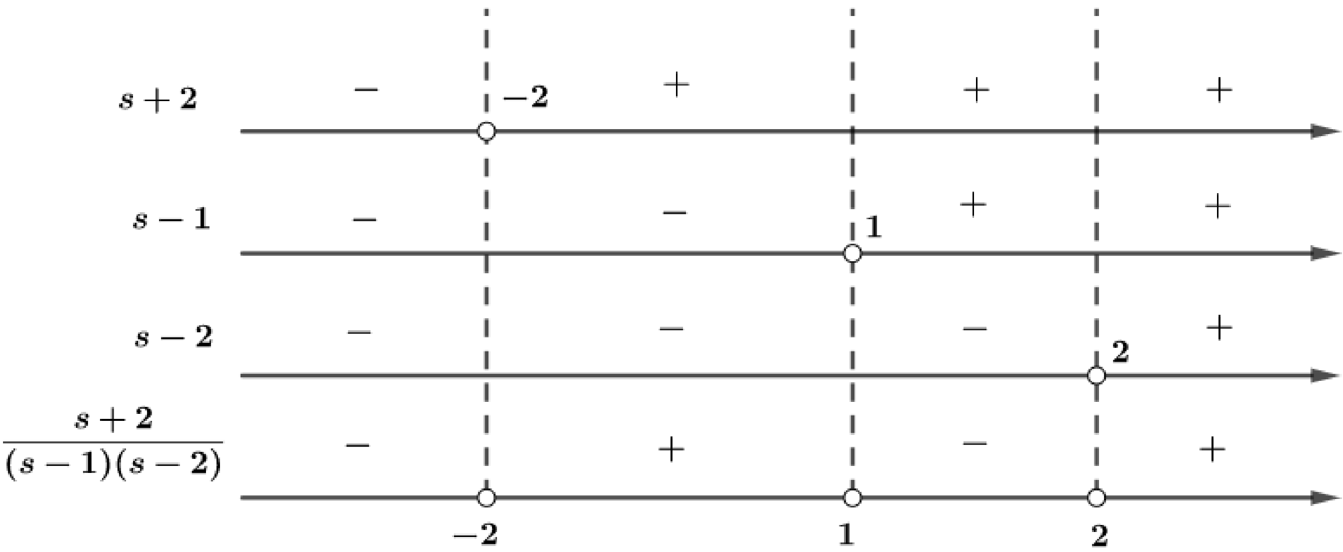
$$(s^2 - 3s + 2)x_3 = s+2$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{s+2}{(s-1)(s-2)}$$

Como as soluções do sistema são negativas e não-nulas, devemos ter

$$\frac{s+2}{(s-1)(s-2)} < 0$$

Fazendo o estudo do sinal:



Portanto:

$$\boxed{s_3 \in (-\infty, 2) \cup (1, 2)}$$

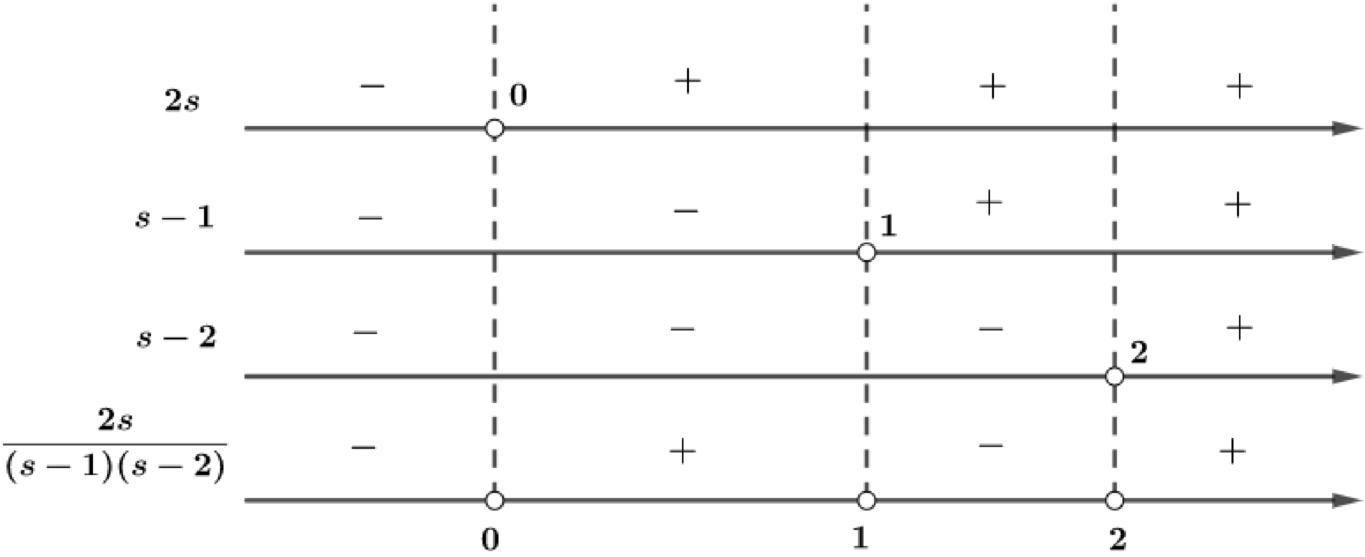
Substituindo x_3 na equação de x_1:

$$x_1 = \frac{(1+s)x_3 - 1}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{(1+s)\left(\frac{s+2}{(s-1)(s-2)}\right) - 1}{3}$$

$$x_1 = \frac{(s^2+3s+2) - (s^2-3s+2)}{3(s-1)(s-2)}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2s}{(s-1)(s-2)} < 0$$

Fazendo o estudo do sinal:



Então:

$$\boxed{s_1 \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)}$$

Substituindo x_1 e x_2 em x_3:

$$x_2 = 1 + 2x_1 - x_3$$

$$x_2 = 1 + 2\left(\frac{2s}{(s-1)(s-2)}\right) - \left(\frac{s+2}{(s-1)(s-2)}\right)$$

$$x_2 = \frac{(s^2 - 3s + 2) + 4s - s - 2}{(s-1)(s-2)}$$

$$x_2 = \frac{s^2}{(s-1)(s-2)} < 0$$

Como $s^2 > 0, \forall s \in \mathbb{R}$, devemos ter:

$$(s-1)(s-2) < 0$$

Logo:

$$\boxed{s_2 \in (1, 2)}$$

Por fim, a solução é

$$s_1 \cap s_2 \cap s_3 = (1,2)$$

Gabarito: "d"

---

56. (IME/2017)

Classifique o sistema abaixo como determinado, possível indeterminado e impossível de acordo com os valores reais de m.

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = m + 1 \\ 2x + my + 2z = m^2 + 2 \\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z = m^3 + 3 \end{cases}$$

Comentários

Para fazer as análises pedidas, devemos calcular o determinante da matriz dos coeficientes,

$$\Delta = \begin{vmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & (m+1) \end{vmatrix}$$

$$= (m-2)m(m+1) - 4m(m+1) - 8m + 2m^2 - 4(m+1) - 4(m+1)(m-2)$$

$$\Delta = m^3 - 3m^2 + 2m = m(m^2 - 3m + 2) = m(m-1)(m-2)$$

I) Para que o sistema seja possível e determinado, Δ não pode ser nulo, então,

$$m \in \mathbb{R} - \{0,1,2\}$$

II) Para que o sistema seja possível e indeterminado, $\Delta = 0$, além disso, podemos simplificar o sistema substituindo $z = (m-2)x + 2y - (m+1)$, obtido na primeira equação,

$$\begin{cases} (2m-2)x + (4+m)y = m^2 + 2m + 4 \\ (m^2 + m - 2)x + 4(m+1)y = m^3 + m^2 + 2m + 4 \end{cases}$$

Assim, uma equação precisa ser múltipla da outra, portanto,

$$\frac{2m-2}{m^2+m-2} = \frac{4+m}{4(m+1)} = \frac{m^2+2m+4}{m^3+m^2+2m+4}$$

Para $m = 0$,

$$\frac{-2}{-2} = \frac{4}{4} = \frac{4}{4}$$

Portanto, com $\Delta = 0$ e uma equação sendo múltipla da outra, o sistema é possível e indeterminado para $m = 0$.

Para $m = 1$:

$$\frac{0}{0} = \frac{5}{8} = \frac{7}{8}$$

A igualdade acima é um absurdo. Portanto, para $m = 1$ o sistema é impossível.

Para $m = 2$:

$$\frac{2}{4} = \frac{6}{12} = \frac{12}{20}$$

A igualdade acima é um absurdo. Portanto, para $m = 2$ o sistema é impossível.

Resumindo:

i) Possível e Determinado se $m \in \mathbb{R} - \{0,1,2\}$

ii) Possível e Indeterminado se $m = 0$

iii) Impossível se $m = 1$ ou $m = 2$

Gabarito: i) Possível e Determinado se $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R} - \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ ii) Possível e Indeterminado se $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$ iii) Impossível se $\boldsymbol{m} = \mathbf{1}$ ou $\boldsymbol{m} = \mathbf{2}$

57. (IME/2010)

Seja o sistema $\begin{cases} \boldsymbol{tg(x)tg(y-z)=a} \\ \boldsymbol{tg(y)tg(z-x)=b} \\ \boldsymbol{tg(z)tg(x-y)=c} \end{cases}$**, onde** $\boldsymbol{a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}}$**.**

Determine as condições que a, b **e** c **devem satisfazer para que o sistema admita pelo menos uma solução.**

Comentários

Sabendo que $tg(a-b)=\frac{tga-tgb}{1+tga\,tgb}$, podemos aplicá-la ao sistema:

$$\begin{cases} tg(x)\dfrac{tgy-tgz}{1+tgy\,tgz}=a \\ tg(y)\dfrac{tgz-tgx}{1+tgz\,tgx}=b \\ tg(z)\dfrac{tgx-tgy}{1+tgx\,tgy}=c \end{cases}$$

Analisando a condição de existência, temos:

$$tgy\,tgz\neq-1$$

$$tgz\,tgx\neq-1$$

$$tgx\,tgy\neq-1$$

O sistema pode ser escrito como:

$$\begin{cases} tgx\,tgy-tgx\,tgz=(1+tgy\,tgz)a \\ tgy\,tgz-tgy\,tgx=(1+tgz\,tgx)b \\ tgz\,tgx-tgz\,tgy=(1+tgx\,tgy)c \end{cases}$$

Fazendo $tgx\,tgy=p$, $tgx\,tgz=q$ e $tgy\,tgz=r$, com $p,q,r\neq-1$, encontramos um sistema de três variáveis:

$$\begin{cases} p-q=a+ar \\ r-p=b+bq \\ q-r=c+cp \end{cases}$$

$$\begin{cases} p-q-ar=a \\ -p-bq+r=b \\ -cp+q-r=c \end{cases}$$

Assim, podemos calcular o determinante dos coeficientes do sistema acima:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ -1 & -b & 1 \\ -c & 1 & -1 \end{vmatrix}=b+c+a+abc-1+1=a+b+c+abc$$

Se $\Delta\neq0$, podemos usar o teorema de Cramer para calcular o valor de cada variável p,q,r:

$$\Delta_p=\begin{vmatrix} a & -1 & -a \\ b & -b & 1 \\ c & 1 & -1 \end{vmatrix}=ab-c-ab-abc-a-b=-a-b-c-abc$$

Então:

$$p = \frac{\Delta_p}{\Delta} = \frac{-a-b-c-abc}{a+b+c+abc} = -1$$

Como $p \neq -1$, essa solução não serve.

Dessa forma, devemos analisar o caso em que o determinante é nulo:

$$a+b+c+abc=0$$

Para que o sistema possua solução, devemos transformar o sistema de três equações em duas e verificar se uma é múltipla da outra. Usando a terceira equação, encontramos:

$$q = c + r + cp$$

Substituindo nas outras:

$$\begin{cases} p-(c+r+cp)-q-ar=a \\ -p-b(c+r+cp)+r=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-c)p-(1+a)r=a+c \\ -(1+bc)p+(1-b)r=b+bc \end{cases}$$

Assim, para o sistema admitir solução, devemos ter:

$$\frac{1-c}{-1-bc} = \frac{-1-a}{1-b} = \frac{a+c}{b+bc} \quad (I)$$

Para que o primeiro termo de (I) seja igual ao segundo:

$$\frac{1-c}{-1-bc} = \frac{-1-a}{1-b}$$

$$1-b-c+bc = 1+bc+a+abc$$

$$a+b+c+abc=0$$

Para que o segundo termo seja igual ao terceiro:

$$\frac{-1-a}{1-b} = \frac{a+c}{b+bc}$$

$$-b-bc-ab-abc = a+c-ab-bc$$

$$a+b+c+abc=0$$

Portanto, a igualdade (I) é válida. Assim, se $\Delta = a+b+c+abc = 0$, temos um sistema possível e indeterminado.

Gabarito: $\boldsymbol{a+b+c+abc=0}$

---

58. (IME/2009)

Seja o sistema de equações lineares dadas por

$$\begin{cases} 6y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=10 \\ y_1+6y_2+y_3+y_4+y_5=20 \\ y_1+y_2+6y_3+y_4+y_5=40 \\ y_1+y_2+y_3+6y_4+y_5=80 \\ y_1+y_2+y_3+y_4+6y_5=160 \end{cases}$$

O valor de $7y_1+3y_5$ é

a) 12

b) 24

c) 36

d) 48

e) 60

Comentários

Somando todas as equações, temos:

$$\begin{array}{c}\begin{cases}6y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10\\ y_1 + 6y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 20\\ y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + y_5 = 40\\ y_1 + y_2 + y_3 + 6y_4 + y_5 = 80\\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 6y_5 = 160\end{cases}\\ \hline 10 \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) = 310\end{array} (+)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 31$$

Substituindo na primeira equação:

$$5y_1 + 31 = 10$$

$$y_1 = -\frac{21}{5}$$

Substituindo o resultado na quinta equação:

$$31 + 5y_5 = 160$$

$$y_5 = \frac{129}{5}$$

Portanto:

$$7y_1 + 3y_5 = 7 \cdot \left(-\frac{21}{5}\right) + 3 \cdot \left(\frac{129}{5}\right) = \frac{-147 + 387}{5}$$

$$7y_1 + 3y_5 = 48$$

Gabarito: "d"

---

59. (IME/2008)

Os elementos da matriz dos coeficientes de um sistema de quatro equações lineares e quatro incógnitas $(x, y, z \text{ e } w)$ são função de quatro constantes a, b, c e d. Determine as relações entre a, b, c e d para que o referido sistema admita uma solução não trivial, sabendo que $CD = -DC$, onde

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

Comentários

Sabendo que $CD = -DC$,temos:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+cw & zb+wd \end{bmatrix} = 0$$

Com isso, podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2ax + cy + bz = 0 \\ cx + (d+a)z + cw = 0 \\ bx + (a+d)y + bw = 0 \\ cy + bz + 2dw = 0 \end{cases}$$

Assim, obtemos um sistema linear homogêneo e sabemos que ele sempre admite uma solução trivial. Para que um sistema homogêneo admita uma solução não trivial, ou seja, uma solução $(x, y, z, w) \neq (0, 0, 0, 0)$, ele deve admitir infinitas soluções. Logo, o determinante dos seus coeficientes deve ser nulo. Portanto:

$$D = \begin{vmatrix} 2a & c & b & 0 \\ c & 0 & d+a & c \\ b & a+d & 0 & b \\ 0 & c & b & 2d \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando Laplace na primeira linha:

$$D = 2a \cdot \begin{vmatrix} 0 & d+a & c \\ a+d & 0 & b \\ c & b & 2d \end{vmatrix} - c \cdot \begin{vmatrix} c & d+a & c \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 2d \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} c & 0 & c \\ b & a+d & b \\ 0 & c & 2d \end{vmatrix}$$

$$D = 2a \cdot (2bc(d+a) - 2d(d+a)^2) - c \cdot \big(-2bd(d+a)\big) + b \cdot (2cd(a+d))$$

$$D = (d+a) \cdot (4abc - 4ad(d+a) + 4bcd)$$

$$D = 4(d+a)\big(bc(a+d) - ad(d+a)\big)$$

$$D = 4(d+a)^2(bc - ad) = 0$$

Portanto:

$$d + a = 0 \rightarrow \boxed{d = -a}$$

Ou:

$$bc - ad = 0 \rightarrow \boxed{bc = ad}$$

Gabarito: $d = -a$ ou $bc = ad$

---

60. (IME/2007)

Considere o sistema de equações dado por:

$$\begin{cases} x + y + 2z = b_1 \\ 2x - y + 3z = b_2 \\ 5x - y + az = b_3 \end{cases}$$

Sendo b_1, b_2 e b_3 valores reais quaisquer, a condição para que o sistema possua solução única é:

a) $a = 0$

b) $a \neq 2$

c) $\boldsymbol{a \neq 8}$

d) $\boldsymbol{a \neq b_1 + b_2 - b_3}$

e) $\boldsymbol{a = 2b_1 - b_2 + 3b_3}$

Comentários

Para que o sistema possua solução única, o sistema deve ser SPD e, portanto, o determinante dos coeficientes deve ser diferente de zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix} \neq 0$$

$$-a - 4 + 15 + 10 + 3 - 2a \neq 0$$

$$-3a + 24 \neq 0$$

Assim:

$$a \neq 8$$

Gabarito: "c"

---

61. (IME/1999)

Determine α para que seja impossível o sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - 3z = 4} \\ \boldsymbol{3x - y + 5z = 2} \\ \boldsymbol{4x + y + (\alpha^2 - 14)z = \alpha + 2} \end{cases}$$

Comentários

Para que o sistema seja impossível, o determinante dos coeficientes deve ser nulo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & \alpha^2 - 14 \end{vmatrix} = 0$$

Então, temos:

$$-7 \cdot \alpha^2 + 112 = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{112}{7} = 16$$

$$\alpha = \pm 4$$

Portanto, usando o sistema do enunciado, vamos somar a primeira e a segunda linha para obter um sistema equivalente:

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 6 \\ 4x + y + (\alpha^2 - 14)z = \alpha + 2 \end{cases}$$

i) Se $\alpha = 4$:

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 6 \\ 4x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

A segunda equação torna-se equivalente à primeira e, assim, admite infinitas soluções. Portanto, nesse caso, o sistema é possível e indeterminado.

ii) Se $\alpha = -4$:

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 6 \\ 4x + y + 2z = -2 \end{cases}$$

O sistema acima é impossível, pois de acordo com ele deveríamos ter $6 = -2$, o que é um absurdo.

Gabarito: $\boldsymbol{\alpha = -4}$

---

62. (IME/1998)

Resolva e interprete, geometricamente, o sistema matricial abaixo, em função de α e β.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 7 \\ 6 & 8 & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ \beta \end{bmatrix}$$

Comentários

Multiplicando as matrizes, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 5x - 6y + 7z = -8 \\ 6x + 8y + \alpha z = \beta \end{cases}$$

Então, temos três planos. Para resolver e interpretar o sistema, devemos analisar suas soluções.

*Veremos na aula de geometria analítica que as equações da forma $ax + by + cz = d$ determinam um plano no espaço. Não se preocupe se você não entendeu essa parte.

Seja D o determinante dos coeficientes:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -6 & 7 \\ 6 & 8 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$D = 4\alpha + 88$$

Assim, podemos ter $D = 0$ ou $D \neq 0$.

1) Se $D = 0$, temos:

$$4\alpha + 88 = 0$$

$$\alpha = -22$$

Substituindo no sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 5x - 6y + 7z = -8 \\ 6x + 8y - 22z = \beta \end{cases}$$

Da primeira equação, temos:

$$x = -4 + 2y - 3z$$

Substituindo nas outras duas equações:

$$\begin{cases} 4y - 8z = 12 \\ 20y - 40z = \beta + 24 \end{cases}$$

Simplificando as equações:

$$\begin{cases} y - 2z = 3 \\ y - 2z = \dfrac{\beta + 24}{20} \end{cases}$$

Vamos igualar os termos independentes:

$$\frac{\beta + 24}{20} = 3$$

$$\beta = 36$$

Desse modo, temos duas possibilidades:

1.1) Se $\beta = 36$, o sistema é possível e indeterminado. Então, existem infinitas soluções e, portanto, a intersecção entre os planos é uma reta.

1.2) Se $\beta \neq 36$, o sistema é impossível. Então, não existem soluções. Assim, os planos não se intersectam.

2) Se $D \neq 0$, temos:

$$4\alpha + 88 \neq 0$$

$$\alpha \neq -22$$

O sistema é SPD e possui solução única, assim, os planos se intersectam em um único ponto.

Além disso, as soluções do sistema são:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 5x - 6y + 7z = -8 \\ 6x + 8y + \alpha z = \beta \end{cases}$$

Substituindo x da primeira equação nas outras duas equações:

$$\begin{cases} 4y - 8z = 12 \\ 20y + (\alpha - 18)z = \beta + 24 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 5 e subtraindo da segunda, temos:

$$20y - 40z - 20y - (\alpha - 18)z = 60 - \beta - 24$$

$$-(22 + \alpha)z = -(\beta - 36)$$

$$z = \frac{\beta - 36}{22 + \alpha}$$

Substituindo em $4y - 8z = 12$:

$$4y - 8z = 12$$

$$y - 2z = 3$$

$$y = 3 + 2 \cdot \frac{\beta - 36}{22 + \alpha} = \frac{3 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta - 6}{22 + \alpha}$$

Por fim, substituindo x e y na primeira equação do sistema:

$$x - 2y + 3z = -4$$

$$x - 2 \cdot \left(\frac{3 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta - 6}{22 + \alpha}\right) + 3 \cdot \left(\frac{\beta - 36}{22 + \alpha}\right) = -4$$

$$x = \frac{2 \cdot \alpha + \beta + 8}{\alpha + 22}$$

Portanto, as soluções são:

$$x = \frac{2 \cdot \alpha + \beta + 8}{\alpha + 22}$$

$$y = \frac{3 \cdot \alpha + 2 \cdot \beta - 6}{22 + \alpha}$$

$$z = \frac{\beta - 36}{22 + \alpha}$$

Gabarito: $\boldsymbol{x = \frac{2\cdot\alpha+\beta+8}{\alpha+22}\,;\, y = \frac{3\cdot\alpha+2\cdot\beta-6}{22+\alpha}\,;\, z = \frac{\beta-36}{22+\alpha}}$

---

63. (IME/1988)

Determine o valor de a para que o sistema abaixo tenha mais de uma solução e resolva-o neste caso:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

Comentários

Para que o sistema tenha mais de uma solução, o determinante dos coeficientes deve ser nulo:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Então, calculando o determinante, temos:

$$9 + a - 2a + 3 - a^2 - 6 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0$$

Cujas soluções são:

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$a = 2 \text{ ou } a = -3$$

Se $a = -3$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 3 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

Somando a segunda equação com a terceira:

$$3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

Substituindo o valor de x no sistema:

$$\begin{cases} y - z = -\frac{2}{3} \\ 3y - 3z = -\frac{1}{3} \\ -3y + 3z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Assim, podemos resumir o sistema a:

$$\begin{cases} 3y - 3z = -2 \\ 3y - 3z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

O sistema acima diz que $-2 = -\frac{1}{3}$, o que é um absurdo. Logo, o sistema é impossível.

Se $a = 2$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

Da primeira equação, $x = 1 - y + z$, substituindo nas outras:

$$\begin{cases} y + 4z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases} \Rightarrow y + 4z = 1$$

Que possui infinitas soluções. Considerando $z = k$, temos:

$$y = 1 - 4k$$

$$x = 1 - (1 - 4k) + k = 5k$$

Portanto:

$$(x, y, z) = (5k, 1 - 4k, k)$$

Gabarito: $\boldsymbol{a = 2}$ e $\boldsymbol{(x, y, z) = (5k, 1 - 4k, k)}$

11. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final da aula de sistemas lineares. Você deve ter percebido que questões sobre esse tema, normalmente, envolvem discussão de um sistema linear. Com todo esse arsenal de conhecimento que vimos nessa aula, você está pronto para analisar qualquer tipo de sistema linear que encontrar nessas provas.

Lembre-se, o segredo para não esquecer os teoremas é praticar com bastante exercícios. A repetição e prática fará com que você absorva o conhecimento adquirido.

Sempre que você tiver dúvidas, nos procure pelo fórum de dúvidas ou pelas mídias abaixo:

FALE COMIGO

/profvictorso

12. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Steinbruch, Alfredo. Winterle, Paulo. Álgebra linear. 2. ed. Pearson Makron Books, 1987. 583p.

[2] Iezzi, Gelson. Hazzan, Samuel. Fundamentos de Matemática Elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. 8. Ed. Atual, 2013. 282p.

[3] Netto, Sergio Lima. A Matemática no Vestibular do IME. 1 ed. Vestseller, 2011. 696p.

[4] Resende, Jessé Geraldo de. O Teorema de Cayley-Hamilton e as Matrizes Inversas. Disponível em: https://www.uaberta.unisul.br/sgc/downloadArquivoConteudo.processa?ead=8.298373702192266E111520078867309&arquivoId=17487&comunidadeId=1. Acesso em: 05/ago. 2019.